

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**L'operatore di Dirac in dimensione 1+1: dalla
retta ai grafi metrici**

Relatori:

Dott. Lorenzo Tentarelli

Candidato:

Andrea Aurigemma

Matr. N85001136

Anno Accademico 2018/2019

Abstract

L'obiettivo di questa tesi è quello di fornire un quadro generale delle caratteristiche dell'operatore di Dirac su domini spaziali unidimensionali. Al fine di rendere più immediata la lettura dell'elaborato, si riporta nel seguito la struttura della tesi e una breve descrizione dei suoi capitoli.

Nel **Capitolo 1** si riportano alcune applicazioni dell'operatore di Dirac nella fisica moderna, con particolare riguardo alla fisica dello stato solido, e si menzionano alcuni progressi teorici nello studio delle applicazioni dell'operatore di Dirac a problemi a più particelle.

Nel **Capitolo 2** si discute il caso in cui il dominio spaziale dell'operatore è la retta reale. In particolare, si esibiscono il dominio di autoaggiuntezza e lo spettro dell'operatore e si introduce la nozione di stati a energia positiva e negativa. Infine, si analizza un effetto della dinamica governata dall'operatore di Dirac che non ha analogo classico: lo *Zitterbewegung*.

Nel **Capitolo 3** si introduce il concetto di *grafo metrico* e si discute come trasportare l'operatore di Dirac su queste particolari strutture topologiche. In particolare si dimostra come una particolare estensione dell'operatore di Dirac, con condizioni di raccordo di tipo *Kirchhoff*, sia effettivamente autoaggiunta, e se ne ricavano informazioni sullo spettro.

Nell'**Appendice A** si ricava una formula esplicita per il propagatore temporale della dinamica prescritta dall'operatore di Dirac sulla retta reale, passando per il risultato più classico del propagatore temporale per l'equazione di Klein-Gordon.

Nell'**Appendice B** si richiamano alcune nozioni circa le estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici densamente definiti su spazi di Hilbert. In particolare, ci si sofferma sulla teoria delle *triple di bordo*, che è il presupposto teorico sul quale si basano i risultati del terzo capitolo.

Indice

1	Introduzione	3
2	L'operatore di Dirac sulla retta	7
2.1	Introduzione al caso monodimensionale	8
2.2	Nozioni preliminari	10
2.3	Autoaggiuntezza e spettro dell'operatore di Dirac sulla retta . . .	14
2.4	Sottospazi a energia positiva e negativa	16
2.5	Un effetto non classico: lo Zitterbewegung	18
3	L'operatore di Dirac su grafi metrici	22
3.1	Autoaggiuntezza dell'operatore di Dirac su grafi metrici	24
3.2	Spettro dell'operatore di Dirac su grafi metrici	28
A	Una forma esplicita del propagatore per l'operatore di Dirac	32
A.1	Problema di Cauchy per l'equazione di Dirac	32
A.2	Problema di Cauchy per l'equazione di Klein-Gordon	34
B	Cenni sulla teoria delle estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici	40
B.1	Teoria delle triple di bordo	42
B.2	Applicazioni agli operatori differenziali	45

Capitolo 1

Introduzione

Questo elaborato di tesi è incentrato sull'analisi delle proprietà matematiche dell'operatore di Dirac definito su domini spaziali unidimensionali. Lo studio di tale operatore è giustificato da molteplici motivazioni che spaziano da contesti fisico-applicativi ad ambiti più strettamente teorico-matematici.

Nella ricerca applicata, ed in particolare nella fisica dei sistemi condensati, un crescente interesse si è generato attorno ai cosiddetti *materiali di Dirac* (si veda a tal proposito la Figura 1.1), i quali costituiscono una classe distinta dai metalli convenzionali e dai semiconduttori drogati ([33]).

Material	Pseudo-spin	Energy scale
Graphene, silicene, germanene	Sublattice	1 – 3 eV
Artificial graphenes	Sublattice	10^{-8} – 0.1 eV
Hexagonal layered heterostructures	Emergent	0.01 – 0.1 eV
Hofstadter butterfly systems	Emergent	0.01 eV
Graphene–hBN heterostructures in high magnetic fields		
Band inversion interfaces: SnTe/PbTe, CdTe/HgTe, PbTe	Spin–orbit ang. mom.	0.3 eV
2D topological insulators: HgTe/CdTe, InAs/GaSb, Bi bilayer, ...	Spin–orbit ang. mom.	<0.1 eV
3D topological insulators: Bi _{1-x} Sb _x , Bi ₂ Se ₃ , strained HgTe, Heusler alloys, ...	Spin–orbit ang. mom.	≲0.3 eV
Topological crystalline insulators: SnTe, Pb _{1-x} Sn _x Se	Orbital	≲0.3 eV
<i>d</i> -wave cuprate superconductors	Nambu pseudo-spin	≲0.05 eV
³ He	Nambu pseudo-spin	0.3 μeV
3D Weyl and Dirac SM	Energy bands	Unclear
Cd ₃ As ₂ , Na ₃ Bi		

Figura 1.1: Materiali Dirac classificati per tipologia, valore dello pseudo-spin e scala dell'energia in cui è presente solo lo spettro Dirac.

L'impiego di tale terminologia si riferisce in particolare all'utilizzo, come ope-

ratore “efficace” nella descrizione di vari fenomeni fisici in opportuni intervalli di energia, dell’operatore di Dirac. L’appartenenza dei fenomeni considerati a contesti diversi e, apparentemente, senza punti in comune ha reso interessante lo studio delle motivazioni fisiche che permettono una descrizione in termini di tale operatore.

Alcuni tra i modelli fisici più celebrati negli ultimi anni sono: il grafene, che è valso il premio Nobel nel 2010 a A. Geim e K. Novoselov; gli isolanti topologici, oggetto del premio Nobel nel 2016 a F. Duncan, M. Haldane e J. M. Kosterlitz ([15, 27]). In entrambi i casi il modello matematico che descrive il comportamento dei sistemi fisici è basato sulle proprietà dell’operatore di Dirac.

Contesti e comportamenti così diversi formano un mosaico il cui elemento comune è il comportamento a bassa energia. Tradizionalmente è proprio il comportamento delle eccitazioni a bassa energia che permette classificazioni tradizionali come quelle tra materiali isolanti o conduttori. I metalli sono caratterizzati da uno spazio delle fasi finito per le eccitazioni di bassa energia e il calore specifico cresce linearmente, all’ordine dominante, con la temperatura. Per i materiali isolanti è richiesta una quantità di energia finita per superare il gap energetico per la conduzione elettronica mentre le coppie elettrone-lacuna sono soppresse esponenzialmente a bassa temperatura (si veda a tal proposito la Figura 1.2).

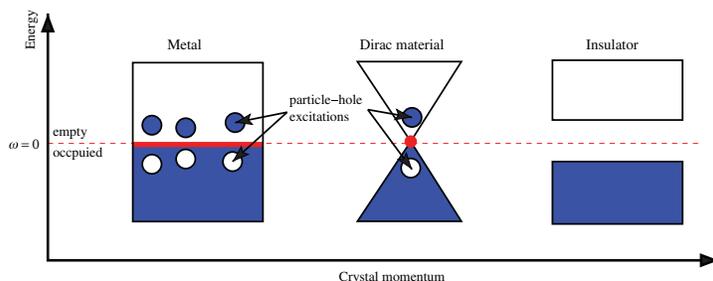


Figura 1.2: Confronto tra il mare di Fermi per metalli, materiali di Dirac a massa nulla e isolanti. Nei metalli in dimensione spaziale d la superficie del mare di Fermi ha dimensione $d_{FS} = d - 1$. Nei materiali di Dirac, con $d \geq 2$ abbiamo che la dimensione della superficie del mare di Fermi è $d_{Dirac} \leq d - 2$ quando il livello di Fermi coincide con i punti Dirac. Nel caso del grafene, per $d = 2$ la superficie coincide con un singolo punto.

Per molti materiali, come i metalli ed i semiconduttori, la descrizione della di-

namica delle particelle avviene mediante un'Hamiltoniana di tipo Schrödinger $H_S = \frac{p^2}{2m^*}$, dove m^* rappresenta la cosiddetta massa efficace. Al contrario nei materiali di Dirac le particelle non obbediscono ad una dinamica governata da H_S , ma ad una di tipo Dirac della forma

$$H_D = c\sigma_1 p + mc^2\sigma_3 \quad (1.1)$$

dove c è la velocità della luce, m è la massa e $\sigma_{1,2,3}$ sono le matrici di Pauli. Nel limite di massa nulla il gap naturalmente presente nello spettro dell'operatore di Dirac viene chiuso ma la legge di dispersione rimane comunque diversa da quella parabolica prescritta dall'equazione di Schrödinger. Inoltre, nel caso Dirac con massa finita, le particelle e le lacune rimangono sempre interconnesse e hanno la stessa massa connessa con il gap energetico. Nel caso dei fermioni governati dall'equazione di Schrödinger, invece, elettroni e lacune possono avere diverse masse e dinamiche regolate da diversi operatori.

I materiali di Dirac, pur essendo eterogenei, hanno delle proprietà che sono diretta conseguenza delle caratteristiche dello spettro delle quasi-particelle. Esistono simmetrie di natura fisica che controllano la formazione dei *punti di Dirac* nello spettro di eccitazione. Più nello specifico, esempi di tali simmetrie sono la simmetria per inversione temporale negli isolanti topologici e la simmetria di sottoreticolo per il grafene, come mostrato in Figura 1.3. La possibilità di modellizzare questi materiali con l'operatore di Dirac è stata studiata in alcuni casi semplificati ([1, 13, 14]).

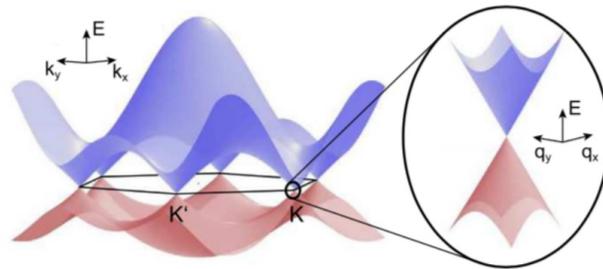


Figura 1.3: Bande di dispersione per un reticolo a nido d'ape, come il grafene, nello spazio duale dei quasi-momenti, in corrispondenza dei punti di Dirac.

Un'altra interessante applicazione dell'operatore di Dirac è stata proposta in

[11], dove vengono poste alcune questioni su sistemi a molte particelle il cui comportamento individuale è descritto dall'equazione di Dirac in presenza di un potenziale coulombiano (si vedano anche[12, 20]). Queste discussioni sono sollevate e stimolate dalla ricerca in chimica-fisica che, seppur in maniera non formalmente rigorosa, pone questioni sull'utilizzo dell'equazione di Dirac per un programma di ricerca analogo a quello della cosiddetta "stability of matter". In tempi molto recenti si è riuscito a caratterizzare in maniera corretta lo spettro di un sistema a due particelle descritte tramite l'equazione di Dirac con un potenziale di interazione coulombiano e ad ottenere come risultato l'esistenza di possibili stati legati, ovvero configurazioni stabili ([10]).

In questo elaborato di tesi ci si è voluti concentrare su modelli dell'equazione di Dirac su rette e *grafi metrici*. Per quanto riguarda Dirac sulla retta, esso costituisce un buon paradigma per lo studio delle proprietà dell'operatore di Dirac senza le difficoltà tecniche che emergono in dimensione maggiore. La generalizzazione a grafi metrici è poi naturale in quanto questi domini mantengono le caratteristiche proprie della dimensione 1 pur presentando topologia non banale. Inoltre, nella letteratura fisica, strutture di questo tipo sono utilizzate come modelli efficaci nella fisica dei sistemi condensati (si vedano ad esempio [16, 17, 21]).

In particolare, l'uso dell'equazione di Dirac non lineare su strutture sottili e ramificate come modello efficace in fisica dei condensati e ottica è stato proposto in [18, 19, 25, 32]. Lo studio dell'operatore di Dirac su grafi metrici risulta quindi essere un necessario passo preliminare per lo studio di tali problemi non lineari ([4, 5, 6]).

Capitolo 2

L'operatore di Dirac sulla retta

L'equazione di Dirac è stata storicamente portata all'attenzione della comunità scientifica come una prima formulazione della meccanica quantistica che incorporasse al suo interno i postulati della relatività ristretta.

Sebbene attualmente le teorie in grado di spiegare fenomeni su scale atomiche e subatomiche siano orientate verso la teoria quantistica dei campi e la formulazione di Dirac della meccanica quantistica rivesta un ruolo di minore importanza in fisica teorica, l'equazione di Dirac è ancora di interesse per la fisica matematica, dove appare nello studio di modelli efficaci di alcuni sistemi fisici (come accennato nel Capitolo 1).

Nella meccanica quantistica non relativistica, il principio di corrispondenza che prevede di sostituire al momento coniugato \vec{p} dell'Hamiltoniana classica di particella libera l'operatore differenziale $-i\hbar\nabla$ porta all'Hamiltoniana di particella libera

$$\mathcal{H}_S := -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \quad (2.1)$$

e all'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \mathcal{H}_S\psi(x,t). \quad (2.2)$$

D'altro canto, dalla teoria della relatività ristretta, la nuova relazione tra energia e momento per una particella libera è

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \quad (2.3)$$

La prima equazione proposta per incorporare i postulati della relatività speciale applicando le usuali regole di corrispondenza, è l'equazione di Schrodinger frazionaria, ovvero

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \mathcal{H}_{\text{K-G}} \psi(x, t), \quad (2.4)$$

dove

$$\mathcal{H}_{\text{S-F}} := \sqrt{-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^4}. \quad (2.5)$$

Una rappresentazione alternativa, ad essa equivalente, è data, inoltre, dall'equazione di Klein-Gordon, che si ottiene elevando al quadrato (in senso operatoriale), i due lati della (2.5), ottenendo

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = \mathcal{H}_{\text{K-G}} \psi(x, t), \quad (2.6)$$

dove

$$\mathcal{H}_{\text{K-G}} := -c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^4. \quad (2.7)$$

Queste due equazioni risultano non essere adeguate allo studio della dinamica di particelle come gli elettroni per vari motivi. Infatti, dal punto di vista fisico, l'equazione agli autovalori per l'atomo di idrogeno una volta aggiunto all'energia a riposo un potenziale di tipo Coulombiano non restituisce i valori sperimentali noti, mentre dal punto di vista matematico la radice quadrata di un operatore differenziale è un operatore non locale, e dunque la derivata rispetto al tempo della funzione d'onda calcolata in un punto dello spazio dipende dai valori che essa assume in tutto lo spazio.

Un approccio differente allo studio della dinamica di particelle relativistiche verrà, invece, proposto nel 1926, da Paul A.M. Dirac. Nel seguito del capitolo verrà presentato tale approccio (seguendo estensivamente [29, 30]) e le proprietà che ne discendono nel caso della retta reale. Questo caso particolare include infatti la quasi totalità delle caratteristiche del modello di Dirac, senza l'aggravio delle difficoltà tecnico-matematiche che si incontrano in dimensione superiore.

2.1 Introduzione al caso monodimensionale

L'idea alla base dell'approccio di Dirac è che i gradi di libertà addizionali dovuti alle matrici, e in particolare la generale non commutatività del prodotto tra matrici, permetta di linearizzare la relazione, in principio quadratica, tra energia e momento (2.3). La forma proposta è

$$E = \alpha cp + \beta mc^2, \quad (2.8)$$

con α e β matrici da determinarsi. Quindi, elevando al quadrato, si ottiene

$$E^2 = (\alpha cp + \beta mc^2)^2 = \alpha^2 c^2 p^2 + \alpha\beta pmc^3 + \beta\alpha pmc^3 + \beta^2 m^2 c^4 \quad (2.9)$$

che, confrontata con la (2.3), implica le seguenti relazioni

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 0, \quad \alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{1}, \quad (2.10)$$

dove si sono indicate con $\mathbb{0}$ e $\mathbb{1}$ rispettivamente la matrice nulla e la matrice identica. Inoltre, affinché l'operatore corrispondente possa essere autoaggiunto, le matrici α e β devono necessariamente essere Hermitiane. La scelta di tali matrici non è univoca. Infatti, si può verificare che qualsiasi coppia di matrici di Pauli (Hermitiane per definizione) verifica la (2.10). La coppia che si considera nella tesi è quella della cosiddetta *rappresentazione standard*, ossia la coppia data dalle matrici α e β che sono rispettivamente la prima e la terza matrice di Pauli σ_1 e σ_3 , ovvero

$$\alpha = \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Fatta questa scelta, l'espressione di E risulta essere

$$E = \sigma_1 pc + \sigma_3 mc^2 = \begin{pmatrix} mc^2 & pc \\ pc & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

e quindi, dalla relazione di corrispondenza classica $p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}$ si ottiene l'operatore associato, ovvero l'operatore di Dirac di particella libera in una dimensione

$$H = \alpha c \left(-i\hbar \frac{d}{dx} \right) + \beta mc^2 \quad (2.13)$$

che, nella rappresentazione matriciale standard, assume la forma

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 & -ic\hbar \frac{d}{dx} \\ -ic\hbar \frac{d}{dx} & -mc^2 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Chiaramente, tale operatore non può agire su una funzione scalare, ma è invece da pensarsi applicato, come operatore lineare, a funzioni a valori vettoriali del tipo

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

dette anche, nel caso monodimensionale, *2-spinori*. Più precisamente, l'azione dell'operatore H su un 2-spinore è definita come

$$H\psi(x) = \begin{pmatrix} mc^2\psi_1(x) - ic\hbar\psi_2'(x) \\ -ic\hbar\psi_1'(x) - mc^2\psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

dove l'apice denota la derivazione rispetto alla variabile spaziale.

Ciò detto, è possibile introdurre l'equazione che governa l'evoluzione temporale dello stato della particella libera descritto da un 2-spinore, ovvero l'equazione di Dirac lineare,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = H\psi(x,t). \quad (2.17)$$

Osservazione 2.1. *Nel seguito, si ometterà la costante fisica \hbar , che può essere assorbita mediante un cambiamento di variabili.*

Nel proseguo del capitolo si presentano le proprietà principali dell'operatore H e la buona positura del problema di Cauchy associato a (2.17). A tal fine, è necessario introdurre alcune nozioni preliminari.

2.2 Nozioni preliminari

Per prima cosa, definito uno spazio di Hilbert \mathcal{H} appropriato, al quale apparteranno gli spinori coinvolti (che nel caso relativistico assumono il ruolo delle funzioni d'onda), ogni quantità misurabile, anche detta osservabile (come l'energia, il momento o la posizione) è rappresentata da un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} . Lo stato del sistema, a un certo istante t_0 , è descritto da un vettore $\psi(t_0) \in \mathcal{H}$ opportunamente normalizzato all'unità nella norma dello spazio di riferimento o, più precisamente, da un rappresentante della classe di equivalenza che identifica due vettori dello spazio che differiscono per una fase globale costante

$$|\psi\rangle = \{e^{i\alpha}\psi, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (2.18)$$

Tale definizione consistente con il formalismo della meccanica quantistica, in quanto tutti gli oggetti matematici di rilevanza fisica, generalmente moduli quadri di prodotti scalari, non dipendono dal particolare rappresentante scelto all'interno della classe di equivalenza.

Coerentemente con l'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica

classica, si assume inoltre che gli spinori siano a quadrato sommabile, ovvero che lo siano le due componenti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_j(x)|^2 dx < \infty, \quad j = 1, 2. \quad (2.19)$$

L'insieme degli spinori a quadrato sommabili, solitamente indicato con $L^2(\mathbb{R})^2$ o $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$ può essere dotato della struttura di spazio di Hilbert se munito del prodotto scalare

$$(\phi, \psi)_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2} = \int_{\mathbb{R}} (\phi(x), \psi(x))_{\mathbb{C}^2} dx, \quad (2.20)$$

dove, fissato $x \in \mathbb{R}$, $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^2}$ indica il prodotto scalare standard in \mathbb{C}^2

$$(\phi(x), \psi(x))_{\mathbb{C}^2} := \phi_1(x)\overline{\psi_1(x)} + \phi_2(x)\overline{\psi_2(x)}, \quad (2.21)$$

da cui segue la norma

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2}^2 = (\psi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \|\psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 dx, \quad (2.22)$$

dove $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^2}$ è la norma euclidea di \mathbb{C}^2

$$\|\psi(x)\|_{\mathbb{C}^2} = \sqrt{|\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2}. \quad (2.23)$$

È altresì opportuno richiamare alcune proprietà fondamentali degli operatori autoaggiunti $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definiti su un dominio $\mathcal{D}(A) := \{\psi \in \mathcal{H} : \|A\psi\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty\}$ denso in \mathcal{H} . In particolare, nel seguito ci si concentrerà sul caso in cui $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$.

Per prima cosa si riportano le definizioni di operatore autoaggiunto e di spettro.

Definizione 2.1 (Aggiunto di un operatore). *Sia A un operatore lineare definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Il suo aggiunto è l'operatore A^* definito nel modo seguente*

$$\mathcal{D}(A^*) := \{\phi \in \mathcal{H} \mid \exists \eta \in \mathcal{H} : (\phi, A\psi)_{\mathcal{H}} = (\eta, \psi)_{\mathcal{H}}, \forall \psi \in \mathcal{D}(A)\}.$$

$$A^*\phi = \eta.$$

Definizione 2.2 (Operatore autoaggiunto). *Sia A un operatore lineare definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Esso è autoaggiunto se coincide con il suo aggiunto, vale a dire se*

$$A \equiv A^*.$$

Definizione 2.3 (Spettro di un operatore). *Sia A un operatore lineare definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Un numero complesso z appartiene al risolvente $\rho(A)$ di A se l'operatore $A - zI$ è invertibile e ha inverso limitato, con I l'identità su \mathcal{H} . L'insieme $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ è detto spettro di A .*

In virtù del teorema di Stone (si veda [23]), è possibile stabilire che, per ogni $\psi \in D(A)$, con A operatore autoaggiunto, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} \psi(t) = A\psi(t) \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

è ben posto in $\mathcal{D}(A)$, vale a dire che per ogni $T > 0$ esiste un'unica soluzione di (2.24) tale che $\psi \in C^0([0, T], \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^2))$. In particolare, la soluzione esplicita è data da $\psi(t) = U(t)\psi_0$, dove $U(t) := e^{-iAt}$ è un gruppo unitario a un parametro fortemente continuo.

L'evoluzione dinamica governata dall'operatore di Dirac induce anche una trasformazione degli osservabili. Sia infatti O un operatore autoaggiunto nel dominio di definizione $D(O)$. Allora, per ogni t

$$O(t) = e^{iHt} O e^{-iHt} \quad (2.25)$$

è autoaggiunto su $\mathcal{D}(O(t)) = e^{-iHt} \mathcal{D}(O)$.

Avendo identificato H come l'operatore energia per un fermione relativistico, è possibile definire operatori autoaggiunti per altri osservabili. In particolare, si riportano i due operatori fondamentali dati dalle osservabili **posizione** e **momento**.

Osservazione 2.2. *Come si approfondirà più avanti, non esiste una scelta ottimale per gli operatori da associare agli osservabili che non dia adito ad alcune incongruenze nell'interpretazione statistica della teoria. Le definizioni seguenti, che non sono le uniche possibili né le uniche discusse in letteratura, sono per lo più motivate dall'analogia con la meccanica quantistica non relativistica.*

La rappresentazione standard per l'osservabile posizione è l'operatore di moltiplicazione per la variabile x componente per componente, in altre parole

$$x\psi(x) := \begin{pmatrix} x\psi_1(x) \\ x\psi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Esso è autoaggiunto sul dominio denso

$$\mathcal{D}(x) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R})^2 : \int_{\mathbb{R}} \|x\psi\|_{\mathbb{C}^2}^2(x) dx < \infty\} \quad (2.27)$$

e il suo spettro, puramente continuo, coincide con tutto l'asse reale.

In piena analogia con la meccanica quantistica non relativistica, si interpreterà l'integrale del modulo quadro del vettore d'onda, normalizzato all'unità, $\|\psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2$, esteso a una regione $B \subset \mathbb{R}$, come la probabilità che, a seguito di una misura della posizione, la particella sia osservata in tale regione della retta reale.

Per quanto riguarda l'osservabile momento, è conveniente definire la trasformata di Fourier, che è una trasformazione unitaria in $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$, come

$$(\mathcal{F}\psi)(k) := \hat{\psi}(k) \quad (2.28)$$

$$\hat{\psi}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(k) \\ \hat{\psi}_2(k) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\mathcal{F}\psi_1)(k) \\ (\mathcal{F}\psi_2)(k) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

dove, al solito, $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ rappresenta (con un piccolo abuso di notazione) anche la trasformata di Fourier unitaria in $L^2(\mathbb{R})$

$$(\mathcal{F}\psi_j)(k) = \hat{\psi}_j(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \psi_j(x) dx, \quad j = 1, 2 \quad (2.30)$$

con inversa

$$(\mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}_j)(x) = \psi_j(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{\psi}_j(k) dk, \quad j = 1, 2. \quad (2.31)$$

Com'è noto, vale la seguente relazione

$$\mathcal{F}\left(-i\frac{d}{dx}\psi\right)(k) = k(\mathcal{F}\psi)(k) \quad (2.32)$$

cosicché l'operatore momento $p = -i\frac{d}{dx}$ così definito

$$p\psi(x) := \begin{pmatrix} -i\psi'_1(x) \\ -i\psi'_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

è unitariamente equivalente (attraverso l'isometria data dalla trasformata di Fourier) a un operatore di moltiplicazione per la variabile indipendente k , ed è dunque autoaggiunto sul dominio

$$\mathcal{D}(p) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R})^2 : \int_{\mathbb{R}} \|k\hat{\psi}\|_{\mathbb{C}^2}^2(k) dk < \infty\} \quad (2.34)$$

ed anche in questo caso lo spettro è puramente continuo e coincide con l'asse reale e si interpreterà l'integrale del modulo quadro della trasforma di Fourier del vettore d'onda, normalizzato all'unità, $\|\hat{\psi}(k)\|_{\mathbb{C}^2}^2$, esteso a una regione $B \subset \mathbb{R}$, come la probabilità che, a seguito di una misura della momento, esso abbia un valore che cade in tale regione della retta reale.

2.3 Autoaggiuntezza e spettro dell'operatore di Dirac sulla retta

Utilizzando le nozioni introdotte nella sezione precedente è quindi possibile dimostrare l'autoaggiuntezza di H e di conseguenza la buona positura del problema di Cauchy associato a (2.24) con $A = H$.

Per prima cosa, in trasformata di Fourier l'azione dell'operatore di Dirac di particella libera equivale all'operatore di moltiplicazione per la matrice $h(k)$ definita come

$$h(k) = c\sigma_1 k + \sigma_3 mc^2 = \begin{pmatrix} mc^2 & ck \\ ck & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

ovvero

$$(\mathcal{F}H\psi)(k) = h(k)(\mathcal{F}\psi)(k) \quad (2.36)$$

o, più sinteticamente,

$$\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1} = h(k). \quad (2.37)$$

L'operatore di Dirac della particella libera è dunque unitariamente equivalente, attraverso l'operatore di trasformata di Fourier, fissato $k \in \mathbb{R}$, a una matrice Hermitiana di ordine 2 che, nella rappresentazione standard per le matrici α e β , assume la forma data da (2.35). Impiegando i metodi dell'algebra lineare, si può diagonalizzare la matrice e verificare che, introdotta la matrice unitaria

$$u(k) := d_+(k)\mathbb{1} + d_-(k)\sigma_3\sigma_1, \quad (2.38)$$

con inversa

$$u(k)^{-1} = u(k)^\dagger = d_+(k)\mathbb{1} - d_-(k)\sigma_3\sigma_1, \quad (2.39)$$

dove

$$d_+(k) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{mc^2}{\lambda(k)}\right)^{1/2}, \quad d_-(k) := \frac{\text{sgn}(k)}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{mc^2}{\lambda(k)}\right)^{1/2} \quad (2.40)$$

e

$$\lambda(k) := \sqrt{c^2 k^2 + m^2 c^4}, \quad (2.41)$$

la matrice $h(k)$ è simile, attraverso la matrice $u(k)$, a una matrice diagonale. In altre parole

$$u(k)h(k)u(k)^{-1} = \lambda(k)\sigma_3. \quad (2.42)$$

Di conseguenza, mettendo insieme la (2.37) e la (2.42) si ottiene che la trasformazione unitaria

$$\mathcal{W} = u\mathcal{F} \quad (2.43)$$

converte l'operatore di Dirac in un operatore di moltiplicazione per una matrice diagonale, ovvero

$$\mathcal{W}H\mathcal{W}^{-1}(k) = \lambda(k)\sigma_3. \quad (2.44)$$

Dunque l'operatore di Dirac è autoaggiunto sul dominio

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{D}(\lambda(k)\sigma_3) = \mathcal{F}^{-1}u^{-1}\mathcal{D}(\lambda(k)\sigma_3) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{D}(\lambda(k)\sigma_3) \quad (2.45)$$

dove si è usato il fatto che l'azione della matrice unitaria $u(k)^{-1}$ non cambia il dominio di un operatore di moltiplicazione. Dalla forma funzionale di $\lambda(k)$, data da (2.41), si vede che l'operatore di Dirac è autoaggiunto sullo spazio di Sobolev $H^1(\mathbb{R})$ definito, in termini di trasformata di Fourier, come

$$H^1(\mathbb{R}) = \{\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})^2 : (1 + k^2)^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}(k) \in L^2(\mathbb{R})^2\}. \quad (2.46)$$

Per quanto riguarda lo spettro, invece, la sola autoaggiuntezza, come è noto, consente soltanto di affermare che esso è un sottoinsieme di \mathbb{R} . D'altro canto, usando la precedente diagonalizzazione in trasformata di Fourier di H , è possibile determinare esattamente $\sigma(H)$. Per prima cosa si osserva che $\pm\lambda(k)$ sono autovalori della matrice $h(k)$ essendo σ_3 una matrice diagonale di autovalori ± 1 . Gli autovettori normalizzati della matrice $h(k)$ sono dati dai vettori colonna della matrice $u(k)^{-1}$ e sono quindi

$$u_{\text{pos}}(k) = \begin{pmatrix} d_+(k) \\ d_-(k) \end{pmatrix} \quad u_{\text{neg}}(k) = \begin{pmatrix} -d_-(k) \\ d_+(k) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

(relativi, rispettivamente, agli autovalori $+\lambda(k)$ e $-\lambda(k)$). L'insieme dei possibili autovalori di $h(k)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, costituisce (come dimostrato in [9]) lo spettro dell'operatore di Dirac di particella libera:

$$\sigma(H) = \{\pm\lambda(k) \mid k \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty). \quad (2.48)$$

In particolare lo spettro si osserva essere anche in questo caso puramente continuo.

Osservazione 2.3. *Come noto dall'interpretazione fisica dell'operatore di Dirac, il ramo positivo dello spettro dell'operatore di Dirac coincide con l'usuale espressione dell'energia relativistica. Tuttavia, l'occorrenza di un ramo negativo dello spettro e, in particolare, la proprietà dello spettro di non essere limitato dal basso, rende problematica l'interpretazione fisica dei punti dello spettro come possibili esiti di una misurazione dell'energia di una particella libera, e ha delle conseguenze notevoli nella costruzione di tutta la teoria (come si vedrà, ad esempio, nella sezione 2.5).*

2.4 Sottospazi a energia positiva e negativa

La diagonalizzazione in trasformata di Fourier presentata nella sezione precedente ha anche un'altra importante conseguenza. Infatti, essa mostra come ogni spinore nel dominio di autoaggiuntezza dell'operatore H può essere naturalmente decomposto come somma di due spinori a cui corrispondono valori positivi o negativi dell'osservabile energia, ovvero

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H)_{\text{pos}} \oplus \mathcal{D}(H)_{\text{neg}}, \quad (2.49)$$

$$\psi(x) = \psi_{\text{pos}}(x) + \psi_{\text{neg}}(x) \quad (2.50)$$

dove

$$\psi_{\text{pos}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{\psi}_{\text{pos}}(k) dk \quad \text{e} \quad \psi_{\text{neg}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{\psi}_{\text{neg}}(k) dk \quad (2.51)$$

con

$$\hat{\psi}_{\text{pos}}(k) := \psi^+(k) u_{\text{pos}}(k) \quad \text{e} \quad \hat{\psi}_{\text{neg}}(k) := \psi^-(k) u_{\text{neg}}(k) \quad (2.52)$$

e

$$\psi^+(k) = (u_{\text{pos}}(k), \hat{\psi}(k))_{\mathbb{C}^2} \quad \text{e} \quad \psi^-(k) = (u_{\text{neg}}(k), \hat{\psi}(k))_{\mathbb{C}^2}. \quad (2.53)$$

Le proiezioni sui due spazi a energia positiva e negativa sono ortogonali rispetto al prodotto scalare così come definito in (2.20), dato che

$$(\psi_{\text{pos}}, \psi_{\text{neg}})_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2} = (\hat{\psi}_{\text{pos}}, \hat{\psi}_{\text{neg}})_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2} \quad (2.54)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \bar{\psi}^+(k) \psi^-(k) (u_{\text{pos}}, u_{\text{neg}})_{\mathbb{C}^2}(k) dk = 0, \quad (2.55)$$

dove si è sfruttato il teorema di Plancherel e l'ortonormalità, per ogni $k \in \mathbb{R}$, degli autovettori (2.47). In particolare, all'interno di ciascun sottospazio, definita la forma quadratica associata ad H come $\langle H \rangle_\psi := (\psi, H\psi)_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2}$, con $\psi \in \mathcal{D}(H)$, essa non ha segno ben definito, ma è maggiore, in valore assoluto, della quantità mc^2 (interpretabile fisicamente come l'energia a riposo della particella). In altre parole

$$\langle H \rangle_\psi > mc^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(H)_{\text{pos}} \quad \text{e} \quad \langle H \rangle_\psi < -mc^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(H)_{\text{neg}} \quad (2.56)$$

dato che per $\psi \in \mathcal{D}(H)_{\text{pos}}$

$$\begin{aligned} (\psi, H\psi)_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2} &= (\hat{\psi}, h\hat{\psi})_{L^2(\mathbb{R})^2 \otimes \mathbb{C}^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(k) |\psi^+(k)|^2 \|u_{\text{pos}}\|_{\mathbb{C}^2}^2(k) dk \geq mc^2 \end{aligned} \quad (2.57)$$

essendo $\lambda(k) \geq mc^2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e ψ normalizzata all'unità (per $\psi \in \mathcal{D}(H)_{\text{neg}}$ vale un ragionamento analogo).

Più in generale, per un generico $\psi \in \mathcal{D}(H)$ vale

$$\langle H \rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} \lambda(k) |\psi^+(k)|^2 dk - \int_{\mathbb{R}} \lambda(k) |\psi^-(k)|^2 dk. \quad (2.58)$$

e se ne deduce che il valor medio dell'energia è fortemente indefinito in segno, a differenza del caso non relativistico in cui l'energia è definita positiva.

Infine, un generico dato iniziale $\psi_0(x) = \mathcal{W}^{-1}\phi(k) \in H^1(\mathbb{R})$ può essere espresso allora come

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} [e^{ikx} \psi_0^+(k) u_{\text{pos}}(k) + e^{ikx} \psi_0^-(k) u_{\text{neg}}(k)] dk. \quad (2.59)$$

In questa rappresentazione, l'operatore di Dirac è diagonale e dunque l'azione del propagatore e^{-iHt} è nota e può essere scritta in maniera esplicita, per cui l'evoluzione dinamica governata dall'equazione di Dirac (2.24) a un generico istante è data da

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} [e^{i(kx - \lambda(k)t)} \psi_0^+(k) u_{\text{pos}}(k) + e^{i(kx + \lambda(k)t)} \psi_0^-(k) u_{\text{neg}}(k)] dk \quad (2.60)$$

In particolare, poiché nell'evoluzione temporale, fissato $k \in \mathbb{R}$, le proiezioni $\psi^\pm(k)$ della trasformata dello stato iniziale sugli autovettori $u_{\text{pos}}(k)$ e $u_{\text{neg}}(k)$ della matrice $h(k)$ acquistano solamente un fattore di fase $e^{\mp i\lambda(k)t}$, il segno del valor medio dell'energia per pacchetti d'onda è una quantità conservata per la dinamica governata dall'equazione di Dirac, e dati iniziali giacenti interamente in uno dei due sottospazi evolvono rimanendovi per tutti i tempi futuri.

2.5 Un effetto non classico: lo Zitterbewegung

L'interpretazione probabilistica finora discussa conduce naturalmente all'assunto che l'osservabile posizione sia rappresentato dall'operatore di moltiplicazione per la variabile x così come introdotto nella sezione 2.2. Si badi che questa scelta dell'operatore posizione non è l'unica possibile, né quella più esente da difetti. In particolare, essa è all'origine di un fenomeno di difficile interpretazione fisica, noto come *Zitterbewegung*, che consiste in un'oscillazione (asintoticamente smorzata), rappresentata in Figura 2.1, del valore medio dell'operatore posizione in funzione del tempo attorno alla relazione di linearità attesa per una particella libera in accordo con il secondo principio della dinamica. Inoltre, tale distorsione del moto dettata dalla dinamica indotta dall'equazione di Dirac non si manifesta per stati a energia ben definita, fatto che sembrerebbe suggerire un ruolo primario dei sottospazi introdotti in (2.49) nella costruzione di una teoria fisica alla base della meccanica quantistica relativistica.

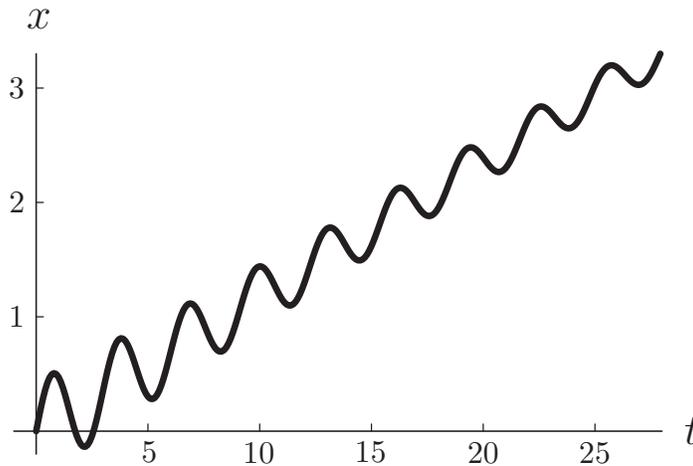


Figura 2.1: Andamento del valor medio dell'operatore posizione in funzione del tempo in presenza dello Zitterbewegung.

In generale, il valor medio di un operatore su una funzione d'onda a un istante qualsiasi, può essere espresso in rappresentazione di Heisenberg come il valor medio di un operatore dipendente dal tempo valutato sul dato iniziale

$$\langle x \rangle_{\psi(t)} = \langle x(t) \rangle_{\psi(0)} \quad \text{con} \quad x(t) = e^{iHt} x e^{-iHt}. \quad (2.61)$$

In particolare, ricordata l'equazione differenziale soddisfatta dall'evolvente temporale e^{iHt} , si ha, procedendo alla stessa maniera della meccanica quantistica non relativistica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= ie^{iHt}[H, x]e^{-iHt} = ie^{iHt}[c\alpha p + \beta mc^2, x] = \\ &= ice^{iHt}\alpha[-i\frac{d}{dx}, x]e^{-iHt} = ce^{iHt}\alpha e^{-iHt} = c\alpha(t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

dove si è indicato con $[A, B] := AB - BA$ il commutatore tra i due operatori e si sono usate le relazioni di commutazioni classiche. L'operatore $c\alpha$, la derivata temporale dell'operatore posizione standard, è detto l'operatore *velocità standard*. Il risultato (2.62) è apparentemente assurdo, in quanto $c\alpha(t)$, oltre a non coinvolgere direttamente l'operatore momento, è unitariamente equivalente alla matrice $c\alpha$, di autovalori $\pm c$, e dunque, alla luce dell'interpretazione statistica della meccanica quantistica, le particelle soggette alla dinamica dell'equazione di Dirac sembrerebbero muoversi solamente alla velocità della luce. Inoltre, contrariamente a quanto accade in meccanica quantistica classica, in cui la derivata temporale dell'operatore posizione per una particella libera $\frac{p(t)}{m}$ è una costante del moto, si vede invece che l'espressione dell'operatore accelerazione nel caso relativistico è non banale, in quanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}c\alpha(t) &= ie^{iHt}[H, \alpha]e^{-iHt} = ie^{iHt}(2H\alpha - \{H, \alpha\})e^{-iHt} = \\ &= 2Hc\alpha(t) - 2ic^2p \end{aligned} \quad (2.63)$$

dove si è sfruttata la commutazione tra l'operatore di Dirac H e l'evolvente temporale associato (che può essere verificata agevolmente osservando che, in trasformata di Fourier agiscono entrambi come operatori di moltiplicazione), si sono impiegate le relazioni (2.10), si è indicato con $\{A, B\} := AB + BA$ l'anticommutatore tra i due operatori e si è sfruttata l'identità algebrica $[A, B] = 2AB - \{A, B\}$.

In accordo con la cinematica relativistica, in cui l'espressione per la velocità di una particella è data da $v = \beta c = c^2 p E^{-1}$, si può introdurre l'operatore $v_{cl} := c^2 p H^{-1}$, dove p e H^{-1} hanno una semplice interpretazione nello spazio dei momenti in quanto agiscono come l'operatore di moltiplicazione k e la matrice inversa h^{-1} . Si osservi che, in virtù della commutatività degli operatori coinvolti, che agiscono come operatori di moltiplicazione in trasformata di Fourier, è ininfluente l'ordine di applicazione degli operatori e che la sua derivata temporale è nulla

$$\frac{d}{dt}v_{cl}(t) = 0 \Rightarrow v_{cl}(t) \equiv v_{cl}(0) \equiv v_{cl} \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (2.64)$$

Definito dunque l'operatore $F := c\alpha - v_{cl}$, si ha, dal confronto con la (2.63), moltiplicando a sinistra per l'operatore inverso H^{-1}

$$\frac{d}{dt}c\alpha(t) = 2iHF(t) \quad (2.65)$$

dove $F(t) = e^{iHt}Fe^{-iHt} = c\alpha(t) - v_{cl}$.

È una semplice verifica algebrica osservare che HF e FH anticommutano, in quanto la loro azione in trasformata di Fourier è data da

$$(\mathcal{F}H\mathcal{F}^{-1})(k) \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(k) \\ \hat{\psi}_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^3\hat{\psi}_2(k) \\ -mc^3\hat{\psi}_1(k) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$$(\mathcal{F}F\mathcal{F}^{-1})(k) \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1(k) \\ \hat{\psi}_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mc^3\hat{\psi}_2(k) \\ mc^3\hat{\psi}_1(k) \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Conseguentemente, come si può far vedere introducendo gli operatori limitati definiti sul dominio denso di \mathcal{H} , $A_1(t) = Fe^{-iHt}$ e $A_2(t) = e^{iHt}F$ e osservando che essi soddisfano la stessa equazione differenziale $-i\frac{d}{dt}A = HA$ con stessa condizione iniziale, si ha

$$F(t) = e^{iHt}Fe^{-iHt} = e^{2iHt}F = Fe^{-2iHt} \quad (2.68)$$

cosicché

$$\frac{d}{dt}F(t) = 2iHF(t). \quad (2.69)$$

Dalla definizione di F segue

$$c\alpha(t) = v_{cl} + F(t) \quad (2.70)$$

e dunque l'operatore posizione soddisfa (imponendo che $x(0) = x$)

$$\begin{aligned} x(t) &= x + \int_0^t c\alpha(s)ds = x + v_{cl}t + \int_0^t F(s)ds = \\ &= x + v_{cl}t + \frac{1}{2i}H^{-1}(e^{2iHt} - \mathbb{1})F, \end{aligned} \quad (2.71)$$

dove si è fatto uso della (2.68) e della (2.69). Quindi, per un spinore ψ nel dominio di autoaggiuntezza di x si ha che

$$\langle x(t) \rangle_\psi = \langle x - (2iH)^{-1}F \rangle_\psi + t \langle v_{cl} \rangle_\psi + \langle (2iH)^{-1}F \rangle_{\psi(t)} \quad (2.72)$$

dove si è fatto uso del fatto che

$$\langle \psi, (2iH)^{-1} e^{2iHt} F \psi \rangle = \langle e^{-iHt} \psi, (2iH)^{-1} F e^{-iHt} \psi \rangle. \quad (2.73)$$

L'ultimo addendo della (2.72) e, in misura minore (in quanto consiste in una traslazione costante) il secondo termine del primo addendo, generano l'effetto di Zitterbewegung descritto in precedenza.

Infine, dall'anticommutatività di F con l'operatore di particella libera, si ha che esso proietta pacchetti d'onda di energia di segno definito nel sottospazio a energia di segno opposto, implicando l'annullarsi dei prodotti scalari, ovvero

$$\mathcal{D}(H)_{\text{pos}} \ni \psi \rightarrow F\psi \in \mathcal{H}_{\text{neg}} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}(H)_{\text{neg}} \ni \psi \rightarrow F\psi \in \mathcal{H}_{\text{pos}}. \quad (2.74)$$

Questo deriva dal fatto che, dato ad esempio un vettore nel sottospazio a energia positiva, indicato con f l'operatore $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$

$$h(f\hat{\psi}) = -f(h\hat{\psi}) = -f(+\lambda(k)\psi^+(k)u_{\text{pos}}(k)) = -\lambda(k)f\hat{\psi} \quad (2.75)$$

Dunque, per pacchetti d'onda a energia definita, il valor medio dell'operatore posizione standard segue un'evoluzione temporale classica, ovvero

$$\langle x \rangle_{\psi(t)} = \langle x \rangle_{\psi} + t \langle v_{\text{cl}} \rangle_{\psi} \quad (2.76)$$

mostrando come, per spinori con energia di segno ben definito, l'effetto di Zitterbewegung scompare.

Capitolo 3

L'operatore di Dirac su grafi metrici

Lo studio delle equazioni di evoluzione temporale su grafi metrici è attualmente molto popolare in quanto si ritiene che questi siano modelli efficaci per l'analisi della dinamica di sistemi fisici confinati in domini spaziali ramificati. In particolare, è stata data molta attenzione all'equazione di Schrödinger non lineare, in quanto si pensa possa approssimare bene il comportamento di condensati di Bose-Einstein in sistemi isolati ramificati.

Queste considerazioni hanno naturalmente condotto allo studio di una trasposizione su grafi del laplaciano, corredato da opportune condizioni ai vertici, e in particolare allo studio delle onde stazionarie per l'equazione di Schrödinger non lineare

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla_G^2 \psi - |\psi|^2 \psi.$$

In particolare, il caso più indagato è stato quello delle condizioni ai vertici di tipo Kirchhoff, che impongono ai vertici

$$(i) \text{ continuità della funzione: } u_e(v) = u_f(v) \quad \forall e, f \succ v, \forall v \in \mathcal{K},$$

$$(ii) \text{ bilancio delle derivate: } \sum_{e \succ v} \frac{du_e}{dx_e}(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{K},$$

dove il pedice denota la restrizione della funzione globalmente definita su un grafo a uno dei suoi archi, \mathcal{K} è il nucleo compatto del grafo (vale a dire il sottografo costituito dagli archi limitati), $e \succ v$ significa che l'arco e è incidente nel vertice v e $\frac{du_e}{dx_e}(v)$ indica $u'_e(0)$ o $-u'_e(l_e)$ a seconda della parametrizzazione

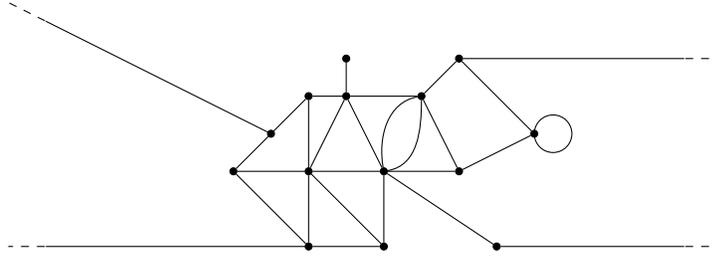


Figura 3.1: un generico grafo metrico non compatto.

dell'arco (in maniera da rimanere coerenti con la nozione di flusso uscente in un dato vertice). Le condizioni sopra riportate corrispondono al caso libero, cioè al caso in cui non sussiste nessuna interazione ai vertici che quindi fungono da mere giunzioni tra gli archi.

Più recentemente ha generato un crescente interesse matematico lo studio dell'equazione di Dirac non lineare su grafi metrici (su dettagli circa le applicazioni si veda l'introduzione)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_G - |\psi|^2\psi.$$

Il passo preliminare per lo studio di tale equazione risulta essere lo studio delle possibili realizzazioni autoaggiunte dell'operatore di Dirac su grafi. In questo capitolo, si considereranno condizioni ai vertici per l'operatore di Dirac che convergono, in un senso opportuno alle condizioni di tipo Kirchhoff per l'operatore laplaciano nel limite non relativistico “ $c \rightarrow +\infty$ ”, e che si indicheranno ancora (con leggero abuso di notazione) come condizioni di tipo Kirchhoff per l'operatore di Dirac. Informalmente, queste condizioni “distribuiscono” le richieste delle proprietà *i*) e *ii*) sopra citate tra le due componenti dello spinore: la condizione di continuità viene imposta solo sulla prima componente dello spinore, mentre alla seconda componente si applica la legge di bilancio sul flusso uscente.

Più precisamente, ci si limiterà (seguendo principalmente [4]) allo studio dell'operatore di Dirac (che nel seguito verrà indicato con H omettendo il pedice di grafo) su grafi non compatti (si veda a tal proposito la Figura 3.1) e con un numero finito di archi, in quanto costituiscono una naturale generalizzazione della retta a strutture localmente monodimensionali con topologia non banale.

3.1 Autoaggiuntezza dell'operatore di Dirac su grafi metrici

Innanzitutto si premettono alcune notazioni di base sui grafi metrici (per maggiori dettagli si vedano [2, 3]). Nel prosieguo del capitolo, per grafo metrico $\mathcal{G} = (V, E)$ si intende un multigrafo (vale a dire che sono ammesse autoconnessioni e connessioni multiple) in cui gli archi illimitati, o semirette, sono identificati come copie di $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, mentre gli archi limitati, o segmenti, sono identificati con gli intervalli chiusi e illimitati $I_e = [0, l_e]$, con $l_e > 0$. Ogni arco (limitato o illimitato) è munito di una coordinata x_e che possiede una orientazione arbitraria quando l'intervallo è limitato e l'orientazione naturale nel caso delle semirette. Come conseguenza, il grafo \mathcal{G} è uno spazio metrico localmente compatto, dove la metrica è data dalla distanza più breve calcolata lungo gli archi. Inoltre, supporremo anche il grafo \mathcal{G} connesso e con un numero finito di vertici. Di conseguenza, il grafo \mathcal{G} è compatto se e solo se non contiene alcuna semiretta. Nel seguito, come si è già anticipato, si prenderanno in considerazione solamente grafi non compatti.

Consistentemente, una funzione $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ è una famiglia di funzioni (u_e) dove $u_e : I_e \rightarrow \mathbb{C}$ è la restrizione di u all'arco e . Gli spazi L^p possono essere definiti nella maniera naturale, con norme

$$\|u\|_{L^p(\mathcal{G})}^p := \sum_{e \in E} \|u_e\|_{L^p(I_e)}^p \text{ se } p \in [1, +\infty) \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^\infty(\mathcal{G})} := \max_{e \in E} \|u_e\|_{L^\infty(I_e)},$$

mentre gli spazi di Sobolev $H^m(\mathcal{G})$ sono gli spazi di funzioni $u = (u_e)$ tali che $u_e \in H^m(I_e)$ per ogni arco $e \in E$, con norma

$$\|u\|_{H^m(\mathcal{G})}^2 = \sum_{i=0}^m \|u^{(i)}\|_{L^2(\mathcal{G})}^2.$$

Allo stesso modo, uno spinore $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}^2$ è una famiglia di spinori

$$\psi_e = \begin{pmatrix} \psi_e^1 \\ \psi_e^2 \end{pmatrix} : I_e \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \forall e \in E$$

e quindi

$$L^p(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2) := \bigoplus_{e \in E} L^p(I_e, \mathbb{C}^2),$$

dotato della norma

$$\|\psi\|_{L^p(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2)}^p := \sum_{e \in E} \|\psi_e\|_{L^p(I_e)}^p \text{ se } p \in [1, +\infty) \quad \text{e} \quad \|\psi\|_{L^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2)} := \max_{e \in E} \|\psi_e\|_{L^\infty(I_e)}$$

e similmente

$$H^m(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2) := \bigoplus_{e \in E} H^m(I_e, \mathbb{C}^2)$$

dotato della norma

$$\|\psi\|_{H^m(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2)}^2 = \sum_{i=0}^m \|\psi^{(i)}\|_{L^2(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2)}^2.$$

Si può, a questo punto, definire l'operatore di Dirac con condizioni ai vertici di tipo Kirchhoff.

Definizione 3.1 (Dirac-Kirchhoff). *Si definisce operatore di Dirac con condizioni al vertice di tipo Kirchhoff l'operatore $H : L^2(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2)$ la cui azione ristretta a un singolo arco è data dalla, a meno di costanti fisiche, dalla (2.16) e il cui dominio è dato da*

$$\mathcal{D}(H) := \{\psi \in H^1(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2) : \psi \text{ soddisfa (3.2) e (3.3)}\}, \quad (3.1)$$

dove

$$\psi_e^1(\mathbf{v}) = \psi_f^1(\mathbf{v}) \quad \forall e, f \succ \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{e \succ \mathbf{v}} \psi_e^2(\mathbf{v})_{\pm} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (3.3)$$

dove $\psi_e^2(\mathbf{v})_{\pm}$ sta per $\psi_e^2(0)$ o $-\psi_e^2(l_e)$ a seconda dell'orientazione dell'arco.

Osservazione 3.1. *Una prima giustificazione dell'analogia tra l'operatore laplaciano con condizioni di tipo Kirchhoff riportate all'inizio del capitolo e l'operatore di Dirac così come precedentemente finito è la seguente: il quadrato dell'operatore di Dirac H^2 corrisponde, a meno di termini proporzionali all'identità, al laplaciano, vale a dirsi*

$$H^2 = (-\nabla_{\mathcal{G}}^2 + m^2 c^4) \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}.$$

Se inoltre si considerano spinori della forma $\psi = (\psi_1, 0)^T$, imporre che $\psi \in \mathcal{D}(H^2)$, ossia che $\psi, H\psi \in \mathcal{D}(H)$, equivale a chiedere, come è semplice verificare, che $\psi_1 \in \mathcal{D}(\nabla_{\mathcal{G}}^2)$, ovvero che ψ_1 soddisfi le condizioni di Kirchhoff del laplaciano introdotte all'inizio del capitolo.

La prima cosa che è necessario mostrare è che l'operatore di Dirac così definito è effettivamente un operatore autoaggiunto. A tal scopo, ci si avvarrà della teoria delle triple di bordo (per ulteriori dettagli si veda l'Appendice B). L'idea è quella di studiare le restrizioni dell'operatore alle singole componenti

del grafo (segmenti o semirette) imponendo appropriate condizioni al bordo, per poi descrivere gli effetti di connessione di queste componenti unidimensionali, in base alla topologia del grafo.

Innanzitutto si osservi che l'insieme E degli archi di un grafo metrico \mathcal{G} può essere decomposto in due sottoinsiemi, ossia l'insieme degli archi limitati E_s e l'insieme delle semirette E_h .

Fissato allora $e \in E_s$, si consideri il corrispondente operatore minimale \tilde{H}_e definito su $\mathcal{H}_e := L^2(I_e, \mathbb{C}^2)$ che ha azione data, a meno di costanti fisiche, dalla (2.16) ma sul dominio $H_0^1(I_e, \mathbb{C}^2)$. Come conseguenza, l'aggiunto possiede la stessa azione ma è definito su

$$\mathcal{D}(\tilde{H}_e^*) := H^1(I_e, \mathbb{C}^2).$$

Definendo gli operatori di traccia $\Gamma_{0,1}^e : H^1(I_e, \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ come

$$\Gamma_0^e \begin{pmatrix} \psi_e^1 \\ \psi_e^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \psi_e^1(0) \\ ic\psi_e^2(l_e) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1^e \begin{pmatrix} \psi_e^1 \\ \psi_e^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ic\psi_e^2(0) \\ \psi_e^1(l_e) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

si può verificare che la tripla $(\mathfrak{H}_e, \Gamma_0^e, \Gamma_1^e)$, con $\mathfrak{H}_e := \mathbb{C}^2$ è effettivamente una tripla di bordo per l'operatore \tilde{H}_e^* , e quindi si può definire un'estensione autoaggiunta H_e con la stessa azione di \tilde{H}_e^* e dominio (si veda l'Appendice B)

$$\mathcal{D}(H_e) := \ker(\Gamma_0^e) \cap H^1(I_e, \mathbb{C}^2).$$

Analogamente, si fissi $e' \in E_h$ e si consideri l'operatore minimale $\tilde{H}_{e'}$ definito su $\mathcal{H}_{e'} := L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$ con la stessa azione di prima e dominio $H_0^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$. Il dominio dell'aggiunto è allora

$$\mathcal{D}(\tilde{H}_{e'}^*) := H^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2).$$

Definendo gli operatori di traccia $\Gamma_{0,1}^{e'} : H^1(I_e, \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}$ come

$$\Gamma_0^{e'} \begin{pmatrix} \psi_{e'}^1 \\ \psi_{e'}^2 \end{pmatrix} := ic\psi_{e'}^1(0), \quad \Gamma_1^{e'} \begin{pmatrix} \psi_{e'}^1 \\ \psi_{e'}^2 \end{pmatrix} := \psi_{e'}^2(0), \quad (3.5)$$

allo stesso modo del caso precedente, si può verificare che la tripla $(\mathfrak{H}_{e'}, \Gamma_0^{e'}, \Gamma_1^{e'})$, con $\mathfrak{H}_{e'} := \mathbb{C}$ è effettivamente una tripla di bordo per l'operatore $\tilde{H}_{e'}^*$ e quindi può essere definita un'estensione autoaggiunta $H_{e'}$ con la stessa azione di $\tilde{H}_{e'}^*$ e dominio

$$\mathcal{D}(H_{e'}) := \ker(\Gamma_0^{e'}) \cap H^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2).$$

Si consideri ora l'operatore

$$\tilde{H} := \bigoplus_{e \in E_s} \tilde{H}_e \oplus \bigoplus_{e' \in E_h} \tilde{H}_{e'} \quad (3.6)$$

definito su $\mathcal{H} := \bigoplus_{e \in E_s} \mathcal{H}_e \oplus \bigoplus_{e' \in E_h} \mathcal{H}_{e'}$, e il suo aggiunto

$$\tilde{H}^* := \bigoplus_{e \in E_s} \tilde{H}_e^* \oplus \bigoplus_{e' \in E_h} \tilde{H}_{e'}^*. \quad (3.7)$$

Introdotti gli operatori di traccia

$$\Gamma_{0,1} := \bigoplus_{e \in E_s} \Gamma_{0,1}^e \oplus \bigoplus_{e' \in E_h} \Gamma_{0,1}^{e'} \quad (3.8)$$

si può far vedere allora che la tripla $(\mathfrak{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ con $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^M$ e $M = 2|E_s| + |E_h|$ è una tripla di bordo per l'operatore \tilde{H}^* . D'altro canto, le condizioni (3.2) e (3.3) sono locali nel senso che le condizioni ad un dato vertice sono indipendenti dalle condizioni ad altri vertici. Di conseguenza, è possibile dimostrare che esistono due matrici diagonali a blocchi $A, B \in \mathbb{C}^{M \times M}$ (in luogo degli operatori nelle definizioni astratte dell'Appendice B), con $AB^* = BA^*$ e $A|B$ di rango massimo, tali che

$$A\Gamma_0\psi = B\Gamma_1\psi \quad (3.9)$$

e quindi che l'operatore di Dirac che realizza le condizioni ai vertici di tipo Kirchhoff H può essere definito come la restrizione di \tilde{H}^* al dominio

$$\mathcal{D}(H) := \ker(A\Gamma_0 - B\Gamma_1) \cap H^1(\mathcal{G}, \mathbb{C}^2) \quad (3.10)$$

ed è quindi autoaggiunto per costruzione (si veda di nuovo l'Appendice B).

Per meglio visualizzare quanto appena detto, può essere utile ricondursi al seguente esempio.

Esempio 3.1 Sia \mathcal{G} un grafo a stella con 3 archi, di cui uno limitato e due illimitati, come rappresentato nella Figura 3.2. Si può identificare inoltre il segmento con l'intervallo $I = [0, l_e]$ facendo corrispondere l'unico vertice in comune con $x_e = 0$.

Gli operatori di traccia risultano essere

$$\Gamma_0\psi = \begin{pmatrix} \psi_{e_1}^1(0) \\ \psi_{e_2}^1(0) \\ \psi_{e_3}^2(l_{e_3}) \\ ic\psi_{e_3}^1(l_{e_3}) \end{pmatrix} \quad \Gamma_1\psi = \begin{pmatrix} ic\psi_{e_1}^2(0) \\ ic\psi_{e_2}^2(0) \\ ic\psi_{e_3}^2(l_{e_3}) \\ \psi_{e_3}^1(l_{e_3}) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

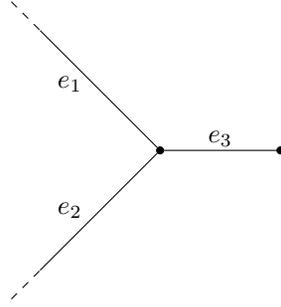


Figura 3.2: Un grafo a stella a 3 archi con un segmento.

e quindi le condizioni Kirchhoff (3.2) possono essere scritte come

$$A\Gamma_0\psi = B\Gamma_1\psi$$

con

$$A = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = -i\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

dove, scegliendo appositamente i parametri $a, b \in \mathbb{C}$, può essere fissato il valore dello spinore al vertice libero.

3.2 Spettro dell'operatore di Dirac su grafi metrici

Ragionando come nella sezione precedente, si può definire sul grafo un ulteriore operatore H_D , autoaggiunto per costruzione come somma diretta di operatori autoaggiunti su ciascun arco:

$$H_D = \bigoplus_{e \in E_s} H_e \oplus \bigoplus_{e' \in E_h} H_{e'}. \quad (3.13)$$

Lo spettro di tale operatore è dato dalla sovrapposizione degli spettri di ogni singolo addendo, vale a dire

$$\sigma(H_D) = \bigcup_{e \in E_s} \sigma(H_e) \cup \bigcup_{e' \in E_h} \sigma(H_{e'}). \quad (3.14)$$

Precisamente (come si può leggere in [8]) ogni segmento $I_e, e \in E_s$, contribuisce allo spettro di H_D con spettro puramente puntuale dato da

$$\sigma(H_e) = \sigma_p(H_e) := \left\{ \pm \sqrt{\frac{2mc^2\pi^2}{l_e^2} \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 + m^2c^4}, j \in \mathbb{N} \right\} \quad \forall e \in E_s. \quad (3.15)$$

Si noti che $\sigma(H_e) \subseteq (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty)$.

Invece, gli operatori $H_{e'}$ definiti su ogni semiretta hanno spettro assolutamente continuo

$$\sigma(H_{e'}) = \sigma_{ac}(H_{e'}) := (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty) \quad \forall e' \in E_h. \quad (3.16)$$

Quindi lo spettro dell'operatore H_D è dato da

$$\sigma(H_D) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty). \quad (3.17)$$

Dalla (3.17) è possibile ricavare alcune informazioni anche sullo spettro di H . Per farlo, per prima cosa si premette la seguente definizione (si veda [28]).

Definizione 3.2 (Spettro discreto, spettro essenziale). *Sia A un operatore lineare definito su un dominio denso in \mathcal{H} e ivi autoaggiunto. Lo spettro discreto $\sigma_d(A)$ è l'insieme di tutti gli autovalori di molteplicità finita che sono anche punti isolati dello spettro $\sigma(A)$. Lo spettro essenziale è $\sigma_{ess} := \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$.*

Dalla definizione, segue che $\lambda \in \sigma(A)$ appartiene allo spettro essenziale se è un autovalore di molteplicità infinita, se è un autovalore di molteplicità finita immerso nello spettro continuo oppure se è un punto di accumulazione per gli autovalori.

Si può dimostrare che la differenza dei risolventi, in senso operatoriale, di H e H_D , è pari a un operatore di rango finito (dato il numero finito di vertici del grafo), e dunque, in virtù del teorema di Weyl (si veda [24]), vale che i due spettri essenziali coincidono, e quindi che lo spettro essenziale di H è anch'esso dato da (3.17).

Tale osservazione, però, non consente di avere informazioni sugli autovalori isolati. Appare perciò naturale chiedersi se possano esistere, in generale, autovalori. Sfortunatamente, non c'è una maniera semplice di rispondere a questa domanda per un grafo metrico arbitrario. In principio, regolando opportunamente la topologia del grafo, gli autovalori possono essere sparsi su tutta la retta reale. Di fatto, gli autovalori possono essere immersi nello spettro o alla soglia, ma non all'interno del gap spettrale $(-mc^2, mc^2)$, come mostra il seguente teorema.

Teorema 3.1 (Assenza di autovalori nel gap spettrale). *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore per H . Allora $|\lambda| \geq mc^2$.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi esiste $0 \neq \psi \in \mathcal{D}(H)$ tale che

$$H\psi = \lambda\psi,$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} -ic \frac{d\psi_e^2}{dx} = (\lambda - mc^2)\psi_e^1 \\ -ic \frac{d\psi_e^1}{dx} = (\lambda + mc^2)\psi_e^2 \end{cases} \quad \forall e \in E. \quad (3.18)$$

Se $|\lambda| \neq mc^2$, allora possiamo dividere entrambi i lati della seconda della (3.18) per $(\lambda + mc^2)$ e sostituire ψ^2 nella prima, ottenendo

$$-c^2 \frac{d^2\psi_e^1}{dx^2} = (\lambda^2 - m^2c^4)\psi_e^1. \quad (3.19)$$

Imponendo poi le condizioni al bordo di tipo Kirchhoff (3.2) e (3.3) segue che $(\lambda^2 - m^2c^4)$ è autovalore dell'operatore laplaciano definito su \mathcal{G} con condizioni di tipo Kirchhoff

$$\begin{aligned} u_e(v) &= u_f(v) \quad \forall e, f \succ v, \forall v \in \mathcal{K} \\ \sum_{e \succ v} \frac{du_e}{dx_e}(v) &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

e quindi, moltiplicando la (3.19) per $(\psi_e^1)^*$, integrando lungo gli archi e sommando tutti i contributi, si ottiene

$$(\lambda^2 - m^2c^4) \int_{\mathcal{G}} \|\psi^1\|^2(x') dx' = -c^2 \sum_v (\psi^1)^* \frac{d\psi^1}{dx} \Big|_0^{l_e} + c^2 \int_{\mathcal{G}} \left\| \frac{d\psi^1}{dx} \right\|^2(x') dx'.$$

Il primo addendo del lato destro dell'identità si annulla in virtù delle condizioni al bordo imposte. Di conseguenza, dato che il lato destro dell'equazione è definito positivo, per mantenere la positività di entrambi i lati dell'identità deve aversi necessariamente $\lambda^2 - m^2c^4 \geq 0$, da cui si ottiene la tesi. \square

Infine è possibile costruire esplicitamente grafi con autovalori ai due estremi finiti dei rami spettrali.

Esempio 3.2 (*Grafi con autovalori a soglia*) Si consideri un grafo a stella a 3 archi, di cui una semiretta e due segmenti, così come mostrato in Figura 3.3. Si identificano i due archi limitati con gli intervalli compatti $I_j = [0, l_j]$, $j = 1, 2$,

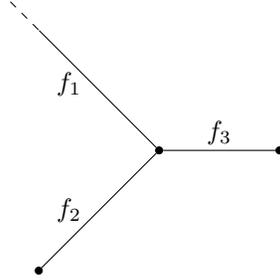


Figura 3.3: Un grafo a stella a 3 archi con due segmenti.

e il vertice comune con 0.

Sia quindi $\lambda = mc^2$. Allora il sistema (3.18) si riduce a

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{f_j}^2}{dx} = 0 \\ \frac{d\psi_{f_j}^1}{dx} = (2imc)\psi_{f_j}^2 \end{cases} \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

con $j = 1, 2, 3$. Si ponga quindi $\psi_{f_1} \equiv 0$. Integrando il sistema (3.20) per $j = 2, 3$ si ottiene

$$\psi_{f_j}^1(x) = 2imcA_jx + Bj_j \quad x \in [0, l_j] \quad (3.21)$$

$$\psi_{f_j}^2(x) = A_j \quad x \in [0, l_j] \quad (3.22)$$

dove $A_j, B_j \in \mathbb{C}$. Affinché valgano le (3.2)-(3.3) in $x = 0$, è immediato verificare che

$$B_2 = B_3 = 0, \quad A_3 = -A_2. \quad (3.23)$$

Dunque si è costruita una autofunzione nel dominio per $\lambda = mc^2$ che è dunque autovalore dell'operatore. Una costruzione analoga può essere ripetuta per mostrare come anche $\lambda = -mc^2$ sia autovalore per l'operatore di Dirac definito su questo particolare grafo.

Appendice A

Una forma esplicita del propagatore per l'operatore di Dirac

Nella sezione 2.4 si è data una rappresentazione della soluzione dell'equazione di Dirac in trasformata di Fourier in termini delle sue proiezioni sugli spazi ad energia positiva e negativa. In ogni caso, nelle applicazioni (soprattutto nello studio dell'equazione di Dirac non lineare) può essere utile avere una rappresentazione della soluzione che non coinvolga la trasformata di Fourier. In questa appendice mostriamo come si può dedurre tale rappresentazione (come fatto in [7]).

Osservazione A.1. *In questa appendice, per esigenze di semplicità, si assume che le soluzioni presentino tutta la regolarità necessaria. È tuttavia possibile dimostrare, con argomenti di densità, la validità generale dei risultati.*

A.1 Problema di Cauchy per l'equazione di Dirac

Nel seguito, si vuole esibire una soluzione esplicita al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \psi_t(x, t) = -iH\psi(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \psi(x, 0) = \phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

dove il pedice, eventualmente ripetuto, denota la derivazione sequenziale rispetto alle variabile indicate e H è l'operatore di Dirac definito nel capitolo 2.

Osservato che, per costruzione, l'operatore di Dirac è tale che il suo quadrato è diagonale e agisce separatamente sulle due componenti dello spinore come l'operatore di Klein-Gordon, si ha che

$$(-iH)^2\psi := K\psi = \begin{pmatrix} c^2\psi_{1,xx} - m^2c^4\psi_1 \\ c^2\psi_{2,xx} - m^2c^4\psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Quindi, dato che dalla (A.1) $\psi_t(x, 0) = -iH\phi(x)$, si ha, notata la commutazione tra l'operatore di derivata temporale e l'operatore di Dirac, l'equivalenza tra il problema (A.1) e il seguente

$$\begin{cases} \psi_{tt}(x, t) = K\psi(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \psi(x, 0) = \phi(x) & x \in \mathbb{R} \\ \psi_t(x, 0) = -iH\phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

la cui soluzione esplicita, componente per componente, è nota (si consulti [22], ma verrà ricavata nella sezione seguente) è

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \frac{\phi(x-ct) + \phi(x+ct)}{2} - mc^2t \int_{x-ct}^{x+ct} \left[\frac{J_1\left(mc\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}} \phi(y) \right] dy + \\ & + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \left[J_0\left(mc\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}\right) (-iH\phi)(y) \right] dy, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

con J_0 e J_1 funzioni di Bessel di ordine 0 e 1 (introdotte anch'esse nella sezione seguente).

La (A.4) può essere scritta per componente, esplicitando $-iH\phi$, integrando per parti e osservando che $J_0(z)$ vale 1 negli estremi di integrazione e che $\frac{d}{dz}J_0(z) = -J_1(z)$. In altre parole

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t) = & \frac{(\phi_k(x-ct) + \phi_j(x-ct)) + (\phi_k(x+ct) - \phi_j(x+ct))}{2} + \\ & - \frac{mc}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \left[\frac{J_1\left(mc\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}} (x-y)\phi_j(y) \right] dy + \\ & - \frac{mc^2t}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \left[\frac{J_1\left(mc\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2}} \phi_k(y) \right] dy + \end{aligned}$$

$$-\frac{mc}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \left[J_0 \left(mc\sqrt{c^2t^2 - (x-y)^2} \right) (-i)(-1)^k \phi_k(y) \right] dy, \quad (\text{A.5})$$

con $j, k = 1, 2$ e $j \neq k$.

Quest'espressione può essere scritta in maniera più concisa introducendo il nucleo a valori matriciali

$$T(x, t) := -\frac{mc}{2} \left(i\sigma_3 J_0 \left(mc\sqrt{c^2t^2 - x^2} \right) + (ct\mathbb{1} + x\sigma_1) \frac{J_1 \left(mc\sqrt{c^2t^2 - x^2} \right)}{\sqrt{c^2t^2 - x^2}} \right)$$

e quindi la soluzione del problema di Cauchy (A.1) diventa

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= e^{-iHt} \phi(x) = \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbb{1} + \sigma_1) \phi(x - ct) + (\mathbb{1} - \sigma_1) \phi(x + ct) \right) + \int_{x-ct}^{x+ct} T(x - y, t) \phi(y) dy. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Problema di Cauchy per l'equazione di Klein-Gordon

In questa sezione si intende ricavare la (A.4). A tale scopo (basandosi sulla trattazione offerta da [31]), si dedurrà preliminarmente la soluzione esplicita per l'equazione generale iperbolica lineare in una dimensione spaziale definita sul semipiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. In seguito, per un'opportuna scelta dei parametri che figurano nell'equazione, si recupererà la soluzione per l'equazione di Klein-Gordon in una dimensione spaziale.

Il problema da risolvere è quindi

$$\begin{cases} L[u](x, t) = f(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

dove si è introdotto l'operatore differenziale $L[\cdot]$ così definito

$$L[u](x, t) := u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + a(x, t)u_x(x, t) + b(x, t)u_t(x, t) + c(x, t)u(x, t)$$

(nel seguito si ometterà la dipendenza esplicita dalle variabili per le funzioni coinvolte). Si procede assumendo l'esistenza di una soluzione due volte derivabile con derivate seconde prolungabili per continuità fino al bordo e dandone una formula di rappresentazione. (la verifica che la formula risolve effettivamente (A.7) è omessa e può essere trovata in [31]).

Si consideri una certa funzione v sufficientemente regolare. Preso atto delle seguenti identità algebriche di facile verifica

$$vu_{xx} = (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx} \quad (\text{A.8})$$

$$vu_{tt} = (vu_t)_t - (v_t u)_t + uv_{tt} \quad (\text{A.9})$$

$$vau_x = (avu)_x - u(av)_x \quad (\text{A.10})$$

$$vbu_t = (bvu)_t - u(bv)_t \quad (\text{A.11})$$

$$vcu = ucv \quad (\text{A.12})$$

si ottiene, sommando termine a termine,

$$vL[u] = uM[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t} \quad (\text{A.13})$$

dove $M[\cdot]$ è l'operatore

$$M[v] := v_{tt} - v_{xx} - (av)_x - (bv)_t + cv \quad (\text{A.14})$$

e H e K sono le due espressioni

$$H := vu_x - v_x u + avu = (vu)_x + u(av - 2v_x) = -(vu)_x + v(au + 2u_x) \quad (\text{A.15})$$

$$K := -vu_t + v_t u + bvu = -(vu)_t + u(bv + 2v_t) = (vu)_t + v(b - 2u_t). \quad (\text{A.16})$$

Fissato $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, si prendano le rette passanti per (x_0, t_0) e parallele a $t - x = 0$ e $t + x = 0$. Esse intersecano l'asse dei tempi iniziali in $(x_0 - t_0, 0)$ e $(x_0 + t_0, 0)$.

Indicato con Δ il triangolo ABC di vertici $A = (x_0, t_0)$, $B = (x_0 - t_0, 0)$ e $C = (x_0 + t_0, 0)$, integrando su Δ la (A.13) si ottiene

$$\int \int_{\Delta} [vL[u] - uM[v]] dx dt = \int \int_{\Delta} \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial t} \right] dx dt \quad (\text{A.17})$$

e in virtù del teorema di Gauss–Green (osservato che $\partial\Delta$ è liscio a tratti) si ha

$$\int \int_{\Delta} [vL[u] - uM[v]] dx dt = \int_{\partial\Delta^+} [-Kdx + Hdt] \quad (\text{A.18})$$

dove $\partial\Delta^+$ indica l'orientazione antioraria, assunta positiva. È evidente che $\partial\Delta^+ = AB \cup BC \cup CA$ dove l'ordine delle lettere indica l'orientazione del segmento, e quindi

$$\int_{\partial\Delta^+} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}.$$

Parametrizzando rispetto all'ascissa curvilinea i segmenti AB e CA si ha che

$$AB = \begin{cases} x = x_0 - \frac{s}{\sqrt{2}} \\ t = t_0 - \frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \\ dt = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad s \in [0, \sqrt{2}t_0] \quad (\text{A.19})$$

$$CA = \begin{cases} x = x_0 + t_0 - \frac{s}{\sqrt{2}} \\ t = \frac{s}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \\ dt = \frac{ds}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad s \in [0, \sqrt{2}t_0] \quad (\text{A.20})$$

e si osserva che su AB , per una $f(x, t)$ differenziabile, vale

$$\frac{d}{ds}f(x(s), t(s)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}f_x(x(s), t(s)) - \frac{1}{\sqrt{2}}f_t(x(s), t(s)) \quad (\text{A.21})$$

e, similmente, sul segmento CA

$$\frac{d}{ds}f(x(s), t(s)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}f_x(x(s), t(s)) + \frac{1}{\sqrt{2}}f_t(x(s), t(s)). \quad (\text{A.22})$$

Calcolando l'integrale sul lato destro della (A.18), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta^+} [-Kdx + Hdt] &= \int_{AB} [-Kdx + Hdt] + \int_{BC} [-Kdx + Hdt] + \int_{CA} [-Kdx + Hdt] \\ &:= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

da cui, in virtù della (A.15) e della (A.16) e applicando la (A.21), si ottiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{AB} \left[\frac{d}{ds}uv \right] ds + 2 \int_{BA} \left[\left(\frac{d}{ds}v - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \right) u \right] ds = \\ &= uv(x_0 - t_0, 0) - uv(x_0, t_0) + 2 \int_{BA} \left[\left(\frac{d}{ds}v - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \right) u \right] ds. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Analogamente per il segmento CA , si ha

$$I_3 = \int_{CA} \left[-\frac{d}{ds}uv \right] ds + 2 \int_{CA} \left[\left(\frac{d}{ds}v - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v \right) u \right] ds \quad (\text{A.24})$$

$$\Rightarrow I_3 = uv(x_0 + t_0, 0) - uv(x_0, t_0) + 2 \int_{CA} \left[\left(\frac{d}{ds}v - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v \right) u \right] ds. \quad (\text{A.25})$$

Combinando la (A.23) e (A.24) nella (A.18) si ottiene che

$$\begin{aligned} uv(x_0, t_0) &= \frac{uv(x_0 - t_0, 0) + uv(x_0 + t_0, 0)}{2} + \int_{BA} \left[\left(\frac{d}{ds}v - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \right) u \right] ds + \\ &+ \int_{CA} \left[\left(\frac{d}{ds}v - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v \right) u \right] ds + \frac{1}{2} \int_{BC} [Hdt - Kdx] + \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\Delta} [vL[u] - uM[v]] dxdt. \quad (\text{A.26})$$

La formula (A.26) è un'identità per ogni funzione u, v sufficientemente regolare. Sia ora u soluzione del problema (A.7). Allora, fissato $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, si prosegue chiedendo che la funzione $v_{x_0, t_0}(x, t)$ soddisfi

$$M[v] = v_{tt} - v_{xx} - (av)_x - (bv)_t + cv \equiv 0 \quad \text{in } \Delta \quad (\text{A.27})$$

e che

$$\begin{cases} v_{x_0, t_0}(x_0, t_0) = 1 \\ \frac{d}{ds} v_{x_0, t_0} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} \quad \text{su AB} \\ \frac{d}{ds} v_{x_0, t_0} = \frac{a+b}{2\sqrt{2}} \quad \text{su AC} \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Si osservi che il sistema (A.28) implica banalmente

$$v_{x_0, t_0}(x(s), t(s)) = e^{\int_0^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds'} \quad \text{su AB} \quad (\text{A.29})$$

$$v_{x_0, t_0}(x(s), t(s)) = e^{\int_0^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds'} \quad \text{su AC} \quad (\text{A.30})$$

in parametrizzazioni rispetto all'ascissa curvilinea in cui il punto A coincide con $s = 0$.

Si può dimostrare che queste condizioni definiscono completamente la funzione v_{x_0, t_0} all'interno del triangolo ABC . Parametrizzando alla maniera ovvia il segmento BC e osservando che su BC vale che $t \equiv 0$, si ha, unendo anche le ultime considerazioni e ricordando che u risolve $L[u] = f$, la seguente

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \frac{uv(x_0 - t_0, 0) + uv(x_0 + t_0, 0)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} [hv - g(v_t + bv)] dx - \frac{1}{2} \int \int_{\Delta} v f dxdt \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

con f, g, h note e v soluzione, ad (x_0, t_0) fissato, del problema (A.27)-(A.28).

Ponendo ora $a(x, t)$ e $b(x, t) \equiv 0$ e $c(x, t) = k^2$ nella (A.7) si ottiene il problema di Cauchy associato all'operatore di Klein-Gordon (in variabili adimensionali)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + k^2 u(x, t) = 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Fissato (x_0, t_0) , v_{x_0, t_0} risolve, adottando la notazione precedente,

$$\begin{cases} v \equiv 1 & \text{su AB} \\ v \equiv 1 & \text{su AC} \\ M[v] = v_{tt} - v_{xx} + k^2 v \equiv 0 & \text{in } \Delta \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

Si cerca quindi una soluzione $v(z)$, con $z(x, t)$ che si annulla identicamente sulle rette caratteristiche sulle quali giacciono AB e AC , di equazioni $t - x + x_0 - t_0 = 0$ e $t + x - x_0 - t_0 = 0$, ad esempio $z(x, t) = \sqrt{(t - t_0 - x + x_0)(t - t_0 + x - x_0)} = \sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2}$. Allora

$$z^2 = (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 \quad (\text{A.34})$$

e da rapidi calcoli

$$v_{tt} - v_{xx} + k^2 v = 0 \Rightarrow v''(z)(z_t^2 - z_x^2) + v'(z)(z_{tt} - z_{xx}) + k^2 v(z) = 0 \quad (\text{A.35})$$

dove l'apice denota la derivata rispetto a z . Differenziando la (A.34) si ottengono le identità

$$zz_t = t - t_0 \quad (\text{A.36})$$

$$zz_x = -(x - x_0) \quad (\text{A.37})$$

e differenziando ulteriormente

$$zz_{tt} + z_t^2 = 1 \quad (\text{A.38})$$

$$zz_{xx} + z_x^2 = -1 \quad (\text{A.39})$$

da cui, isolando le derivate nella (A.36)-(A.37), poi sottraendo le (A.38)-(A.39) si ricava

$$z_t^2 - z_x^2 = 1 \quad (\text{A.40})$$

$$z_{tt} - z_{xx} = \frac{1}{z} \quad (\text{A.41})$$

e dunque la (A.36) assume la forma

$$v'' + \frac{1}{z}v' + k^2 v = 0 \quad (\text{A.42})$$

con condizione $v(0) = 1$. La soluzione a questa equazione differenziale è nota in letteratura e prende il nome di funzione di Bessel di ordine zero $J_0(z)$, con derivata $\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z)$ funzione di Bessel di ordine uno. Di conseguenza

$$v_{x_0, t_0}(x, t) = J_0(k\sqrt{(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2}) \quad (\text{A.43})$$

e dunque si ottiene, dalla (A.31), che la soluzione esplicita del problema (A.32) è data da

$$u(x_0, t_0) = \frac{g(x_0 - t_0) + g(x_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} \left[J_0 \left(k\sqrt{t_0^2 - (x - x_0)^2} \right) h(x) \right] dx +$$

$$-\frac{kt_0}{2} \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} \left[\frac{J_1 \left(k\sqrt{t_0^2 - (x-x_0)^2} \right)}{\sqrt{t_0^2 - (x-x_0)^2}} g(x) \right] dx. \quad (\text{A.44})$$

Ripristinando le variabili fisicamente significative, si può ricavare la soluzione così come presentata in (A.4) per le due componenti dello spinore.

Appendice B

Cenni sulla teoria delle estensioni autoaggiunte di operatori simmetrici

In questa appendice si forniscono alcune nozioni di base su come un operatore simmetrico, definito su un dominio denso, può essere esteso a un operatore autoaggiunto (allargando il dominio di definizione a un sottospazio più grande in modo tale che esso arrivi a coincidere con il dominio del suo aggiunto). In particolare, si farà un cenno alla teoria delle *triple di bordo* impiegata nel capitolo 3 per giustificare l'autoaggiuntezza dell'operatore di Dirac su un grafo metrico con condizioni al bordo di tipo Kirchhoff.

Si ricorda dapprima il seguente, utile, criterio, con dimostrazione, per verificare l'autoaggiuntezza di un operatore a priori solamente simmetrico.

Definizione B.1 (Operatore chiuso). *Sia A un operatore lineare definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Esso è chiuso se, per ogni successione $\{\psi_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ convergente a ψ e tale che $\{A\psi_n\}$ converge a ϕ , si ha che $\psi \in \mathcal{D}(A)$ e $A\psi = \phi$.*

Teorema B.1 (Criterio di autoaggiuntezza). *Sia A un operatore lineare simmetrico definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- i) A è autoaggiunto;*
- ii) A è chiuso e $\ker(A^* \pm i) = 0$;*
- iii) $\text{ran}(A \pm i) = \mathcal{H}$.*

Dimostrazione. ($i \implies ii$) Supponiamo per assurdo che esista ψ in $\mathcal{D}(A^*)$ (che coincide con $\mathcal{D}(A)$ per l'ipotesi di autoaggiuntezza) tale che $A^*\psi = -i\psi$ (ma il caso di segno positivo è analogo). Allora

$$i\|\psi\|^2 = (-i\psi, \psi) = (A^*\psi, \psi) = (\psi, A\psi) = (\psi, -i\psi) = -i\|\psi\|^2 \rightarrow \psi = 0. \quad (\text{B.1})$$

($ii \implies iii$) Poiché $A^*\psi = -i\psi$ ha soluzione banale, allora $\text{ran}(A - i)$ deve essere denso in \mathcal{H} . Infatti, sia $\psi_0 \in \text{ran}(A - i)^\perp$, ovvero

$$(\psi_0, (A - i)\psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A). \quad (\text{B.2})$$

Allora dalle proprietà dell'aggiunto $\psi_0 \in \ker(A^* + i)$ che per ipotesi contiene il solo vettore nullo. Resta da mostrare che $\text{ran}(A - i) = \mathcal{H}$, cioè che è chiuso in norma. Sia infatti $\{\phi_n\}$ una successione di vettori convergente in $\text{ran}(A - i)$, vale a dire che esiste una successione $\{\psi\}_n$ tale che $(A - i)\psi_n = \phi_n$, e sia ϕ il suo limite. Allora, espandendo i prodotti scalari, si ottiene

$$\|\phi_m - \phi_n\|^2 = \|(A - i)(\psi_m - \psi_n)\|^2 = \|A(\psi_m - \psi_n)\|^2 + \|\psi_m - \psi_n\|^2, \quad (\text{B.3})$$

dove il lato sinistro dell'uguaglianza può essere reso piccolo a piacere in virtù del criterio di convergenza di Cauchy. Questo, insieme alla chiusura dell'operatore A , implica la convergenza della successione $\{\psi\}_n$ a un elemento ψ tale che $(A - i)\psi = \phi$, e dunque $\phi \in \text{ran}(A - i)$.

($iii \implies i$) Sia $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$. Essendo $\text{ran}(A - i)$ denso in \mathcal{H} , allora esiste $\psi \in \mathcal{D}(A)$ tale che $(A^* - i)\phi = (A - i)\psi$ e, ricordando che l'aggiunto di un operatore simmetrico ristretto al dominio dell'operatore di partenza agisce allo stesso modo, si ha che

$$(A^* - i)(\phi - \psi) = 0, \quad (\text{B.4})$$

vale a dire che il vettore $\phi - \psi$ è nel nucleo dell'operatore $A^* - i$. Ma, in virtù della densità di $\text{ran}(A + i)$, deve aversi necessariamente, per ragionamenti analogo al caso precedente, che $\phi - \psi$ è il vettore nullo, vale a dire che ogni vettore $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$ è nel dominio dell'operatore A e dunque l'operatore di partenza è autoaggiunto. \square

A priori la sola simmetria di un operatore lineare A su un certo dominio $\mathcal{D}(A)$ permette di affermare che il dominio sul quale è ben definito l'operatore aggiunto A^* estende il dominio dell'operatore di partenza, ovvero $\mathcal{D}(A^*) \supseteq \mathcal{D}(A)$. Infatti, fissato $\phi \in \mathcal{D}(A)$, si ha che l'operatore lineare L così definito

$$L : \psi \in \mathcal{D}(A) \rightarrow (\phi, A\psi) \equiv (A\phi, \psi) \in \mathbb{C} \quad (\text{B.5})$$

è limitato, come segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dell'appartenenza di ϕ al dominio di definizione. Dunque, in virtù del teorema di Riesz, esiste $\eta \in \mathcal{H}$ tale che $(\phi, A\psi) = (\eta, \psi)$ che coincide con $A\phi$ in virtù della simmetria dell'operatore A . Informalmente, arricchendo lo spazio di definizione dell'operatore A , aumentano il numero di condizioni che un vettore nel dominio dell'operatore aggiunto deve soddisfare (in quanto aumentano il numero di vettori contro il quale le ipotesi del teorema di Riesz devono essere verificate) e dunque diminuisce il numero di vettori nel dominio dell'operatore aggiunto relativo all'operatore di partenza definito sul nuovo dominio. Per queste ragioni, è di rilievo determinare condizioni necessarie e sufficienti affinché possa accadere che, ricalibrando opportunamente i domini dei due operatori, gli spazi $\mathcal{D}(A)$ e $\mathcal{D}(A^*)$ vengano a coincidere e, insieme all'ipotesi di simmetria, garantiscano l'autoaggiuntezza. Un risultato in tal senso, risalente a Von Neumann, è il seguente, riportato senza dimostrazione.

Definizione B.2 (Spazi e indici di difetto). *Sia A un operatore lineare simmetrico definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Si definiscono spazi di difetto $\mathcal{H}_{\pm i}$ e indici di difetto $n_{\pm i}$*

$$\mathcal{H}_{\pm i} := \ker(A^* \mp i)^{\perp}, \quad n_{\pm} = \dim \mathcal{H}_{\pm}. \quad (\text{B.6})$$

Teorema B.2 (Von Neumann, estensioni autoaggiunte). *Sia A un operatore simmetrico chiuso, allora*

- i) A è autoaggiunto se e solo se $n_+ = n_- = 0$*
- ii) A ammette estensioni autoaggiunte se e solo se $n_+ = n_- = n \geq 1$ ed in tal caso le estensioni autoaggiunte sono parametrizzate da una matrice unitaria n -dimensionale.*

B.1 Teoria delle triple di bordo

Questa sezione è dedicata alla presentazione (così come offerta in [26]) di un approccio alla teoria delle estensioni autoaggiunte che si rivela essere particolarmente efficace per lo studio di operatori differenziali (soprattutto definiti su domini spaziali non regolari, come ad esempio i grafi metrici). Esso è basato sulla nozione di *tripla di bordo* per l'aggiunto di un operatore simmetrico A densamente definito su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Definizione B.3 (Tripla di bordo). *Sia A un operatore lineare simmetrico definito su un dominio denso in \mathcal{H} . Una tripla di bordo per A^* è una tripla*

$(\mathfrak{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ costituita da uno spazio di Hilbert \mathfrak{H} con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ e mappe lineari $\Gamma_0 : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathfrak{H}$ e $\Gamma_1 : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathfrak{H}$ tali che per ogni $x, y \in \mathcal{D}(A^*)$:

$$i) [x, y]_{A^*} := (A^*x, y)_{\mathcal{H}} - (x, A^*y)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1x, \Gamma_0y)_{\mathfrak{H}} - (\Gamma_0x, \Gamma_1y)_{\mathfrak{H}} \quad (\text{B.7})$$

ii) la mappa $\mathcal{D}(A^*) \ni x \rightarrow (\Gamma_0x, \Gamma_1x) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ è suriettiva.

Osservazione B.1. Siano $\Gamma_+ := \Gamma_1 + i\Gamma_0$ e $\Gamma_- := \Gamma_1 - i\Gamma_0$. Allora la (B.7) è equivalente a

$$2i[x, y]_{A^*} = (\Gamma_-x, \Gamma_-y)_{\mathfrak{H}} - (\Gamma_+x, \Gamma_+y)_{\mathfrak{H}}. \quad (\text{B.8})$$

Se si determinano quindi due applicazioni Γ_+, Γ_- che soddisfano identicamente la (B.8) per ogni elemento nel dominio dell'aggiunto, allora, previa la suriettività della mappa $\mathcal{D}(A^*) \ni x \rightarrow (\Gamma_+x, \Gamma_-x) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$, è possibile costruire la corrispondente tripla di bordo $(\mathfrak{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ invertendo le relazioni precedenti, ossia ponendo

$$\Gamma_1 := \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{2}, \quad \Gamma_0 := \frac{\Gamma_+ - \Gamma_-}{2i}. \quad (\text{B.9})$$

In questo caso, ci si riferirà ancora alla tripla $(\mathfrak{H}, \Gamma_+, \Gamma_-)$, con un leggero abuso di notazione, come tripla di bordo per A^* .

I vettori Γ_0x e Γ_1x di \mathfrak{H} sono detti *valori al bordo astratti* di $x \in \mathcal{D}(A^*)$ e la condizione (B.7) è detta *identità di Green astratta*. Questa terminologia deriva dagli operatori differenziali dove Γ_0 e Γ_1 sono termini di bordo di funzioni e di derivate di funzioni ottenuti da integrazioni per parti successive, come si vede nei seguenti esempi.

Esempio B.1 (*Operatore differenziale del primo ordine*) Sia $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $A = -i \frac{d}{dx}$ l'operatore simmetrico su $\mathcal{D}(A) = H_0^1(a, b)$ spazio delle funzioni di Sobolev del primo ordine con supporto compatto in (a, b) .

Allora integrando per parti si ottiene

$$i[f, g]_{A^*} = f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)}. \quad (\text{B.10})$$

Poiché la suriettività è soddisfatta in quanto $\mathcal{D}(A^*) = H^1(a, b)$ e la (B.10) implica la (B.8), si ha che la tripla

$$\mathfrak{H} = \mathbb{C}, \quad \Gamma_+(f) = \sqrt{2}f(a), \quad \Gamma_-(f) = \sqrt{2}f(b) \quad (\text{B.11})$$

è una tripla di bordo per A^* .

Esempio B.2 (*Operatore differenziale del secondo ordine*) Sia $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ l'operatore simmetrico su $\mathcal{D}(A) = H_0^2(a, b)$ dove $H_0^2(a, b)$ è la chiusura di $C_0^\infty(a, b)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{H_0^2(a, b)}^2 = \int_a^b (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2) dx.$$

Allora integrando per parti si ottiene

$$[f, g]_{A^*} = f(b)\overline{g'(b)} - f'(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g'(a)} + f'(a)\overline{g(a)}. \quad (\text{B.12})$$

Poiché la suriettività è soddisfatta in quanto $\mathcal{D}(A^*) = H^2(a, b)$ e la (B.12) implica la (B.7), si ha che la tripla

$$\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_0(f) = (f(a), f(b)), \quad \Gamma_1(f) = (f'(a), -f'(b)) \quad (\text{B.13})$$

è una tripla di bordo per A^* .

Il seguente teorema dà una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una tripla di bordo

Teorema B.3 (Esistenza delle triple di bordo). *Sia A un operatore simmetrico densamente definito. Allora esiste una tripla di bordo $(\mathfrak{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ per A^* se e solo se l'operatore simmetrico ha indici di difetto n_\pm uguali. Allora si ha $n_+ = n_- = \dim \mathfrak{H}$.*

L'introduzione delle triple di bordo permette di dare una parametrizzazione di tutte le estensioni autoaggiunte di un operatore simmetrico densamente definito in termini di operatori unitari e operatori autoaggiunti agenti su sottospazi chiusi e definiti sullo spazio di destinazione \mathfrak{H} . Si premettono innanzitutto alcune definizioni

Definizione B.4 (Parametrizzazione in termini di operatori autoaggiunti). *Sia B un operatore autoaggiunto che agisce su un sottospazio chiuso \mathfrak{H}_B e sia P_B la proiezione ortogonale su \mathfrak{H}_B . Allora si definisce l'operatore A_B come la restrizione di A^* al dominio*

$$\mathcal{D}(A_B) := \{x \in \mathcal{D}(A^*) : \Gamma_0 x \in \mathcal{D}(B) \text{ e } B\Gamma_0 x = P_B \Gamma_1 x\} \quad (\text{B.14})$$

In altre parole, $x \in \mathcal{D}(A^*)$ è in $\mathcal{D}(A_B)$ se e solo se esistono due vettori $u \in \mathcal{D}(B)$ e $v \in (\mathfrak{H}_B)^\perp$ tali che $\Gamma_0 x = u$ e $\Gamma_1 x = Bu + v$.

Definizione B.5 (Parametrizzazione in termini di operatori unitari). *Sia V un operatore unitario su \mathfrak{H} . Allora si definisce l'operatore A^V come la restrizione di A^* al dominio*

$$\mathcal{D}(A^V) := \{x \in \mathcal{D}(A^*) : V\Gamma_+x = \Gamma_-x\}. \quad (\text{B.15})$$

Vale quindi il seguente teorema:

Teorema B.4 (Caratterizzazione delle estensioni autoaggiunte). *Sia A un operatore simmetrico densamente definito su \mathcal{H} e sia $(\mathfrak{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ una tripla di bordo relativa a A^* . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- i) S è un'estensione autoaggiunta di A su \mathcal{H}*
 - ii) Esiste un operatore B autoaggiunto su \mathfrak{H} tale che $S = A_B$*
 - iii) Esiste un operatore V unitario su \mathfrak{H} tale che $S = A^V$*
- In più gli operatori V e B sono unicamente determinati da S .*

Osservazione B.2. *Un semplice corollario del teorema precedente è che le estensioni S_0 e S_1 di un operatore simmetrico che si ottengono restringendo l'aggiunto rispettivamente al nucleo dell'operatore Γ_0 e al nucleo dell'operatore Γ_1 sono autoaggiunte per costruzione. Infatti S_1 soddisfa la proposizione ii) dove B è un qualsiasi operatore definito sul sottospazio di \mathfrak{H} che contiene il solo vettore nullo, mentre S_2 soddisfa la proposizione ii) dove B è l'operatore che agisce su tutto \mathfrak{H} che ad ogni vettore associa il vettore nullo.*

Un'applicazione immediata è data da un'analisi più accurata dell'operatore descritto nell'Esempio B.1.

Esempio B.3 (Continuazione Esempio B.1) Si consideri l'operatore descritto nell'Esempio B.1. Segue dal precedente teorema che tutte le estensioni autoaggiunte dell'operatore $A = -i\frac{d}{dx}$ su $\mathcal{D}(A) = H_0^1(a, b)$ sono gli operatori $A^z = -i\frac{d}{dx}$ con domini $\mathcal{D}(A^z) = \{f \in H^1(a, b) : f(b) = zf(a)\}$, con z numero complesso di modulo unitario.

B.2 Applicazioni agli operatori differenziali

In questa sezione, al fine di derivare formule esplicite per la parametrizzazione, si assume che A sia un operatore simmetrico densamente definito e tale che l'applicazione di bordo dell'aggiunto $[\cdot, \cdot]_{A^*}$ abbia la seguente forma funzionale:

esistono funzionali lineari $\phi_1, \dots, \phi_d, \psi_1, \dots, \psi_d$, con d numero naturale, definiti su $\mathcal{D}(A^*)$ e tali che

$$[x, y]_{A^*} = \sum_{k=1}^d \left(\psi_k(x) \overline{\phi_k(y)} - \phi_k(x) \overline{\psi_k(y)} \right), \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A^*) \quad (\text{B.16})$$

$$\{(\phi(x), \psi(x)) : x \in \mathcal{D}(A^*)\} = \mathbb{C}^{2d}, \quad (\text{B.17})$$

dove $\phi(x) := (\phi_1(x), \dots, \phi_d(x))$ e $\psi(x) := (\psi_1(x), \dots, \psi_d(x))$.

Chiaramente è questo il caso per l'operatore differenziale studiato nell'esempio B.2. Dalla (B.16) esiste quindi una tripla di bordo $(\mathfrak{H}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ per A^* definita da

$$\mathfrak{H} = \mathbb{C}^d, \quad \Gamma_0 x = \phi(x), \quad \Gamma_1 x = \psi(x). \quad (\text{B.18})$$

Sia allora B operatore autoaggiunto su \mathfrak{H} definito su un sottospazio vettoriale chiuso \mathfrak{H}_B n -dimensionale, con $n \leq d$. Sia quindi $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di \mathfrak{H}_B e $\{\tilde{e}_{n+1}, \dots, \tilde{e}_d\}$ una base ortonormale del complemento $(\mathfrak{H}_B)^\perp$. Essendo B un operatore autoaggiunto su \mathfrak{H}_B , allora esiste una matrice Hermitiana di ordine n tale che $B = (B_{kl})$ e quindi $B e_l = \sum_{k=1}^n B_{kl} e_k$.

Il proiettore P_B è invece definito come $P_B \Gamma_1 x = \sum_{k=1}^n \langle \Gamma_1 x, e_k \rangle e_k$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare standard su \mathbb{C}^d . Se allora $\Gamma_0 x \in \mathfrak{H}_B$ si ha

$$B \Gamma_0 x = \sum_l \langle \Gamma_0 x, e_l \rangle B e_l = \sum_{k,l} \langle \Gamma_0 x, e_l \rangle B_{kl} e_k. \quad (\text{B.19})$$

Dalla (B.14) un vettore $x \in \mathcal{D}(A^*)$ appartiene a $\mathcal{D}(A_B)$ se e solo se $\Gamma_0 x \in \mathfrak{H}_B$ e $B \Gamma_0 x = P_B \Gamma_1 x$, vale a dire

$$\langle \Gamma_0 x, \tilde{e}_j \rangle = 0, \quad j = n+1, \dots, d; \quad (\text{B.20})$$

$$\langle \Gamma_1 x, e_k \rangle = \sum_{l=1}^n B_{kl} \langle \Gamma_0 x, e_l \rangle, \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{B.21})$$

Queste considerazioni forniscono una descrizione esplicita dei vettori nel dominio $\mathcal{D}(A_B)$ attraverso d equazioni lineari.

Si vogliono discutere più in dettaglio i casi relativi a $d = 1, 2$ già affrontati nei primi due esempi della sezione.

Esempio B.4 (*caso $d=1$*) L'operatore B può essere agire in un sottospazio n -dimensionale, con $n = 0, 1$ dello spazio di Hilbert $\mathfrak{H} = \mathbb{C}$.

Sia quindi $n = 1$. Una matrice Hermitiana di ordine 1 è semplicemente un numero reale b e l'operatore A_B è determinato semplicemente dalla condizione

di bordo $b\Gamma_0x = \Gamma_1x$.

Se invece $n = 0$, allora B agisce sullo spazio $\{0\}$ e dunque A_B è definito dalla condizione $\Gamma_0x = 0$. Se interpretiamo quest'ultima come un caso particolare della condizione $b\Gamma_0x = \Gamma_1x$ per il caso $b = \infty$, allora tutte le estensioni autoaggiunte A_B dell'operatore T su \mathcal{H} sono caratterizzate dalla condizione di bordo

$$b\Gamma_0x = \Gamma_1x, \quad b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \quad (\text{B.22})$$

Esempio B.5 (*caso $d=2$*) L'operatore B può essere agire in un sottospazio n -dimensionale, con $n = 0, 1, 2$ dello spazio di Hilbert $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2$.

Sia quindi $n = 2$. Un operatore autoaggiunto B bidimensionale è rappresentato da una matrice Hermitiana quadrata di ordine 2, che ha quindi gli elementi diagonali b_1 e b_2 reali e gli elementi fuori diagonali c e \bar{c} uno il coniugato dell'altro. La relazione $B\Gamma_0x = P_B\Gamma_1x$ diventa quindi

$$\psi_1(x) = b_1\phi(x) + c\phi_2(x), \quad \psi_2(x) = \bar{c}\phi_1(x) + b_2\phi_2(x), \quad (\text{B.23})$$

dove $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ sono parametri opportuni.

Sia ora $n = 1$. Sia $e = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ un vettore unitario. Allora $\Gamma_0x \in \mathcal{D}(B) = \mathbb{C} \cdot e$ se e solo se $\Gamma_0x \perp (\beta, -\alpha)$, vale a dire $\phi_1(x)\beta = \phi_2(x)\alpha$, e B agisce come moltiplicazione per un numero reale b . Inoltre, la relazione $B\Gamma_0x = P_B\Gamma_1x$ implica le condizioni, scritte per componenti

$$\psi_1(x)\bar{\alpha}\alpha + \psi_2(x)\bar{\beta}\alpha = b\phi_1(x), \quad \psi_1(x)\bar{\alpha}\beta + \psi_2(x)\bar{\beta}\beta = b\phi_2(x).$$

Ponendo $c := \beta\alpha^{-1}$ e $b_1 := b|\alpha|^{-2}$ se $\alpha \neq 0$ e $b_1 := b$ se $\alpha = 0$ si ha, in entrambi i casi, che le tre equazioni precedenti sono equivalenti a

$$\psi_1(x) = b_1\phi_1(x) - \bar{c}\psi_2(x), \quad \phi_2(x) = c\phi_1(x), \quad (\text{B.24})$$

$$\psi_2(x) = b_1\phi_2(x), \quad \phi_1(x) = 0, \quad (\text{B.25})$$

dove $b_1 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ sono parametri opportuni.

Sia infine $n = 0$. Allora il dominio di A_B è definito dalla condizione $\Gamma_0x = 0$, ossia

$$\phi_1(x) = \phi_2(x) = 0. \quad (\text{B.26})$$

Per riassumere quindi, i domini di tutte le estensioni autoaggiunte dell'operatore A sono gli insiemi dei vettori $x \in \mathcal{D}(A^*)$ che soddisfano una delle quattro condizioni al bordo (B-23)-(B-26), dove $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ sono parametri fissati.

Possiamo quindi applicare queste ultime considerazioni all'operatore descritto nell'Esempio B.2.

Esempio B.6 (*Continuazione Esempio B.2*) Si consideri l'operatore descritto nell'Esempio B.2. Si osservi inoltre che le ipotesi (B.16)-(B.17) sono soddisfatte e che la tripla di bordo è della forma (B.18), dove:

$$d = 2, \quad \phi_1(f) = f(a), \quad \phi_2(f) = f(b),$$

$$\psi_1(f) = f'(a), \quad \psi_2(f) = -f'(b).$$

Come sviluppato nell'Esempio B.5, l'insieme di tutte le estensioni autoaggiunte di A è descritto dalle seguenti quattro famiglie di condizioni al bordo:

$$f'(a) = b_1 f(a) + c f(b), \quad f'(b) = -\bar{c} f(a) - b_2 f(b), \quad (\text{B.27})$$

$$f'(a) = b_1 f(a) + \bar{c} f'(b), \quad f(b) = c f(a), \quad (\text{B.28})$$

$$f'(b) = -b_1 f(b), \quad f(a) = 0, \quad (\text{B.29})$$

$$f(a) = f(b) = 0, \quad (\text{B.30})$$

dove $c \in \mathbb{C}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ sono parametri arbitrari. In particolare le estensioni S_0 e S_1 definite nell'Osservazione B.2 sono date dalle condizioni al bordo di *Dirichlet* $f(a) = f(b) = 0$ e condizioni al bordo di *Von Neumann* $f'(a) = f'(b) = 0$.

Bibliografia

- [1] J. Arbunich, C. Sparber, Rigorous derivation of nonlinear Dirac equations for wave propagation in honeycomb structures, *J. Math. Phys.*, **59** (2018), art. num. 011509, 13 pp.
- [2] G. Kerkolaiko, P. Kuchment, Quantum graphs I. Some basic structures, *Waves Random Media* **14** (2004), S107-S128.
- [3] G. Berkolaiko, P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs*, AMS, Providence, RI, 2013.
- [4] W. Borrelli, R. Carlone, L. Tentarelli, A note on the Dirac operator with Kirchoff-type vertex conditions on noncompact metric graphs, arXiv:1902.00012 [math.AP] (2019).
- [5] W. Borrelli, R. Carlone, L. Tentarelli, Nonlinear Dirac equation on graphs with localized nonlinearities: bound states and nonrelativistic limit, *SIAM J. Math. Anal.*, **51** (2019), 1046-1081.
- [6] W. Borrelli, R. Carlone, L. Tentarelli, An overview on the standing waves of nonlinear Schrödinger and Dirac equations on metric graphs with localized nonlinearity, *Symmetry*, **11** (2019), art. num. 169.
- [7] C. Cacciapuoti, R. Carlone, D. Noja, A. Posilicano, The one-dimensional Dirac Equation with concentrated nonlinearity, *SIAM J. on Math. Anal.* **49** (2017), 2246-2268.
- [8] R. Carlone, M. Malamud, A. Posilicano, On the spectral theory of Gesztesy-Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on a discrete set, *J. Differential Equations* **254** (2013), 3835-3902.
- [9] E. B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

- [10] D. Deckert, M. Oelker, Distinguished Self-Adjoint Extension of the Two-Body Dirac Operator with Coulomb Interaction, *Ann. Henri Poincaré* **20** (2019), 2407-2445.
- [11] J. Dereziński, Open problems about many-body Dirac operators, *IAMP News Bulletin*, 2012.
- [12] M. J. Esteban e M. Loss, Self-adjointness via partial Hardy-like inequalities, *Mathematical results in quantum mechanics*, 41-47, World Sci. Pub., Hackensack, NJ. 2008.
- [13] C. L. Fefferman, M. I. Weinstein, Honeycomb lattice potential and Dirac points, *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), 1169-1220
- [14] C. L. Fefferman, M. I. Weinstein, Wave packets in honeycomb structures and two-dimensional dirac equations, *Commun. Math. Phys.* **326** (2014), 251-286.
- [15] Graphene Flagship European Community Project, <https://graphene-flagship.eu/project/Pages/default.aspx>
- [16] S. Gnuzmann, U. Smilansky, S. Derevyanko, Stationary scattering from a nonlinear network, *Phys. Rev. A*, **83** (2011), art. num. 033831, 6 pp.
- [17] S. Gnuzmann, D. Waltner, Stationary waves on nonlinear quantum graphs: General framework and canonical perturbation theory, *Phys. Rev. E*, **93** (2016), art. num. 032204, 19 pp.
- [18] L. H. Haddad, L. D. Carr, The nonlinear Dirac equation in Bose–Einstein condensates: foundation and symmetries, *Phys. D.* **238** (2009), 1413-1421.
- [19] L. H. Haddad, L. D. Carr, The nonlinear Dirac equation in Bose–Einstein condensates: II. Relativistic soliton stability analysis, *New J. Phys.* **17** (2015), art. num. 063034, 22 pp.
- [20] G. Nenciu, Self-adjointness and invariance of the essential spectrum for dirac operators defined as quadratic forms, *Commun. Math. Phys.* **48** (1976), 235-247.
- [21] D. Noja, Nonlinear Schrödinger equation on graphs: recent results and open problems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond, Sez. A Math. Phys. Eng. Sci.* **372** (2014), art. num. 20130002, 20 pp.

- [22] A. D. Polyanin, V. E. Nazaikinskii, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.
- [23] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York-London, 1972.
- [24] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-London, 1978.
- [25] K. K. Sabirov, D. B. Babajanov, D. U. Matrasulov, P. G. Kevrekidis, Dynamics of Dirac solitons in networks, *J. Phys. A* **51** (2018), art. num. 435203, 13 pp.
- [26] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Dordrecht, 2012.
- [27] Shun-Qing She, *Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matters*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [28] A. Teta, *A mathematical primer on quantum mechanics*, UNITEXT for Physics, Springer International Publishing, Cham, 2018.
- [29] B. Thaller, *Advanced visual quantum mechanics*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [30] B. Thaller, *The Dirac equation*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [31] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Pergamon Press, the Macmillan Co., New York, 1963.
- [32] Optical analogue of relativistic Dirac solitons in binary waveguide arrays, *Ann. Phys.* **340** (2014), 179-187.
- [33] T.O. Wehling, A.M. Black-Schaffer e A.V. Balatsky, Dirac materials, *Advances in Physics* **63** (2014), 1-73.