<table>
<tr><td colspan="2">Corso di Laurea Magistrale in Fisica</td><td colspan="3">Insegnamento / Course
TEORIA DEI GRUPPI E APPLICAZIONI / GROUP THEORY AND APPLICATIONS</td></tr>
<tr><td>SSD: FIS/02</td><td>CFU/Credits: 8</td><td>Anno di corso: I/II</td><td>Lezione (ore): 64</td><td>Esercitazione (ore): -</td></tr>
<tr><td colspan="3">Obiettivi formativi:
Nel corso vengono introdotti idee, concetti e metodi della teoria dei gruppi che sono fondamentali per una comprensione approfondita di molteplici aspetti della fisica teorica ed applicata. Lo studente potrà anche acquisire alcuni strumenti matematici avanzati che sono basilari nella fisica teorica moderna. Obiettivo del corso è inoltre di ottenere un’effettiva comprensione e padronanza, da parte dello studente, degli argomenti trattati, mediante la discussione di numerosi esempi, nonché di alcune applicazioni notevoli alla meccanica quantistica, alla teoria quantistica dell’informazione e all’analisi dei segnali.</td><td colspan="2">Training objectives:
The course is aimed at introducing ideas, concepts and methods of group theory that are fundamental in both theoretical and applied physics. During the course some advanced mathematical tools and techniques will be introduced that are of central importance in modern theoretical physics. The effective understanding and mastering of the theoretical topics of the course is supported by the discussion of several examples; moreover, some remarkable applications to quantum mechanics, quantum information science and signal analysis are illustrated.</td></tr>
</table>

Programma sintetico (sillabo):
Nozioni basilari, esempi: Assiomi; omomorfismi; sottogruppi; classi laterali; gruppi quoziente. Teoremi di isomorfismo. Azioni. Prodotti diretti e semidiretti. Gruppi ciclici, simmetrici, alternanti, diedrali. Gruppi ortogonale ed euclideo. Gruppo di Galilei. Gruppi di Lorentz e di Poincaré. Gruppo di Heisenberg-Weyl (H-W). Gruppo simplettico. Gruppo unitario e sua immersione nel gruppo simplettico. **Gruppi di Lie:** Definizioni, proprietà, esempi notevoli. Gruppi di Lie connessi. Componente connessa dell'identità. Gruppi di Lie semplicemente connessi. Algebre di Lie. **Gruppi topologici:** Misure invarianti su gruppi; funzione modulare. Prodotti semidiretti: struttura delle misure invarianti e delle funzioni modulari. Convoluzione. **Rappresentazioni:** Rappresentazioni unitarie di gruppi topologici. Rappresentazione regolare. Relazioni di intreccio; equivalenza unitaria. Operatori di coniugazione complessa; rappresentazione coniugata. Sottospazi invarianti, rappresentazioni irriducibili; rappresentazioni cicliche. Decomposizione di una rappresentazione come somma diretta di rappresentazioni cicliche. Commutante e lemma di Schur. **Simmetrie in meccanica quantistica:** Gruppo unitario-antiunitario di uno spazio di Hilbert. Simmetrie; teoremi di Wigner e di Uhlhorn. Automorfismi di Kadison e di Jordan-Segal. **Analisi su gruppi abeliani:** Gruppi abeliani localmente compatti e gruppi duali. Trasformate di Fourier e di Fourier-Stieltjes. Teorema di Bochner. Teorema di inversione di Fourier. Teorema di Plancherel. Teorema di dualità di Pontrjagin. **Rappresentazioni proiettive:** Gruppo proiettivo di uno spazio di Hilbert; moltiplicatori; rappresentazioni proiettive. Estensioni centrali ed equivalenza tra estensioni centrali. Estensioni centrali associate a moltiplicatori. Estensioni centrali e rappresentazioni proiettive. **Rappresentazioni del gruppo di H-W:** Moltiplicatori di un gruppo vettoriale. Il gruppo di H-W come estensione centrale e classificazione delle rappresentazioni irriducibili; rappresentazioni di Schroedinger e rappresentazioni proiettive associate; stati coerenti. Sistemi di Weyl e forma integrata delle relazioni di commutazione canoniche. Teorema di Stone-von Neumann. **Rappresentazioni di gruppi compatti:** Relazioni di ortogonalità di Schur e teorema di Peter-Weyl. **Rappresentazioni a quadrato integrabile:** Teorema di Duflo-Moore. Casi notevoli: gruppi compatti, gruppo delle traslazioni sullo spazio delle fasi e gruppo affine. Trasformate wavelet e di Gabor. Funzioni di Wigner.

Contents:
Basic notions, examples: Axioms; homomorphisms; subgroups; cosets; quotient groups. Isomorphism theorems. Group actions. Direct and semidirect products. Cyclic, symmetric, alternating and dihedral groups. Orthogonal and euclidean groups. Galilei group. Lorentz and Poincaré groups. Heisenberg-Weyl (H-W) group. Symplectic group. Unitary group and immersion of the unitary group in the symplectic group. **Lie groups:** Definitions, properties, examples. Connected Lie groups. Connected component of the identity. Simply connected Lie groups. Lie algebras. **Topological groups:** Invariant measures on groups; modular function. Semidirect products: structure of the invariant measures and of the modular functions. Convolution. **Group representations:** Unitary representations of topological groups. Regular representation. Intertwining relations for group representations; unitary equivalence. Complex conjugation operators; conjugate representation. Invariant subspaces, irreducibile representations; cyclic representations. Decomposition of a representation as a direct sum of cyclic representations. The commutant and Schur's lemma. **Symmetries in quantum mechanics:** The unitary-antiunitary group of a Hilbert space. Symmetry transformations; Wigner's and Uhlhorn's theorems. Kadison and Jordan-Segal automorphisms. **Analysis on abelian groups:** Locally compact abelian groups and their duals. Fourier and Fourier-Stieltjes transforms. Bochner's theorem. Fourier inversion theorem. Plancherel's theorem. Pontrjagin duality theorem. **Projective representations:** Projective group of a Hilbert space; multipliers; projective representations. Central extensions and equivalent central extensions. Central extensions associated with multipliers. Central extensions and projective representations. **Representations of the H-W group:** Multipliers of a vector group. The H-W group as a central extension and classification of its irreducible representations; Schroedinger representations and the associated projective representations; coherent states. Weyl systems and the integrated form of the canonical commutation relations. Stone-von Neumann theorem. **Representations of compact groups:** Schur's orthogonality relations and Peter-Weyl theorem. **Square integrable representations:** Duflo-Moore theorem. Remarkable cases: compact groups, the group of phase-space translations and the affine group. Wavelet and Gabor transforms. Wigner functions.

Esami propedeutici / Propaedeutic exams: -

Prerequisiti / Prerequisites: Trattandosi di un insegnamento del Corso di Laurea Magistrale in Fisica, si presuppone una conoscenza di nozioni basilari di algebra, analisi, teoria degli operatori, relatività e meccanica quantistica. Il corso è autosufficiente per quanto concerne strumenti più avanzati. / A basic knowledge of algebra, analysis, operator theory, relativity and quantum mechanics is assumed. The course is self-contained w.r.t. more advanced tools.
Finalità e modalità di verifica dell'apprendimento: Esame orale volto alla verifica dell'apprendimento dei concetti fondamentali e di alcuni aspetti tecnici essenziali.
Il corso può essere erogato in lingua inglese in presenza di studenti stranieri (es. Erasmus) / The course can be given in English in presence of foreign students (e.g. Erasmus)