

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

# **Modello matematico per laghi eutrofizzati ottenuto da leggi integrali di bilancio**

**Relatore:**

Prof.ssa  
Addolorata Marasco

**Candidato:**

Francesco Di Napoli  
Matricola N85/582

A.A. 2015/2016

## Indice

<b>1. Capitolo Primo.</b>	
<b>Eutrofizzazione di un bacino lacustre: dalla fenomenologia ai modelli matematici</b> .....	p.1
1.1 Aspetti fenomenologici.....	p.1
1.2 Modelli alle equazioni differenziali ordinarie (ODEs) e leggi integrali di bilancio .....	p.3
<b>2. Capitolo Secondo.</b>	
<b>Il modello matematico: costruzione e analisi di stabilità</b> .....	p.5
2.1 Incompatibilità dei modelli omogenei con le leggi della meccanica dei continui.....	p.5
2.2 Leggi integrali di bilancio ed equazioni differenziali ordinarie.....	p.6
2.3 Relazioni costitutive.....	p.10
2.4 Sistema di equazioni differenziali ordinarie autonome per i valori medi delle variabili di stato.....	p.13
2.5 Sistema adimensionale e analisi delle configurazioni di equilibrio.. ..	p.15
<b>3. Capitolo Terzo.</b>	
<b>Simulazioni numeriche e programmi di risanamento</b> .....	p.23
3.1 Simulazioni numeriche.....	p.23
3.2 Riflessioni conclusive.....	p.25
<b>4. Appendice: Cenni sulla teoria della stabilità</b> .....	p.27

## Introduzione

In questo lavoro di tesi si vuole illustrare un modello matematico per lo studio del fenomeno di eutrofizzazione dei laghi. Come suggerisce l'etimologia del termine (“εὐτροφία”, “eu” = buono e “τροφή”, “trofé” = cibo, nutrimento), l'eutrofizzazione è la condizione in cui un bacino lacustre presenta una particolare abbondanza di sostanze nutritive, quali fosforo e azoto, disciolte nell'acqua.

Alla sovrabbondante presenza di tali sostanze concorrono diversi fattori, sia antropici (uso di fertilizzanti nelle zone attigue al bacino, scarichi industriali), sia naturali (dissoluzione delle rocce con conseguente produzione di minerali fosfati). L'abbondanza di nutrienti è causa della proliferazione delle alghe, le quali, al termine del loro breve ciclo vitale, costituiscono l'alimento principale per batteri aerobici. Tuttavia, un'intensa attività batterica ha bisogno di ingenti quantità di ossigeno tanto da provocarne anche la totale scomparsa nell'ambiente lacustre (si parla quindi di “anossia” o di acque anossiche). Una tale situazione, nota col nome di “stato eutrofico delle acque”, comporta cambiamenti rilevanti dell'ecosistema, come la riduzione della diversità biotica.

Il modello matematico presentato in questa tesi fornisce un potente strumento per lo studio del fenomeno nella sua evoluzione dinamica, analizzandone e discutendone le possibili configurazioni di equilibrio che rappresentano possibili scenari di risanamento dell'ambiente lacustre [5]. In particolare, viene esaminata la dinamica dei valori medi di tre variabili fondamentali: il fosforo disciolto nelle acque, il fosforo presente nei sedimenti e la biomassa di fitoplancton. La scelta di tali variabili è finalizzata alla modellizzazione del ciclo del fosforo, cioè al complesso dei processi di sedimentazione e di rilascio, di afflusso e di deflusso del fosforo nel bacino. Inoltre, i parametri presenti nel modello possono essere valutati sperimentalmente.

In letteratura, i modelli proposti per lo studio dello stato trofico dei laghi sono spesso scritti in termini di equazioni differenziali ordinarie (ODEs). In questa tesi, si mostrerà come tali modelli, in cui le incognite fondamentali sono supposte omogenee, sono incompatibili con le leggi della meccanica dei continui, sebbene essa sia lo strumento più adatto per la descrizione del fenomeno in questione. Al contrario, il modello studiato in questa tesi è ottenuto a partire da leggi integrali di bilancio e fornisce la dinamica dello stato trofico di un bacino lacustre in termini dei valori medi delle grandezze fondamentali.

La tesi è organizzata nel modo seguente:

- 1) nel primo capitolo si discuterà della fenomenologia e delle variabili dinamiche scelte per lo studio del fenomeno in esame;
- 2) nel secondo capitolo verrà presentato e studiato il modello matematico proposto in [5];
- 3) infine, nel terzo capitolo verranno presentate alcune simulazioni numeriche del modello finalizzate alla progettazione di interventi di recupero del bacino lacustre.



## Capitolo Primo

# 1. Eutrofizzazione di un bacino lacustre: dalla fenomenologia ai modelli matematici

### 1.1 Aspetti fenomenologici

A differenza dei fiumi, le cui acque scorrono alla velocità di circa 1,5 m/s [1], le acque confinate nei laghi fluiscono con una velocità di due ordini di grandezza minore (circa 1 cm/s). Di conseguenza, si hanno lunghi tempi di permanenza nel bacino lacustre delle sostanze disciolte nelle acque ed una corrispondente sedimentazione di esse sul fondo del bacino. Questa circostanza rende i laghi, ancor più dei fiumi, molto sensibili ai problemi di inquinamento. È chiaro che la natura delle sostanze disciolte nelle acque influenza l'evoluzione dinamica del bacino considerato. Per esempio, i nutrienti di cui hanno bisogno le alghe e le altre piante acquatiche per la loro crescita sono soprattutto azoto (N) e fosforo (P). Se le acque affluenti trasportano sostanze che contengono questi due elementi, le alghe avranno a disposizione una certa quantità di nutrienti. L'origine dell'azoto e del fosforo disciolti nelle acque può essere naturale (per esempio, il fosforo può essere rilasciato dai sedimenti e può essere liberato dalla dissoluzione delle rocce) oppure antropica (prevalentemente scarichi industriali riversati nelle acque, fertilizzanti utilizzati in agricoltura). Una grossa disponibilità di nutrienti è quindi causa di un'abbondante produzione algale e di fitoplancton (per lo più cianobatteri) e periodicamente può verificarsi che le alghe ricoprano completamente la superficie del lago (Figura 1.1), bloccando lo scambio di ossigeno fra l'atmosfera e le acque del bacino.



Figura 1.1 Lago eutrofizzato: le alghe ricoprono quasi interamente lo specchio d'acqua

Gli organismi vegetali, inoltre, sono a loro volta l'alimento fondamentale di microorganismi aerobi (batteri) i quali, avendo a disposizione grandi quantità di nutrimento, hanno un'intensa attività riproduttiva. L'aerobiosi di questi microorganismi è la principale causa del consumo di ossigeno nell'ambiente lacustre o anche di una sua totale scomparsa. Un'ulteriore causa della diminuzione di ossigeno disciolto nell'acqua è la decomposizione delle alghe stesse, la quale rilascia ammoniacca ( $\text{NH}_3$ ), metano ( $\text{CH}_4$ ) ed acido solfidrico ( $\text{H}_2\text{S}$ ). Si può quindi arrivare ad una situazione di "anossia" in cui specie aerobiche che popolano il lago sono destinate all'estinzione, sopravvivono solo i microorganismi anaerobi e le acque (anossiche) sono tossiche per l'uomo. Questa condizione va sotto il nome di "stato eutrofico delle acque".

La presenza, quindi, di azoto e fosforo nelle acque affluenti ha un ruolo di primaria importanza nel processo di eutrofizzazione. Fra i due elementi, il fosforo è considerato il nutriente critico perché in difetto stechiometrico con l'azoto. La concentrazione di fosforo disciolto nelle acque del bacino risente sia del contributo delle acque affluenti che del rilascio dai sedimenti. Una volta entrato nel bacino, il fosforo verrà in parte assorbito dalla biomassa algale (di cui è il principale nutriente) e in parte precipiterà verso le profondità del lago nello strato dei sedimenti attivi. Si tratta di una regione in cui il fosforo precipitato funge da "riserva" e viene continuamente scambiato con l'acqua che occupa la regione sovrastante a quella dei sedimenti. Il rilascio da parte dei sedimenti attivi fa tornare in sospensione parte del fosforo accumulato, mentre parte di esso può passare allo strato dei sedimenti permanenti e stabilizzarsi definitivamente nell'ambiente lacustre. Infine, il deflusso delle acque del lago comporta una diminuzione del fosforo disponibile. L'insieme dei processi appena descritti va sotto il nome di "ciclo del fosforo". Vengono riportate qui di seguito una rappresentazione semplificata del ciclo del fosforo (Figura 1.2) e una schematizzazione del modello che verrà descritto (Figura 1.3).

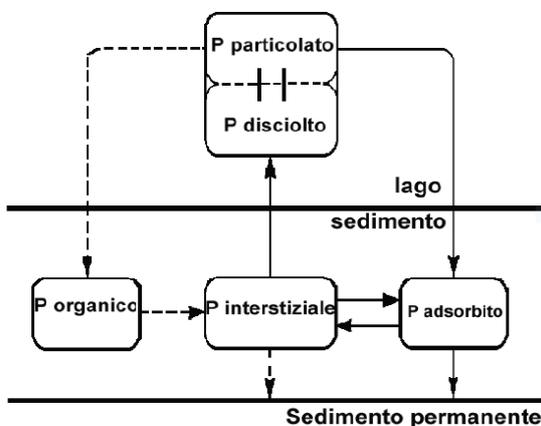


Figura 1.2: Ciclo del fosforo

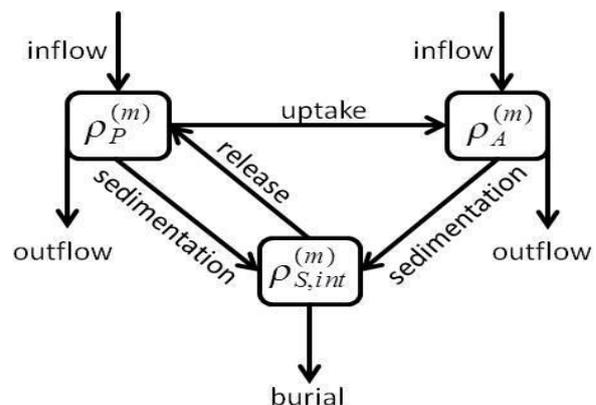


Figura 1.3: Schema del modello

Nella Figura 1.3,  $\rho_P^{(m)}$  e  $\rho_A^{(m)}$  indicano rispettivamente i valori medi delle concentrazioni di fosforo disciolto e della biomassa algale (la quale assorbe parte del fosforo disciolto). Il processo di sedimentazione fa aumentare la concentrazione di fosforo presente nella regione dei sedimenti attivi, indicata con  $\rho_{S,int}^{(m)}$ , dove esso può essere rilasciato (*release*) oppure può passare allo strato dei sedimenti permanenti (*burial*). Gli afflussi (*inflow*) e i deflussi (*outflow*) delle acque nell'ambiente lacustre influenzano chiaramente  $\rho_P^{(m)}$  e  $\rho_A^{(m)}$ .

Potrebbero essere presi in considerazione ulteriori processi che influenzino la presenza del fosforo nel lago, quali per esempio la dissoluzione di rocce contenenti gruppi fosfati. Per semplicità, il modello proposto non ne terrà conto e farà riferimento al ciclo appena descritto.

In definitiva, com'è usuale in letteratura, la concentrazione di fosforo nell'acqua e nei sedimenti (fosforo totale) verrà usata per classificare lo stato trofico di un lago.

I modelli matematici proposti in letteratura per la descrizione dell'eutrofizzazione dei laghi sono principalmente di due tipi: i primi sono modelli scritti in termini di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDEs); gli altri sono modelli scritti in termini di equazioni differenziali ordinarie (ODEs).

I modelli alle PDE sono più accurati nella descrizione della dinamica dei laghi perché scritti in termini di funzioni incognite che dipendono dal tempo e dallo spazio, inoltre fanno riferimento a processi sia idrodinamici che ecologici. Sfortunatamente, però, essi presentano notevoli difficoltà di tipo matematico e sperimentale. Infatti, le soluzioni analitiche dipendono dalle condizioni iniziali e al contorno, laddove i punti di campionamento sono in numero estremamente più piccolo rispetto ai nodi richiesti in un qualsiasi metodo numerico di integrazione (discretizzazione del dominio di integrazione). Inoltre, le configurazioni di equilibrio e le loro proprietà di stabilità in funzione dei parametri del modello rimangono spesso incognite a causa della non linearità delle numerose equazioni ottenute. È opportuno sottolineare che solo se si conosce la forma analitica degli equilibri stabili allora è possibile prospettare degli interventi di risanamento del bacino lacustre.

I modelli alle ODE, invece, si basano sull'ipotesi che i campi che descrivono il fenomeno siano omogenei. In alcuni casi, si effettua una partizione del bacino in diversi settori e in ognuno di essi i campi vengono supposti omogenei, oppure più semplicemente si suppone l'omogeneità delle variabili di stato nell'intero volume del bacino.

## 1.2 Modelli alle equazioni differenziali ordinarie (ODEs) e leggi integrali di bilancio.

Lo sviluppo di un modello matematico per lo studio di un fenomeno fisico richiede delle approssimazioni di carattere generale del fenomeno in esame. Queste approssimazioni riguardano soprattutto la scelta delle variabili dinamiche che saranno oggetto di studio. Infatti, un "buon" modello deve tener conto di tutte le variabili che concorrono al fenomeno, ma questo implicherebbe una notevole difficoltà per lo studio del fenomeno stesso. La scelta delle variabili dinamiche, quindi, rappresenta un "compromesso" fra la realtà fisica e l'apparato matematico di cui si vuole far uso per un'accurata comprensione dei fenomeni considerati.

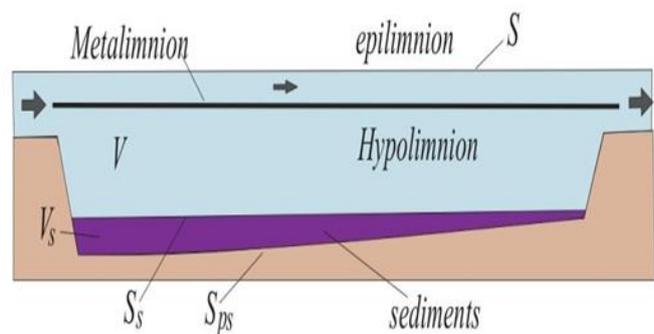
In un modello alle ODE per l'eutrofizzazione dei laghi, l'evoluzione temporale di una quantità fisica è descritta da un'equazione differenziale ordinaria del tipo:

$$(1) \quad V \frac{d\rho_i}{dt} = \underbrace{E_i(\rho_1, \dots, \rho_n)}_{\text{growth/loss}} - \underbrace{U_i(\rho_1, \dots, \rho_n)}_{\text{inflow/outflow}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

dove  $V$  è il volume del lago,  $\rho_i$  rappresenta la densità di massa della grandezza  $i$ -esima,  $E_i$  tiene conto dei contributi di crescita e perdita,  $U_i$  indica il flusso entrante-uscente nel sistema.

Tramite equazioni del tipo (1), è possibile modellizzare l'evoluzione di  $n$  grandezze diverse (facendo variare l'indice  $i$ ) e specificando di volta in volta le funzioni  $E_i$  e  $U_i$  che tengono conto dei processi che caratterizzano il fenomeno. La forma funzionale delle  $E_i$  ed  $U_i$  coinvolge parametri sperimentali di cui spesso non è chiaro come determinarne i valori numerici.

Un modello basato sulle (1) non tiene conto della differenza di temperatura fra i vari strati del lago (epilimnio= strato superficiale, metalimnio = strato intermedio, ipolimnio = strato infimo), la quale dà luogo a differenze chimico-fisiche a diverse profondità. Ancor più importante è il fatto che il modello (1) non



considera il gradiente di concentrazione del fosforo (ad esempio in prossimità dello strato dei sedimenti attivi) e delle alghe (presenti solo nella zona eufotica) alle diverse profondità del lago.

Al contrario, se si schematizzano le acque del lago come una miscela a più componenti (acqua, fosforo, fitoplacton, etc) è possibile utilizzare per ciascuna di esse una legge integrale di bilancio della massa (*mass integral balance law*):

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_v \rho_i dv = \underbrace{\int_v r_i dv}_{\text{growth/loss}} - \underbrace{\int_{\partial v} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} ds}_{\text{inflow/outflow}} \quad (i = 1, \dots, n)$$

In cui  $v$  è un volume arbitrario di frontiera  $\partial v$ ,  $r_i$  e  $\mathbf{v}_i$  sono rispettivamente la produzione locale e la velocità dell' $i$ -esimo componente della miscela,  $\mathbf{n}$  è il vettore unitario ortogonale esterno alla superficie  $\partial v$ .

L'aspetto vantaggioso di un tale approccio allo studio del fenomeno è che non si è più costretti a supporre l'omogeneità dei campi che lo descrivono. Come si vedrà, le equazioni del tipo (1) si dimostrano essere incompatibili con le leggi integrali di bilancio della massa se si suppone che le  $\rho_i$  siano uniformi all'interno del bacino lacustre. Tuttavia, se con  $\rho_i$  indichiamo il valor medio della densità di massa dell' $i$ -esimo componente, le leggi integrali di bilancio appena formulate condurranno ad un sistema di equazioni di tipo (1) mediante le quali sarà possibile valutare l'evoluzione temporale del processo di eutrofizzazione.

Nel seguito, la (2) verrà scritta solo per le tre seguenti variabili che sono fondamentali alla descrizione del fenomeno in esame

1. concentrazione di fosforo nell'acqua ( $\rho_P$ );
2. concentrazione di fosforo nei sedimenti ( $\rho_S$ );
3. biomassa di fitoplancton ( $\rho_A$ ).

## Capitolo Secondo

### 2. Il modello matematico: costruzione e analisi di stabilità

#### 2.1 Incompatibilità dei modelli omogenei con le leggi della meccanica dei continui

La localizzazione delle<sup>1</sup> leggi integrali di bilancio della massa [2],

$$(2) \frac{d}{dt} \int_V \rho_i dv = \int_V r_i dv - \int_{\partial V} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} ds$$

conduce ad un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite  $\rho_i$  e  $\mathbf{v}_i$  nella forma:

$$(3) \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = r_i - \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) \quad (i=1, \dots, n)$$

Dalla (3) è evidente che seppure vengono assegnate le relazioni costitutive per ogni  $r_i$ , il numero di incognite sarà maggiore del numero di equazioni. Per ottenere il pareggiamento tra equazioni ed incognite sarà sufficiente associare alle (3) le equazioni dei momenti.

Per provare che le equazioni (1) sono incompatibili con le (2), si consideri una funzione  $\rho_i$  spazialmente uniforme:

$$\rho_i = \rho_i(t) \quad (i=1, \dots, n).$$

e si imponga che essa sia soluzione di (3). Si indichi rispettivamente con  $\mathbf{v}_w$  e  $\mathbf{v}'_i$  la velocità dell'acqua e la velocità relativa a quella dell'acqua dell'i-mo componente, allora si ha che la velocità dell'i-esimo componente si scrive:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_w + \mathbf{v}'_i$$

Essendo l'acqua un liquido incompressibile si ha  $\nabla \cdot \mathbf{v}_w = 0$  e avendo supposto che  $\rho_i$  sia funzione solo del tempo, si ottiene

$$\nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) = \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}'_i) = \rho_i \nabla \cdot \mathbf{v}'_i$$

La quantità  $\rho_i \mathbf{v}'_i$  (che ha le dimensioni di un flusso, cioè  $[L]^{-2}[T]^{-1}$ ) descrive la diffusione del componente i-esimo. Per la *legge di Fick*, la diffusione è descritta da una funzione  $\mathbf{J}(\rho_i, \nabla \rho_i)$  tale che se  $\rho_i$  è uniforme, come nelle ipotesi fatte, si ha

$$\mathbf{J}(\rho_i, \mathbf{0}) = 0 \quad (\text{assenza di diffusione per } \rho_i \text{ uniforme})$$

Pertanto, le equazioni (3) nell'ipotesi di  $\rho_i(t)$  diventano

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = r_i, \quad i=1, \dots, n.$$

Integrando queste equazioni su tutto il volume  $V$  del bacino, si ottiene

---

<sup>1</sup> In ciascuna equazione (2) compaiono due integrali di volume e un integrale di superficie. Supposto il volume  $v$  costante è possibile portare la derivata sotto il segno di integrale, mentre l'integrale di superficie può essere ricondotto ad un integrale di volume mediante il teorema della divergenza. Raggruppando tutti i termini e sotto opportune ipotesi di regolarità delle funzioni integrande è possibile ottenere l'equazione locale (3).

$$\int_V \frac{\partial \rho_i}{\partial t} dv = \int_V r_i dv$$

e dal confronto con l'equazione (2), si ricava:

$$\int_{\partial V} \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

Quindi, se  $\rho_i$  è uniforme, le leggi integrali di bilancio della massa implicano che i flussi entranti ed uscenti dalla superficie  $\partial V$  sono uguali fra loro. In altre parole, i termini  $U_i$  nelle equazioni (1) sono tutti nulli in completo disaccordo con la fenomenologia in esame.

Pertanto, un modello matematico scritto in termini di equazioni differenziali ordinarie per campi omogenei è incompatibile con le leggi integrali di bilancio (2).

## 2.2 Leggi integrali di bilancio ed equazioni differenziali ordinarie

In questo paragrafo verrà dimostrato che è possibile ottenere equazioni differenziali ordinarie della forma (1) dalle leggi di bilancio della massa (2) se queste sono espresse in termini di  $\rho_i^{(m)}$ , cioè dei valori medi delle  $\rho_i$ . [5]

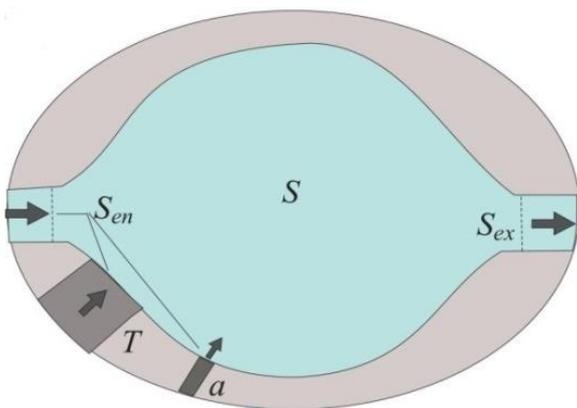


Figura 2.1: Geometria di un lago

Prima di procedere, si farà riferimento ad una struttura geometrica semplificata di un lago (Figura 2.1).

La notazione adottata è la seguente:

- $S_{en}$ : indica la sezione trasversale della superficie totale attraverso la quale il fosforo entra nel lago. In generale, l'immissione del fosforo può avvenire attraverso gli affluenti del lago ("tributaries" in inglese), attraverso canali di scolo (indicati con  $a$  nella Figura 2.1), oppure attraverso il suolo ( $T$  in Figura 2.1). Pertanto, la sezione trasversale totale  $S_{en}$  è data dalle sezioni trasversali relative a ciascuno dei contributi appena citati:

$$S_{en} = S_{tr} + s_a + s_T$$

Nel caso in cui l'apporto di fosforo sia dovuto al solo contributo degli affluenti, si ha:

$$S_{en} = S_{tr}$$

- $S_{ex}$ : sezione trasversale degli effluenti.
- $S$ : superficie libera del lago.
- $S_s$ : superficie che separa l'acqua del lago dai sedimenti attivi.
- $S_{ps}$ : superficie che separa i sedimenti attivi da quelli permanenti.
- $V$ : volume occupato dalle acque del lago.

- $V_s$  : volume occupato dai sedimenti attivi.
- $V_{ps}$  : volume occupato dai sedimenti permanenti.
- $V_A$  : volume della zona eufotica. Si tratta del volume in cui arriva la luce solare, indispensabile per l'attività fotosintetica delle specie vegetali.

I simboli appena discussi indicheranno anche la misura delle grandezze a cui essi si riferiscono.

Supporremo che la geometria del bacino sia tale da poter supporre che :

1. le aree delle superfici  $S_s$  e  $S_{ps}$  sono uguali;
2. le aree delle superfici  $S$  e  $S_s$  sono uguali o in rapporto costante;
3.  $V$  e  $V_s$  sono costanti e  $V_s \ll V$ .
4. se  $V_A = V$  allora la zona eufotica coincide con l'intero bacino. Se  $V_A < V$ , allora la zona eufotica si riduce ad uno strato "superficiale" adiacente alla superficie libera del lago  $S$ .

Allo scopo di determinare le equazioni differenziali ordinarie in termini dei valori medi  $\rho_i^{(m)}$ , verranno assunte le seguenti ipotesi:

- 1) la velocità dell'acqua sulla sezione trasversale affluente  $S_{en}$  è uniforme;
- 2) sulla superficie  $S_{ex}$  la velocità del fosforo e del fitoplancton sono uguali a quella dell'acqua;
- 3) la velocità di sedimentazione dei sedimenti attivi è uniforme sulla superficie  $S_s$ ;
- 4) gli integrali di volume, a secondo membro dell'equazione (2), che si riferiscono al tasso di crescita del fitoplancton e all'assorbimento del fosforo interstiziale, possono essere approssimati dai valori medi di funzioni che dipendono dai valori medi dei campi coinvolti.

L'ipotesi 4) è verificata, se si adotta la *cinetica di Monod* per modellizzare il tasso di crescita della biomassa di fitoplancton, quando le densità del fosforo e del fitoplancton nel bacino differiscono dai rispettivi valori medi al più del 20%. Inoltre, se si assume che l'assorbimento del fosforo interstiziale abbia andamento lineare, l'ipotesi 4) è verificata senza restrizioni.

Gli scambi di fosforo avvengono in diverse regioni del bacino. Per esempio, i sedimenti attivi occupano il volume  $V_s$  nella profondità del lago e interagiscono con il fosforo disciolto nell'acqua sovrastante attraverso la superficie  $S_s$ : parte del fosforo disciolto precipita verso  $V_s$ , mentre dai sedimenti viene rilasciata una quantità che torna in sospensione nel volume  $V$ . Infine, una parte del fosforo contenuta in  $V_s$  è assorbita dai sedimenti permanenti attraverso la superficie  $S_{ps}$ .

Per procedere nello sviluppo del modello, bisogna formulare le leggi integrali di bilancio della massa per il fitoplancton nel volume  $V_A$  e per il fosforo nei volumi  $V$  e  $V_s$ . Verrà indicata con  $\rho_A$  la densità della massa di fitoplancton nel volume  $V_A$ , con  $\rho_P$  e  $\rho_S$  le densità di fosforo in  $V$  e  $V_s$  rispettivamente. Con  $\mathbf{v}_i^{(j)}$  ( $i = P, A, S$ ;  $j = en, ex, s$ ) verrà indicata la velocità dei costituenti e con  $\mathbf{n}$  il vettore unitario ortogonale alle superfici  $S_{en}$ ,  $S_{ex}$  e  $S_s$ , orientato in modo che si abbia

$$\mathbf{v}_i^{(j)} \cdot \mathbf{n} > 0$$

- **Legge di bilancio della massa di fosforo nel volume V**

$$(4) \frac{d}{dt} \int_V \rho_P dv = \int_{S_{en}} \rho_P \mathbf{v}_P^{(en)} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S_{ex}} \rho_P \mathbf{v}_P^{(ex)} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S_s} \rho_P \mathbf{v}_P^{(s)} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{S_s} \rho_S \mathbf{v}_S^{(s)} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{V_A} r_P dv$$

Il membro a sinistra dell'equazione (4) indica la variazione nell'unità di tempo della massa totale di fosforo contenuta nel volume V. A destra, gli integrali di superficie si riferiscono rispettivamente alla quantità di fosforo, per unità di tempo, che entra nel bacino attraverso gli affluenti, esce dal lago tramite gli effluenti, passa nel volume dei sedimenti attivi  $V_s$  attraverso la superficie  $S_s$ , viene rilasciata dai sedimenti attivi e torna in sospensione nel volume V, rispettivamente. L'ultimo integrale, che è un integrale di volume, indica la massa di fosforo che viene assorbita nell'unità di tempo dalla biomassa delle alghe nella zona eufotica di volume  $V_A$ .

- **Legge di bilancio della massa di fitoplancton nel volume  $V_A$  (zona eufotica)**

$$(5) \frac{d}{dt} \int_{V_A} \rho_A dv = \int_{S_{en}} \rho_A \mathbf{v}_A^{(en)} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S_{ex}} \rho_A \mathbf{v}_A^{(ex)} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{V_A} r_A dv$$

Il primo membro dell'equazione (5) indica la variazione per unità di tempo della massa di fitoplancton nella zona eufotica. Gli integrali di superficie a secondo membro indicano rispettivamente l'afflusso e il deflusso per unità di tempo della massa di fitoplancton. Infine, l'integrale di volume indica la produzione per unità di tempo della massa di fitoplancton.

- **Legge di bilancio della massa di fosforo nello strato di sedimenti attivi**

$$(6) \frac{d}{dt} \int_{V_s} \rho_S dv = \int_{S_s} \rho_P \mathbf{v}_P^{(s)} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{S_s} \varphi_A^{(s)} ds - \int_{S_s} \rho_S \mathbf{v}_S^{(s)} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S_{ps}} \varphi_S^{(ps)} ds$$

Il primo membro indica la variazione per unità di tempo della massa di fosforo contenuta nel volume  $V_s$ . A secondo membro, i primi due integrali di superficie indicano l'afflusso, per unità di tempo, dovuto alla sedimentazione del fosforo presente nel lago e di quello rilasciato dalla biomassa di fitoplancton morto. Gli ultimi due integrali indicano la quantità di fosforo, per unità di tempo, rilasciata dai sedimenti che torna in sospensione nel volume V e la quantità che invece passa nello strato dei sedimenti permanenti.

Per ottenere un sistema di equazioni differenziali ordinarie in termini dei valori medi delle densità di massa  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$ ,  $\rho_S^{(m)}$ , è sufficiente applicare il teorema del valor medio alle equazioni (4)-(6)

$$\rho_i^{(m)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \rho_i(x, t) dv$$

Pertanto, si ottengono le seguenti equazioni:

$$(7) \dot{\rho}_P^{(m)} = \frac{1}{V} \left( \Phi_P^{(en)} - \Phi_P^{(ex)} - \Phi_P^{(s)} + \Phi_S^{(s)} \right) - \frac{V_A}{V} r_P^{(m)}$$

$$(8) \dot{\rho}_A^{(m)} = \frac{1}{V_A} \left( \Phi_A^{(en)} - \Phi_A^{(ex)} \right) + r_A^{(m)}$$

$$(9) \dot{\rho}_S^{(m)} = \frac{1}{V_S} \left( \Phi_P^{(s)} + \Phi_A^{(s)} - \Phi_S^{(s)} - \Phi_S^{(ps)} \right)$$

dove sono stati indicati con  $\Phi_j^{(i)}$  i flussi delle  $\rho_j$  attraverso le superfici  $S_i$ .

Le quantità  $\Phi_P^{(en)}$  e  $\Phi_A^{(en)}$  sono dati al contorno, cioè si suppone che siano funzioni note del tempo. Per le ipotesi 1) e 2) il flusso  $\Phi_P^{(ex)}$  può essere scritto come segue:

$$(10) \quad \Phi_P^{(ex)} = \int_{S_{ex}} \rho_P \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} \int_{S_{ex}} \rho_P ds = \varphi_w \rho_P^{(ex)}$$

dove  $\varphi_w$  indica il flusso di velocità attraverso  $S_{ex}$  e  $\rho_P^{(ex)}$  è il valor medio della densità del fosforo sulla superficie  $S_{ex}$ . È chiaro che  $\varphi_w$  è un dato al contorno.

È possibile riscrivere  $\rho_P^{(ex)}$  in termini di  $\rho_P^{(m)}$  tramite la relazione  $\rho_P^{(ex)} = \Theta_P \rho_P^{(m)}$  nella quale il coefficiente  $\Theta_P$  dipende dalla geometria e dall'idrodinamica del bacino. Questo coefficiente può essere determinato tramite misure all'istante iniziale del valor medio  $\Phi_P^{(ex)}$  nel bacino e del valor medio  $\rho_P^{(ex)}$  sulla superficie  $S_{ex}$ . Pertanto, la (10) diventa:

$$(11) \quad \Phi_P^{(ex)} = \varphi_w \Theta_P \rho_P^{(m)}$$

Analogamente, si ha per  $\Phi_A^{(ex)}$ :

$$(12) \quad \Phi_A^{(ex)} = \varphi_w \Theta_A \rho_A^{(m)}$$

Definendo le quantità:

$$\bar{\varphi}_P^{(w)} = \Theta_P \varphi_w \quad \bar{\varphi}_A^{(w)} = \Theta_A \varphi_w$$

le equazioni (7)-(9) assumono la forma seguente:

(13)

$$\dot{\rho}_P^{(m)} = \frac{1}{V} \left( \Phi_P^{(en)} - \rho_P^{(m)} \bar{\varphi}_P^{(w)} - \Phi_P^{(s)} + \Phi_S^{(s)} \right) - \frac{V_A}{V} r_P^{(m)}$$

$$\dot{\rho}_A^{(m)} = \frac{1}{V_A} \left( \Phi_A^{(en)} - \rho_A^{(m)} \bar{\varphi}_A^{(w)} \right) + r_A^{(m)}$$

$$\dot{\rho}_S^{(m)} = \frac{1}{V_S} \left( \Phi_P^{(s)} + \Phi_A^{(s)} - \Phi_S^{(s)} - \Phi_S^{(ps)} \right)$$

Per ottenere un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_S^{(m)}$  bisogna assegnare relazioni costitutive per le quantità  $\Phi_P^{(s)}$ ,  $\Phi_S^{(s)}$ ,  $\Phi_S^{(ps)}$ ,  $\Phi_A^{(s)}$ ,  $r_P^{(m)}$  e  $r_A^{(m)}$  in funzione dei valori medi  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_S^{(m)}$ .

### 2.3 Relazioni costitutive

- **Relazioni costitutive per  $r_P^{(m)}$  e  $r_A^{(m)}$**

In letteratura, la crescita delle alghe e l'assorbimento dei nutrienti da parte di queste sono modellizzati come di seguito:

$$(14) \quad \int_{V_A} r_P dv = \int_{V_A} G(\rho_P) \rho_A dv$$

$$\int_{V_A} r_A dv = \theta_A \int_{V_A} G(\rho_P) \rho_A dv - \xi_A \int_{V_A} \rho_A dv$$

dove  $G(\rho_P)$  indica la frazione di fosforo assorbito dalle alghe nell'unità di tempo,  $\theta_A$  la frazione di fosforo assorbita nell'unità di tempo dalla biomassa algale,  $\xi_A$  è il tasso di diminuzione (*loss rate*) della biomassa di fitoplancton. Per  $G(\rho_P)$  si può fare uso della funzione di assorbimento di Monod (o interazione di Holling di tipo II):

$$(15) \quad G(\rho_P) = \frac{b_1 \rho_P}{\mu + \rho_P}$$

con  $b_1$  che rappresenta il rate massimo di crescita specifica delle alghe e  $\mu$  che indica la costante di semisaturazione, oppure si può usare un'interazione di Holling di tipo III

$$(16) \quad G(\rho_P) = \frac{b_1 \rho_P^2}{\mu^2 + \rho_P^2}$$

Lo sviluppo di Taylor della funzione  $G(\rho_P)\rho_A$  valutato nel punto  $(\rho_P^{(m)}, \rho_A^{(m)})$  fino al secondo ordine è:

$$G(\rho_P)\rho_A = G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)} + G'(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}(\rho_P - \rho_P^{(m)}) + G(\rho_P^{(m)})(\rho_A - \rho_A^{(m)})$$

$$+ G''(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}(\rho_P - \rho_P^{(m)})^2 + G'(\rho_P^{(m)})(\rho_P - \rho_P^{(m)})(\rho_A - \rho_A^{(m)})$$

dove  $G'(\rho_P^{(m)})$  e  $G''(\rho_P^{(m)})$  indicano rispettivamente la derivata prima e seconda di  $G(\rho_P)$  valutata in  $\rho_P^{(m)}$ .

Poiché si ha

$$\int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)}) dv = 0 \quad ; \quad \int_{V_A} (\rho_A - \rho_A^{(m)}) dv = 0$$

allora, fino ai termini del secondo ordine, si ottiene

$$\int_{V_A} G(\rho_P)\rho_A dv =$$

$$G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}V_A + G''(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)} \int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)})^2 dv + G'(\rho_P^{(m)}) \int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)})(\rho_A - \rho_A^{(m)}) dv =$$

$$G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}V_A \left[ 1 + \frac{G''(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})} \int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)})^2 dv + \frac{G'(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}V_A} \int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)})(\rho_A - \rho_A^{(m)}) dv \right]$$

Definendo la quantità

$$\Gamma = \frac{G''(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})V_A} \int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)})^2 dv + \frac{G'(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}V_A} \int_{V_A} (\rho_P - \rho_P^{(m)})(\rho_A - \rho_A^{(m)}) dv$$

si può scrivere

$$\int_{V_A} G(\rho_P)\rho_A dv = G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}V_A [1 + \Gamma]$$

Si vuole sapere sotto quali condizioni sia verificato che

$$\Gamma \ll 1.$$

A tale scopo, si introducono i coefficienti  $\alpha_P$  e  $\alpha_A$  definiti come segue:

$$\max_{x \in V_A} |\rho_P - \rho_P^{(m)}| = \alpha_P \rho_P^{(m)} ; \quad \max_{x \in V_A} |\rho_A - \rho_A^{(m)}| = \alpha_A \rho_A^{(m)}$$

Maggiorando gli integrali contenuti nell'espressione di  $\Gamma$  con i parametri  $\alpha_P$  e  $\alpha_A$ , si ottiene la disuguaglianza seguente

$$\Gamma \leq \alpha_P^2 (\rho_P^{(m)})^2 \left| \frac{G''(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})V_A} \right| + \alpha_P \alpha_A \rho_P^{(m)} \left| \frac{G'(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})V_A} \right|$$

Pertanto, la condizione  $\Gamma \ll 1$  è verificata se

$$\alpha_P^2 (\rho_P^{(m)})^2 \left| \frac{G''(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})V_A} \right| + \alpha_P \alpha_A \rho_P^{(m)} \left| \frac{G'(\rho_P^{(m)})}{G(\rho_P^{(m)})V_A} \right| \ll 1$$

Sotto questa ipotesi, si può assumere che valga la seguente relazione

$$\int_{V_A} G(\rho_P)\rho_A dv = G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)}V_A$$

e quindi le relazioni costitutive cercate assumono la forma seguente

$$(17) \quad \begin{aligned} r_P^{(m)} &= G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)} \\ r_A^{(m)} &= \theta_A G(\rho_P^{(m)})\rho_A^{(m)} - \xi_A \rho_A^{(m)} \end{aligned}$$

nelle quali  $G(\rho_P^{(m)})$  può essere definita dalle equazioni (15), (16) oppure da un'altra equazione che descriva un tipo differente di interazione.

- **Relazioni costitutive per  $\Phi_P^{(s)}$ ,  $\Phi_S^{(s)}$ ,  $\Phi_A^{(s)}$  e  $\Phi_S^{(ps)}$**

Restano da valutare i flussi  $\Phi_P^{(s)}$ ,  $\Phi_S^{(s)}$ ,  $\Phi_A^{(s)}$  attraverso la superficie  $S_S$  e il flusso  $\Phi_S^{(ps)}$  attraverso la superficie  $S_{ps}$ . Dalla definizione di  $\Phi_P^{(s)}$ :

$$\Phi_P^{(s)} = \int_{S_s} \rho_P \mathbf{v}_P^{(s)} \cdot \mathbf{n} ds$$

e assumendo che  $\mathbf{v}_P^{(s)} \cdot \mathbf{n} = v_{Pn}^{(s)}$  sia uniforme sull'intera superficie  $S_s$  (ipotesi 3) paragrafo 2.2), per il *teorema del valor medio* si ha

$$(18) \quad \Phi_P^{(s)} = v_{Pn}^{(s)} \rho_P^{(m,s)} S_s$$

dove  $\rho_P^{(m,s)}$  è il valor medio della densità di fosforo sulla superficie  $S_s$ . Bisogna notare che la quantità  $\rho_P^{(m,s)}$  è diversa dal valor medio  $\rho_P^{(m)}$  nel volume  $V$ . Tuttavia, poiché la densità di fosforo  $\rho_P^{(m,s)}$  è proporzionale alla densità di fosforo disciolto  $\rho_P^{(m)}$ , si può scrivere:

$$\rho_P^{(m,s)} = \alpha_P^{(m,s)} \rho_P^{(m)}$$

con  $\alpha_P^{(m,s)}$  coefficiente che dipende dalle concentrazioni di calcio e magnesio disciolti nell'acqua. La velocità di sedimentazione del fosforo  $v_{Pn}^{(s)}$  può essere vista come la velocità limite di una sfera di raggio  $R$  e densità  $\rho$  in caduta libera nell'acqua e quindi è data da :

$$v_{lim} = \frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho_w)}{\mu} g R^2$$

con  $\rho_w$  densità dell'acqua,  $g$  accelerazione di gravità e  $\mu$  viscosità. In questo modo, la velocità di sedimentazione verrà a dipendere dalla densità dell'acqua e dalla grandezza delle particelle di fosforo. Pertanto, si giunge alla conclusione che:

$$(19) \quad \Phi_P^{(s)} = \alpha_P^{(m,s)} \rho_P^{(m)} v_{Pn}^{(s)} S_s$$

Se per la biomassa delle alghe si rifanno le stesse considerazioni, si ha:

$$(20) \quad \Phi_A^{(s)} = \alpha_A^{(m,s)} \rho_A^{(m)} v_{An}^{(s)} S_s$$

In quest'ultima formula  $v_{An}^{(s)}$  ha ancora il significato di velocità limite e dipende anch'essa dalla densità dell'acqua e dalla forma della biomassa di fitoplancton, mentre il termine  $\alpha_A^{(m,s)} \rho_A^{(m)}$  indica il valor medio della densità di fosforo rilasciato dalla decomposizione delle alghe su  $S_s$ .

Per le equazioni dei flussi  $\Phi_S^{(s)}$  e  $\Phi_S^{(ps)}$ , è opportuno rivedere lo strato dei sedimenti attivi come uno strato *poroso* con porosità media  $p$ , nel quale il fosforo è in parte disciolto nei pori (*fosforo interstiziale*  $\rho_{S,int}$ ) e in parte adsorbito dalla materia solida (*fosforo adsorbito*  $\rho_{S,ads}$ ). Quindi si ha:

$$(21) \quad \int_{V_s} \rho_s dv = \int_{V_s} [p \rho_{S,int} + (1-p) \rho_{S,ads}] dv = [p \rho_{S,int}^{(m)} + (1-p) \rho_{S,ads}^{(m)}] V_s$$

dove abbiamo indicato con  $\rho_{S,int}^{(m)}$  e  $\rho_{S,ads}^{(m)}$  rispettivamente i valori medi della densità di fosforo interstiziale e di quello adsorbito. La distinzione in fosforo interstiziale ed adsorbito non introduce un'ulteriore incognita al problema, perché le due quantità sono legate dall'*isoterma di adsorbimento* (*adsorption isotherm*), vale a dire da una relazione del tipo

$$(22) \quad \rho_{S,ads} = F(\rho_{S,int})$$

nella quale si suppone che la funzione  $F$  sia non decrescente in  $\rho_{S,int}$ . Lo sviluppo di Taylor di questa funzione nel punto  $\rho_{S,int}^{(m)}$  arrestato al secondo ordine è:

$$F(\rho_{S,int}) = F(\rho_{S,int}^{(m)}) + F'(\rho_{S,int}^{(m)}) (\rho_{S,int} - \rho_{S,int}^{(m)}) + F''(\rho_{S,int}^{(m)}) (\rho_{S,int} - \rho_{S,int}^{(m)})^2$$

Ricordando che:

$$\int_{V_s} \rho_{S,int} dv = V_s \rho_{S,int}^{(m)}$$

e assumendo che  $F$  sia lineare, si ricava:

$$(23) \quad \rho_{S,ads}^{(m)} = F(\rho_{S,int}^{(m)}) = \alpha_{ads} \rho_{S,int}^{(m)}$$

con  $\alpha_{ads}$  parametro ottenuto sperimentalmente. Infine, i flussi  $\Phi_S^{(s)}$  e  $\Phi_S^{(ps)}$  sono dati dalle equazioni:

$$(24) \quad \Phi_S^{(s)} = \rho_{S,int}^{(m)} v_{s,v} S_s$$

$$(25) \quad \Phi_S^{(ps)} = F(\rho_{S,int}^{(m)}) v_{s,sp} S_{sp}$$

dove  $v_{s,v}$  e  $v_{s,sp}$  indicano rispettivamente la velocità con cui il fosforo viene rilasciato dai sedimenti attivi nel volume  $V$  e dai sedimenti attivi verso lo strato di quelli permanenti.

## 2.4 Sistema di equazioni differenziali ordinarie autonome per i valori medi delle variabili di stato

Nella sezione precedente sono state trovate le equazioni che esprimono le quantità  $\Phi_P^{(s)}$ ,  $\Phi_S^{(s)}$ ,  $\Phi_S^{(ps)}$ ,  $\Phi_A^{(s)}$ ,  $r_P^{(m)}$  e  $r_A^{(m)}$  come funzioni dei valori medi  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_S^{(m)}$ . Ora si vuole ottenere il sistema di ODEs autonome per lo studio dello stato eutrofico del lago. Per ipotesi, le quantità  $\Phi_P^{(en)}$  e  $\Phi_A^{(en)}$  saranno supposte costanti nel tempo.

Per le equazioni (22) e (23), la (9) può essere riscritta nel modo seguente:

$$(26) \quad \dot{\rho}_S^{(m)} = p \dot{\rho}_{S,int}^{(m)} + (1-p) \dot{\rho}_{S,ads}^{(m)} = [p + \alpha_{ads}(1-p)] \dot{\rho}_{S,int}^{(m)}$$

E le equazioni del sistema (13), tenendo conto delle relazioni (14), (17), (20), (21), (24)-(26), diventano:

$$(27) \quad \begin{aligned} \dot{\rho}_P^{(m)} &= \frac{1}{V} \left( \Phi_P^{(en)} - \rho_P^{(m)} \bar{\phi}_P^{(w)} - \alpha_P^{(m,s)} \rho_P^{(m)} v_{Pn}^{(s)} S_s + \rho_{S,int}^{(m)} v_{s,v} S_s \right) - G(\rho_P^{(m)}) \rho_A^{(m)} \frac{V_A}{V} \\ \dot{\rho}_A^{(m)} &= \frac{1}{V_A} \left( \Phi_A^{(en)} - \rho_A^{(m)} \bar{\phi}_A^{(w)} \right) + (\theta_A G(\rho_P^{(m)}) - \xi_A) \rho_A^{(m)}(t) \\ [p + \alpha_{ads}(1-p)] \dot{\rho}_{S,int}^{(m)} &= \frac{1}{h_s} \alpha_P^{(m,s)} \rho_P^{(m)} v_{Pn}^{(s)} + \frac{1}{h_s} \alpha_A^{(m,s)} \rho_A^{(m)} v_{An}^{(s)} - \frac{1}{h_s} \rho_{S,int}^{(m)} v_{s,v} - \frac{1}{h_s} \frac{V_{ps}}{V_s} v_{s,ps} \alpha_{ads} \rho_{S,int}^{(m)} \end{aligned}$$

dove  $h_s = \frac{V_s}{S_s}$  indica l'altezza media della regione occupata dai sedimenti attivi.

Una volta assegnate le condizioni iniziali relative ai valori medi delle densità  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_{S,int}^{(m)}$ , la dinamica dello stato trofico del lago è completamente descritta dalle equazioni (27) nelle quali, come già detto, compaiono coefficienti che possono essere valutati sperimentalmente.

Se, per ipotesi, la frazione di fosforo assorbita nell'unità di tempo dalle alghe è descritta da un'interazione di Holling di tipo II e vale la condizione (18), possiamo riscrivere le (27) nella forma più compatta:

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\rho}_P^{(m)} &= \alpha_1 - \beta_1 \rho_P^{(m)} + \delta_1 \rho_{S,int}^{(m)} - \theta_1 \frac{\rho_P^{(m)}}{\mu + \rho_P^{(m)}} \rho_A^{(m)} \\ \dot{\rho}_A^{(m)} &= \alpha_2 - \gamma_2 \rho_A^{(m)} + \theta_2 \frac{\rho_P^{(m)}}{\mu + \rho_P^{(m)}} \rho_A^{(m)} \\ \dot{\rho}_{S,int}^{(m)} &= \beta_3 \rho_P^{(m)} + \gamma_3 \rho_A^{(m)} - \delta_3 \rho_{S,int}^{(m)} \end{aligned}$$

nelle quali sono stati introdotti dei nuovi parametri definiti come segue:

$$(29) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{V} \Phi_A^{(en)} ; & \beta_1 &= \frac{1}{V} (\bar{\varphi}_P^{(w)} + \alpha_P^{(m,s)} v_{Pn}^{(s)} S_s) ; & \delta_1 &= \frac{1}{V} v_{s,v} S_s ; & \theta_1 &= \frac{V_A}{V} b_1 ; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{V_A} \Phi_A^{(en)} ; & \gamma_2 &= \left( \frac{1}{V_A} \bar{\varphi}_A^{(w)} + \xi_A \right) ; & \theta_2 &= \theta_A b_1 ; & \beta_3 &= \chi \frac{1}{h_s} \alpha_P^{(m,s)} v_{Pn}^{(s)} ; \\ \gamma_3 &= \chi \frac{1}{h_s} \alpha_A^{(m,s)} v_{An}^{(s)} ; & \delta_3 &= \chi \left( \frac{1}{h_s} v_{s,v} + \frac{1}{h_{ps}} \frac{v_{ps}}{v_s} \alpha_{ads} v_{s,sp} \right) ; & \chi &= \frac{1}{p+(1-p)\alpha_{ads}} . \end{aligned}$$

Per brevità, i parametri appena introdotti con i rispettivi significati fisici sono riportati nella tabella seguente:

**Tabella 1: Parametri del modello**

Parametro	Descrizione
$\alpha_1$	Tasso costante di afflusso di fosforo
$\beta_1$	Tasso di diminuzione di $\rho_P^{(m)}$ dovuto al deflusso e alla sedimentazione
$\delta_1$	Tasso di crescita di $\rho_P^{(m)}$ dovuto al rilascio di fosforo dai sedimenti attivi
$\theta_1$	Tasso di perdita di $\rho_P^{(m)}$ dovuto al consumo ad opera del fitoplancton
$\alpha_2$	Tasso di afflusso di $\rho_A^{(m)}$
$\gamma_2$	Tasso di diminuzione del fitoplancton dovuto al deflusso e alla mortalità
$\theta_2$	Tasso di crescita di $\rho_A^{(m)}$ dovuto all'assorbimento di fosforo
$\beta_3$	Tasso di crescita di $\rho_{S,int}^{(m)}$ dovuto alla sedimentazione di $\rho_P^{(m)}$
$\gamma_3$	Tasso di crescita di $\rho_{S,int}^{(m)}$ dovuto alla sedimentazione di $\rho_A^{(m)}$
$\delta_3$	Tasso di diminuzione di $\rho_{S,int}^{(m)}$ dovuto al deflusso verso i sedimenti permanenti e al rilascio nell'acqua dai sedimenti attivi

Tutti i parametri del modello sono strettamente positivi, fatta eccezione per  $\alpha_2$  che può essere nullo. Inoltre, si fa l'ipotesi che il tasso di crescita delle alghe sia positivo e che quindi sia verificata la condizione

$$(30) \quad \theta_2 - \gamma_2 > 0$$

che per le (29) comporta

$$(31) \quad \beta_1 \delta_3 > \beta_3 \delta_1$$

Nel paragrafo seguente, si discuterà la stabilità delle configurazioni di equilibrio per lo stato trofico del lago. Allo scopo di individuare dei programmi di risanamento, sarà necessario determinare le concentrazioni, allo stato di equilibrio, di fosforo ( $\rho_P^{(m)}$  e  $\rho_{S,int}^{(m)}$ ) e di fitoplancton  $\rho_A^{(m)}$  in termini dei parametri del modello. Il parametro  $\alpha_2$ , che rappresenta il flusso della biomassa di fitoplancton entrante nel bacino, ha un ruolo di fondamentale importanza nella dinamica del fenomeno. Pertanto, verranno discussi separatamente i casi  $\alpha_2 = 0$  e  $\alpha_2 > 0$ .

## 2.5 Sistema adimensionale e analisi delle configurazioni di equilibrio

Per la determinazione e lo studio delle proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio è utile riscrivere le (28) in una forma adimensionale. Le funzioni  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_{S,int}^{(m)}$  dipendono tutte dalla stessa variabile indipendente  $t$ , cioè il tempo. Introducendo le grandezze di riferimento  $\Omega, \Gamma, \Phi, T$  tali che

$$(32) \quad \rho_P^{(m)} = \Omega P; \quad \rho_A^{(m)} = \Gamma A; \quad \rho_{S,int}^{(m)} = \Phi S; \quad t = T\tau$$

dove  $P, A, S, \tau$  sono le grandezze adimensionali corrispondenti a  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$ ,  $\rho_{S,int}^{(m)}$ ,  $t$ , il sistema (28) nelle variabili (32) assume la forma:

$$(33)$$

$$\frac{\Omega}{T} \frac{d}{d\tau} P = \alpha_1 - \beta_1 \Omega P + \delta_1 \Phi S - \theta_1 \Gamma \Omega \frac{P}{\mu + \Omega P} A$$

$$\frac{\Gamma}{T} \frac{d}{d\tau} A = \alpha_2 - \gamma_2 \Gamma A + \theta_2 \Gamma \Omega \frac{P}{\mu + \Omega P} A$$

$$\frac{\Phi}{T} \frac{d}{d\tau} S = \beta_3 \Omega P + \gamma_3 \Gamma A - \delta_3 \Phi S$$

Con alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$(34)$$

$$\frac{d}{d\tau} P = \frac{T(\alpha_1 - \beta_1 \Omega P - \frac{\Gamma \theta_1 \Omega A P}{\mu + \Omega P} + \delta_1 \Phi S)}{\Omega}$$

$$\frac{d}{d\tau} A = \frac{T(\alpha_2 - \Gamma \gamma_2 A + \frac{\Gamma \theta_2 \Omega A P}{\mu + \Omega P})}{\Gamma}$$

$$\frac{d}{d\tau} S = \frac{T(\Gamma \gamma_3 A + \beta_3 \Omega P - \delta_3 \Phi S)}{\Phi}$$

Effettuando le seguenti sostituzioni:

$$(35) \quad \Omega = \mu, \quad T = \frac{1}{\beta_1}, \quad \Gamma = \frac{\beta_1 \mu}{\theta_1}, \quad \Phi = \frac{\beta_1 \mu}{\delta_1}$$

Il sistema (34) diventa:

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} P &= \frac{\alpha_1}{\beta_1 \mu} - P - \frac{P}{1+P} A + S \\ \frac{d}{d\tau} A &= \frac{\alpha_2 \theta_1}{\beta_1^2 \mu} - \frac{\gamma_2 A}{\beta_1} + \frac{\theta_2 P}{\beta_1 (1+P)} A \\ \frac{d}{d\tau} S &= \frac{\gamma_3 \delta_1 A}{\beta_1 \theta_1} + \frac{\beta_3 \delta_1 P}{\beta_1^2} - \frac{\delta_3 S}{\beta_1} \end{aligned}$$

A questo punto, effettuando le seguenti sostituzioni:

$$(37) \quad q = \frac{\alpha_1}{\beta_1 \mu}; \quad a_0 = \frac{\alpha_2 \theta_1}{\beta_1^2 \mu}; \quad a_1 = \frac{\theta_2}{\beta_1}; \quad a_2 = \frac{\gamma_2}{\beta_1}; \quad a_3 = \frac{\gamma_3 \delta_1}{\beta_1 \theta_1}; \quad a_4 = \frac{\beta_3 \delta_1}{\beta_1^2}; \quad a_5 = \frac{\delta_3}{\beta_1}$$

il sistema (28) assume la forma seguente:

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} P &= q - P + S - \frac{P}{1+P} A \\ \frac{d}{d\tau} A &= a_0 + a_1 \frac{P}{1+P} A - a_2 A \\ \frac{d}{d\tau} S &= a_3 A + a_4 P - a_5 S \end{aligned}$$

e le relazioni (30)-(31) diventano

$$(39) \quad a_1 - a_2 > 0; \quad a_5 - a_4 > 0$$

Nella formulazione adimensionale delle equazioni (33), i parametri definiti in (37) hanno il seguente significato:

- $q$  è il rapporto fra il tasso costante di afflusso di fosforo ( $\alpha_1$ ) e il suo tasso di diminuzione dovuto al deflusso e alla sedimentazione ( $\beta_1$ );
- $a_0$  è il tasso intrinseco di afflusso delle alghe (cioè il rapporto fra la crescita delle alghe, dovuta ai flussi entranti nel bacino ( $\alpha_2$ ) e all'assorbimento di fosforo ( $\theta_1$ ), e il tasso di diminuzione del fosforo ( $\beta_1$ );
- $a_1$  è il rapporto fra il tasso di crescita delle alghe dovuto all'assorbimento di fosforo ( $\theta_2$ ) e il tasso di diminuzione del fosforo dovuto al deflusso e alla sedimentazione ( $\beta_1$ );
- $a_2$  è il rapporto fra il tasso intrinseco di diminuzione delle alghe, dovuto al deflusso di queste e alla loro mortalità ( $\gamma_2$ ), e il tasso di diminuzione del fosforo ( $\beta_1$ );
- $a_3$  è il tasso intrinseco di crescita del fosforo interstiziale, dovuta alla sedimentazione algale ( $\gamma_3$ ) e al rilascio da parte dei sedimenti attivi ( $\delta_1$ ), e di diminuzione del fosforo per effetto dei deflussi, della sedimentazione ( $\beta_1$ ) e dell'assorbimento da parte delle alghe ( $\theta_1$ );

- $a_4$  è il rapporto fra il tasso di crescita del fosforo interstiziale, dovuto alla sedimentazione ( $\beta_3$ ) e al rilascio da parte dei sedimenti attivi ( $\delta_1$ ), e il tasso di diminuzione, dovuto al deflusso e alla sedimentazione ( $\beta_1$ );
- $a_5$  indica complessivamente il tasso intrinseco di diminuzione del fosforo.

Tutti questi parametri sono strettamente positivi, fatta eccezione per  $a_0$  che può essere nullo se è  $\alpha_2=0$ .

Le configurazioni di equilibrio [3,4]  $E_i = (P_i^*, A_i^*, S_i^*)$  per il modello descritto dalle equazioni (33) sono le soluzioni non negative del seguente sistema di equazioni algebriche:

(40)

$$\begin{aligned} q - P + S - \frac{P}{1+P} &= 0 \\ a_0 + a_1 \frac{P}{1+P} A - a_2 A &= 0 \\ a_3 A + a_4 P - a_5 S &= 0 \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi:

1) **Non c'è flusso di biomassa entrante nel bacino ( $a_0 = 0$ )**

**TEOREMA 1 (Soluzioni di equilibrio e stabilità lineare):** Sia  $a_0 = 0$ . Se  $q > 0$ ,  $a_i > 0$  ( $i=1, \dots, 5$ ) e se valgono le disuguaglianze

$$a_1 - a_2 > 0 ; \quad a_5 - a_4 > 0$$

Allora:

i) il sistema (36) ammette al più le due seguenti configurazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} E_1 &= \left( \frac{a_5}{a_5 - a_4} q, 0, \frac{a_4}{a_5 - a_4} q \right) \\ E_2 &= \left( \frac{a_2}{a_1 - a_2}, \frac{a_1 [a_2(a_5 - a_4) - a_5 q(a_1 - a_2)]}{(a_1 - a_2)(a_1 a_3 - a_2 a_5)}, \frac{a_2(a_1 a_3 - a_2 a_4) - a_1 a_3 q(a_1 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 a_3 - a_2 a_5)} \right) \end{aligned}$$

delle quali  $E_1$  esiste sempre ed  $E_2$  esiste se è verificata almeno una delle seguenti condizioni:

$$(C1) \quad (\text{prima condizione}) \quad a_3 < \frac{a_2 a_5}{a_1} \quad e \quad q > \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$$

$$(C2) \quad (\text{seconda condizione}) \quad a_3 > \frac{a_2 a_5}{a_1} \quad e \quad q < \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$$

ii) la configurazione  $E_1$  è:

$$\text{asintoticamente stabile} \quad \text{se} \quad q < \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)},$$

$$\text{instabile} \quad \text{se} \quad q > \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}.$$

iii) la configurazione  $E_2$  è *asintoticamente stabile* se è verificata la *prima condizione (C1)*, è *instabile* se è verificata la *seconda (C2)*.

**Dimostrazione.**

Poiché

$$a_1 - a_2 > 0 ; \quad a_5 - a_4 > 0$$

la configurazione  $E_1$  esiste sempre, mentre  $E_2$  esiste se è verificata almeno una delle due condizioni citate al punto i). Allo scopo di analizzare la stabilità degli equilibri, cominciamo col notare che la matrice jacobiana associata al sistema (33) ha la forma seguente:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - \frac{A}{(1+P)^2} & -1 + \frac{1}{1+P} & 1 \\ \frac{a_1 A}{(1+P)^2} & -a_2 + \frac{a_1 P}{1+P} & 0 \\ a_4 & a_3 & -a_5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di  $J$ , valutata nella configurazione  $E_1$ , sono:

$$\frac{a_1 a_5 q}{(a_5 - a_4) + a_5 q} - a_2, \quad -\frac{1}{2} \left( a_5 + 1 \pm \sqrt{4a_4 + (a_5 - 1)^2} \right)$$

Quindi (si veda l'appendice) si ha che:

- $E_1$  è asintoticamente stabile se  $q < \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$ ;
- $E_1$  è instabile se  $q > \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$ .

La matrice jacobiana  $J$  valutata in  $E_2$  ha la forma:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - \frac{A_2^*}{(1+P_2^*)^2} & -1 + \frac{1}{1+P_2^*} & 1 \\ \frac{a_1 A_2^*}{(1+P_2^*)^2} & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & -a_5 \end{pmatrix}$$

dove

$$P_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2}; \quad A_2^* = \frac{a_1 [a_2(a_5 - a_4) - a_5 q(a_1 - a_2)]}{(a_1 - a_2)(a_1 a_3 - a_2 a_5)}; \quad S_2^* = \frac{a_2(a_1 a_3 - a_2 a_4) - a_1 a_3 q(a_1 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 a_3 - a_2 a_5)}$$

L'equazione caratteristica corrispondente è:

$$\lambda^3 + B_1 \lambda^2 + B_2 \lambda + B_3 = 0$$

con

$$B_1 = 1 + a_5 + \frac{A_2^*}{(1+P_2^*)^2};$$

$$B_2 = (a_5 - a_4) + a_5 \frac{A_2^*}{(1+P_2^*)^2} + a_1 \frac{A_2^* P_2^*}{(1+P_2^*)^3};$$

$$B_3 = a_1 \frac{A_2^*}{(1+P_2^*)^2}$$

Per il *criterio di Routh-Hurwitz*, tutti gli autovalori di  $J$  valutata in  $E_2$  sono negativi oppure hanno parte reale negativa se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

$$B_1 > 0, \quad B_3 > 0, \quad B_1 B_2 > B_3$$

Con la condizione (C1) sui parametri, mediante alcuni passaggi algebrici è possibile concludere che  $E_2$  è asintoticamente stabile. Infatti, la relazione  $a_5 - a_4 > 0$  implica  $B_1 > 0, B_1 B_2 > B_3$  e inoltre si ha che

$$B_3 > 0 \leftrightarrow P_2^* > \frac{a_3}{a_5 - a_3} \leftrightarrow a_3 < \frac{a_2 a_5}{a_1} \quad \square$$

I risultati del teorema appena dimostrato vengono riassunti nella tabella seguente

**Tabella 2: Esistenza e stabilità degli equilibri ( $a_0 = 0$ )**

<u>Equilibrio</u>	<u>Esistenza</u>	<u>Stabilità asintotica</u>
$E_1$	Sempre	$q < \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$
$E_2$	$a_3 < \frac{a_2 a_5}{a_1}, \quad q > \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$	Sempre
$E_2$	$a_3 > \frac{a_2 a_5}{a_1}, \quad q < \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$	Mai

Nella configurazione  $E_1 = \left( \frac{a_5}{a_5 - a_4} q, 0, \frac{a_4}{a_5 - a_4} q \right)$  la biomassa di fitoplancton scompare, mentre le concentrazioni di fosforo nel bacino ( $P_1^*$ ) e nei sedimenti attivi ( $S_1^*$ ) assumono rispettivamente i valori  $\frac{a_5}{a_5 - a_4} q$  e  $\frac{a_4}{a_5 - a_4} q$ . Inoltre, si ha stabilità asintotica se e solo se  $q < \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$  e ciò implica che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_1^* = \frac{a_5}{a_5 - a_4} q < \frac{a_2}{(a_1 - a_2)}$$

Quindi  $P_1^*(a_1 - a_2) - a_2 < 0$  e il tasso complessivo di crescita del fitoplancton è negativo, cioè  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0$ . Per l'equilibrio  $E_2$  si ha stabilità asintotica se  $a_3 < \frac{a_2 a_5}{a_1}$  e  $q > \frac{a_2(a_5 - a_4)}{a_5(a_1 - a_2)}$  e le densità di fosforo nel bacino e nei sedimenti assumono rispettivamente i valori  $P_2^*$  e  $S_2^*$ , mentre la densità di fitoplancton assume il valore  $A_2^*$ . Come si può vedere, solo  $A_2^*$  e  $S_2^*$  dipendono esplicitamente da  $q$ .

Per mettere in evidenza gli eventuali effetti sulle concentrazioni di fosforo delle variazioni dei parametri del modello, nella tabella seguente vengono riportati i tassi di variazione di  $P_1^*, S_1^*, A_2^*$  e  $S_2^*$  rispetto a  $q, a_4$  e  $a_5$ .

Tabella 3: Tassi di variazione degli equilibri rispetto a  $q$ ,  $a_4$  e  $a_5$ 

Equilibrio $E_1$	$P_1^*$	$S_1^*$	Equilibrio $E_2$	$A_2^*$	$S_2^*$
Segno di $\frac{d}{dq}$	Positivo	Positivo		Positivo	Positivo
Segno di $\frac{d}{da_4}$	Positivo	Positivo		Positivo	Positivo
Segno di $\frac{d}{da_5}$	Negativo	Negativo		Negativo	Negativo

## 2) Effetti del flusso di biomassa entrante nel bacino ( $a_0 > 0$ )

**TEOREMA 2 (Soluzioni di equilibrio e stabilità lineare):** Sia  $a_0 > 0$ . Se  $q > 0$ ,  $a_i > 0$  ( $i = 1, \dots, 5$ ),  $a_1 - a_2 > 0$ ,  $a_5 - a_4 > 0$ , allora:

i) il sistema (36) ammette al più le due seguenti configurazioni di equilibrio:

$$E_3 = \left( P_3^* = \frac{-a_0 + a_2 A_3^*}{a_0 + (a_1 - a_2) A_3^*}; A_3^*; S_3^* = \frac{a_3 A_3^* + a_4 P_3^*}{a_5} \right)$$

$$E_4 = \left( P_4^* = \frac{-a_0 + a_2 A_4^*}{a_0 + (a_1 - a_2) A_4^*}; A_4^*; S_4^* = \frac{a_3 A_4^* + a_4 P_4^*}{a_5} \right)$$

dove

$$A_3^* = \frac{\Psi - a_1 \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)(a_1 a_3 - a_2 a_5)}$$

$$A_4^* = \frac{\Psi + a_1 \sqrt{\Delta}}{2(a_1 - a_2)(a_1 a_3 - a_2 a_5)}$$

e

$$\Psi = a_1 [a_2 (a_5 - a_4) - a_5 q (a_1 - a_2)] - a_0 [a_1 (a_3 + a_5) - 2a_2 a_5]$$

$$\Delta = \{a_0 (a_3 - a_5) - a_1 a_5 q + a_2 [a_4 + a_5 (q - 1)]\}^2 + 4(a_1 - a_2)(a_4 - a_5)(a_0 a_3 + a_2 a_5 q)$$

ii) La configurazione  $E_3$  esiste se è verificata almeno una delle seguenti condizioni mutualmente esclusive:

- 1)  $a_0 < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4)}{a_5 (a_1 - a_2)}$ ,  $q < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4) - a_0 a_5 (a_1 - a_2)}{a_1 a_5 (a_1 - a_2)}$ ,  $a_3 < \frac{a_2 a_5}{a_1}$
- 2)  $a_0 < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4)}{a_5 (a_1 - a_2)}$ ,  $q < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4) - a_0 a_5 (a_1 - a_2)}{a_1 a_5 (a_1 - a_2)}$ ,  $\frac{a_2 a_5}{a_1} < a_3 < \Omega$
- 3)  $a_0 < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4)}{a_5 (a_1 - a_2)}$ ,  $q > \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4) - a_0 a_5 (a_1 - a_2)}{a_1 a_5 (a_1 - a_2)}$ ,  $a_3 < \frac{a_2 a_5}{a_1}$

dove

$$\Omega = \frac{a_5[a_0 + q(a_1 - a_2)]}{a_0} + \frac{(2a_1 - a_2)(a_5 - a_4)}{a_0} - \frac{2}{a_0} \sqrt{(a_1 - a_2)(a_5 - a_4)[a_5(a_0 + a_1q) + a_1(a_5 - a_4)]}$$

iii) La configurazione  $E_4$  esiste se sono verificate le seguenti condizioni:

$$a_0 < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4)}{a_5 (a_1 - a_2)}, \quad q < \frac{a_1 a_2 (a_5 - a_4) - a_0 a_5 (a_1 - a_2)}{a_1 a_5 (a_1 - a_2)}, \quad \frac{a_2 a_5}{a_1} < a_3 < \Omega$$

con  $\Omega$  definito nel punto precedente.

iv) La configurazione  $E_3$ , se esiste, è asintoticamente stabile localmente senza alcuna restrizione.

v) La configurazione  $E_4$ , se esiste, è sempre localmente instabile.

### Dimostrazione.

Dal sistema (36) si ottiene:

$$P_i^* = \frac{-a_0 + a_2 A_i^*}{a_0 + (a_1 - a_2) A_i^*}, \quad S_i^* = \frac{a_3 A_i^* + a_4 P_i^*}{a_5} \quad i = 3,4$$

Siccome

$$a_1 - a_2 > 0 ; \quad a_5 - a_4 > 0$$

le configurazioni di equilibrio  $E_3$  e  $E_4$  esistono se si verifica (rispettivamente) che:

$$A_{3,4}^* > \frac{a_0}{a_2}.$$

Mediante calcoli algebrici si ottengono le condizioni 1), 2) e 3). Per il sistema (36), la matrice jacobiana valutata in  $E_i$  ( $i = 3,4$ ), ha la forma seguente:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - \frac{A_i^*}{(1 + P_i^*)^2} & -1 + \frac{1}{1 + P_i^*} & 1 \\ \frac{a_1 A_i^*}{(1 + P_i^*)^2} & -\frac{a_0}{A_i^*} & 0 \\ a_4 & a_3 & -a_5 \end{pmatrix}$$

la cui equazione caratteristica diventa:

$$\lambda^3 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda + C_3 = 0$$

con

$$C_1 = \frac{a_0}{A_i^*} + \left[ (1 + a_5) + \frac{A_i^*}{(1 + P_i^*)^2} \right]$$

$$C_2 = \frac{a_0}{A_i^*} (1 + a_5) + \frac{a_0}{(1 + P_i^*)^2} + \left[ (a_5 - a_4) + a_5 \frac{A_i^*}{(1 + P_i^*)^2} + a_1 \frac{A_i^* P_i^*}{(1 + P_i^*)^3} \right]$$

$$C_3 = \frac{a_0}{A_i^*} (a_5 - a_4) + \frac{a_0 a_5}{(1 + P_i^*)^2} + \left[ a_1 \frac{A_i^*}{(1 + P_i^*)^2} \left( a_5 \frac{P_i^*}{1 + P_i^*} - a_3 \right) \right]$$

La condizione  $a_5 - a_4 > 0$  implica  $C_1 > 0$  e  $C_1 C_2 > C_3$ . Per sfruttare il criterio di Routh-Hurwitz, bisogna determinare le condizioni per le quali si abbia  $C_3 > 0$ . Procedendo con lo studio del segno del coefficiente  $C_3$  per  $P_3^*, A_3^*$  e per  $P_4^*, A_4^*$ , si ottiene che solo la configurazione  $E_3 = (P_3^*; A_3^*; S_3^*)$ , se esiste, gode di stabilità asintotica locale senza condizioni.  $\square$

Quindi, se esiste, la configurazione  $E_3$  è sempre asintoticamente stabile. I valori di  $P_3^*, A_3^*$  e  $S_3^*$  dipendono dai parametri  $q, a_4$  e  $a_5$ , in particolare si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{dP_3^*}{dq} &= \frac{a_0 a_1}{[a_0 + (a_1 - a_2) A_3^*]^2} \frac{dA_3^*}{dq} \\ \frac{dS_3^*}{dq} &= \frac{1}{a_5} \left( a_3 + \frac{a_0 a_1 a_4}{[a_0 + (a_1 - a_2) A_3^*]^2} \right) \frac{dA_3^*}{dq} \end{aligned}$$

Con  $\frac{dA_3^*}{dq} > 0$ , se esiste  $E_3$ . Pertanto,  $\frac{dP_3^*}{dq}, \frac{dS_3^*}{dq}$  e  $\frac{dA_3^*}{dq}$  sono positivi: questo significa che l'afflusso di fosforo fa aumentare le concentrazioni P, A e S all'equilibrio.

## Capitolo Terzo

### 3. Simulazioni numeriche e programmi di ripristino

#### 3.1 Simulazioni numeriche

In questo paragrafo verranno effettuate alcune simulazioni numeriche del modello proposto per lo studio delle possibili configurazioni di equilibrio al variare dei valori numerici dei parametri. Verrà preso in considerazione il sistema (28) nella sua forma dimensionale. Lo scopo di queste simulazioni è legato alla possibilità di individuare possibili scenari di risanamento del bacino per valori assegnati dei parametri del modello.

#### PRIMA SIMULAZIONE

Assegnando ai parametri i seguenti valori:

$$\alpha_1 = 0.0001 ; \quad \beta_1 = 0.04; \delta_1 = 0.001 ; \quad \theta_1 = 0.009 ; \quad \mu = 0.025 ; \quad \gamma_2 = 0.001;$$

$$\theta_2 = 0.005; \quad \beta_3 = 0.01; \gamma_3 = 0.2; \quad \delta_3 = 0.01 ;$$

e i dati iniziali

$$(S1) \quad \rho_P^{(m)}(0) = 0.03, \quad \rho_A^{(m)}(0) = 0.015, \quad \rho_S^{(m)}(0) = 0.02$$

si ottiene, per  $\alpha_2 = 0$  ; la configurazione di equilibrio  $E_1 \approx (0.0267; 0 ; 0.0152)$  che è asintoticamente stabile. Per  $\alpha_2 = 0.0000005$  , la soluzione converge verso l'equilibrio stabile  $E_3 \approx (0.00517; 0.00349; 0.01215)$ .

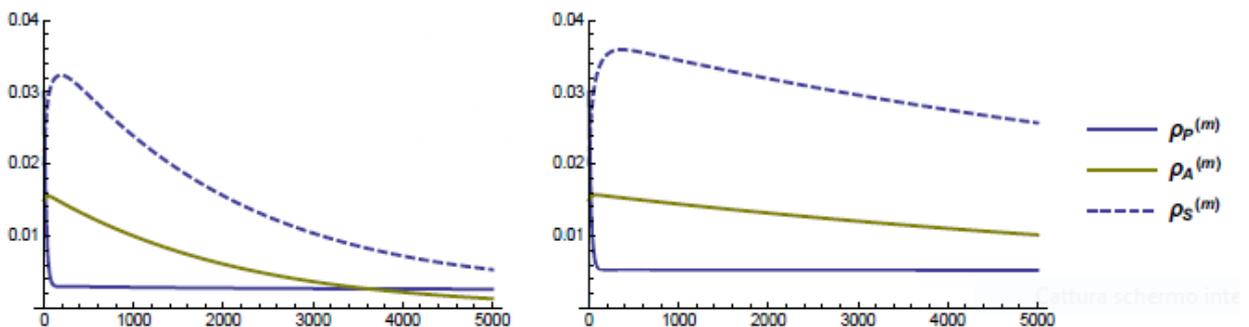


Figura 3.1 Soluzioni di (29) per  $\alpha_2 = 0$  (sinistra) e per  $\alpha_2 = 0.0000005$  (destra)

#### SECONDA SIMULAZIONE

Assegnando ora ai parametri i seguenti valori numerici:

$$\alpha_1 = 0.002 ; \quad \beta_1 = 0.05; \delta_1 = 0.01 ; \quad \theta_1 = 0. ; \quad \mu = 0.01 ; \quad \alpha_2 = 0 ; \quad \gamma_2 = 0.05;$$

$$\theta_2 = 0.08; \quad \beta_3 = 0.01; \gamma_3 = 0.01;$$

Con la condizione iniziale (S1) , sono ammesse le configurazioni di equilibrio

$$E_2 \approx (0.01667; 0.00217; 0.01883) \quad \text{per } \delta_3 = 0.01$$

$E_2 \approx (0.01667; 0.00207; 0.012489)$  per  $\delta_3 = 0.015$

Si osserva (Figura 3.2) che un aumento del valore del parametro  $\delta_3$  produce una riduzione effettiva dei valori di equilibrio di  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_S^{(m)}$ . Inoltre,  $\rho_P^{(m)}$ ,  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_S^{(m)}$  raggiungono rapidamente la configurazione di equilibrio.

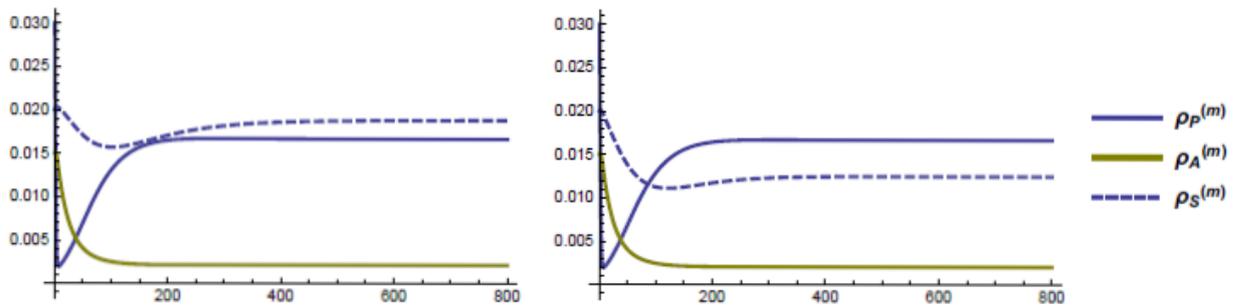


Figura 3.2. Soluzioni di (29) per  $\delta_3 = 0.01$  (sinistra) e per  $\delta_3 = 0.015$  (destra)

Un successivo aumento di  $\delta_3$  conduce alle seguenti configurazioni

$E_2 \approx (0.01667; 0.00197; 0.00621)$  per  $\delta_3 = 0.03$

$E_2 \approx (0.01667; 0.00194; 0.00465)$  per  $\delta_3 = 0.04$

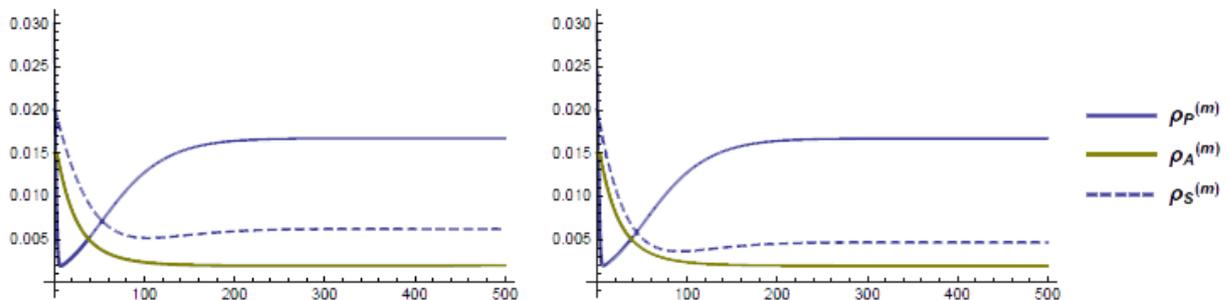


Figura 3.3: Soluzioni di (29) per  $\delta_3 = 0.03$  (sinistra) e  $\delta_3 = 0.04$  (destra)

L'effetto dell'aumento di  $\delta_3$  sui valori di  $\rho_A^{(m)}$  e  $\rho_S^{(m)}$  all'equilibrio è ancora più evidente nel caso  $\alpha_2 \neq 0$ . Ponendo  $\alpha_2 = 0.0000005$ , la densità di fosforo nel bacino e nei sedimenti attivi e la densità di fitoplancton raggiungono, all'equilibrio, i seguenti valori:

$E_2 \approx (0.01667; 0.00197; 0.00621)$  per  $\alpha_2 = 0.0000005$  e  $\delta_3 = 0.03$

$E_2 \approx (0.01667; 0.00194; 0.00465)$  per  $\alpha_2 = 0.0000005$  e  $\delta_3 = 0.04$

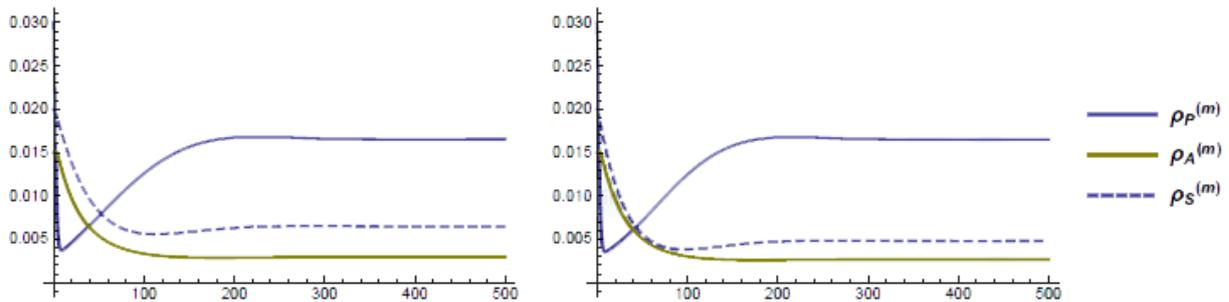


Figura 3.4: Soluzioni di (29) con  $\alpha_2 = 0.0000005$  per  $\delta_3 = 0.03$  (sinistra) e  $\delta_3 = 0.04$  (destra)

### TERZA SIMULAZIONE

Per ottenere un valore di  $\rho_P^{(m)}$  all'equilibrio minore di quello della simulazione precedente, verrà ora simulata una riduzione dell'apporto di fosforo dall'ambiente esterno al bacino mediante il parametro  $\alpha_1$ . Ponendo  $\alpha_2 = 0.0000005$ ,  $\alpha_1 = 0.0002$  e lasciando invariati gli altri parametri, si ottengono le seguenti configurazioni di equilibrio:

$E_2 \approx (0.01043; 0.00005; 0.00350)$  per  $\alpha_2 = 0.0000005$ ,  $\alpha_1 = 0.0002$  e  $\delta_3 = 0.03$

$E_2 \approx (0.00749; 0.00003; 0.00188)$  per  $\alpha_2 = 0.0000005$ ,  $\alpha_1 = 0.0002$  e  $\delta_3 = 0.04$ .

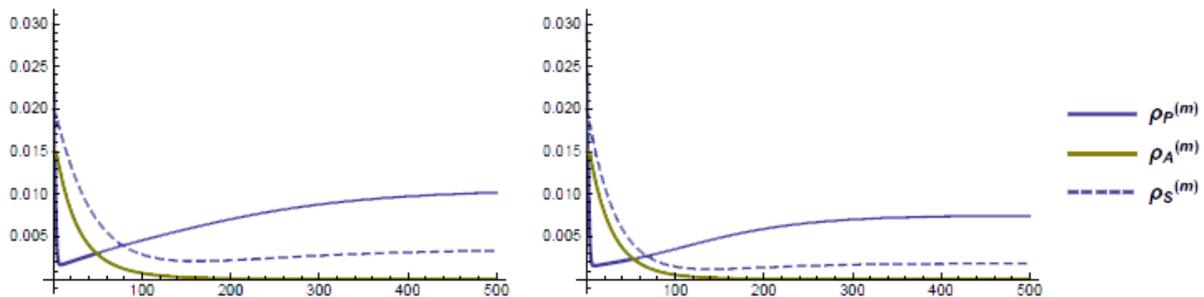


Figura 3.5: Soluzioni di (29) con  $\alpha_2 = 0.0000005$ ,  $\alpha_1 = 0.0002$ , per  $\delta_3 = 0.03$  (sinistra) e  $\delta_3 = 0.04$  (destra).

### 3.2 Riflessioni conclusive

Il modello matematico in esame descrive la dinamica dello stato trofico di un lago, inoltre fornisce gli equilibri e le proprietà di stabilità in funzione dei parametri del modello. Il modello è scritto in termini di tre variabili fondamentali: la densità media di fosforo nell'acqua ( $\rho_P$ ) e nei sedimenti ( $\rho_S$ ) e densità media di fitoplancton ( $\rho_A$ ). Tale scelta è giustificata dal ruolo di primaria importanza del ciclo del fosforo nell'evoluzione dello stato trofico di un lago. Infatti, il modello tiene conto dei processi di sedimentazione e di rilascio del fosforo da parte dei sedimenti attivi, nonché dell'assorbimento di questo da parte della biomassa di fitoplancton e dei contributi di afflusso e deflusso nel bacino lacustre.

Allo scopo di determinare le equazioni che descrivono il fenomeno, si è fatto uso delle leggi integrali di bilancio dalle quali e, mediante il teorema della media integrale, è stato possibile formulare delle equazioni

differenziali ordinarie non lineari e autonome per i valori medi delle densità  $\rho_P^{(m)}(t)$ ,  $\rho_A^{(m)}(t)$  e  $\rho_S^{(m)}(t)$ . In questo modo, il modello è in grado di descrivere globalmente lo stato trofico dell'intero lago, in termini di quantità che possono essere valutate sperimentalmente. Inoltre, un tale approccio risolve il problema dell'assegnazione di dati iniziali e al contorno, tipico dei modelli basati sulle equazioni differenziali alle derivate parziali proposti in letteratura.

Infine, per questo modello si è in grado di individuare le espressioni analitiche delle configurazioni di equilibrio e di valutarne le proprietà di stabilità in funzione di tutti i parametri del modello. Pertanto, la conoscenza delle configurazioni di equilibrio consente di progettare interventi mirati di risanamento del bacino lacustre.

## Appendice

# Cenni sulla teoria della stabilità

### 1. Equazioni differenziali autonome

Si definisce equazione differenziale autonoma un'equazione differenziale ordinaria del tipo:

$$(A1) \quad y'(t) = f(y(t))$$

Con  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . In altre parole,  $f$  non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente  $t$ . Questo implica che se una funzione  $\varphi$  è soluzione di (A1) in un intervallo  $(a,b)$ , anche la funzione  $\chi(t) = \varphi(t+\tau)$  è una soluzione nell'intervallo  $(a-\tau, b-\tau)$ .

Una soluzione di (A1) che verifichi la condizione iniziale  $y(0) = y_0$  (cioè una soluzione che "si origina" da  $y_0$ ) verrà indicata con  $\phi(t; y_0)$  e potrà supporre che  $t_0 = 0$ . Nelle ipotesi del teorema di Cauchy (esistenza e unicità locale), tale soluzione esiste in un intorno di  $t_0$ .

Definizione (Soluzione di equilibrio): Si chiama *soluzione di equilibrio* o *stato stazionario* della (A1) ogni (eventuale) zero di  $f$ :  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  è uno stato stazionario se  $f(\bar{y}) = 0$ ; a  $\bar{y}$  corrisponde allora la soluzione costante (soluzione di equilibrio) per (A1):

$$y(t) = \bar{y} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}.$$

Un metodo per la ricerca degli stati di equilibrio può essere quello di rappresentare su un piano (*piano delle fasi*) il grafico di  $f$  sul cui asse delle ascisse (*asse delle fasi*) varia  $y$  (*variabile di stato*). Le intersezioni del grafico di  $f(y)$  con l'asse delle fasi rappresentano gli stati di equilibrio. Un grafico di questo tipo è chiamato *diagramma di fase* per l'equazione (A1).

Definizione (Stabilità): Si dice che uno stato stazionario  $\bar{y}$  è:

- i) *stabile* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che, se  $|y_0 - \bar{y}| < \delta_\varepsilon$ , allora la soluzione  $\varphi(t; y_0)$  esiste per ogni  $t \geq 0$  e soddisfa:

$$(A2) \quad |\varphi(t; y_0) - \bar{y}| < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

- ii) *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre esiste  $\delta_1 > 0$  tale che, se  $|y_0 - \bar{y}| < \delta_1$ , allora risulta:

$$(A3) \quad \varphi(t; y_0) \rightarrow \bar{y} \quad \text{per } t \rightarrow +\infty$$

In questo caso, il punto  $\bar{y}$  viene detto *attrattore locale* e il più grande intorno  $U$  di  $\bar{y}$  tale che se  $y_0 \in U$  vale la (A3) si dice *bacino di attrazione* di  $\bar{y}$ . Se il bacino di attrazione di  $\bar{y}$  coincide con il dominio di  $f$ , si dice che  $\bar{y}$  è un *attrattore globale*.

- iii) *instabile* se non è stabile, cioè se esistono soluzioni che pur partendo in prossimità di  $\bar{y}$  non rimangono sempre vicine a  $\bar{y}$ . Ciò non significa che tutte le soluzioni si allontanano da  $\bar{y}$ : se invece accade così, il punto di equilibrio si chiama *repulsore*.

Lo studio del diagramma di fase per equazioni scalari autonome del primo ordine consente la determinazione delle proprietà di stabilità dei punti di equilibrio. Un altro metodo (*metodo di*

*linearizzazione*) consiste nel rimpiazzare in vicinanza dei punti di equilibrio il grafico di  $f$  con la retta tangente al grafico ( $f$  per ipotesi è di classe  $C^1$ ). Questo metodo è racchiuso nel seguente teorema (di cui riportiamo solo l'enunciato):

**Teorema: Criterio di Stabilità/Instabilità.** Sia  $I$  un intervallo aperto,  $\bar{y} \in I$ ,  $f \in C^1(I)$ ,  $f(\bar{y}) = 0$ ,  $f'(\bar{y}) \neq 0$ . Allora:

- i) se  $f'(\bar{y}) < 0$ ,  $\bar{y}$  è asintoticamente stabile;
- ii) se  $f'(\bar{y}) > 0$ ,  $\bar{y}$  è instabile.

## 2. Sistemi autonomi lineari e proprietà di stabilità

Si chiama sistema autonomo un sistema in cui  $\mathbf{f}$  non dipende esplicitamente da  $t$ , cioè è della forma

$$(A4) \quad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

Si osservi che se  $\bar{\mathbf{y}}$  è punto di equilibrio, il sistema (A4) può scriversi nella forma

$$\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{y}}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{z}(t))$$

dove  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}$ .

Pertanto, ad ogni soluzione **di equilibrio**  $\bar{\mathbf{y}}$  del sistema (A4) corrisponde la soluzione di equilibrio  $\mathbf{0}$  del sistema  $\mathbf{z}' = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t) + \bar{\mathbf{y}}) \equiv \mathbf{g}(\mathbf{z}(t))$ . Quindi, da questo momento in poi si assumerà che  $\mathbf{0}$  sia il punto di equilibrio di cui studiare le proprietà di stabilità.

Si consideri il caso bidimensionale. In forma scalare, (A4) si scrive:

$$(A5) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

dove  $f, g \in C^1(D)$ , con  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ . Queste ipotesi sono necessarie per garantire l'esistenza e l'unicità per la soluzione del problema di Cauchy per i seguenti dati iniziali

$$(A6) \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{con } (x_0, y_0) \in D$$

Nel caso lineare, il sistema (A5) si scrive

$$(A7) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

e ammette la seguente matrice rappresentativa  $\mathbf{A}$

$$(A8) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Si supponrà che  $\det \mathbf{A} = ad - bc \neq 0$  in modo che l'origine sia l'unico stato di equilibrio del sistema. Si osservi che un'equazione del secondo ordine lineare, omogenea e a coefficienti costanti  $x'' = Ax' + Bx$  può essere riscritta nella forma del sistema (A7)

$$(A9) \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = Ay + Bx \end{cases}$$

Viceversa al sistema (A7) corrisponde sempre un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti. Infatti, andando a derivare la seconda equazione di (A7) si ha

$$y'' = cx' + dy'$$

e sostituendo in quest'ultima equazione  $x'$  e  $y'$  dati da (A7) si ottiene:

$$y'' = c(a + d)x + (cb + d^2)y$$

Ricavando dalla seconda equazione di (A7)  $cx = y' - dy$  e sostituendola nella precedente, abbiamo infine:

$$y'' = (a + d)y' - (cb - ad)y = (\text{Tr}\mathbf{A})y' - (\det\mathbf{A})y$$

Le soluzioni di questa equazione sono esponenziali  $e^{\lambda t}$  con  $\lambda$  soluzione dell'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda - (cb - ad) = 0$$

che si può scrivere nella forma:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - cb = 0$$

pertanto  $\lambda$  è un autovalore della matrice  $\mathbf{A}$ . Se  $\mathbf{h}$  è l'autovettore corrispondente, la soluzione del sistema (A7) è  $\mathbf{h}e^{\lambda t}$ . Infatti, dalla definizione di autovalore  $\mathbf{A}\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$ , si ha quindi:

$$\lambda\mathbf{h}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{h}e^{\lambda t}$$

la quale, ponendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{h}e^{\lambda t}$$

può essere riscritta nella forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{h}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{h}e^{\lambda t} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Pertanto,  $\mathbf{h}e^{\lambda t}$  è soluzione di (A7).

Si consideri il sistema (A7) e si indichino con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  gli autovalori di  $\mathbf{A}$  (soluzioni dell'equazione caratteristica), allora sono possibili tre casi

- i)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono reali e distinti;
- ii)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono reali e coincidenti;
- iii)  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complessi e coniugati.

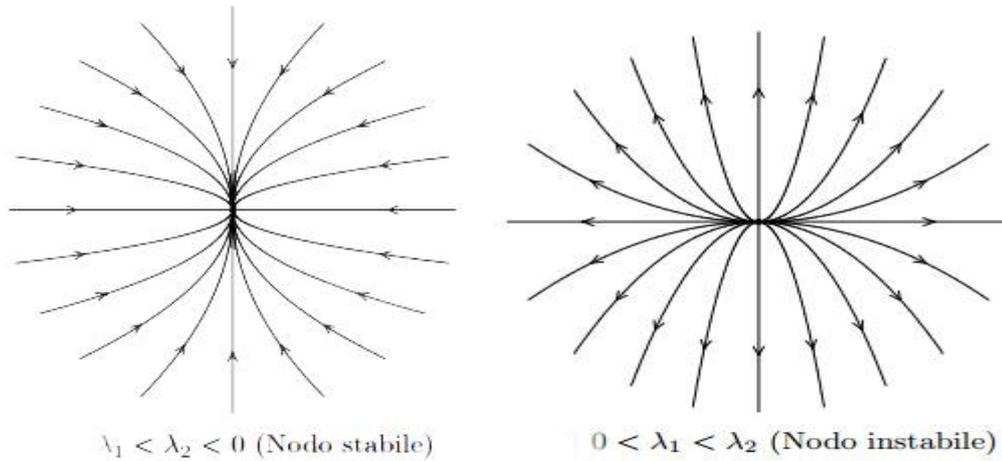
Caso i): Autovalori reali e distinti.

Il sistema possiede due soluzioni linearmente indipendenti,  $\mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t}$  e  $\mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t}$ , dove  $\mathbf{h}^1$  e  $\mathbf{h}^2$  sono autovettori reali di  $\mathbf{A}$ . Ogni soluzione sarà della forma

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c_1 \mathbf{h}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{h}^2 e^{\lambda_2 t}$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti arbitrarie.

Inoltre, se  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , l'origine è globalmente asintoticamente stabile (ogni soluzione che parte da un punto qualsiasi dello spazio delle fasi si avvicina indefinitamente all'origine). Se invece  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , l'origine è instabile. In questi casi l'origine è un **nodo stabile o instabile**, rispettivamente.



Caso ii): **Autovalori reali e coincidenti.**

Sia  $\lambda$  autovalore doppio della matrice  $\mathbf{A}$ . La soluzione generale del sistema è della forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Se  $\lambda < 0$ , l'origine è globalmente asintoticamente stabile. Se invece  $\lambda > 0$ , l'origine è instabile.

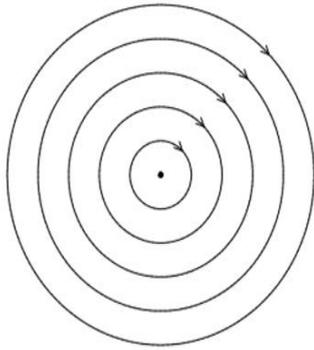
Caso iii): **Autovalori complessi coniugati.**

Siano  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  gli autovalori di  $\mathbf{A}$ . I corrispondenti autovettori possono essere scelti in modo da essere anch'essi complessi coniugati; si ottiene così la coppia di soluzioni linearmente indipendenti:

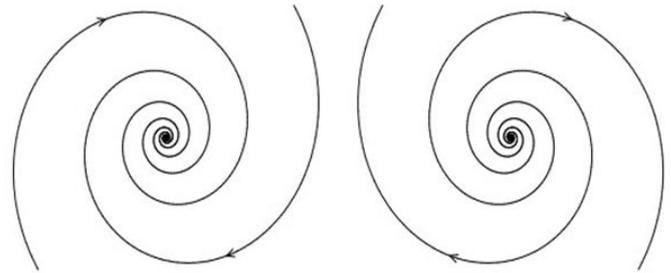
$$\mathbf{h} e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad \bar{\mathbf{h}} e^{(\alpha-i\beta)t}$$

A seconda dei valori di  $\alpha$ , si avrà:

- 1)  $\alpha=0$  (autovalori immaginari puri). L'origine è stabile (ma non asintoticamente stabile), le traiettorie sono delle curve chiuse;
- 2)  $\alpha < 0$ . L'origine è globalmente asintoticamente stabile. Le traiettorie si avvicinano indefinitamente all'origine con andamento a spirale. L'origine viene anche detta *fuoco stabile*.
- 3)  $\alpha > 0$ . L'origine è instabile e le traiettorie si allontanano da essa con andamento a spirale. L'origine è anche detta *fuoco instabile*.



**Figura** L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori puramente immaginari. Si dice che si ha un *centro*.



(a) **Fuoco stabile**

(b) **Fuoco instabile**

**Figura** L'andamento delle orbite nel piano di fase nel caso di autovalori complessi coniugati con parte reale non nulla. Si dice che si ha un *fuoco*.

Per i sistemi lineari autonomi di ordine  $n$ , lo studio del comportamento delle orbite intorno all'origine (punto di equilibrio) è molto complesso. Ci limitiamo a riportare, senza dimostrazione, il seguente teorema:

**Teorema: Stabilità per sistemi  $n$ -dimensionali:** Indichiamo con  $\lambda_j$  per  $j=1,\dots,k$  gli autovalori distinti della matrice  $\mathbf{A}$  di ordine  $n$ . allora

- 1) l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se e solo se  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  per  $j = 1, 2, \dots, k$ . La stabilità è globale in  $\mathbb{R}^n$ .
- 2) L'origine è stabile ma non asintoticamente se e solo se  $\text{Re}(\lambda_j) \leq 0$  e tutti gli autovalori con parte reale nulla sono regolari (cioè la dimensione dell'autospazio è uguale alla molteplicità dell'autovalore).
- 3) L'origine è instabile negli altri casi.

### 3. Stabilità per sistemi autonomi non lineari

Per un sistema lineare autonomo, il teorema enunciato nel paragrafo precedente risolve completamente il problema dello studio delle orbite attorno all'origine (punto di equilibrio). Se il sistema non è lineare, lo studio diventa più complesso.

Si potrebbe pensare di procedere con la sostituzione del sistema originario con un sistema lineare che lo approssimi, utilizzare poi la teoria lineare vista in precedenza e cercare di ricavare informazioni sul sistema non lineare. In generale, questa approssimazione (*linearizzazione*) vale solo nell'intorno del punto di equilibrio considerato e quindi le informazioni a carattere globale della teoria lineare valgono solo localmente e solo nei casi di stabilità asintotica e di instabilità.

Si consideri un sistema autonomo  $n$ -dimensionale

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

con  $\mathbf{f} \in C^1(D)$ ,  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e tale che  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Per la discussione che segue è necessario che la matrice jacobiana di  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{0}$ , che indichiamo con  $\mathbf{Df}(\mathbf{0})$ , sia non singolare, cioè è necessario che abbia determinante diverso da zero. Quest'ipotesi, tra l'altro, assicura che  $\mathbf{0}$  sia un punto di equilibrio isolato, ovvero che esista un intorno di  $\mathbf{0}$  in cui non vi siano altri punti di equilibrio del sistema.

Essendo  $\mathbf{f} \in C^1(D)$ , si può scrivere:

$$f(\mathbf{y}) = Df(\mathbf{0})\mathbf{y} + g(\mathbf{y})$$

dove  $g(\mathbf{y}) = o(|\mathbf{y}|)$  per  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$ . Si ponga  $\mathbf{A} = Df(\mathbf{0})$  e si consideri il seguente sistema lineare:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

che prende il nome di sistema linearizzato (in  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ).

Il seguente teorema, di cui viene riportato solo l'enunciato, è un fondamentale risultato per lo studio della stabilità degli equilibri dei sistemi non lineari:

**Teorema di Stabilità Lineare**

- 1) Se  $\mathbf{0}$  è asintoticamente stabile per il sistema linearizzato, allora lo è anche per il sistema non lineare;
- 2) Se esiste un autovalore di  $\mathbf{A}$  con parte reale positiva, allora il punto  $\mathbf{0}$  è instabile per il sistema non lineare.

## Bibliografia

- [1] L.B. Leopold, "Downstream change of velocity in rivers", American Journal of Science (1953).
- [2] A. Romano, A. Marasco, "Continuum mechanics using Mathematica. Fundamentals, Methods and applications", (Second Edition, 2014) Birkhauser.
- [3] M. Bramanti, C. Pagani, S. Salsa, "Analisi Matematica 2", Zanichelli (2008).
- [4] M. Hirsch, S.Smale, R.L. Devaney, "Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos", Elsevier (Second Edition, 2004).
- [5] A. Marasco, L. Ferrara, A. Romano, Modeling Eutrophic Lakes: from Mass Balance Laws to Ordinary Differential Equations, to appear, 2017.

### *Ringraziamenti*

*Questo lavoro non avrebbe mai visto la luce senza la preziosa guida della Professoressa Addolorata Marasco, alla quale vanno la mia gratitudine e una sincera riconoscenza.*

*Desidero inoltre ringraziare la mia famiglia. I miei genitori, le mie sorelle, mio cognato, nessuno escluso. L'uomo che sono oggi è in gran parte merito loro.*

*I miei colleghi e amici, Vittorio e Marzia, che nel difficile percorso degli studi hanno saputo aiutarmi nei modi più disparati e nei momenti più disperati, infondendomi forza e coraggio.*

*Ancora, i miei amici di lunga data: Andrea, Maria Pia, Valeria, Francesco. Una seconda famiglia nella quale ho spesso trovato un porto sicuro dove rifugiarmi e alla quale sono legati alcuni dei momenti più belli che io abbia mai vissuto.*

*I miei fratelli "acquisiti" nel tempo, Davide, Luigi e Ferdinando: il loro modo di supportarmi e sopportarmi è la ragione per cui ho motivo di credere che sia una fortuna averli come amici.*

*Ilenia, che negli anni ha saputo vedere quanto di buono ci fosse in me. Forse non lo sa, ma lei è per me una fonte di ispirazione.*

*Dedico questo lavoro a mio nonno, perché so che lo avrebbe reso felice.*