

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Teoria della decoerenza indotta dall’ambiente

Relatori:

Prof. Rodolfo Figari

Candidato:

Emanuele Di Maio

Matricola N85000678

A.A. 2016/2017

*Ai miei genitori, a mio fratello e mia sorella, miei primi maestri;
Ai miei amici, miei primi colleghi;
Al mio Amore, mia unica compagna;
Grazie.*

Indice

Introduzione	3
1 Considerazioni introduttive	5
1.1 Fondamenti matematici	5
1.2 I postulati della meccanica quantistica	5
1.3 La matrice densità	7
1.3.1 Il Problema statistico	7
1.3.2 La matrice densità negli stati puri	8
1.3.3 La matrice densità nelle miscele di stati	10
1.3.4 Proprietà dell'operatore densità	11
1.3.5 Stati classici e stati quantistici	12
1.4 Stati composti	13
1.4.1 Prodotto tensore	13
1.4.2 La matrice densità ridotta	14
1.4.3 La matrice densità ridotta di un sistema a due stati	15
2 Modellizzazione del processo di misura	17
2.1 Il principio di sovrapposizione	17
2.2 Correlazione e misure: un primo esempio	18
2.3 La catena di von Neumann	20
2.4 Decoerenza indotta dall'ambiente	21
3 Modelli esattamente risolvibili	24
3.1 Il modello di Joos e Zeh	24
3.2 Decoerenza indotta dallo scattering con l'ambiente	26
Conclusioni	37

Introduzione

La meccanica quantistica ha rivoluzionato il modo attraverso cui l'uomo analizza la realtà che lo circonda. Sebbene essa sia stata concepita inizialmente come una teoria atomica, atta a spiegare i numerosi esperimenti dei primi decenni del '900 - per i quali la meccanica classica si mostrava insoddisfacente - ha trovato applicazione in numerosi ambiti di ricerca, emergendo come una candidata più che favorita ad una descrizione completa della realtà che percepiamo. Tuttavia, sebbene il formalismo tecnico e matematico associato alla meccanica quantistica goda di incredibile riscontro sperimentale, vi è ancora forte disaccordo riguardo la sua interpretazione: essa si rivela infatti una teoria fortemente anti-intuitiva, tanto da scontrarsi con la meccanica classica e, conseguentemente, con l'esperienza comune a cui siamo abituati. Si consideri ad esempio il concetto di funzione d'onda, introdotto nelle prime formulazioni della meccanica quantistica: come supposto per la prima volta da De Broglie, ad una particella puntiforme può essere associata una funzione ψ dal carattere ondulatorio, responsabile di fenomeni di interferenza osservabili in celebri esperimenti di doppia fenditura analoghi a quelli ottici. Ciò nonostante, nessun oggetto macroscopico dell'esperienza quotidiana, per quanto piccolo e approssimabile come puntiforme, manifesta una natura ondulatoria; di esso, inoltre, si può conoscere posizione ed impulso istante per istante, contrariamente agli osservabili della meccanica quantistica, soggetti ad indeterminazione.

Nasce quindi spontanea la domanda: cosa distingue gli oggetti classici da quelli quantistici? Qual è, se esiste, la linea di separazione tra i due regimi? La questione è in realtà molto più complicata di quanto si possa pensare, in quanto aggravata dall'*impossibilità di misurare un sistema quantistico senza l'utilizzo di apparati sperimentali macroscopici*, soggetti, ovviamente, alle leggi della meccanica classica. La natura quantistica della materia deve perciò essere "classicizzata" per poter essere interpretata; questo processo tuttavia non può che apparire ambiguo, poiché gli strumenti di laboratorio sono comunque costituiti da atomi, e dunque, intrinsecamente, regolati da un regime quantistico.

In questa situazione, di difficile interpretazione, si è quindi costretti o a supporre che la meccanica quantistica sia da "relegare" a sistemi fisici su scala microscopica che però interagiscano in maniera classica con gli apparati spe-

rimentali, o a modificare la teoria originale in modo da garantirle universalità di scala. Questo lavoro di tesi analizzerà i tentativi fatti recentemente nella direzione del secondo dei due approcci. L'idea forza dietro queste linee di ricerca è che l'interazione ambientale sia responsabile della transizione da un comportamento quantistico a un comportamento classico dei sistemi microscopici, attraverso un processo che viene indicato con il termine di *decoerenza*.

Capitolo 1

Considerazioni introduttive

1.1 Fondamenti matematici

Lo spazio degli stati di un sistema quantistico avrà la struttura di un particolare spazio vettoriale detto *spazio di Hilbert*. Di seguito verranno ricordate le proprietà di uno spazio di Hilbert che supporremo sempre separabile ¹. Per definizione, uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto interno $\langle \varphi | \psi \rangle$ tra due vettori $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ tale che, detta d la metrica indotta da $\langle \varphi | \psi \rangle$, lo spazio metrico $(\mathcal{H}, d)$ sia *completo*. Ogni spazio di Hilbert separabile possiede una *base ortonormale*, cioè un insieme di vettori ortonormali $|u_n\rangle \in \mathcal{H}$ con $\langle u_i | u_j \rangle = \delta_{i,j}$ per cui valga:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle = \sum_n \langle u_n | \psi \rangle |u_n\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.1)$$

I coefficienti $c_n = \langle u_n | \psi \rangle$, sono detti *coefficienti di Fourier* del vettore $|\psi\rangle$.

1.2 I postulati della meccanica quantistica

Esistono numerose formulazioni dei principi su cui si fonda la meccanica quantistica, tutte tra loro equivalenti per quanto riguarda le previsioni che se ne deducono, ma con differenze spesso significative dal punto di vista dell'interpretazione fisica. Passiamo qui, in rassegna, i sei postulati fondamentali dell'interpretazione più diffusa della meccanica quantistica, generalmente indicata come *scuola di Copenaghen* o *interpretazione ortodossa* [1].

Primo postulato - *Ad un istante fissato t_0 , lo stato di un sistema fisico isolato di cui si abbia conoscenza massimale è descritto da un vettore $|\psi(t_0)\rangle$ appartenente ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ complesso e separabile.*

¹Uno spazio vettoriale V è detto *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile e denso in V .

Secondo postulato - Ogni quantità fisica misurabile (osservabile) $\mathcal{A}$ è descritta da un operatore autoaggiunto $\hat{A}$ agente su $\mathcal{H}$.

Terzo postulato - L'unico risultato possibile della misurazione di una quantità fisica $\mathcal{A}$ è uno degli autovalori dell'osservabile $\hat{A}$ corrispondente.

Quarto postulato - Quando una quantità fisica $\mathcal{A}$ è misurata in un sistema descritto dal vettore $|\psi\rangle$, la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ di osservare un autovalore a_n , appartenente allo spettro discreto dell'osservabile corrispondente $\hat{A}$, è pari a:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2 \equiv \sum_{i=1}^{g_n} |c_n^i|^2 \quad (1.2)$$

dove $|u_n^i\rangle$ è uno dei possibili autovettori di $\hat{A}$ appartenenti al sottospazio di degenerazione, di dimensione g_n , associato ad a_n . Si osservi che, introdotto l'operatore di proiezione $P_n = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i|$, l'espressione precedente può essere riscritta nel seguente modo:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_i^{g_n} \langle \psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle = \langle \psi | P_n | \psi \rangle \quad (1.3)$$

Il postulato si generalizza naturalmente al caso di uno spettro continuo, che per semplicità consideriamo privo di degenerazione: detto α l'autovalore di variabile continua dell'osservabile $\hat{A}$, la probabilità $d\mathcal{P}(\alpha)$ di osservare un risultato compreso tra α ed $\alpha + d\alpha$ è pari a:

$$d\mathcal{P}(\alpha) = |\langle u_\alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha \equiv |c(\alpha)|^2 d\alpha$$

dove $|u_\alpha\rangle$ è l'autovettore di $\hat{A}$ associato all'autovalore α .

Quinto postulato - Se la misurazione di una quantità fisica $\mathcal{A}$ su un sistema descritto dallo stato $|\psi\rangle$ restituisce il risultato a_n (nell'ipotesi di uno spettro discreto), lo stato $|\psi\rangle$ del sistema collassa istantaneamente in un vettore $|\psi'\rangle$ generato dall'autospazio associato ad a_n :

$$|\psi\rangle \Rightarrow |\psi'\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i |u_n^i\rangle \quad (1.4)$$

L'operazione di misurazione consiste quindi nella trasformazione dello stato $|\psi\rangle$ in un nuovo stato $|\psi'\rangle$ ottenuto dalla *proiezione dello stato $|\psi\rangle$ sull'autospazio generato da a_n* :

$$|\psi\rangle \Rightarrow |\psi'\rangle = P_n |\psi\rangle \quad (1.5)$$

Analogamente il postulato ammette un corrispettivo nello spettro continuo, che per semplicità considereremo non degenerare: in seguito ad una misurazione che ha restituito il valore α_0 , lo stato $|\psi\rangle$ viene proiettato in un nuovo stato $|\psi'\rangle$ tale che:

$$|\psi\rangle \Rightarrow |\psi'\rangle = P_{\Delta\alpha}(\alpha_0) |\psi\rangle$$

Dove:

$$P_{\Delta\alpha}(\alpha_0) = \int_{\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2}}^{\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}} d\alpha |u_\alpha\rangle \langle u_\alpha|$$

Sesto postulato - *L'evoluzione temporale del vettore di stato $|\psi\rangle$, in regime non relativistico, è determinata dall'equazione di Schrödinger:*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.6)$$

dove $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano del sistema, cioè l'operatore autoaggiunto associato all'energia totale E del sistema.

È su questi ultimi due postulati che vorremo focalizzare la nostra attenzione nei prossimi capitoli, ampliandoli e analizzandone i risvolti sperimentali: lo stato del sistema subisce un collasso in un particolare autospazio una volta effettuata una misurazione, dunque il quinto postulato determina il punto di partenza nell'analisi delle relazioni tra stato fisico ed apparato sperimentale; rimangono però quasi paradossali i suoi legami con il sesto postulato, che descrive un'evoluzione continua, nel tempo, del vettore d'onda $|\psi\rangle$: quest'ultimo subisce un cambiamento brusco in seguito al collasso, dunque si rivelerà fondamentale apprendere secondo quali modalità l'apparato sperimentale è in grado di perturbare lo stato fisico del sistema.

1.3 La matrice densità

1.3.1 Il problema statistico

Negli assiomi del paragrafo precedente viene postulato che il vettore di stato $|\psi\rangle$ "incapsuli" la massima conoscenza riguardo lo stato di un sistema fisico quantistico [2]. In questo caso si parla di uno *stato puro*. Qualora tuttavia non si possedesse conoscenza massimale del sistema, come avviene ad esempio in numerose analisi sperimentali dove è enorme il numero di particelle in esame e si può al più conoscere la statistica che le regola, non esisterebbe alcuno stato puro in grado di descrivere il sistema. In questo caso si parla di *stato misto*.

In uno stato misto lo stato del sistema si trova, prima della misurazione, in uno tra diversi stati puri $|\psi_i\rangle$ (non necessariamente tra loro ortogonali), *non conosciuto dall'osservatore*. Lo sperimentatore può, al più, conoscere la probabilità p_i che il sistema si trovi nello stato $|\psi_i\rangle$. Una simile situazione può ad esempio essere generata sfruttando un particolare apparato di Stern e Gerlach, in grado di differenziare le particelle che posseggono uno "spin up" dalle particelle con "spin down", per poi farle convogliare in un contenitore comune (ove, supporremo, esse non sviluppino interazione). In questo modo, l'apparato prepara una *mistura statistica* di particelle in due possibili stati: lo stato $|\psi_\uparrow\rangle$ e lo stato $|\psi_\downarrow\rangle$, di probabilità $p_\uparrow$ e $p_\downarrow$ rispettivamente. Se l'osservatore "scegliesse" una qualsiasi particella dal contenitore comune non potrebbe determinare, a priori, se essa si trovi nello stato $|\psi_\uparrow\rangle$ o nello stato $|\psi_\downarrow\rangle$, ma soltanto la probabilità di osservare l'uno o l'altro. Nell'analisi del sistema fisico in questione, dunque, l'osservatore non saprebbe se utilizzare lo stato $|\psi_\uparrow\rangle$ o $|\psi_\downarrow\rangle$ nella determinazione dei valori di aspettazione.

Si osservi che, a prescindere dall'origine fisica dell'evento probabilistico, uno stato misto rappresenta una *struttura puramente classica*: le probabilità p_i descrivono l'ignoranza statistica dell'osservatore riguardo lo stato fisico del sistema, e non vanno confuse con le probabilità $|c_i|^2$ associate ad uno sviluppo di uno stato puro $|\psi\rangle$ in una data base. Quando uno stato puro (per semplicità discreto e non degenere) è infatti espresso nella forma $|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$, stiamo dicendo che lo stato è descritto, *contemporaneamente*, da una serie di stati fisici in sovrapposizione, la cui misurazione porta al collasso del pacchetto e alla rivelazione di uno solo dei possibili stati $|u_n\rangle$; al contrario, in una mistura di stati, il sistema non esiste in una sovrapposizioni di stati $|\psi_i\rangle$, ma soltanto *in uno di essi*, sconosciuto all'osservatore per questioni di carattere statistico-probabilistico. Gli stati misti, dunque, aggiungono alla probabilità di natura intrinsecamente quantistica di un sistema una probabilità di natura prettamente classica e statistica.

Avendo dunque evidenziato il problema degli stati misti, come può un osservatore descrivere la statistica delle misure effettuate su un sistema del genere? Indubbiamente, poiché non è possibile assegnare uno stato puro $|\psi\rangle$ al sistema, egli non potrebbe più calcolare valori di aspettazione associati ad un osservabile $\hat{A}$ dal prodotto scalare $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$. È perciò necessario introdurre un nuovo strumento matematico, indicato con il termine di *operatore densità*.

1.3.2 La matrice densità negli stati puri

Analizziamo prima il caso semplice in cui lo stato fisico sia descritto da uno stato puro.

Si consideri il seguente operatore $\hat{\rho}$, detto *operatore densità* ² di uno stato

²Si noti che, con un piccolo abuso di notazione tipico della letteratura scientifica, l'operatore densità verrà talvolta indicato con il termine di *matrice densità*, che, strettamente

puro $|\psi\rangle$:

$$\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle \langle\psi| \quad (1.7)$$

Così com'è definito, l'operatore $\hat{\rho}$ descrive un semplice operatore di proiezione lungo lo stato $|\psi\rangle$.

Volendo esprimere lo stato $|\psi\rangle$ attraverso una particolare base (che qui, per semplicità di notazione, supponiamo discreta ed associata ad un operatore il cui spettro è non degenere) completa di vettori $|u_n\rangle$,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle \quad (1.8)$$

si ottiene la seguente matrice densità nella base $|u_n\rangle$:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{n,m} c_n c_m^* |u_n\rangle \langle u_m| \quad (1.9)$$

I termini "non diagonali" ottenuti per $n \neq m$ vengono detti *termini d'interferenza*. Si osservi che la rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{\rho}$ assume la semplice forma di prodotto di coefficienti di Fourier, in quanto:

$$\rho_{i,j} = \langle u_i | \hat{\rho} | u_j \rangle = \sum_{n,m} c_n c_m^* \langle u_i | u_n \rangle \langle u_m | u_j \rangle = c_i c_j^* \quad (1.10)$$

L'operatore densità definito nella 1.7 descrive un eccellente sostituto del vettore di stato $|\psi\rangle$ del sistema, in quanto:

1) La condizione di normalizzazione può essere riscritta come:

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 = \sum_n c_n c_n^* = \sum_n \rho_{nn}(t) = \text{Tr } \hat{\rho}(t) = 1 \quad (1.11)$$

2) Il valor di aspettazione di un operatore $\hat{A}$ sullo stato $|\psi\rangle$ può essere espresso nella forma:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle(t) &= \langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle = \sum_{n,m} c_n c_m^* \langle u_m | \hat{A}(t) | u_n \rangle = \\ &= \sum_{n,m} \langle u_n | \hat{\rho} | u_m \rangle \langle u_m | \hat{A}(t) | u_n \rangle = \sum_n \langle u_n | \hat{\rho} \hat{A} | u_n \rangle = \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{A} \} \end{aligned} \quad (1.12)$$

parlando, descrive la rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{\rho}$ su una particolare base. Eventuali ambiguità saranno tuttavia risolte dalla notazione operatoriale del "cappello", che, nella rappresentazione matriciale di $\hat{\rho}$, non sarà presente.

- 3) L'evoluzione temporale dell'operatore densità può essere dedotta dall'equazione di Schrödinger:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\right)\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right) = \\ &= \frac{1}{i\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - \frac{1}{i\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\hat{H} = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}(t)]\end{aligned}\quad (1.13)$$

Da cui si giunge dunque alla seguente, detta *equazione di von Neumann*:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]\quad (1.14)$$

- 4) Poiché la probabilità di osservare un autovalore a_n può essere espressa secondo la 1.3, in base alla 1.12 si può scrivere:

$$\mathcal{P}(a_n) = \text{Tr}\{\hat{\rho}(t)P_n\}\quad (1.15)$$

Le quantità fisiche rilevanti di un sistema (valori di aspettazione, probabilità, evoluzioni temporali, etc.) possono in questo modo essere calcolate, anziché attraverso il vettore di stato $|\psi(t)\rangle$, attraverso l'operatore densità $\hat{\rho}(t)$, definito dalle precedenti equazioni. Si osservi come i due approcci, nel caso di stati puri, siano del tutto equivalenti, dunque l'utilizzo di $\hat{\rho}(t)$ è, in questa trattazione, ridondante. La sua applicazione diventa tuttavia incredibilmente efficace nel caso di miscele di stati.

1.3.3 La matrice densità nelle miscele di stati

Si consideri adesso il caso di stati misti. In questa situazione, lo stato fisico può essere descritto da diversi vettori di stato $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle \dots$ ciascuno con probabilità $p_1, p_2, p_3 \dots$ tale che $\sum_i p_i = 1$. Sarà allora necessario estendere i generici concetti di valor medio e probabilità di osservazione di un particolare autovalore, vista l'impossibilità di conoscere a priori lo stato $|\psi_i\rangle$ della miscela.

Innanzitutto, indichiamo con

$$\mathcal{P}_i(a_n) = \langle\psi_i|P_n|\psi_i\rangle\quad (1.16)$$

la probabilità di osservare a_n se il vettore di stato fosse $|\psi_i\rangle$; la probabilità di osservare lo stato $|\psi_i\rangle$ è a sua volta pari a p_i , dunque, su ogni vettore di stato, si ha una probabilità pari a $p_i\mathcal{P}_i(a_n)$ di osservare a_n . In questo modo, la probabilità complessiva $\mathcal{P}(a_n)$, sommando su tutti i possibili stati, diventa:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_i p_i\mathcal{P}_i(a_n)\quad (1.17)$$

Sfruttando la 1.15, è possibile riscrivere l'espressione di sopra in termini di operatori densità: detto infatti $\hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ l'operatore densità associata allo stato i -esimo, si ottiene:

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_i p_i \text{Tr}\{\hat{\rho}_i P_n\} = \text{Tr}\left\{\sum_i p_i \hat{\rho}_i P_i\right\} = \text{Tr}\{\hat{\rho} P_n\} \quad (1.18)$$

Dove si è posto:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (1.19)$$

L'espressione 1.19 descrive una generalizzazione dell'operatore densità, ottenuta pesando gli operatori associati ai singoli stati puri tramite le rispettive probabilità. Esso mostra proprio come, conosciuto l'operatore $\hat{\rho}$, sia possibile determinare la probabilità di osservare l'autovalore a_n in seguito ad una misurazione, anche *senza conoscere a priori lo stato $|\psi_i\rangle$ su cui verrà calcolato*.

Un discorso analogo può essere effettuato sul valore di aspettazione: il valor medio $\langle \hat{A} \rangle$ di un operatore ha una probabilità p_i di essere pari ad $\langle \hat{A}_i \rangle = \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle$; possiamo allora scrivere:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \quad (1.20)$$

Sfruttando la 1.12, perciò,

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{Tr}\{\hat{\rho}_i \hat{A}\} = \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{A}\} \quad (1.21)$$

Anche in questo modo, dunque, il valore di aspettazione può essere ricondotto all'operatore densità complessivo del sistema.

1.3.4 Proprietà dell'operatore densità

Analizziamo a questo punto le proprietà matematiche dell'operatore densità. Innanzitutto, si può facilmente mostrare che $\hat{\rho}$ sia un operatore hermitiano, per cui:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger \quad (1.22)$$

Nel caso di uno stato puro, per cui $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$, abbiamo osservato come, per la 1.11, valesse $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$. L'espressione si generalizza immediatamente nel caso di miscele di stati: si ottiene infatti

$$\text{Tr} \hat{\rho} = \text{Tr} \sum_i p_i \hat{\rho}_i = \sum_i p_i \text{Tr} \hat{\rho}_i = \sum_i p_i = 1 \quad (1.23)$$

Inoltre, l'evoluzione temporale di $\hat{\rho}$, sfruttando la linearità della relazione, assume la stessa forma della 1.13 osservata nel caso di stati puri:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \quad (1.24)$$

dove, si faccia attenzione, stavolta $\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i$.

Si osservi inoltre come, nel caso di stati puri, l'operatore $\hat{\rho}$ sia un operatore di proiezione, poiché risulta evidente come $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$; la qual cosa non è tuttavia valida nel caso generale:

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} \bar{p}_j p_i \langle \psi_j | \psi_i \rangle | \psi_j \rangle \langle \psi_i | \neq \hat{\rho} \quad (1.25)$$

Varrà quindi, in generale,

$$\text{Tr } \hat{\rho}^2 \leq 1 \quad (1.26)$$

con $\text{Tr } \hat{\rho}^2 = 1$ solo nel caso di stati puri, ove $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

Infine, l'operatore densità è certamente semidefinitivo positivo, poiché, per ogni vettore $|\phi\rangle$, vale:

$$\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle = \sum_i p_i \langle \phi | \hat{\rho}_i | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0 \quad (1.27)$$

1.3.5 Stati classici e stati quantistici

In base a quanto appreso nei paragrafi precedenti, l'operatore densità è in grado di descrivere sia la natura probabilistico-quantistica intrinseca di un sistema, sia la natura probabilistico-statistica determinata dall'ignoranza di un osservatore nell'analisi di un sistema misto. I due regimi, quantistico e classico, sono in realtà facilmente distinguibili dall'analisi dell'operatore densità $\hat{\rho}$.

Si consideri infatti uno stato puro, generato da una base di autovettori $|u_n\rangle$ tramite i coefficienti c_n ; poiché la probabilità di osservare lo stato $|u_n\rangle$ in seguito al collasso è pari a $p_n = |c_n|^2$, scriveremo, equivalentemente,

$$|\psi\rangle = \sum_n \sqrt{p_n} |u_n\rangle \quad (1.28)$$

Dalla 1.28 si ottiene l'espressione esplicita dell'operatore densità:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| &= \sum_{n,m} \sqrt{p_n p_m} |u_n\rangle \langle u_m| = \\ &= \sum_n p_n |u_n\rangle \langle u_n| + \sum_{n \neq m} \sqrt{p_n p_m} |u_n\rangle \langle u_m| \end{aligned} \quad (1.29)$$

L'equazione 1.29 si distingue dall'equazione 1.19 associata ad un operatore densità su stati misti, a causa dei termini non diagonali $\sum_{n \neq m} \sqrt{p_n p_m} |u_n\rangle \langle u_m|$ di interferenza tra gli stati $|u_n\rangle$, la cui natura è puramente quantistica.

1.4 Stati composti

1.4.1 Prodotto tensore

Si considerino due sistemi fisici $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, descritti dagli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ rispettivamente, e si consideri l'applicazione " $\otimes$ " che associ ad un vettore $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e ad un vettore di $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ la coppia di vettori $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$ indicata dalla seguente notazione:

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\} \equiv |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (1.30)$$

Si supponga l'applicazione verifichi inoltre le seguenti condizioni di linearità $\forall |\psi_1\rangle, |\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1, \forall |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ e $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}$:

$$(\lambda |\psi_1\rangle + \mu |\phi_1\rangle) \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle \otimes (\lambda |\psi_1\rangle + \mu |\phi_1\rangle) = \lambda |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle + \mu |\phi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (1.31)$$

L'insieme dei vettori del tipo $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ definisce un nuovo spazio vettoriale $\mathcal{H}$, indicato con il termine di *prodotto tensore degli spazi $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$* attraverso la notazione $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Il concetto di prodotto tensore può essere esteso anche agli operatori agenti sui due spazi. Siano infatti $\hat{A}_1$ e $\hat{A}_2$ due operatori agenti, rispettivamente, sugli spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$; si definirà allora *operatore prodotto tensore* $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ l'operatore agente su $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ che, detto $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}$, operi nella seguente maniera:

$$\hat{A} |\psi\rangle = (\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{A}_1 |\psi_1\rangle) \otimes (\hat{A}_2 |\psi_2\rangle) \quad (1.32)$$

In base a questa definizione si può far agire un operatore $\hat{A}_1$ (agente sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1$) sullo spazio tensore $\mathcal{H}$, definendo l'operatore *esteso* $\hat{A}'_1 = \hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{I}}_2$, dove $\hat{\mathbb{I}}_2$ è l'operatore identità agente su $\mathcal{H}_2$:

$$\hat{A}'_1 |\psi\rangle = (\hat{A}_1 |\psi_1\rangle) \otimes (\hat{\mathbb{I}}_2 |\psi_2\rangle) \quad (1.33)$$

Si può facilmente dimostrare che, dette $\{|u_n\rangle\} \in \mathcal{H}_1$ e $\{|v_m\rangle\} \in \mathcal{H}_2$ delle basi ortonormali complete per $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$ rispettivamente, l'insieme di vettori $\{|u_n\rangle \otimes |v_m\rangle\}$ costituisce una base per il prodotto tensore $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, perciò un generico vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ potrà essere scritto nella seguente forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{n,m} |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle \quad (1.34)$$

Si osservi che, nella situazione particolare in cui i coefficienti $c_{n,m}$ possano essere espressi come un prodotto tra coefficienti del tipo $c_{n,m} = \langle u_n | \psi \rangle \langle v_m | \psi \rangle$, si ottiene:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n,m} \langle u_n | \psi \rangle \langle v_m | \psi \rangle |u_n\rangle \otimes |v_m\rangle = \\ &= \sum_n \langle u_n | \psi \rangle |u_n\rangle \otimes \sum_m \langle v_m | \psi \rangle |v_m\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \end{aligned} \quad (1.35)$$

dove abbiamo indicato con $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ due vettori di $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ generati dalle rispettiva basi. In questa situazione, il vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ può essere espresso come prodotto diretto tra gli stati $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$, e viene per questo detto *stato prodotto*; qualora non fosse possibile applicare questa rappresentazione, lo stato $|\psi\rangle$ verrebbe detto *stato entangled*, cioè "intrecciato".

La trattazione può inoltre essere facilmente estesa ad un numero arbitrario n di spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$, definendone il prodotto tensore $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$.

1.4.2 La matrice densità ridotta

Attraverso il prodotto tensore è possibile "estendere" un operatore agente in uno spazio $\mathcal{H}$ in modo che agisca in uno spazio tensore $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$; d'altra parte, non di rado è necessario effettuare l'operazione inversa: conoscendo come un operatore agisce su uno spazio tensore, come si riesce a risalire alla sua azione sui singoli spazi? Focalizzeremo il problema sull'operatore densità $\hat{\rho}$ agente su $\mathcal{H}$, in modo da determinare due operatori densità, $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ il cui dominio di applicazione è costituito dagli spazi $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ rispettivamente. In questo modo sarà possibile estrapolare, in uno spazio tensore, le informazioni associate ad un singolo spazio. Innanzitutto, determiniamo il valore di aspettazione di un operatore $\hat{A}'_1$, ottenuto estendendo, su $\mathcal{H}$, l'operatore $\hat{A}_1$ agente su $\mathcal{H}_1$ ³:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}'_1 \rangle &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \left(\hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{I}}_2 \right) \right\} = \\ &= \sum_{n,m} \langle u_n | \langle v_m | \hat{\rho} \left(\hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{I}}_2 \right) | u_n \rangle | v_m \rangle = \\ &= \sum_{n,m} \sum_{j,k} \left(\langle u_n | \langle v_m | \hat{\rho} | u_j \rangle | v_k \rangle \right) \left(\langle u_j | \langle v_k | \hat{A}_1 \otimes \hat{\mathbb{I}}_2 | u_n \rangle | v_m \rangle \right) = \\ &= \sum_{n,j} \left[\sum_m \langle u_n | \langle v_m | \hat{\rho} | v_m \rangle | u_j \rangle \right] \langle u_j | \hat{A}_1 | u_n \rangle \quad (1.36) \end{aligned}$$

La quantità

$$\hat{\rho}_1 = \sum_m \langle v_m | \hat{\rho} | v_m \rangle \quad (1.37)$$

descrive la *traccia dell'operatore $\hat{\rho}$ su una base appartenente allo spazio $\mathcal{H}_2$* , ed è indicata come *matrice densità ridotta $\hat{\rho}_1$* . Il suo significato fisico è

³Per semplicità di notazione abbiamo utilizzato la simbologia più sintetica $|a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |a\rangle |b\rangle$

evidente, in quanto:

$$\langle \hat{A}_1' \rangle = \sum_{n,j} \langle u_n | \hat{\rho}_1 | u_j \rangle \langle u_j | \hat{A}_1 | u_n \rangle = \sum_n \langle u_n | \hat{\rho}_1 \hat{A}_1 | u_n \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1} \{ \hat{\rho}_1 \hat{A}_1 \} \quad (1.38)$$

La matrice densità ridotta $\hat{\rho}_1$ svolge dunque, nello spazio tensore $\mathcal{H}$, lo stesso ruolo di una matrice densità, ma restituisce informazioni associate al solo operatore $\hat{A}_1$, come se lo spazio $\mathcal{H}_1$ fosse isolato. Analogamente, la matrice densità $\hat{\rho}_2$ così definita,

$$\hat{\rho}_2 = \sum_m \langle u_m | \hat{\rho} | u_m \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1} \hat{\rho} \quad (1.39)$$

permette di conoscere il valore di aspettazione associato ad un operatore $\hat{A}_2$ agente su $\mathcal{H}_2$.

È interessante infine osservare come, in base alle relazioni precedenti, l'operatore densità $\hat{\rho}$ del sistema $\mathcal{H}$ possa essere rappresentato come prodotto tensore $\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$ dei due operatori ridotti, in quanto:

$$\hat{\rho}_1 = \sum_m \langle v_m | \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 | v_m \rangle = \hat{\rho}_1 \sum_m \langle v_m | \hat{\rho}_2 | v_m \rangle = \hat{\rho}_1 \text{Tr}_{\mathcal{H}_2} \hat{\rho}_2 = \hat{\rho}_1 \quad (1.40)$$

1.4.3 La matrice densità ridotta di un sistema a due stati

Analizziamo la matrice densità associata ad un semplice stato entangled di due sistemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ nella seguente forma:

$$|\Psi\rangle = c_1 |a_1\rangle \otimes |b_1\rangle + c_2 |a_2\rangle \otimes |b_2\rangle \quad (1.41)$$

dove $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle$, $i = 1, 2$ sono stati arbitrari (seppur non necessariamente ortogonali) di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, generati dalle basi ortonormali $\{|u_k\rangle\} \in \mathcal{A}$ e $\{|v_k\rangle\} \in \mathcal{B}$: questo tipo di trattazione sarà molto importante nel prossimo capitolo, per questo la introduciamo qui in un regime di spettro discreto, facilmente generalizzabile nel caso continuo.

In base alla definizione di operatore densità del sistema, possiamo scrivere:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{i,j}^2 c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_i\rangle \langle b_j| \quad (1.42)$$

L'operatore densità ridotto associato al sistema $\mathcal{A}$, in base alla definizione 1.37, sarà:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_{\mathcal{B}} \left(\sum_{i,j}^2 c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_i\rangle \langle b_j| \right) \quad (1.43)$$

Esprimendo allora $|b_i\rangle$ in una decomposizione di vettori di base nella forma $|b_i\rangle = \sum_n d_n^{(i)} |v_n\rangle$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{\mathcal{A}} &= \text{Tr}_{\mathcal{B}} \left(\sum_{i,j}^2 c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \otimes \sum_{n,m} d_n^{(i)} (d_m^{(j)})^* |v_n\rangle \langle v_m| \right) = \\
&\sum_{i,j}^2 c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \sum_k \langle v_k| \left(\sum_{n,m} d_n^{(i)} (d_m^{(j)})^* |v_n\rangle \langle v_m| \right) |v_k\rangle = \\
&\sum_{i,j}^2 c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \sum_k d_k^{(i)} (d_k^{(j)})^* = \\
&\sum_{i,j}^2 c_i c_j^* |a_i\rangle \langle a_j| \langle b_j| b_i\rangle \quad (1.44)
\end{aligned}$$

L'espressione 1.44 descrive una forma decisamente più compatta dell'operatore densità ridotto: come si può osservare, l'influenza di $\mathcal{B}$ sul sistema $\mathcal{A}$ viene quantificata dalla presenza di contributi misti del tipo $\langle b_i|b_j\rangle$ con $i \neq j$ nei termini non diagonali. In base alla nostra trattazione del paragrafo 1.3.5, saranno dunque questi prodotti scalari $\langle b_i|b_j\rangle$ a determinare i termini d'interferenza quantistici.

Capitolo 2

Modellizzazione del processo di misura

2.1 Il principio di sovrapposizione

La natura matematica dell'equazione di Schrödinger determina un fenomeno fisico tipico delle grandezze ondulatorie, caratterizzato da fenomeni di interferenza.

Si supponga, ad esempio, che l'equazione di Schrödinger associata ad una particella ammetta due soluzioni $|\psi_1(t)\rangle$ e $|\psi_2(t)\rangle$ con $|\psi_1(t)\rangle \neq |\psi_2(t)\rangle$, cioè due stati tali che:

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_1(t)\rangle &= \hat{H} |\psi_1(t)\rangle \\i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_2(t)\rangle &= \hat{H} |\psi_2(t)\rangle\end{aligned}$$

con condizioni iniziali $|\psi_1(t_0)\rangle$ e $|\psi_2(t_0)\rangle$ note. Appare evidente, moltiplicando per opportuni coefficienti e sommando le due equazioni membro a membro, che anche la quantità $|\psi(t)\rangle = c_1 |\psi_1(t)\rangle + c_2 |\psi_2(t)\rangle$ (con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) con condizione iniziale $|\psi(t_0)\rangle = c_1 |\psi_1(t_0)\rangle + c_2 |\psi_2(t_0)\rangle$ costituisca una soluzione per l'equazione di Schrödinger associata al sistema: questa peculiarità prende il nome di *principio di sovrapposizione*. La soluzione più generale deterrà perciò la seguente forma:

$$|\psi(t)\rangle = c_1 |\psi_1(t)\rangle + c_2 |\psi_2(t)\rangle \quad (2.1)$$

L'espressione è generalizzabile naturalmente nel caso di n possibili soluzioni (che assumiamo quindi finite e discrete), attraverso:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\psi_i(t)\rangle \quad (2.2)$$

A causa del principio di sovrapposizione lo stato fisico di un sistema (qui ancora puro) è in realtà ottenuto dalla sovrapposizione di più stati tra loro differenti. Si osservi che, tuttavia, la quantità $|\psi(t)\rangle$ non è osservabile direttamente, in quanto definita nel campo complesso: l'evidenza sperimentale della sovrapposizione va perciò cercata attraverso l'analisi delle quantità fisiche misurabili associate alla $|\psi(t)\rangle$.

Un primo fenomeno osservabile associato alla sovrapposizione di più stati è, indubbiamente, la presenza di *interferenza* tra le componenti di $|\psi\rangle$. Si immagini, ad esempio, di avere un caso semplice di una particella descritta da due soli stati in sovrapposizione, nella forma $|\psi(t)\rangle = |\psi_1(t)\rangle + |\psi_2(t)\rangle$, proiettati nello spazio delle posizioni:

$$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \psi(\mathbf{x}, t) = \psi_1(\mathbf{x}, t) + \psi_2(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

In base a quanto affermato nei postulati del Capitolo 1, la densità di probabilità di osservare la particella in un intervallo compreso tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ sarà:

$$|\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle|^2 = [\psi_1^*(\mathbf{x}, t) + \psi_2^*(\mathbf{x}, t)] \cdot [\psi_1(\mathbf{x}, t) + \psi_2(\mathbf{x}, t)] = |\psi_1(\mathbf{x}, t)|^2 + |\psi_2(\mathbf{x}, t)|^2 + \psi_1^*(\mathbf{x}, t)\psi_2(\mathbf{x}, t) + \psi_1(\mathbf{x}, t)\psi_2^*(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

La densità di probabilità risultante di uno stato sovrapposizione non è dunque pari alla semplice somma delle singole densità di probabilità, a causa della presenza di *termini misti* detti, appunto, *termini di interferenza*. Questi ultimi possono essere osservati in esperimenti di doppia fenditura dove, facendo passare elettroni ben collimati in strettoie separate, si registrano (raccolto un numero di campioni sufficientemente elevato), su uno schermo sensibile all'eccitazione elettronica, delle figure d'interferenza risultanti dalla particolare statistica degli impatti. D'altra parte, questi fenomeni non si osservano per oggetti "macroscopici": appare dunque naturale chiedersi "quanto grande" debba essere un oggetto perché non se ne osservino fenomeni di interferenza, e in quali condizioni, dunque, la sovrapposizione di stati sia ormai non apprezzabile.

Intuiamo allora il punto di partenza della nostra trattazione debba essere l'analisi del processo di *misura*. La risposta di un apparato sperimentale non presenta mai fenomeni di sovrapposizione, poiché sappiamo come i nostri sensi possano percepire solo un possibile stato, e non l'interferenza tra essi. Va perciò formalizzato, in ambito quantistico, il procedimento di misura attraverso cui, nel macroscopico, n possibili stati si riducano ad un unico stato privo di sovrapposizione.

2.2 Correlazione e misure: un primo esempio

Un buon punto di partenza per la discussione del problema della misura, e dunque del passaggio dal mondo quantistico al mondo classico, è l'analisi

della misura di John von Neumann (1932) [3], che qui descriviamo in un esempio semplificato.

Supporremo, per venire incontro ad una teoria generale e che abbracci la fenomenologia di *tutta* la realtà, che anche l'apparato sperimentale, contrariamente all'interpretazione di Copenaghen, sia soggetto ad un regime quantistico, e dunque caratterizzato da una funzione d'onda. Va però effettuata un'importante osservazione: nel mondo macroscopico, *il principio di sovrapposizione non ha effetti sperimentali osservabili*. L'esperienza mostra infatti come il risultato di una misura debba terminare *con il presentarsi di situazioni macroscopicamente distinguibili e non ambigue dell'apparato sperimentale*: sebbene il sistema analizzato sia quantistico, le nostre apparecchiature dovranno, alla fine, rivelare solo uno dei possibili stati la cui sovrapposizione genera la $|\psi\rangle$ del sistema. Ad esempio, uno strumento ideale, in grado di misurare l'energia di una particella restituendo un valore in eV tramite un ago su una scala graduata, dovrà essere caratterizzato da un indice la cui posizione sulla scala è ben definita e incontrovertibile: l'ago non potrà, perciò, manifestare fenomeni di interferenza trovandosi in stati intermedi.

Si immagini allora, per semplicità, di voler analizzare lo stato di una particella libera che, trascurati i suoi gradi di libertà spaziali, è caratterizzata esclusivamente dai suoi possibili stati di spin, detti di "spin up" $|\uparrow\rangle$ e "spin down" $|\downarrow\rangle$. Com'è noto dalla meccanica quantistica, i due vettori costituiscono gli autovettori simultanei degli osservabili di spin $\hat{S}^2$ ed $\hat{S}_z$ agenti sullo spazio di Hilbert dello spin $\mathcal{H}_s$, per il quale costituiscono una base. Il vettore di stato $|\psi_s\rangle$ della particella si presenterà perciò nella seguente forma:

$$|\psi_s\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle \quad (2.5)$$

dove α e β sono i relativi coefficienti di normalizzazione, per cui valga ovviamente $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Per rivelare lo stato di spin della particella, che, finché non viene misurata, permane nello stato combinazione di $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, viene utilizzato un particolare apparato sperimentale $\mathcal{A}$, che, per semplicità, immaginiamo capace di restituire solo due possibili stati binari: lo stato "acceso", descritto dal ket $|\circ\rangle$, e lo stato "spento", descritto dal ket $|\bullet\rangle$, attraverso, ad esempio, una lampadina lampeggiante. Nell'ipotesi in cui anche l'apparato sperimentale è descritto da un regime quantistico, i due unici e possibili stati $|\circ\rangle$ e $|\bullet\rangle$ descrivono la base in grado di generare il vettore di stato $|\chi_{\mathcal{A}}\rangle$ dello strumento, appartenente ad un opportuno spazio di Hilbert che indicheremo con $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$.

Si supponga infine l'apparato sia costruito in modo tale da "accendersi" nel caso in cui venisse rivelata una particella a spin up, e da rimanere "spento" nel caso del passaggio di una particella a spin down: in altre parole, appena la particella entra in interazione con lo strumento, evolve insieme ad esso restituendo lo stato di "on" o "off".

Matematicamente il fenomeno può essere descritto nel seguente modo: i due

spazi di Hilbert $\mathcal{H}_S$ e $\mathcal{H}_A$ descrivono due diversi sistemi fisici, associati, rispettivamente, alla particella e al rivelatore, perciò il sistema complessivo può essere descritto dal prodotto tensore dei due spazi di Hilbert, che indicheremo con $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$; nell'ipotesi in cui, inizialmente, il rivelatore è nello stato "spento" (e dunque $|\chi_A\rangle = |\bullet\rangle$), lo stato complessivo $|\Psi\rangle$ di tutto il sistema, in un istante t_0 prima dell'interazione, è allora descritto dalla seguente combinazione:

$$|\Psi(t_0)\rangle = \alpha |\uparrow\rangle \otimes |\bullet\rangle + \beta |\downarrow\rangle \otimes |\bullet\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \otimes |\bullet\rangle = |\psi\rangle \otimes |\bullet\rangle \quad (2.6)$$

Lo stato iniziale è dunque uno *stato prodotto*.

A questo punto applichiamo l'equazione di Schrödinger: lo stato $|\Psi(t_0)\rangle$ dovrà evolvere in un nuovo stato $|\Psi(t)\rangle$ una volta avvenuta l'interazione della particella con l'apparato sperimentale. Poiché si è supposto uno stato di spin up inducesse uno stato "acceso" nel rivelatore, si avrà la seguente evoluzione temporale:

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0)\rangle = \alpha |\uparrow\rangle \otimes |\bullet\rangle + \beta |\downarrow\rangle \otimes |\bullet\rangle &\longrightarrow \\ |\Psi(t)\rangle = \alpha |\uparrow\rangle \otimes |\circ\rangle + \beta |\downarrow\rangle \otimes |\bullet\rangle &\quad (2.7) \end{aligned}$$

Lo stato finale è dunque uno *stato entangled*, spesso detto anche *stato gatto*, in onore del celebre esperimento mentale di Schrödinger, in cui gli stati "accesi" e "spenti" erano sostituiti, per evidenziarne i caratteri controintuitivi, da un gatto vivo e un gatto morto.

Appare evidente la situazione paradossale creatasi: il sistema, ora macroscopico in seguito all'interazione particella-strumento, è sottoposto al principio di sovrapposizione, contrariamente alla nostra percezione della realtà che vedrebbe la lampadina $\bullet$ accesa $\circ$ spenta, e non in una sovrapposizione dei due stati in grado di causare interferenza. Questa condizione si riflette nell'operatore densità del sistema, che dal calcolo diretto risulta:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle\Psi| = |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |\circ\rangle \langle\circ| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |\bullet\rangle \langle\bullet| + \\ \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle\downarrow| \otimes |\circ\rangle \langle\bullet| + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle\uparrow| \otimes |\bullet\rangle \langle\circ| \quad (2.8) \end{aligned}$$

L'operatore densità presenta dunque termini misti che accoppiano gli stati di "acceso" e "spento" contemporaneamente: d'altra parte, statisticamente, è impossibile i due stati possano sovrapporsi in quanto nessuna osservazione rivelerebbe una simile condizione.

2.3 La catena di von Neumann

La situazione descritta nel paragrafo precedente si complica ulteriormente se si considera un autostato generato da un maggior numero di autovettori (potenzialmente infinito) e più apparati sperimentali in interazione tra loro e con il sistema quantistico. Si consideri infatti una particella descritta

dallo stato $|\psi_s\rangle$ generato dai vettori di base $|\phi_{s_i}\rangle$, ed una serie di l "step sperimentali" descritti dagli stati $|\chi_{\mathcal{A}}^{(1)}\rangle, |\chi_{\mathcal{A}}^{(2)}\rangle, \dots, |\chi_{\mathcal{A}}^{(l)}\rangle$, tutti in una particolare configurazione iniziale $|\chi_{\mathcal{A}_0}^{(1)}\rangle, |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(2)}\rangle, \dots, |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(l)}\rangle$. In questo modo lo stato iniziale del sistema può essere scritto come:

$$|\Psi(t_0)\rangle = \left[\sum_i c_i |\phi_{s_i}\rangle \right] \otimes |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(1)}\rangle \otimes |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(l)}\rangle \quad (2.9)$$

L'interazione della particella con i singoli sistemi restituisce una particolare evoluzione caratteristica della misurazione, perciò la funzione d'onda complessiva ad un generico istante t seguirà la seguente evoluzione temporale:

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0)\rangle &= \left[\sum_i c_i |\phi_{s_i}\rangle \right] \otimes |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(1)}\rangle \otimes |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\chi_{\mathcal{A}_0}^{(l)}\rangle \longrightarrow \\ |\Psi(t)\rangle &= \sum_i c_i \left[|\phi_{s_i}\rangle \otimes |\chi_{\mathcal{A}_i}^{(1)}\rangle \otimes |\chi_{\mathcal{A}_i}^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\chi_{\mathcal{A}_i}^{(l)}\rangle \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si giunge dunque ad uno stato entangled incredibilmente articolato, ma dove ogni sistema sperimentale è accoppiato a tutti gli altri tramite lo stesso indice i , in una struttura "a catena" che viene appunto indicata con il termine di *catena di von Neumann* [4]. Quest'ultima descrive, in ogni caso, un sistema macroscopico di stati in sovrapposizione, che ovviamente non può manifestarsi, dunque è necessario comprendere in quale "anello" della catena possa essere identificato il passaggio dal microscopico al macroscopico e l'annullamento di tutti termini ad eccezione di quello i -esimo misurato. Secondo Neumann e Wigner questo "anello" è da ricercare nell'ultimo passo della catena, cioè l'osservazione da parte dello sperimentatore, dotato di coscienza. Anziché seguire questa strada, tuttavia, si cercherà di spiegare il processo di decoerenza analizzando l'intervento dell'*ambiente*.

2.4 Decoerenza indotta dall'ambiente

La catena di von Neumann si mostra inefficace nella descrizione di un sistema quantistico macroscopico, in quanto restringe il suo raggio d'azione ad un sistema che isola apparato sperimentale $\mathcal{A}$ e sistema microscopico $\mathcal{S}$ da tutti i gradi di libertà del resto dell'universo; questi ultimi verranno analizzati in un sistema esterno che indicheremo con il termine di *ambiente* $\mathcal{E}$. Secondo Zurek (1985)[3], è proprio l'ambiente il responsabile del processo di decoerenza.

Si riprenda infatti, per semplicità, il sistema descritto da una particella in grado di assumere i due possibili stati di spin "up" e "down", e lo si accoppi con l'apparato sperimentale e l'ambiente esterno; in questo modo, lo stato complessivo sarà descritto da un vettore $|\Psi\rangle$ dello spazio tensore

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$. Detto allora $|\mathcal{E}_0\rangle$ lo stato dell'ambiente prima dell'interazione, l'evoluzione temporale del vettore $|\Psi\rangle$, in linea con quanto appreso nel paragrafo precedente, sarà:

$$|\Psi(t_0)\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle \otimes |\circ\rangle + \beta |\downarrow\rangle \otimes |\bullet\rangle) \otimes |\mathcal{E}_0\rangle \longrightarrow \alpha |\uparrow\rangle \otimes |\circ\rangle \otimes |\mathcal{E}_\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle \otimes |\bullet\rangle \otimes |\mathcal{E}_\downarrow\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (2.11)$$

Si osservi che non c'è modo, da parte dell'osservatore, di riuscire ad apprezzare le trasformazioni sull'ambiente nei nuovi vettori di stato $|\mathcal{E}_\uparrow\rangle$ e $|\mathcal{E}_\downarrow\rangle$ a causa dei numerosissimi gradi di libertà a cui è soggetta la realtà "esterna" all'esperimento. Lo sperimentatore, dunque, è più interessato ad analizzare le caratteristiche del sistema escludendo l'ambiente: in base a quanto appreso nel paragrafo 1.4.2, la qual cosa è resa possibile dall'analisi della *matrice densità ridotta* $\hat{\rho}_{SA}$ associata al sistema particella-strumento. Sfruttando la 1.44, si potrà allora scrivere:

$$\hat{\rho}_{SA} = \text{Tr}_E \hat{\rho} = |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\circ\rangle \langle \circ| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\bullet\rangle \langle \bullet| + \alpha\beta^* \langle \mathcal{E}_\downarrow | \mathcal{E}_\uparrow \rangle |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\circ\rangle \langle \bullet| + \alpha^*\beta \langle \mathcal{E}_\uparrow | \mathcal{E}_\downarrow \rangle |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\bullet\rangle \langle \circ| \quad (2.12)$$

Si osservi che si è posto $\langle \mathcal{E}_\uparrow | \mathcal{E}_\uparrow \rangle = \langle \mathcal{E}_\downarrow | \mathcal{E}_\downarrow \rangle = 1$ per le condizioni di normalizzazione: in questo modo, i termini diagonali della matrice densità $\hat{\rho}_{SA}$ diventano indipendenti dal tempo, e tutta la dipendenza temporale si "scarica" sui termini non diagonali. Porremo, per praticità, per $i \neq j$,

$$\langle \mathcal{E}_i | \mathcal{E}_j \rangle = \exp[\Gamma_{i,j}(t)] \quad i, j = \{\uparrow, \downarrow\} \quad (2.13)$$

La funzione Γ della 2.13 viene detta *funzione di decoerenza*; la sua espressione esplicita, in grado di determinare l'evoluzione temporale dei termini non diagonali, dipende dalla forma specifica dell'accoppiamento sistema-ambiente, dai vari parametri del modello microscopico, e ovviamente dallo stato iniziale del sistema. Nell'analisi che effettueremo nel prossimo capitolo si osserverà una decrescita nel tempo dei termini di sovrapposizione $\langle \mathcal{E}_i | \mathcal{E}_j \rangle$ per $i \neq j$, tanto che, dopo un certo tempo di decoerenza τ_D , sarà lecito scrivere:

$$\langle \mathcal{E}_i | \mathcal{E}_j \rangle \rightarrow \delta_{i,j} \quad t \gg \tau_D \quad (2.14)$$

In questo modo, la 2.12 assume la seguente forma:

$$\hat{\rho}_{SA} = |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\circ\rangle \langle \circ| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\bullet\rangle \langle \bullet| \quad (2.15)$$

L'espressione 2.15 è analoga alla 2.8, ma, a differenza di quest'ultima, *non presenta termini di interferenza*, persi a causa dell'interazione con l'ambiente. Le relazioni di fase caratterizzanti la sovrapposizione degli stati sono perciò state distrutte, e sono diventate dunque non osservabili: il sistema ha adesso assunto una forma classica.

Si osservi che l'osservatore ignora l'esito dell'esperimento finché non osserva l'accendersi o lo spegnersi della lampadina: potrà constatare l'esplicitarsi di uno dei due stati con le probabilità $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ rispettivamente, ma queste saranno di natura classica e dettate dalla semplice ignoranza nei riguardi della mistura statistica del sistema. Il sistema, seppur noto sperimentalmente solo al momento dell'osservazione, è in realtà passato in un regime classico *ben prima* che lo sperimentatore constataste lo stato dello strumento.

Capitolo 3

Modelli esattamente risolvibili

3.1 Il modello di Joos e Zeh

Alla base della teoria della decoerenza, secondo Zurek, vi è un'interazione tra il sistema quantistico in analisi e l'ambiente, che tende a determinare l'annullarsi dei termini diagonali della matrice densità (di natura esclusivamente quantistica) portando all'emergere dei termini di natura classica.

Per poter quantificare questa interazione e giustificare le nostre precedenti affermazioni, introdurremo un semplice modello dovuto a Joos e Zeh (1985) [2][4][5] di *decoerenza indotta dallo scattering con particelle ambientali*. Non verrà analizzata anche l'interazione con un apparato sperimentale per semplificare la trattazione, nell'ipotesi in cui sia l'ambiente stesso a fungere da strumento di misurazione, come può avvenire, ad esempio, in una camera a nebbia.

Il caso più semplice possibile di decoerenza dovuta allo scattering ambientale, che verrà formalizzato rigorosamente solo nel prossimo paragrafo, può essere modellizzato da una particella A , che costituirà il sistema fisico in esame, in urto con una particella B , che schematizzerà idealmente l'ambiente. Si supporrà la funzione d'onda della particella A , che indicheremo con $|\psi_A\rangle$, sia ottenuta dalla sovrapposizione di due soli contributi, che, nello spazio delle posizioni (per semplicità posto unidimensionale), assumeranno la forma di due pacchetti d'onda ben localizzati, centrati in due posizioni x ed x' e con baricentri in moto l'uno verso l'altro.

$$|\psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x\rangle + |\psi_{x'}\rangle) \quad (3.1)$$

Si supporrà invece la particella B , di vettore di stato $|\chi\rangle$, sia descritta da un pacchetto d'onda ben localizzato e centrato nell'origine:

$$|\psi_B\rangle = |\chi_0\rangle \quad (3.2)$$

Se si suppone inizialmente le due particelle siano sufficientemente lontane da non sviluppare interazione, lo stato iniziale complessivo sarà descritto da

uno stato puro, del tipo:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x\rangle \otimes |\chi_0\rangle + |\psi_{x'}\rangle \otimes |\chi_0\rangle) \quad (3.3)$$

Le due particelle, dopo un tempo sufficientemente grande, si "incontreranno", sviluppando interazione e dando inizio ad un processo d'urto. Nelle nostre considerazioni supporremo la particella A possieda una massa molto più grande della particella B , in modo che, in seguito all'urto, la particella A rimanga praticamente imperturbata, mentre la particella B venga "spazzata via" in seguito all'interazione.

Seppure non sia possibile descrivere come prodotto tensore tra $|\psi_A\rangle$ e $|\psi_B\rangle$ la funzione $|\Psi(t)\rangle$ negli istanti dell'interazione, possiamo conoscere la funzione d'onda del sistema una volta che le particelle, avvenuto l'urto, siano nuovamente sufficientemente lontane:

$$|\Psi(t \rightarrow \infty)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_x\rangle \otimes |\chi_x\rangle + |\psi_{x'}\rangle \otimes |\chi_{x'}\rangle) \quad (3.4)$$

Dove, con $|\chi_x\rangle$ e $|\chi_{x'}\rangle$ sono stati indicati i due possibili stati della particella B una volta avvenuta l'interazione.

A questo punto analizziamo l'operatore densità (ridotto) del sistema terminata l'interazione: in base a quanto visto nel paragrafo 2.4, si ha, analogamente,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S &= \text{Tr}_E |\Psi(\infty)\rangle \langle \Psi(\infty)| = \\ &= \frac{1}{2} [|\psi_x\rangle \langle \psi_x| + |\psi_{x'}\rangle \langle \psi_{x'}| + |\psi_x\rangle \langle \psi_{x'}| \langle \chi_{x'}|\chi_x\rangle + |\psi_{x'}\rangle \langle \psi_x| \langle \chi_x|\chi_{x'}\rangle] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dalle considerazioni effettuate nel Capitolo 2, sono i termini non diagonali a determinare l'interferenza quantistica. Il caso da noi analizzato è tuttavia molto particolare, in quanto appare evidente *i termini non diagonali siano tutti nulli*. Si analizzi infatti la situazione raggiunta una volta atteso il regime asintotico: abbiamo supposto la particella A fosse costituita da due pacchetti in moto l'uno verso l'altro: dunque, lo stato entangled che si viene a creare è costituito da due stati ben diversi. Il primo vede la particella pesante spingere la particella leggera "da destra verso sinistra", in modo da porla nello stato $|\chi_x\rangle$ mentre il secondo "da sinistra verso destra", in modo da spingerla nello stato $|\chi_{x'}\rangle$. I due stati tuttavia sono descritti da funzioni d'onda *del tutto delocalizzate nello spazio*: in altre parole, i ket $|\chi_x\rangle$ e $|\chi_{x'}\rangle$ non hanno punti in comune, in quanto le nuove possibili posizioni della particella leggera, avvenuto l'urto, sono molto distanti. Conseguenzialmente i prodotti scalari $\langle \chi_x|\chi_{x'}\rangle$ e $\langle \chi_{x'}|\chi_x\rangle$ sono certamente nulli, e, già nel microscopico, la particella pesante è stata soggetta a decoerenza.

Il modello è ovviamente molto semplicistico, in quanto tratta un caso unidimensionale e, in generale, nel caso della sovrapposizione a molti (o infiniti)

stati non è immediato supporre i termini diagonali siano nulli. In generale, infatti, *un solo processo di scattering non è sufficiente a causare decoerenza*. Analizzeremo perciò il trasformarsi del processo nell'ipotesi di *numerosi fenomeni d'urto*, in modo da massimizzarne gli effetti.

3.2 Decoerenza indotta dallo scattering con l'ambiente

Generalizziamo quanto analizzato nel paragrafo precedente.

Si consideri una particella "pesante" di massa M il cui stato iniziale è descritto dall'autostato $|\psi\rangle = |\mathbf{x}\rangle$ dell'operatore posizione $\hat{\mathbf{x}}$, e se ne consideri l'urto con una particella "leggera" di massa m , il cui stato iniziale verrà invece descritto dal ket $|\chi_0\rangle$. Detto V il potenziale di interazione tra le due particelle, l'operatore hamiltoniano del sistema può essere scritto come...

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{\mathbf{x}}^2 + V \quad (3.6)$$

Supponiamo, all'istante iniziale, le particelle siano abbastanza lontane da essere considerate in non interazione ($V = 0$), e dunque poter scrivere lo stato complessivo $|\Psi(0)\rangle$ del sistema come il seguente stato prodotto:

$$|\Psi(0)\rangle = |\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_0\rangle \quad (3.7)$$

L'evoluzione della funzione $|\Psi(0)\rangle$ sarà dettata dall'equazione di Schrödinger, che quindi assume la seguente forma:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\mathbf{x}}^2 |\Psi(t)\rangle - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{\mathbf{x}}^2 |\Psi(t)\rangle + V |\Psi(t)\rangle \quad (3.8)$$

Per praticità, riscriviamo la 3.8 in forma differente, dividendo ambo i membri per $\hbar^2/M$ e ponendo $\tau = \hbar t/M$, $\varepsilon = m/M$ e $\alpha = m/\hbar^2$, in modo da poter scrivere:

$$i \frac{d}{d\tau} |\Psi(\tau)\rangle = -\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}^2 |\Psi(\tau)\rangle - \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \alpha V \right) |\Psi(\tau)\rangle \quad (3.9)$$

Dalla 3.9 appare evidente che, nell'ipotesi in cui la massa della particella "pesante" sia molto più grande della massa delle particelle con cui essa urta, si può porre $\varepsilon \rightarrow 0$, e, come conseguenza, il termine $-\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}^2 |\Psi(\tau)\rangle$ della 3.9 può essere considerato come una piccola perturbazione [6]. In questo modo si crea una separazione tra il moto rapido della particella leggera e il moto lento della particella pesante, il cui contributo cinetico è praticamente nullo. La situazione è simile a quanto avviene, ad esempio, in un'approssimazione del tipo Born-Oppenheimer, dove il moto nucleare è considerato pressoché fisso rispetto al moto elettronico, con l'importante differenza che, stavolta, la

particella leggera non è responsabile del potenziale associato alla particella pesante. In questo modo si può supporre che, una volta avvenuta e cessata l'interazione tra le due particelle, si abbia il seguente andamento asintotico:

$$|\Psi(0)\rangle = |\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_0\rangle \longrightarrow |\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_{\mathbf{x}}\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (3.10)$$

dove abbiamo indicato con $|\chi_{\mathbf{x}}\rangle$ lo stato della particella leggera una volta subita l'interazione con lo stato $|\mathbf{x}\rangle$. Come si può osservare, nella nostra approssimazione abbiamo supposto la particella pesante praticamente ferma durante il processo di scattering e conseguentemente lo stato è rimasto praticamente immutato.

Terminata l'interazione, si può modellizzare lo scattering della particella leggera attraverso un'opportuna trasformazione attuata da un operatore unitario $\hat{S}$, detto *operatore di scattering*. In questo modo si potrà scrivere:

$$|\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_0\rangle \longrightarrow |\mathbf{x}\rangle \otimes \hat{S}_{\mathbf{x}} |\chi_0\rangle \quad (3.11)$$

dove si è aggiunto il pedice " $\mathbf{x}$ " all'operatore $\hat{S}$ per sottolinearne l'accoppiamento con lo stato $|\mathbf{x}\rangle$.

Ovviamente, più in generale, lo stato $|\psi\rangle$ della particella pesante non è descritto da un unico autostato $|\mathbf{x}\rangle$, ma una sovrapposizione di autostati, nella forma

$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \quad (3.12)$$

Il nostro ragionamento precedente, tuttavia, rimane analogo:

$$|\Psi(t_0)\rangle = \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_0\rangle \longrightarrow \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \otimes \hat{S}_{\mathbf{x}} |\chi_0\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (3.13)$$

Per analizzare la natura statistica del nostro problema, determiniamo ora l'operatore densità $\hat{\rho}$ agente su $\mathcal{H}$, che possiamo esprimere come prodotto tensore tra gli operatori ridotti $\hat{\rho}_s$ (agente sul sistema della particella pesante) e $\hat{\rho}_\varepsilon$ (agente sul sistema della particella leggera): poiché, per definizione,

$$\hat{\rho}_s(0) = |\psi\rangle \langle\psi| = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{x}') |\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}'| \quad (3.14)$$

$$\hat{\rho}_\varepsilon(0) = |\chi_0\rangle \langle\chi_0| \quad (3.15)$$

si ottiene, all'istante iniziale,

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_s(0) \otimes \hat{\rho}_\varepsilon(0) = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{x}') |\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}'| \otimes |\chi_0\rangle \langle\chi_0| \quad (3.16)$$

L'evoluzione temporale della 3.16 determina allora il seguente operatore densità:

$$\hat{\rho}(t) = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{x}') |\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}'| \otimes |\chi_{\mathbf{x}}\rangle \langle\chi_{\mathbf{x}'}| \quad (3.17)$$

La 3.17 può essere riscritta in funzione della matrice densità $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0)$ associata alla particella pesante all'istante iniziale, poiché:

$$\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) = \langle \mathbf{x} | \hat{\rho}_S | \mathbf{x}' \rangle = \int d\mathbf{y}' \int d\mathbf{y} \varphi(\mathbf{y}) \varphi^*(\mathbf{y}') \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x}' | \mathbf{y}' \rangle = \varphi(\mathbf{x}) \varphi^*(\mathbf{x}') \quad (3.18)$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\hat{\rho}(t) = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}'| \otimes |\chi_{\mathbf{x}}\rangle \langle \chi_{\mathbf{x}'}| \quad (3.19)$$

La 3.19 determina un'importante relazione in grado di descrivere l'evoluzione temporale della matrice densità ridotta $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$; calcolando infatti $\hat{\rho}_S$ come $\text{Tr}_{\mathcal{E}} \hat{\rho}$, dalla 1.44 (estesa al caso continuo) discende:

$$\hat{\rho}_S(t) = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x} \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}'| \langle \chi_{\mathbf{x}'} | \chi_{\mathbf{x}} \rangle \quad (3.20)$$

Da cui:

$$\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \langle \mathbf{x} | \hat{\rho}_S | \mathbf{x}' \rangle = \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \langle \chi_{\mathbf{x}'} | \chi_{\mathbf{x}} \rangle = \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle \quad (3.21)$$

Come già analizzato nel caso generale, per $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ si ha $\langle \chi_{\mathbf{x}} | \chi_{\mathbf{x}} \rangle = 1$, che comporta $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0)$, dunque i termini diagonali rimangono costanti. L'evoluzione dei termini non diagonali è invece dominata dal fattore $\langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle$, che sarà oggetto delle nostre prossime analisi.

Innanzitutto, si osservi che è possibile riscrivere il ket $|\mathbf{x}\rangle$ applicando l'operatore di traslazione $e^{-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}/\hbar}$ al ket $|\mathbf{0}\rangle$ (dove $\hat{\mathbf{p}}$ descrive l'impulso della particella pesante) associato allo stato di posizione nell'origine; in questo modo si ottiene:

$$|\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_0\rangle = e^{-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} |\mathbf{0}\rangle \otimes |\chi\rangle = e^{-i(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{x}/\hbar} |\mathbf{0}\rangle e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \otimes |\chi_0\rangle \quad (3.22)$$

dove $\hat{\mathbf{q}}$ descrive, invece, l'impulso della particella leggera. In questo modo, applicando l'operatore di scattering $\hat{S}$, si ottiene:

$$\hat{S}(|\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi_0\rangle) = e^{-i(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{x}/\hbar} \hat{S}(|\mathbf{0}\rangle e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \otimes |\chi_0\rangle) \quad (3.23)$$

Si osservi che abbiamo scambiato l'ordine di applicazione dell'operatore $\hat{S}$ e dell'operatore $e^{-i(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{x}/\hbar}$: in quest'ultimo appare infatti l'impulso complessivo $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}}$; poiché possiamo supporre il processo di scattering sia invariante rispetto ad una generica traslazione del sistema $\mathcal{SE}$ (il cui impulso complessivo è, appunto, $\hat{\mathbf{P}}$), supporremo $[\hat{S}, \hat{\mathbf{P}}] = 0$

Ricordando che $\hat{S}$ non agisce su $|\mathbf{x}\rangle$ nell'ipotesi di assenza di rinculo, ma solo sulla particella leggera "accoppiandosi" con la particella pesante, otteniamo:

$$\begin{aligned} \hat{S}|\mathbf{x}\rangle \otimes |\chi\rangle &= e^{-i(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{x}/\hbar} |\mathbf{0}\rangle \otimes \hat{S}_0 e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} |\chi_0\rangle = \\ &= |\mathbf{x}\rangle \otimes e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} |\chi\rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si ottiene, in questo modo, una formulazione alternativa dell'operatore $\hat{S}_{\mathbf{x}}$ della 3.11, in modo che risulti traslato rispetto all'operatore $\hat{S}_0$ agente nell'origine:

$$\hat{S}_{\mathbf{x}} = e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \quad (3.25)$$

Il fattore moltiplicativo $\langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle$ dei termini diagonali assume perciò la seguente forma:

$$\langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle = \langle \chi_0 | e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}'/\hbar} \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} | \chi_0 \rangle \quad (3.26)$$

O, equivalentemente,

$$\langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{E}} \left\{ \hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}'/\hbar} \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} \right\} \quad (3.27)$$

con $\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0) = |\chi_0\rangle \langle \chi_0|$.

Nella trattazione dello scattering quantistico è spesso utile esprimere l'operatore $\hat{S}$ nella seguente forma:

$$\hat{S} = \hat{\mathbb{I}} + i\hat{T} \quad (3.28)$$

dove l'operatore $\hat{T}$, come si può dimostrare (si veda ad esempio [7]), è strettamente legato alla probabilità di avvenimento dello scattering, e assume la seguente forma se proiettato nella base degli impulsi:

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar q} \delta(q - q') f(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \quad (3.29)$$

La funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ è un'altra quantità ricorrente nella teoria dello scattering, ed è detta appunto *ampiezza di scattering*; essa è strettamente correlata alla sezione d'urto differenziale del processo, poiché, come si può dimostrare,

$$|f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (3.30)$$

Inoltre, la condizione di unitarietà $\hat{S}\hat{S}^\dagger$ dell'operatore di scattering assume, in termini di $\hat{T}$, la seguente espressione:

$$\hat{T}\hat{T}^\dagger + i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) = 0 \quad (3.31)$$

Al fine di ottenere la matrice $T(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$, dovremo esprimere l'operatore densità $\hat{\rho}_{\mathcal{E}}(0)$ in una base degli impulsi $|\mathbf{q}\rangle$. Per farlo, sfrutteremo l'approccio di Hornberger e Sipe [8], supponendo il sistema ambientale sia rinchiuso in una "scatola" di volume di normalizzazione $V = L^3$. Definiamo allora degli autostati del momento $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$, che siano normalizzati sul volume V :

$$|\tilde{\mathbf{q}}\rangle = \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^{\frac{3}{2}} |\mathbf{q}\rangle \quad (3.32)$$

I vettori $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ costituiranno una base ortonormale sul volume V , tale che:

$$\sum_{\mathbf{q} \in Q_V} |\tilde{\mathbf{q}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{q}}| = \hat{\mathbb{I}}_V \quad (3.33)$$

dove Q_V è l'insieme di tutti impulsi corrispondenti allo spazio delle funzioni d'onda che verifichino le condizioni ai bordi imposte dal volume V , e $\hat{\mathbb{I}}_V$ descrive l'operatore identità in questo spazio.

In questo modo è possibile espandere la matrice densità iniziale $\hat{\rho}_\varepsilon(0)$ in termini degli impulsi normalizzati:

$$\hat{\rho}_\varepsilon(0) = \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) |\tilde{\mathbf{q}}\rangle \langle \tilde{\mathbf{q}}| \quad (3.34)$$

Dove i termini $\mu(\mathbf{q})$ descrivono le probabilità associati agli stati $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$, per cui ovviamente vale

$$\left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) = 1 \quad (3.35)$$

Poiché l'operatore $e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar}$ agisce sul vettore $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ come operatore di moltiplicazione, possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} \langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle &= \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \langle \tilde{\mathbf{q}} | e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}'/\hbar} \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x}/\hbar} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle = \\ &= \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{S}_0 | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ricordando le relazioni 3.28 e 3.31 è possibile riscrivere la 3.36 come segue:

$$\begin{aligned} \langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle &= \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | (\hat{\mathbb{I}} - i\hat{T}^\dagger) e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} (\hat{\mathbb{I}} + i\hat{T}) | \tilde{\mathbf{q}} \rangle = \\ &= \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[1 - \langle \mathbf{q} | \hat{T} \hat{T}^\dagger | \mathbf{q} \rangle + e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \right] = \\ &= 1 - \left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \left[\langle \mathbf{q} | \hat{T} \hat{T}^\dagger | \mathbf{q} \rangle - e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si osservi che, moltiplicando per l'operatore identità $\hat{\mathbb{I}}_V = \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} |\tilde{\mathbf{q}}'\rangle \langle \tilde{\mathbf{q}}'|$, i due termini in parentesi quadra diventano:

$$\langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} \hat{T}^\dagger | \tilde{\mathbf{q}} \rangle = \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}}' \rangle \langle \tilde{\mathbf{q}}' | \hat{T}^\dagger | \tilde{\mathbf{q}} \rangle = \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} \left| \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}}' \rangle \right|^2 \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle &= \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T}^\dagger e^{-i\hat{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} | \tilde{\mathbf{q}}' \rangle \langle \tilde{\mathbf{q}}' | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}} \rangle = \\ &= \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} e^{-i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \left| \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}}' \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

In questo modo, l'espressione 3.36 diventa:

$$\langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle = 1 - \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \mu(\mathbf{q}) \sum_{\mathbf{q}' \in Q_V} \left(1 - e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \right) \left| \langle \tilde{\mathbf{q}} | \hat{T} | \tilde{\mathbf{q}}' \rangle \right|^2 \quad (3.40)$$

Supponendo gli stati $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ siano "abbastanza vicini" nello spazio degli impulsi, sostituiamo il termine di sommatoria con un termine integrale:

$$\left[\frac{2\pi\hbar}{L} \right]^3 \sum_{\mathbf{q} \in Q_V} \rightarrow \int d\mathbf{q} \quad (3.41)$$

In questo modo, sostituendo $|\tilde{\mathbf{q}}\rangle$ secondo la 3.32, si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle &= \\ 1 - \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^3 \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) \int d\mathbf{q}' \left(1 - e^{i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')/\hbar} \right) \left| \langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle \right|^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Non resta dunque che valutare il termine $\langle \mathbf{q} | \hat{T} | \mathbf{q}' \rangle = T(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ che appare nell'integrale, o, in particolar modo, il suo modulo quadro:

$$|T(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^2 q^2} [\delta(q - q')]^2 |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \quad (3.43)$$

Si osservi come l'espressione precedente presenti la distribuzione δ di Dirac al quadrato, che, si faccia attenzione, non è definita in senso distribuzionale. Per valutarla, seguiremo l'approccio di Adler [9], sfruttando la rappresentazione integrale di Fourier:

$$\begin{aligned} \delta(q - q') &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-l/2}^{l/2} dx e^{i(q - q')x/\hbar} \Rightarrow [\delta(q - q')]^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \lim_{l \rightarrow \infty} \delta(q - q') \int_{-l/2}^{l/2} dx e^{i(q - q')x/\hbar} = \delta(q - q') \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l}{2\pi\hbar} \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'espressione di sopra può essere riscritta, equivalentemente, introducendo la velocità media $v(q)$ della particella leggera:

$$[\delta(q - q')]^2 = \delta(q - q') \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2\pi\hbar} v(q) \quad (3.45)$$

In questo modo si ottiene:

$$|T(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^2 q^2} \delta(q - q') \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2\pi \hbar} v(q) |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \quad (3.46)$$

Il parametro t può essere interpretato come l'intervallo di tempo durante cui ha luogo l'interazione che determina il processo di scattering tra le due particelle. La 3.46 mostra come la probabilità di transizione cresca in maniera approssimativamente lineare per tempi di interazione sufficientemente lunghi. Se quindi indichiamo con t un intervallo temporale molto più grande dei tempi tipici richiesti per un singolo processo di scattering (cosa che, come già detto in precedenza, sarà fondamentale per determinare la decoerenza), potremo scrivere:

$$|T(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^2 q^2} \delta(q - q') \frac{t}{2\pi \hbar} v(q) |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \quad (3.47)$$

In questo modo, sostituendo nella 3.42, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle = \\ & 1 - \left(\frac{t}{L^3} \right) \int d\mathbf{q} \frac{1}{q^2} \mu(\mathbf{q}) v(q) \int d\mathbf{q}' \left(1 - e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, \mathbf{q}')|^2 \delta(q - q') \end{aligned} \quad (3.48)$$

L'integrale di sopra può essere riscritto in coordinate polari in modo da assumere la seguente espressione, una volta integrata la distribuzione δ :

$$\begin{aligned} & \langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle = \\ & 1 - \left(\frac{t}{V} \right) \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) v(q) \int d\Omega' \left(1 - e^{iq(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

In base ai dati raccolti, abbiamo ora un'espressione esplicita in grado di descrivere l'evoluzione temporale della matrice densità $\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$: sostituendo infatti l'espressione di $\langle \chi_0 | \hat{S}_{\mathbf{x}'}^\dagger \hat{S}_{\mathbf{x}} | \chi_0 \rangle$ nella 3.21, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) - \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0)}{t} = \\ & - \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) \frac{1}{V} \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) v(q) \int d\Omega' \left(1 - e^{iq(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Perciò, nel limite in cui i tempi di scattering (supposti, in precedenza, sufficientemente lunghi) sono comunque piccoli rispetto ai tempi di rilassamento del fenomeno, si può porre:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \\ & - \rho_S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \frac{1}{V} \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) v(q) \int d\Omega' \left(1 - e^{iq(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

L'evoluzione descritta dalla 3.51 tuttavia tiene conto di un solo processo di scattering, che, come detto in precedenza, non favorisce sufficientemente la decoerenza. Se nell'intervallo di tempo t avvengono allora N scattering tra la particella pesante ed N particelle leggere, possiamo estendere la 3.51 semplicemente moltiplicando per un fattore N :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \\ - \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \frac{N}{V} \int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) v(q) \int d\Omega' \left(1 - e^{iq(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

È utile riscrivere l'ultima espressione come segue: innanzitutto, è legittimo pensare che la probabilità $\mu(\mathbf{q})$, per l'isotropia del problema, non dipenda dall'orientazione di $\mathbf{q}$, ma solo dal suo modulo; introduciamo allora la funzione $\nu(q)$ tale che:

$$\mu(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \frac{\nu(q) dq d\Omega}{4\pi} \quad (3.53)$$

Dalla condizione di normalizzazione $\int d\mathbf{q} \mu(\mathbf{q}) = 1$, appare evidente debba valere:

$$\int dq \nu(q) = 1 \quad (3.54)$$

La funzione $\nu(q)$ descrive quindi la densità di probabilità di osservare una particella ad impulso compreso tra q e $q + dq$. In questo modo è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \\ - \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \frac{N}{V} \int dq \nu(q) v(q) \int \frac{1}{4\pi} d\Omega d\Omega' \left(1 - e^{iq(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

In questo senso, d'altra parte, la quantità $\frac{N}{V} \nu(q)$ assume la forma di una densità numerica di particelle nel volume V , che indicheremo con $\varrho(q)$. La 3.52 acquista così la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \\ - \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{1}{4\pi} d\Omega d\Omega' \left(1 - e^{iq(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')/\hbar} \right) |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Per riuscire ad analizzare la natura fisica dell'espressione di sopra ci porremo in due diversi regimi, osservando i medesimi risultati. Si supponga ad esempio, preliminarmente, valga $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda

media associata ad una particella leggera. Conseguenzialmente $q|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \gg 1$, e dunque si può supporre il termine esponenziale nell'integrale praticamente nullo. In questo modo,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = -\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{1}{4\pi} d\Omega d\Omega' |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \quad (3.57)$$

Poiché l'ampiezza di scattering in modulo quadro coincide con la sezione d'urto differenziale del processo, il secondo integrale restituisce la sezione d'urto complessiva dello scattering tra particella leggera e pesante, e dunque:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = -\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \int dq \varrho(q) v(q) \sigma_{tot} \quad (3.58)$$

Posto allora

$$\Gamma = \int dq \varrho(q) v(q) \sigma_{tot} \quad (3.59)$$

i termini non diagonali della matrice densità sono descritti dalla seguente evoluzione temporale, caratterizzata da un'esponenziale decrescente nel tempo:

$$\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) e^{-\Gamma t} \quad (3.60)$$

Il medesimo risultato si osserva nell'ipotesi in cui $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \ll \lambda$ e dunque $q|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \ll 1$: in questo caso è lecito sviluppare il termine esponenziale fino al primo termine non nullo, che, vedremo, essere il secondo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = & -\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \int dq \varrho(q) v(q) \int \frac{1}{4\pi} d\Omega d\Omega' |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 \times \\ & \left(-\frac{i}{\hbar} q(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \frac{1}{2\hbar^2} q^2 [(\mathbf{n}-\mathbf{n}') \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')]^2 \right) \end{aligned} \quad (3.61)$$

L'integrale del termine in $(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ è certamente nullo, in quanto descrive l'integrale, in tutto lo spazio, di una funzione dispari per una funzione pari (cioè la quantità $|f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2$). In questo modo si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = & \\ -\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 \int dq \varrho(q) v(q) \frac{q^2}{\hbar^2} \int \frac{1}{8\pi} d\Omega d\Omega' |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 (|\mathbf{n}-\mathbf{n}'|^2) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Posto allora

$$\sigma' = \int \frac{1}{8\pi} d\Omega d\Omega' |f(\mathbf{q}, q\mathbf{n}')|^2 (|\mathbf{n}-\mathbf{n}'|^2) \quad (3.63)$$

$$\Lambda = \int dq \varrho(q) v(q) \frac{q^2}{\hbar^2} \sigma' \quad (3.64)$$

si ottiene la seguente evoluzione temporale per $\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t)$:

$$\rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = \rho_s(\mathbf{x}, \mathbf{x}', 0) e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 \Lambda t} \quad (3.65)$$

Dalle equazioni 3.60 e 3.65 si può osservare come, coerentemente con le nostre previsioni, atteso un intervallo temporale sufficientemente grande (dell'ordine di $\tau_D = \frac{1}{\Gamma}$ o $\tau_D = \frac{1}{\Lambda|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}$) i termini diagonali della matrice densità scompaiano portando alla perdita di interferenza del sistema associato alla particella pesante: quest'ultima, immersa in un bagno termico di particelle leggere, è perciò passata in regime classico. Il modello di decoerenza qui introdotto si dimostra dunque sperimentalmente efficace senza introdurre alcun assioma del collasso.

Qui di seguito riportiamo alcuni dati sperimentali raccolti da Joos e Zeh in merito ai coefficienti Λ (in $cm^{-1}s^{-1}$) associati a particelle di diversa grandezza e ad impulsi fissati.

	$a = 10^{-3}cm$	$a = 10^{-5}cm$	$a = 10^{-6}cm$
Radiazione cosmica di fondo	10^6	10^{-6}	10^{-12}
Fotoni di 300K	10^{19}	10^{12}	10^6
Molecole d'aria	10^{36}	10^{32}	10^{30}
Vuoto di lab. ($10^3 part./cm^3$)	10^{23}	10^{19}	10^{17}

La teoria della decoerenza qui descritta ha avuto numerosi riscontri sperimentali negli ultimi decenni. Tra i più importanti, ricordiamo gli esperimenti di interferometria effettuati dal gruppo di Zeilinger [10]: questi hanno rivelato figure di interferenza prodotte da molecole di *fullerene* C_{70} , cioè macromolecole di carbonio relativamente grandi, se paragonate alle scale atomiche; ciò che si osserva è un andamento decrescente della luminosità delle frange d'interferenza all'aumentare della densità del gas ambientale, o, equivalentemente, della sua pressione, come si può osservare in figura 3.1. Il fenomeno è in totale accordo con quanto descritto nella nostra analisi: l'aumento della densità, e dunque del numero di particelle gassose nel sistema, rende più probabile i fenomeni di scattering delle molecole di fullerene, e dunque i processi di decoerenza a cui esse sono soggette.

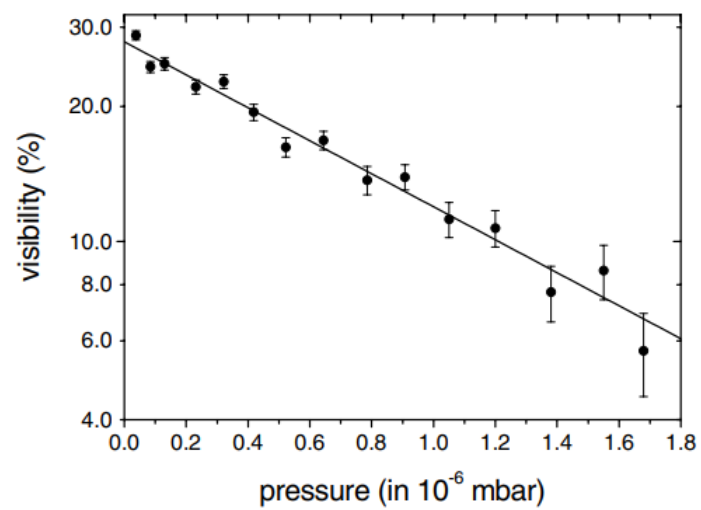


Figura 3.1: Visibilità delle frange di interferenza del C_{70} in funzione della pressione dell'argon a temperatura ambiente

Conclusioni

Alla luce di quanto analizzato, appare evidente come l'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica si mostri poco naturale ed intuitiva, in quanto tendente a separare la realtà classica dalla realtà quantistica senza definirne un confine preciso. Il collasso del pacchetto d'onda viene infatti postulato ad hoc e non approfondisce l'analisi, in termini quantistici, del processo di misura.

Indubbiamente un ricchissimo filone di ricerca ha analizzato, nel secolo scorso, l'evoluzione di una particella quantistica nella cosiddetta *approssimazione semiclassica*, cioè nel limite in cui la quantità $\hbar$ viene considerata infinitesima (come avviene, appunto, in analisi macroscopiche). La teoria semiclassica non può però spiegare la transizione da un comportamento quantistico ad un comportamento classico nei fenomeni di interazione tra particelle ed apparato sperimentale. La teoria della decoerenza indotta dall'ambiente, al contrario, supera questi limiti *nella misura in cui prende in considerazione l'ambiente come fattore essenziale nella descrizione della dinamica quantistica di un sistema microscopico*. Si pensi, ad esempio, come sia impossibile schermare totalmente un apparato sperimentale dalle particelle di gas atmosferico; a queste si aggiungono ulteriori fattori di disturbo molto più complessi da ridurre, come l'urto di fotoni associati alla radiazione cosmica di fondo o con i neutrini provenienti dal sole.

Secondo Zurek [3], infatti: "Un modo per capire l'esistenza obbiettiva indotta dall'ambiente è di riconoscere che gli osservatori - specialmente l'osservatore uomo - non ha mai misurato nulla direttamente. Infatti la maggior parte dei nostri dati sull'Universo sono acquisiti quando l'informazione sul sistema di interesse è intercettata e diffusa dall'ambiente. L'ambiente registra l'informazione sugli stati indicatori e quindi è la sola informazione sugli stati indicatori realmente utilizzabile.". Nella nostra trattazione, l'ambiente è stato schematizzato da un "pulviscolo" di particelle leggere, in urto con il sistema in esame: quest'ultimo ha determinato lo smorzamento, nel tempo, dei termini quantistici della matrice densità, portando ad una trattazione dell'analisi del fenomeno puramente classica, cioè vicina alla nostra esperienza quotidiana non in grado di apprezzare una sovrapposizione quantistica di stati. Contrariamente alla teoria del collasso di von Neumann, l'analisi della decoerenza indotta dall'ambiente afferma perciò che la riduzione della fun-

zione d'onda non ha nulla a che fare con la coscienza o con l'osservazione di uno sperimentatore, in quanto essa è già avvenuta ben prima della misurazione: in riferimento al paradosso del gatto di Schrödinger, si direbbe che il gatto è *o* vivo *o* morto a prescindere dalla curiosità dello sperimentatore di aprire o non aprire la scatola.

Bibliografia

- [1] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F.: *Quantum Mechanics Vol. 1*, Wiley (1977)
- [2] Maximilian A: *Decoherence: And the Quantum-To-Classical Transition*, Springer (2007)
- [3] Zurek W.H.: *Decoherence and Transition from Quantum to Classical*, Physics Today, 44:36-44 (1991)
- [4] Giulini D., Joos E., Kiefer C., Kupsch J., Stamatescu I.O., Zeh H.D.: *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer (2003)
- [5] Joos E., Zeh H.D.: *The emergence of classical properties through interaction with the environment*, Zeitschrift für Physik B Condensed Matter (1985)
- [6] Duerr D., Figari R., Teta A.: *The Joos-Zeh formula and the environment decoherence*, International Journal Of Modern Physics B (2004)
- [7] Sakurai J.J.: *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1994)
- [8] Hornberger K., Sipe J.E.: *Collisional decoherence reexamined*, Phys. Rev. A 68, 012105 (2003)
- [9] Adler S.L.: *Normalization of collisional decoherence: Squaring the delta function, and an independent cross-check*, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 14067–14074 (2006)
- [10] Arndt M., Brezger B., Hackermuller L., Hornberger K., Zeilinger A.: *Decoherence in a Talbot–Lau interferometer: the influence of molecular scattering*, Appl. Phys. B 77, 781-787 (2003)