

## Compito n.1

Il candidato discuta sinteticamente uno dei seguenti temi:

1. Induzione elettrostatica, capacità di un conduttore, condensatori.
2. La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo in Meccanica Quantistica ed un suo esempio significativo.

Il candidato risolva tre a scelta dei seguenti esercizi:

1. Si consideri la hamiltoniana

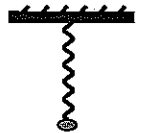
$$H_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ con } E_0 > 0.$$

Si calcoli la correzione all'energia dello stato fondamentale di  $H_0$  nel caso si applichi al sistema la perturbazione

$$V = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } E_0 \gg \lambda > 0.$$

Si confronti il risultato esatto con il valore ottenuto attraverso il calcolo perturbativo al primo ordine in  $\lambda$ .

2. Un punto materiale di massa  $m$  è sospeso, come indicato in figura, ad una molla ideale di massa nulla e lunghezza a riposo  $L$ . Assumendo che la massa  $m$  venga abbandonata con velocità nulla nella posizione in cui la lunghezza della molla è  $5L/4$  e che  $\nu$  sia la frequenza delle oscillazioni proprie del sistema, si determini:
  - a) l'ampiezza delle oscillazioni di  $m$ ,
  - b) la velocità e l'accelerazione di  $m$  all'istante  $t' = T/8$  ( $T$  è il periodo delle oscillazioni).



3. Un solenoide toroidale di raggio medio  $R=5$  cm è costituito da  $N=3100$  spire di raggio  $r=2$  mm ( $r \ll R$ ). Il solenoide è avvolto su un nucleo ferromagnetico di permeabilità magnetica relativa  $\mu_r=400$ . Le spire sono costituite da un filo di rame (resistività  $\rho=1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ) di diametro  $d=0.1$  mm. Il solenoide viene chiuso al tempo  $t=0$  su una batteria di f.e.m.  $\mathcal{E}=10$  V. Trascurando le capacità in gioco, si calcoli l'energia erogata dalla batteria dall'istante iniziale all'istante  $T=10$  ms.
4. Si consideri il processo  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ , utilizzando la legge di conservazione del 4-impulso ricavare la variazione di lunghezza d'onda del fotone incidente su un elettrone fermo in funzione dell'angolo di diffusione.

ed

Be

PR

## Work n.1

Briefly discuss one of the following issues:

1. Electrostatic induction, capacity of a conductor, capacitors.
2. Time dependent perturbation theory in Quantum Mechanics and one relevant example.

Work out three of the following problems:

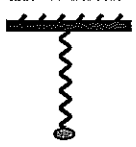
1. Consider the Hamiltonian

$$H_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ with } E_0 > 0.$$

Calculate the correction to the energy of the fundamental state of  $H_0$  when the following perturbation is applied:

$$V = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ with } E_0 \gg \lambda > 0.$$

Compare the exact result with that obtained by means of the perturbative calculation up to the first order in  $\lambda$ .

2. A point-like mass  $m$  is suspended, as shown in figure, to an ideal spring of negligible mass and rest length  $L$ . Assuming that the mass  $m$  is released with zero velocity from the position in which the length of the spring is  $5L/4$  and that  $\nu$  is the proper oscillation frequency of the  system, determine:
  - a) the oscillation amplitude of  $m$ ,
  - b) the velocity and acceleration of  $m$  at time  $t' = T/8$  ( $T$  is the oscillation period).
3. A toroidal solenoid has a mean radius  $R = 5$  cm and consists of  $N = 3100$  coils of radius  $r = 2$  mm ( $r \ll R$ ). The solenoid is wound up a ferromagnetic nucleus with relative permeability  $\mu_r = 400$ . The coils are made of a copper wire (resistivity  $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ) with a diameter  $d = 0.1$  mm. At time  $t = 0$  the solenoid is connected to a battery with e.m.f.  $\mathcal{E} = 10$  V. Neglecting any capacitance, calculate the energy delivered by the battery from  $t = 0$  to  $T = 10$  ms.
4. Consider the process  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ . Using the conservation law of the 4-momentum, evaluate the wavelength shift of a photon colliding onto a resting electron as a function of the diffusion angle.

## Compito n.2

**Il candidato discuta sinteticamente uno dei seguenti temi**

1. Forze conservative e conservazione dell'energia meccanica.
2. Il problema del corpo nero e la sua risoluzione attraverso il modello di Planck.

**Il candidato risolva tre a scelta dei seguenti esercizi:**

1. Si consideri un oscillatore armonico con stato iniziale pari a

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

(dove  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  sono autostati dell'energia). Si determini la quantità  $\Delta x$  in funzione del tempo.

2. In seguito alla caduta sulla Terra di meteoriti provenienti da tutte le direzioni, si forma sulla superficie terrestre uno strato di polvere di spessore  $h = 6$  km. Si assuma  $h \ll R$ , dove  $R = 6380$  km è il raggio della Terra. Indicando con  $D$  e  $d = 2000$  kg/m<sup>3</sup> le densità della Terra e della polvere, rispettivamente, si calcoli la variazione della durata del giorno. ( $M_{\text{earth}} = 6 \times 10^{24}$  kg).

3. Calcolare la capacità di un condensatore sferico di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , riempito di un dielettrico la cui costante dielettrica varia come

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos^2 \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo polare. ( $\epsilon_1 = 2 \epsilon_0$ ,  $R_1 = 1$  cm,  $R_2 = 5$  cm).

4. A un razzo, inizialmente in quiete in un sistema di riferimento inerziale  $\Sigma$ , viene applicata una forza costante di modulo  $f=am$ , ove  $m$  è la massa a riposo del razzo e  $a$  è una costante. Si calcoli la velocità del razzo e lo spazio percorso dopo un tempo  $T$  misurato da un orologio solidale al sistema  $\Sigma$ . ( Si ponga  $a=10$  m/sec<sup>2</sup>,  $T=10^8$  s).



## Work n.2

Briefly discuss one of the following issues:

1. Conservative forces and conservation of the mechanical energy.
2. The black body problem and its resolution through the Plank's model.

Work out three of the following problems:

1. Consider an harmonic oscillator in the initial state:

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

(where  $|0\rangle$  and  $|1\rangle$  are eigenstates of the energy). Evaluate the quantity  $\Delta x$  as a function of time.

2. A layer of dust of thickness  $h = 6$  km is formed by the fall of meteors reaching the earth from all directions. Assume that  $h \ll R$ , where  $R = 6380$  km is the radius of earth. By denoting with  $D$  and  $d = 2000$  kg/m<sup>3</sup> the densities of earth and dust, respectively, calculate the change in the length of the day. ( $M_{\text{earth}} = 6 \times 10^{24}$  kg).

3. Calculate the capacity  $C$  of a spherical condenser of inner radius  $R_1$  and outer radius  $R_2$ , which is filled with a dielectric varying as

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos^2 \theta,$$

where  $\theta$  is the polar angle. ( $\varepsilon_1 = 2 \varepsilon_0$ ,  $R_1 = 1$  cm,  $R_2 = 5$  cm).

4. A constant force  $f=am$  is applied to a rocket initially at rest in an inertial reference frame  $\Sigma$ . The rest mass of the rocket is  $m$  and  $a$  is a constant. Evaluate the speed of the rocket and the distance travelled after a time  $T$  as measured by a clock at rest in the system  $\Sigma$ . (Assume  $a = 10$  m/sec<sup>2</sup>,  $T = 10^8$  s).

### Compito n.3

Il candidato discuta sinteticamente uno dei seguenti temi

1. Secondo principio della termodinamica e entropia.
2. Discutere le trasformazioni di Lorentz (boost) e se ne descrivano alcune conseguenze rilevanti.

Il candidato risolva tre a scelta dei seguenti esercizi:

1. Si considerino le tre matrici di Pauli

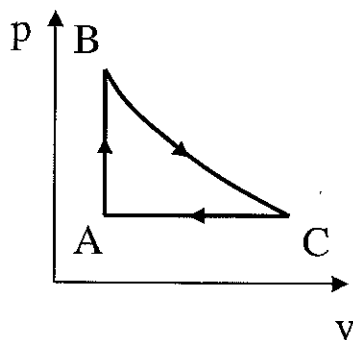
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sia l'hamiltoniana del sistema

$$H = \alpha \sigma_2$$

Calcolare l'evoluto temporale  $|\psi\rangle_t$  dello stato iniziale  $|+\rangle$ , autostato di autovalore +1 di  $\sigma_3$ .  
(Si ponga  $\nu=1$  Hz,  $L=1$  m)

2. Una mole di gas perfetto monoatomico compie il ciclo reversibile mostrato in figura, dove la trasformazione BC è adiabatica. Si calcoli:  
a) il rendimento del ciclo  
b) il rendimento di un ciclo di Carnot svolto tra le due temperature estreme del ciclo precedente.  
(Si assuma  $V_B=1$  m<sup>3</sup>,  $V_C=2$  m<sup>3</sup>).



3. Quale energia deve avere un protone nella collisione con un altro protone fermo nel sistema del laboratorio (SL) affinché l'energia massima disponibile per la creazione di nuove particelle, secondo il processo  $p+p \rightarrow p+p+X$ , sia pari a quella disponibile nel caso in cui i due protoni si urtino nel SL avendo l'uno impulso  $\mathbf{p}$  e l'altro  $-\mathbf{p}$  (Si assuma  $|\mathbf{p}|=100$  GeV/c).
4. Calcolare un'espressione approssimata per la variazione dell'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno dovuta alle dimensioni finite del protone, assumendo che questo sia una sfera uniformemente carica di raggio  $R = 10^{-13}$  cm.

St

ed 107

RF

### Work n.3

Briefly discuss one of the following issues:

1. Entropy and the Second law of thermodynamics.
2. Discuss the Lorentz transformations (boost) and describe some of the relevant consequences.

Work out three of the following problems:

1. Given the Pauli matrices

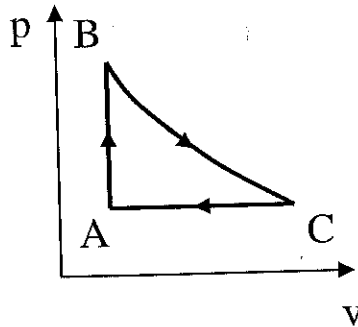
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

consider a system with Hamiltonian:

$$H = \alpha \sigma_2$$

Determine the time evolution  $|\psi\rangle_t$  of the initial state  $|+\rangle$ , the latter being the eigenstate of  $\sigma_3$  with eigenvalue +1. (Consider  $\nu=1$  Hz,  $L=1$  m).

2. One mole of monatomic perfect gas undergoes the reversible cycle shown in the figure, where BC is an adiabatic transformation. Evaluate:
  - a) the thermodynamic cycle efficiency;
  - b) the efficiency of a Carnot machine working between the lowest and highest temperatures of the previous cycle. (Assume  $V_B=1$  m<sup>3</sup>,  $V_C=2$  m<sup>3</sup>).



3. Consider the process  $p+p \rightarrow p+p+X$ , where a proton ( $p$ ) collides with a proton at rest in the laboratory system (LS). Which is the energy of the proton in order that the energy available for the creation of new particles is the same of that available when the two protons collide in the LS, one having momentum  $\mathbf{p}$  and the other  $-\mathbf{p}$ ? (Assume  $|\mathbf{p}|=100$  GeV/c).
4. Calculate an approximate expression for the energy shift of the ground state of the hydrogen atom due to the finite size of the proton, assuming that the proton is a uniformly charged sphere of radius  $R = 10^{-13}$  cm.