Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea triennale in Fisica

PARADOSSO EPR E TEOREMA DI NO CLONING

Relatori:
Dott. Luigi Rosa

Candidato:
Luigi Volpicelli
Matricola N85/297

A.A. 2015/2016

Indice

1 IL PARADOSSO EPR:ESPERIMENTO IDEALE **4**

1.1 Il paradosso EPR 4

1.2 Polarizzazione dei fotoni 7

2 LA DISUGUAGLIANZA DI CHSH. **12**

2.1 Derivazione della disuguaglianza CHSH 13

2.2 Risultati sperimentali 17

3 IL TEOREMA DI NO CLONING **22**

3.1 Il teorema di no cloning 24

Bibliografia **27**

Introduzione

Nel 1935 un articolo firmato da Albert Einstein,Nathan Rosen e Boris Podolsky rivelò come determinate caratteristiche di certi sistemi quantistici potessero suggerire che la meccanica quantistica fosse una teoria incompleta.Non sarebbe infatti necessario,secondo il padre della teoria della relatività, ricorrere a un'interpretazione probabilistica del mondo fisico ma quest'ultima deriverebbe piuttosto dalla incapacità della meccanica quantistica di rendere conto di tutte le variabili coinvolte nei processi fisici.Se soltanto si fosse in grado di specificare tutte queste variabili nascoste(vale a dire inaccessibili a una diretta osservazione sperimentale),i fenomeni apparirebbero come realmente sono:deterministici e determinati.In questo modo ,secondo Einstein e i suoi collaboratori,sarebbe sufficiente una interpretazione statistica della realtà inserita in una teoria classica o,altrimenti detto,un completamento deterministico della meccanica quantistica.Dopo alterne vicende ,seguendo la strada suggerita da Einstein stesso, negli anni sessanta del Novecento il fisico inglese John Stewart Bell derivò una disuguaglianza ,verificabile sperimentalmente,che gode di una strardinaria proprietà :una teoria classica come quella proposta dai sostenitori di Einstein ,basata sulla presunta incompletezza della meccanica quantistica,la soddisfa ;la meccanica quantistica,al contrario,la viola significativamente.

Per comprendere il problema dobbiamo in primo luogo capire cosa intendiamo quando affermiamo che una teoria può essere considerata completa.Per fare ciò EPR proposero il seguente criterio:

"Condizione necessaria affinché una teoria sia completa è che ogni elemento di realtà abbia una controparte nella teoria fisica".

Per elemento di realtà si intende una grandezza fisica il cui valore può essere previsto con probabilità unitaria senza disturbare in alcun modo il sistema. E' chiaro quindi,che se la meccanica quantistica fornisce una descrizione completa della realtà , allora i valori della posizione e della quantità di moto di una particella non possono essere entrambi elementi di realtà essendo:

$[x, p] = i\hbar$

e quindi non potendo misurare l'uno senza influenzare l'altro.

La tesi è cosi' suddivisa:il primo capitolo si propone di illustrare il paradosso che EPR mossero sulla completezza della meccanica quantistica;il secondo capitolo affronta una generalizzazione della disuguaglianza di Bell ed infine il terzo capitolo si propone di illustrare il teorema di "no cloning" .

Capitolo 1

IL PARADOSSO EPR:ESPERIMENTO IDEALE

Siamo ora pronti a descrivere l'esperimento ideale proposto da EPR. Einstein ,Podolsky e Rosen usarono la meccanica quantistica nel loro articolo. Ma il formalismo matematico non è necessario. Di seguito illustreremo la risposta di Bohr all'articolo EPR.

1.1 Il paradosso EPR

Supponiamo di avere due particelle che una volta interagito siano ora lontane e non possano più interagire.Poichè non interagiscono ,una misura su una particella non influenza l'altra . Poichè hanno interagito in passato ,una misura su una particella potrebbe fornire informazioni indirette sull'altra .Per esempio ,noi possiamo misurare la posizione di una particella indirettamente. Nella figura 1.1 una coppia di particelle massive raggiunge una tavola con due fessure distanti L.

Supponiamo che le particelle passino attraverso la tavola attraverso differenti fessure

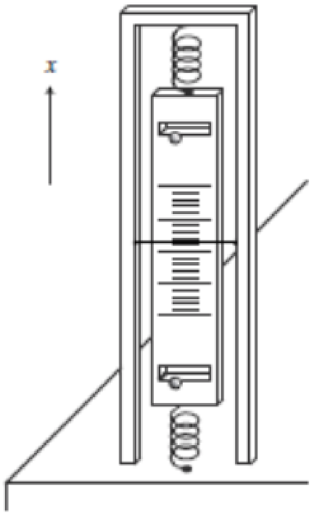

Figura 1.1:

allo stesso tempo.(Può essere improbabile che le due particelle passino attraverso le due fessure simultaneamente ma possiamo provare molte volte fino a che succeda.) In questo modo noi stabiliamo che la distanza verticale fra le due particelle,non appena che esse siano passate sia L. Ora noi misuriamo l'altezza di una delle due particelle dopo che esse hanno attraversato la tavola,in questo modo, indirettamente ,misuriamo anche l'altezza dell'altra particella,senza influenzarla.

Possiamo combinare la misura della posizione con la misura del momento. Consideriamo misure di posizione e momento lungo l'asse x(figura 1.1). Siano x_1 e p_1 le componenti della posizione e del momento della particella 1,e x_2 e p_2 la posizione e il momento dell'altra . Predisponiamo inizialmente $p_1 = p_2 = 0$;i momenti iniziali sono orizzontali. Misuriamo anche la componente del momento della tavola prima e dopo l'arrivo delle particelle. Poichè la quantità di moto totale del sistema tavola+particelle si conserva,questo esperimento ci fornisce il momento totale $p_1 + p_2$ delle particelle dopo il loro passaggio attraverso la tavola.Esso ci fornisce anche la distanza verticale $x_2 - x_1$

fra le particelle non appena che esse attraversino la tavola(sempre che esse attraversino le due fessure).Subito dopo che esse hanno attraversato la tavola noi possiamo misurare o la posizione o il momento di una delle due particelle senza influenzarla. Per esempio,da una misura di x_1 noi possiamo dedurre x_2 e da una misura di p_1 noi possiamo dedurre p_2.

Le misurazioni in questo esperimento mentale non contraddicono le relazioni di incertezza.

Infatti noi misuriamo il momento della tavola ma non ne misuriamo anche la posizione simultaneamente.Inoltre poniamo $p_1 = p_2 = 0$ nell'istante iniziale ma nulla diciamo sulle posizioni delle particelle in tale istante.

Se la tavola non rincula su e giù,allora abbiamo anche $p_1 + p_2 = 0$.

Notiamo qui che il principio di indeterminazione di Heisenberg non vieta tale risultato,in quanto: $[x_1 - x_2, p_1 + p_2] = 0$

Come assunto(e qui si evince l'uso del principio di località nei ragionamenti di EPR),le particelle non interagiscono,così il risultato della misura di p_2 non può dipendere dal fatto che noi misuriamo x_1 o p_1. Chi è p_2? Se noi misuriamo p_1 ottenendo $p_1 = p$,otteniamo anche $p_2 = -p$ poichè $p_1 + p_2 = 0$. Se noi misuriamo x_1 non possiamo misurare p_1 e la teoria dei quanti non predice il risultato della misura di p_2. Ma il risultato della misura di p_2 non può dipendere dal fatto che noi misuriamo p_1 o x_1,come assunto. Dunque noi dobbiamo ottenere $p_2 = -p$,i.e. qualche predeterminato risultato indipendente da ciò che noi misuriamo sull'altra particella (e indipendente da quale particella misuriamo per prima). Poichè la teoria dei quanti non predice questo risultato ,essa è incompleta.Questo è il paradosso EPR.

Il paradosso EPR ha delle implicazioni sperimentali? La risposta è si.

1.2 Polarizzazione dei fotoni

Un pione π_0 a riposo decade in due fotoni, che partono con velocità eguali ed opposte. Quale è il loro stato di polarizzazione?deve essere una combinazione lineare dei 4 vettori di base $|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle, |\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle, |\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle$ e $|\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle$, dove il primo stato in ogni prodotto rappresenta la direzione di polarizzazione di un fotone e il secondo stato rappresenta l'altra.Ma quale combinazione lineare? La stessa questione nasce per la annichilazione di un positrone e di un elettrone in due fotoni nel decadimento del positronio,e per l'emissione di una coppia di fotoni in una cascata atomica.Esperimenti mostrano che lo stato di polarizzazione dei fotoni dal decadimento del pione è:

$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle - |\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle]$

e non uno degli stati: $|\psi_2\rangle$,$|\psi_3\rangle$ e $|\psi_4\rangle$:

$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle + |\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle]$,

$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle + |\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle]$,

$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle - |\epsilon_2\rangle \otimes \||\epsilon_2\rangle]$

Ciò può essere giustificato anche teoricamente.

Scegliamo $|\psi_1\rangle$,$|\psi_2\rangle$,$|\psi_3\rangle$ e $|\psi_4\rangle$ come una base ortonormale(piuttosto che $|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle$,$|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle$,$|\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle$ e $|\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle$) per due ragioni. Per prima cosa ,$|\psi_1\rangle$ e $|\psi_3\rangle$,ma non $|\psi_2\rangle$ e $|\psi_4\rangle$ sono invarianti sotto rotazioni attorno all'asse di simmetria -asse lungo il quale i fotoni si propagano.Perciò lo stato di polarizzazione dei fotoni deve essere o $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_3\rangle$. Secondo ,la parità dello stato $|\psi_1\rangle$ è dispari,mentre la parità degli stati $|\psi_2\rangle$,$|\psi_3\rangle$ e $|\psi_4\rangle$ è pari.I pioni hanno parità dispari e decadono emettendo fotoni nello stato di polarizzazione $|\psi_1\rangle$. Il prodotto scalare di $|\psi_1\rangle$ con $|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle$ o $|\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle$ si annulla;quindi nello

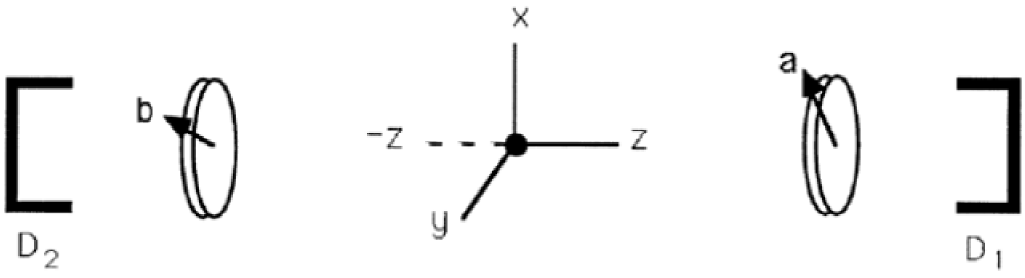

Figura 1.2:

stato $|\psi_1\rangle$,i fotoni hanno polarizzazioni opposte.Nello stato $|\psi_3\rangle$,che può nascere da una cascata atomica,i fotoni hanno la stessa polarizzazione,poichè il prodotto scalare di $|\psi_3\rangle$ con $|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle$ o con $|\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle$ si annulla.Queste correlazioni rimangono anche se noi ruotiamo gli assi di polarizzazione da ϵ_1,ϵ_2 a ϵ_1',ϵ_2'(figura 1.2),

$$|\epsilon_1'\rangle = |\epsilon_1\rangle cos(\phi) - |\epsilon_2\rangle sin(\phi) \tag{1.1}$$

$$|\epsilon_2'\rangle = |\epsilon_1\rangle sin(\phi) + |\epsilon_2\rangle cos(\phi) \tag{1.2}$$

Per $|\psi_1\rangle$ visto nella nuova base si ha: $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\epsilon_1'\rangle \otimes |\epsilon_2'\rangle - |\epsilon_2'\rangle \otimes |\epsilon_1'\rangle]$. e anche per

$|\psi_3\rangle$:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\epsilon_1'\rangle \otimes |\epsilon_1'\rangle - |\epsilon_2'\rangle \otimes |\epsilon_2'\rangle].$$

Le ultime due equazioni sono ciò che richiedono le simmetrie per rotazione.Un esperimento del 1949 per primo controllò e poi confermò le polarizzazioni di una coppia di fotoni dal decadimento di un pione . Come si applica la richiesta che fanno EPR a questo esperimento?

Consideriamo due osservatori Alice e Bob ,che ci aiuteranno nelle nostre misure. Una coppia di fotoni viene emessa da una cascata atomica,con un fotone in ogni coppia che arriva al polarizzatore di Alice e l'altro fotone che arriva a quello di Bob. Dopo che ciascun fotone arriva,Alice e Bob resettano gli assi di passaggio dei loro polarizzatori.Essi potrebbero resettare gli assi di passaggio random,da una collezione finita di impostazioni,o in accordo ad un piano comune.In entrambi i casi,essi trovano che quando gli assi di passaggio dei loro polarizzatori sono paralleli,entrambi i fotoni in ciascuna coppia passano i polarizzatori,o entrambi non lo passano;quando gli assi di passaggio sono ortogonali,solo un fotone in ogni coppia passa un polarizzatore.Supponiamo che Bob setti l'asse di passaggio del suo polarizzatore ad ϵ_1.Se Alice setta il suo asse di passaggio ad ϵ_1,e un fotone passa attraverso il suo polarizzatore,anche il fotone che viaggia verso Bob passa il suo polarizzatore .Se Alice non setta l'asse di passaggio del suo polarizzatore ad ϵ_1 o ϵ_2,la teoria dei quanti non si esprime sul fatto che il fotone che arriva a Bob passi attraverso il suo polarizzatore.Cosa dicono Einstein,Podolsky e Rosen? Il risultato della misura di Bob non può dipendere da ciò che misura Alice. Dunque il fotone che arriva al polarizzatore di Bob deve passare attraverso il suo polarizzatore in qualche modo.La teoria dei quanti è incompleta, perchè la teoria dei quanti fallisce nel predire che il fotone passi attraverso il polarizzatore di Bob.

La conclusione che si ha quando l'asse di passaggio del polarizzatore di Bob è ϵ_1 ,rimane per qualsiasi impostazione del suo polarizzatore.Similmente,essa rimane per qualunque impostazione del polarizzatore di Alice.

Dunque una teoria completa deve predire il risultato di qualunque misura di polarizzazione da parte di Alice e Bob.

La richiesta di EPR sembrava non testabile . Nel 1964 Bell [1] pubblicò un notevole articolo che mostrava,in effetti,che la richiesta EPR implica una disuguaglianza che qualche relazione quantistica non soddisfa.Inoltre il suo test,che coinvolgeva gli spin degli elettroni,non era praticabile a quel tempo.Ma cinque anni dopo ,Clauser,Horne,Shimony e Holt(CHSH) [2] generalizzarono la disuguaglianza di Bell;la disuguaglianza CHSH,applicata alla polarizzazione dei fotoni,permetteva un test pratico della richiesta di EPR.

Capitolo 2

LA DISUGUAGLIANZA DI CHSH.

L'idea del paradosso consiste nel fatto che la meccanica quantistica sia una teoria deterministica ,classica e locale ma incompleta,nel senso che trascura delle variabili(le "variabili nascoste"),le quali,una volta individuate ,la renderebbero completa e quindi riconducibile a una semplice teoria statistica. Cominciamo dunque a trattare il nostro problema seguendo proprio una via deterministica,classica e locale.

2.1 Derivazione della disuguaglianza CHSH

Ritorniamo ad Alice e Bob e alle loro misure.In accordo con EPR,ogni coppia di fotoni rappresenta una collezione completa di risposte(risultati) per ogni coppia di questioni(osservabili) che Alice e Bob potrebbero chiedere(misurare).Riferiamoci a una tale collezione come a una lista locale che denotiamo λ (λ è una viariabile atta a dare una caratterizzazione statistica del problema,cioè tale che a ogni stato del sistema a due particelle corrisponda un definito valore di λ).Ogni lista locale deve disporre di risultati che Alice e Bob potrebbero misurare e il set di osservabili è infinito. Consideriamo due osservabili,A e A' ,che Alice potrebbe misurare,e due osservabili ,B e B',che Bob potrebbe misurare. Denotiamo $\rho(\lambda)$ la probabilità relativa(certamente non nota) che ad una coppia di fotoni corrisponda una lista locale λ. Normalizziamo $\rho(\lambda)$:

$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$

dove l'integrazione è su tutti i lambda. Data una lista locale λ , sia $P(A; a; \lambda)$ la probabilità che una misura di A dia come risultato a. Similmente, sia $P(A; B; a; b; \lambda)$ la probabilità che una misura di A o B (sui due fotoni) dia come risultato a o b,rispettivamente. La lista λ è locale quindi $P(A; B; a; b; \lambda)$ si fattorizza:

$$P(A; B; a; b; \lambda) = P(A; a; \lambda) P(B; b; \lambda) \tag{2.1}$$

Ora sia $P(A;B;a;b)$ la probabilità che una misura di A e B su una coppia di fotoni dia rispettivamente a e b,essa è la media di $P(A;B;a;b;\lambda)$ pesata da $\rho(\lambda)$,i.e.:

$P(A;B;a;b) = \int[(\rho(\lambda))(P(A;B;a;b;\lambda))]d\lambda.$

Definiamo la correlazione fra le misure di A e B come :

$$C(A,B) = \sum_i \sum_j [a_i b_j P(A;B;a_i;b_j)] \tag{2.2}$$

dove a_i e b_j sono i possibili risultati di una misura di A e B rispettivamente.Se A e B sono le misure di polarizzazione di fotoni o spin di elettroni,ciascuno ha due possibili risultati. In generale prendiamo A e B tali che abbiano un numero di possibili risultati.Senza perdita di generalità assumiamo $-1 \leq a_i, b_j \leq 1$.

Proveremo che la combinazione S_{CHSH} di correlazioni,

$$S_{CHSH}(A;A';B;B') = C(A,B) + C(A',B) + C(A,B') - C(A',B') \tag{2.3}$$

è vincolata da sopra e da sotto:

$$-2 \leq S_{CHSH}(A; A'; B; B') \leq 2 \tag{2.4}$$

Per provare la 2.4 fissiamo λ e guardiamo alla somma dei prodotti:

$\sum_i \sum_j a_i P(A; a_i; \lambda)[b_j P(B; b_j; \lambda) + b'_j P(B'; b'_j; \lambda)]+$

$+\sum_i \sum_j a'_i P(A'; a'_i; \lambda)[b_j P(B; b_j; \lambda) - b'_j P(B'; b'_j; \lambda)]$

I valori assoluti di $\sum_i a_i P(A; a_i; \lambda)$ e $\sum_j b_j P(B; b_j; \lambda)$ etc. sono limitati da 1. Dunque ogni riga nella espressione sopra non può superare il valore 2.La somma delle due linee è limitata conseguentemente da sopra e da sotto da 2 e -2 rispettivamente, perchè (per esempio) se

$\sum_j b_j P(B; b_j; \lambda) + \sum_j b_j P(B'; b'_j; \lambda)$

ha valore 2,allora

$\sum_j b_j P(B; b_j; \lambda) - \sum_j b'_j P(B'; b'_j; \lambda)$

svanisce ,e viceversa.

Quindi

$-2 \leq \sum_i \sum_j [a_i b_j P(A; a_i, \lambda) P(B; b_j; \lambda) + a'_i b_j P(A'; a'_i; \lambda) P(B; b_j; \lambda) +$
$a_i b'_j P(A; a_i; \lambda) P(B'; b'_j; \lambda) - a'_i b'_j P(A'; a'_i; \lambda) P(B'; b'_j; \lambda)] \leq 2$

Moltiplicando per $\rho(\lambda)$ e integrando su tutti i lambda,otteniamo la disguaglianza CHSH:

$$-2 \leq C(A, B) + C(A', B) + C(A, B') - C(A', B') \leq 2 \tag{2.5}$$

2.2 Risultati sperimentali

La disuguaglianza CHSH segue dalla assunzione che i risultati locali esistono indipendentemente dal fatto che qualcuno faccia o meno la misura(nell'esempio della polarizzazione che la misura della polarizzazione effettuata da Bob,che non dipende da quella di Alice per il principio di località,sia predetta dalla meccanica quantistica secondo una non nota distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$ che ridurrebbe la meccanica dei quanti ad una teoria classica deterministica e locale.Tale teoria spesso viene indicata con il nome di teoria a variabili "nascoste"(nel nostro caso λ).

Questa ragionevole assunzione è alla base della richiesta EPR. Ma qualche relazione quantistica viola la disuguaglianza CHSH. Per dimostrare una violazione,definiamo la correlazione quantistica $C_Q(A,B)$ sostituendo $P(A,B,a_i;b_j)$ nella Eq.(2.2) con la probabilità quantistica $P_Q(A;B;a_i;b_j)$:

$$C_Q(A,B) = \sum_i \sum_j a_i b_j P_Q(A;B;a_i;b_j) \tag{2.6}$$

Ritorniamo all'esperimento della misura delle polarizzazioni di Alice e Bob nell'esempio della cascata atomica.

Alice e Bob misurano le polarizzazioni lineari nel piano di ϵ_1 e ϵ_2,con un angolo θ_{AB} fra gli assi di passaggio di A e B rispettivamente ; facciamo corrispondere i valori $+1$ e a -1 a un fotone che passa o non passa rispettivamente. Possiamo ottenere $C_Q(A,B)$ come segue :

supponiamo che la misura di Bob dia 1,il suo fotone passa il suo polarizzatore. I fotoni in ciascuna coppia sono correlati,quindi il fotone di Alice è polarizzato parallelamente a quello di Bob.Possiamo concludere che la probabilità che il fotone di Alice passi il suo polarizzatore è $\cos^2(\theta_{AB})$,dove θ_{AB} è l'angolo fra il polarizzatore di Alice e quello di Bob(figura 2.1) .

Usando invarianza per rotazione,noi abbiamo $P_Q(A, B, 1, 1) = \frac{(\cos^2(\theta_{AB}))}{2} = P_Q(A, B, -1, -1)$ e $P_Q(A, B, -1, 1) = \frac{\sin^2(\theta_{AB})}{2} = P_Q(A, B, 1, -1)$. Allora $C_Q(A, B) = \cos^2(\theta_{AB}) - \sin^2(\theta_{AB}) = \cos(2\theta_{AB})$.

In particolare ,siano A,B ,A',B' corrispondenti a polarizzatori con i loro assi di passaggio in un piano comune e un angolo $\frac{\pi}{8}$ fra gli assi di passaggio di A e B,B e A',A' e B' . (figura 2.1).

Si ha

$$C_Q(A, B) = C_Q(A', B) = C_Q(A, B') = \frac{\sqrt{2}}{2} = -C_Q(A', B')$$

quindi la somma

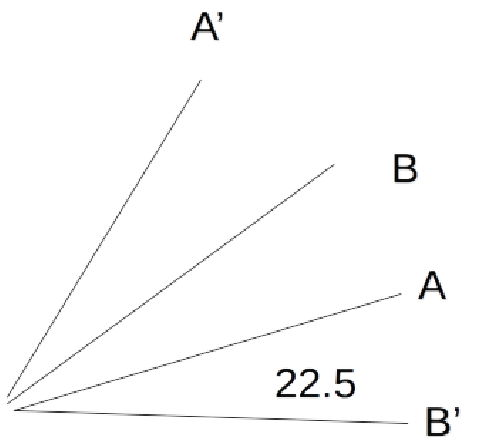

Figura 2.1:

$$C_Q(A,B) + C_Q(A',B) + C_Q(A,B') - C_Q(A',B') = 2(\sqrt{2})$$

viola la disuguaglianza CHSH. Le correlazioni quantistiche sono non locali;esse non possono nascere da liste locali.

Un test sperimentale della disuguaglianza CHSH da Aspect,Dalibard e Roger[1],misurò le correlazioni lungo gli assi di polarizzazione .La sorgente della coppia di fotoni era in cascata atomica.In questo esperimento,i set sperimentali cambiavano in modo pseudo-random fra A e A' e fra B e B' in un breve tempo se comparato al tempo di volo dei fotoni.Le correlazioni in questo esperimento erano consistenti con le correlazioni quantistiche e violavano la disuguaglianza CHSH di 5 deviazioni standard.In un più recente esperimento di Wiehs et al.[1] lo scambio fra questi set sperimentali era veramente random e separato space-like;le misure delle correlazioni violavano la disuguaglianza CHSH di 30 deviazioni standard.

Ci sono molte estensioni della disuguaglianza di Bell.Greenberg,Horne e Zeilinger (GHZ) trovarono una notevole estensione che coinvolgeva tre particelle.Il paradosso EPR sorge generalmente per ogni STATO ENTANGLED-ogni stato di sistemi macroscopicamente separati che non è un prodotto di stati di ciascun sistema.

Il paradosso EPR assume che Alice e Bob misurano variabili fisiche indipendenti.Einstein,Podolsky e Rosen mai anticiparono che questa ragionevole assunzione avrebbe provato inconsistenze con gli esperimenti cioè che in uno stato entangled non possiamo completamente isolare i sistemi l'uno dall'altro. Come Bell disse :"la cosa ragionevole semplicemente non funziona".

Ironicamente, la richiesta che la teoria dei quanti sia incompleta può essere corretta,ma non nel senso del paradosso EPR.

Capitolo 3

IL TEOREMA DI NO CLONING

Dimostreremo ora che in meccanica quantistica non è possibile copiare (letteralmente ,clonare) uno stato quantistico arbitrario. Tale proprità fu enunciata da Wotters,Zurek e Dieks nel 1982[2]. Nonostante la copiatura di uno stato arbitrario non sia permessa dalla meccanica quantistica,il teorema di no cloning non esclude però la possibilità di copiare uno stato conosciuto. Per conoscere un generico stato dobbiamo conoscere i coefficienti della sua decomposizione lineare lungo una base dello spazio di Hilbert associato a tale sistema fisico noti i quali lo stato è perfettamente determinato.Dal punto di vista fisico,parallelamente, per avere informazioni sullo stato del sistema è necessario compiere una misura.La misura di un sistema fisico implica necessariamente che lo stato del sistema dopo la misura sia descritto dall'autovettore dell'operatore misurato relativo al proprio autovalore(il risultato della misura). Dunque in meccanica quantistica possiamo copiare unicamente stati che conosciamo.Tentare di copiare stati non noti produce come risultato non una copia dello stato di partenza,ma uno stato diverso.

Fondamentalmente ,il teorema di no cloning protegge il principio di incertezza in meccanica quantistica.Se qualcuno potesse clonare uno stato sconosciuto,allora ne potrebbe fare tante copie quante ne desidererebbe,misurando cosi' ogni variabile dinamica con la precisione voluta, violerebbe cosi' il principio di indeterminazione.Ciò è vietato dal teorema di no cloning.

Ancora ,Il teorema di no cloning viola la comunicazione superluminale attraverso l'entanglement quantistico.Consideriamo l'esperimento mentale EPR,e supponiamo che gli stati quantistici possano essere clonati.Alice potrebbe mandare bits a Bob nel seguente modo:

Se Alice volesse mandare uno "0",misurerebbe lo spin del suo elettrone nella direzione z,facendo collassare lo stato di Bob o su $|z+\rangle_B$ o su$|z-\rangle_B$.Bob creerebbe molte copie dello stato del suo elettrone, e misurerebbe lo spin di ciascuna copia nella direzione di z.Bob verrebbe a sapere cosi' che Alice ha trasmesso uno "0" se tutte le sue misure produrrebbero lo stesso risultato;altrimenti ,le sue misurazione si splitteranno equiprobabilmente fra $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.Questo consentirebbe ad Alice e Bob di comunicare attraverso la separazione space-like,violando cosi' la causalità.

3.1 Il teorema di no cloning

Il teorema segue dal fatto che tutte le operazioni quantistiche devono essere trasformazioni unitarie e lineari.

Allo scopo di clonare un stato quantistico sconosciuto, $|\psi\rangle$, abbiamo bisogno di un dspositivo noto come la "quanto-copiatrice".Questo dispositivo è inizialmente preparato in uno stato $|s\rangle$ che non dipende da $|\psi\rangle$. Abbiamo anche bisogno di uno stato conosciuto , $|0\rangle$,su cui l'informazione sarà copiata. Nel 1982 Wootters e Zurek presentarono una prova molto semplice del fatto che fosse impossibile clonare uno stato quantistico sconosciuto. Qui noi presentiamo una differente dimostrazione dovuta a Horace Yuen [3] della Northwestern University in Illinois. Rappresentiamo l'operazione di clonazione attraverso un operatore U. Il processo di clonazione per due stati iniziali, $|\psi\rangle$ e $|\psi^*\rangle$,può essere scritto come :

$$U(|\psi\rangle|0\rangle|s\rangle) = |\psi\rangle|\psi\rangle|s'\rangle$$

$$U(|\psi^*\rangle|0\rangle|s\rangle) = |\psi^*\rangle|\psi^*\rangle|s''\rangle$$

dove $|s'\rangle$ è lo stato della quanto-copiatrice dopo che $|\psi\rangle$ è stato clonato, e $|s''\rangle$ è lo stato dopo che $|\psi^*\rangle$ è stato clonato.

Possiamo trasformare la seconda equazione in tal modo:

$$(\langle s|\langle 0|\langle \psi^*|)U^{-1} = \langle s''|\langle \psi^*|\langle \psi^*|$$

Moltilpicando il membro a sinistra della prima equazione per $(\langle s|\langle 0|\langle \psi^*|)U^{-1}$, e il membro di destra per $\langle s''|\langle \psi^*|\langle \psi^*|$, si trova:

$$\langle \psi^*|\psi\rangle = (\langle \psi^*|\psi\rangle)^2 \langle s''|s'\rangle$$

Se $\langle \psi^*|\psi\rangle = 0$,cioè se $|\psi\rangle$ e $|\psi^*\rangle$ sono ortogonali l'equazione è soddisfatta automaticamente.

Se non lo sono ,dividendo ambo i membri per $\langle \psi^*|\psi\rangle$ otteneniamo :

$$1 = \langle \psi^*|\psi\rangle \langle s''|s'\rangle$$

Nella teoria dei quanti la grandezza di entrambi $\langle\psi^*|\psi\rangle$ e $\langle s''|s'\rangle$ deve essere ,per definizione, minore od uguale ad 1.

Perciò,il solo modo di soddisfare questa equazione è che

$$|\langle\psi^*|\psi\rangle| = |\langle s''|s'\rangle| = 1$$

Affinchè ciò accada,$|\psi^*\rangle$ e $|\psi\rangle$ devono essere identici,e $|s'\rangle$ deve essere identico ad $|s''\rangle$.

Questo significa che una duplicazione perfetta è possibile solo se $|\psi\rangle$ e $|\psi^*\rangle$ sono ortogonali oppure identici.Perciò,un tale dispositivo di clonazione di stati arbitrari non esiste.

Sottolineamo nuovamente che il teorema di no-cloning non vieta la copia di stati conosciuti.Perciò,un dispositivo di clonazione progettato specificamente per un singolo,noto stato di input, può essere costruito. Comunque,se la nostra macchina di clonazione copia qualche stato perfettamente,ci sono altri stati che essa non copierà in maniera esatta e ,conseguentemente,non c'è una macchina che copierà tutti gli stati perfettamente.

Bibliografia

[1] J.S.Bell. " On the Einstein Podolsky Rosen Paradox". Physics 1,195-200(1964)

[2] J.F.Clauser,M.A.Horne,A.Shimony e R.A.Holt. "Proposed experiment to test local hidden-variable theories". Phys. Rev. Lett. 23, 880-884 (1969)

[3] Y.Aharonov,D.Rohrlich.Quantum Paradoxes.Quantum Theory for The Perplexed. Wiley-VCH

[4] Wotters,Willliam;Zurek,Wojciech(1982)."A Single Quantum Cannot Be Cloned".Nature.299:802-803.Bibcode:1982Natur.299..802W.

[5] H.Yuen,1986 "Amplification of Quantum States and Noiseless Photon Amplifiers" Phys.Lett.113A 405.