SCHEDA DELL'INSEGNAMENTO DI "TEORIA DEI GRUPPI E APPLICAZIONI"

(GROUP THEORY AND APPLICATIONS)

Corso di Studio Magistrale in Fisica | [x] **Insegnamento** | [ ] **Laurea Magistrale** | **A.A. 2018/2019**

Docente: Paolo Aniello ☎**081 676917** **email: paolo.aniello@unina.it**

SSD FIS/02 **CFU** 8 **Anno di corso (I, II)** II **Semestre (I , II)** II

Insegnamenti propedeutici previsti:

Prerequisiti
Trattandosi di un insegnamento rivolto a studenti del secondo anno del Corso di Laurea Magistrale in Fisica, si presuppone una conoscenza di nozioni basilari di algebra, analisi, teoria degli operatori, relatività e meccanica quantistica. Il corso è autosufficiente per quanto concerne strumenti più avanzati.
Conoscenza e capacità di comprensione
Le conoscenze di teoria dei gruppi fondamentali per una comprensione approfondita di molteplici aspetti della fisica teorica ed applicata.
Conoscenza e capacità di comprensione applicate
Applicazioni alla meccanica quantistica, alla teoria quantistica dell'informazione, all'analisi dei segnali.

PROGRAMMA

Nozioni basilari, esempi: Assiomi; omomorfismi; sottogruppi; classi laterali; gruppi quoziente. Teoremi di isomorfismo. Azioni. Prodotti diretti e semidiretti. Gruppi ciclici, simmetrici, alternanti, diedrali. Gruppi ortogonale ed euclideo. Gruppi di Lorentz e di Poincaré. Gruppo di Heisenberg-Weyl (H-W). Gruppo simplettico. Gruppo unitario e sua immersione nel gruppo simplettico. Automorfismi del gruppo di H-W. **Gruppi di Lie:** Definizioni, proprietà, esempi notevoli (gruppi classici). Gruppi di Lie connessi. Componente connessa dell'identità. Gruppi di Lie semplicemente connessi. Algebre di Lie. **Analisi su gruppi topologici:** Misure invarianti su gruppi. Funzione modulare; unimodularità dei gruppi compatti. Prodotti semidiretti: struttura delle misure invarianti e delle funzioni modulari. Convoluzione. **Rappresentazioni:** Definizioni. Rappresentazioni unitarie di gruppi topologici. Rappresentazione regolare. Relazioni di intreccio; equivalenza unitaria. Operatori di coniugazione complessa; rappresentazione coniugata e rappresentazione contragradiente. Sottospazi invarianti; rappresentazioni riducibili ed irriducibili. Sottospazi ciclici, vettori ciclici, rappresentazioni cicliche. Decomposizione di una rappresentazione come somma diretta di rappresentazioni cicliche. Commutante e lemma di Schur. Unidimensionalità delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo abeliano. **Simmetrie in meccanica quantistica:** Gruppo unitario-antiunitario di uno spazio di Hilbert. Simmetrie e teorema di Wigner. Teorema di Uhlhorn. Automorfismi di Kadison e di Jordan-Segal. **Analisi su gruppi abeliani:** Gruppi abeliani localmente compatti e gruppi duali. Trasformate di Fourier e di Fourier-Stieltjes. Teorema di Bochner. Teorema di inversione di Fourier. Teorema di Plancherel. Teorema di dualità di Pontrjagin. **Rappresentazioni proiettive:** Gruppo proiettivo di uno spazio di Hilbert; moltiplicatori; equivalenza tra moltiplicatori, moltiplicatori esatti; rappresentazioni proiettive: definizioni e teorema fondamentale. Estensioni centrali di gruppi localmente compatti ed equivalenza tra estensioni centrali. Estensioni centrali associate a moltiplicatori, topologia di Weil, classi di equivalenza. Estensioni centrali e rappresentazioni proiettive. **Rappresentazioni del gruppo di H-W:** Estensioni centrali e rappresentazioni proiettive di un gruppo vettoriale. Il gruppo di H-W come estensione centrale e classificazione delle rappresentazioni irriducibili; rappresentazioni di Schroedinger e rappresentazioni proiettive associate; stati coerenti. Sistemi di Weyl e forma integrata delle relazioni di commutazione canoniche. Teorema di Stone-von Neumann. **Rappresentazioni di gruppi compatti:** Fatti fondamentali. Relazioni di ortogonalità di Schur. Teorema di Peter-Weyl. **Rappresentazioni a quadrato integrabile:** Teorema di Duflo-Moore. Il caso dei gruppi compatti e del gruppo affine. Trasformata wavelet. Funzioni di Wigner.

CONTENTS

Basic notions, examples: Axioms; homomorphisms; subgroups; cosets; quotient groups. Isomorphism theorems. Group actions. Direct and semidirect products. Cyclic, symmetric, alternating and dihedral groups. Orthogonal and euclidean groups. Lorentz and Poincaré groups. Heisenberg-Weyl (H-W) group. Symplectic group. Unitary group and immersion of the unitary group in the symplectic group. Automorphisms of the H-W group. **Lie groups:** Definitions, properties, examples (classical groups). Connected Lie groups. Connected component with the identity. Simply connected Lie groups. Lie algebras. **Analysis on topological groups:** Invariant measures on groups. Modular function; unimodularity of compact groups. Semidirect products: structure of the invariant measures and of the modular functions. Convolution. **Group representations:** Basic definitions. Unitary representations of topological groups. Regular representation. Intertwining relations for group representations; unitary equivalence. Complex conjugation operators; conjugate representation and contragredient representation. Invariant subspaces; reducible and irreducibile representations. Cyclic subspaces, cyclic vectors, cyclic representations. Decomposition of a representation as a direct sum of cyclic representations. The commutant and Schur's lemma. Dimension of the irreducible representations of an abelian group. **Symmetries in quantum mechanics:** The unitary-antiunitary group of a Hilbert space. Symmetry transformations and Wigner's theorem. Uhlhorn's theorem. Kadison and Jordan-Segal automorphisms. **Analysis on abelian groups:** Locally compact abelian groups and their duals. Fourier and the Fourier-Stieltjes transforms. Bochner's theorem. Fourier inversion theorem. Plancherel's theorem. Pontrjagin duality theorem. **Projective representations:** Projective group of a Hilbert space; multipliers; equivalence between multipliers, exact multipliers; projective representations: definitions and fundamental theorem. Central extensions of

SCHEDA DELL'INSEGNAMENTO DI "TEORIA DEI GRUPPI E APPLICAZIONI"

(GROUP THEORY AND APPLICATIONS)

Corso di Studio
Magistrale in Fisica

[x] **Insegnamento** [ ] **Laurea Magistrale**

A.A. 2018/2019

locally compact groups and equivalent central extensions. Central extensions associated with multipliers, Weil's topology, equivalence classes. Central extensions and projective representations. **Representations of the H-W group:** Central extensions and projective representations of a vector group. The H-W group as a central extension and classification of the irreducible representations; Schroedinger representations and the associated projective representations; coherent states. Weyl systems and the integrated form of the canonical commutation relations. Stone-von Neumann theorem. **Representations of compact groups:** Basic facts. Schur's orthogonality relations. Peter-Weyl theorem. **Square integrable representations:** Duflo-Moore theorem. The case of compact groups and of the one-dimensional affine group. Wavelet transform. Wigner functions.

MATERIALE DIDATTICO

Appunti del Corso; W. Miller, *Symmetry Groups and their Applications*, Academic Press**;** G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press**;** B.C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*, Springer**;** V.S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Springer

FINALITA' E MODALITA' PER LA VERIFICA DI APPRENDIMENTO

a) Risultati di apprendimento che si intende verificare:

Comprensione degli aspetti concettuali fondamentali e padronanza degli aspetti tecnici più rilevanti.

b) Modalità di esame:

L'esame si articola in prova	**Scritta e orale**		**Solo scritta**		**Solo orale**	**X**