

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

L’approccio standard alla quantizzazione della gravità e la funzione d’onda dell’universo

Relatori:

Prof. Fedele Lizzi
Dott. Orlando Luongo

Candidato:

Oriana D’Angola
Matricola N85000387

A.A. 2015/2016

Indice

1	Il formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano	5
1.1	Introduzione al formalismo Lagrangiano	5
1.1.1	Le equazioni di Lagrange	5
1.1.2	Le equazioni di Lagrange per sollecitazioni conservative	7
1.2	Il formalismo Hamiltoniano	7
1.2.1	Le equazioni di Hamilton	7
2	Dalla meccanica quantistica alla relatività speciale	11
2.1	I postulati della meccanica quantistica	12
2.2	I postulati della relatività speciale	14
2.2.1	Le trasformazioni di Lorentz	14
2.3	I quadrivettori e l'approccio tensoriale	16
2.4	Il problema del tempo	17
3	Dalla relatività speciale alla relatività generale	19
3.1	Il principio di Equivalenza	19
3.2	Il tensore metrico e i simboli di Christoffel	20
3.3	Dal tensore di Riemann al tensore di Einstein	21
3.4	Le equazioni di Einstein	22
4	L'approccio Wheeler–DeWitt	25
4.1	La formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale	25
4.2	L'equazione di Wheeler–DeWitt e il Superspazio	29
4.3	Il problema del tempo in relatività quantistica	33

Introduzione

Verso la fine del XIX e l'inizio del XX secolo la fisica classica ha subito una forte crisi sfociata nella formulazione della meccanica quantistica e della teoria della relatività (speciale e generale). L'approccio moderno alla fisica non può prescindere da queste due teorie, che rappresentano certamente due teorie portanti dell'attuale ricerca scientifica internazionale. Dopo oltre cento anni dalla formulazione della relatività generale, tuttavia, non esiste ancora un modello definitivo che incorpori l'approccio della meccanica quantistica nell'ambito della relatività generale. Non esiste, cioè, una teoria quantistica della gravità che possa considerarsi definitiva, ossia uniformemente accettata dalla comunità scientifica. Vi è però un gran numero di teorie e modelli che tentano di risolvere i problemi legati alla quantizzazione della gravità. Poiché la teoria quantistica è una teoria formulabile solo attraverso l'approccio Hamiltoniano, fra tutti i modelli di gravità quantistica, probabilmente, il modello più semplice è quello che fa uso della cosiddetta quantizzazione canonica della gravità, attraverso lo splitting $3+1$ in cui è possibile definire una teoria Hamiltoniana della gravità e, successivamente, quantizzarla. Ciò che si ottiene è il ben noto modello di Wheeler-DeWitt, in cui si definisce il concetto di minisuperspazio e di funzione d'onda dell'universo. Il presente lavoro di tesi si propone di formulare l'approccio standard alla quantizzazione canonica. In altre parole, siamo interessati a sviluppare i passi principali che portano alla formulazione di una teoria quantistica della gravità attraverso l'approccio di Wheeler-DeWitt. Per far ciò nel primo capitolo riassumeremo i tratti salienti della teoria Lagrangiana e della teoria Hamiltoniana. Questi rudimenti ci serviranno successivamente al fine di formulare in modo esplicito la quantizzazione canonica della gravità. Il secondo capitolo verterà sullo studio della meccanica quantistica e della relatività speciale, che fungeranno da supporto verso la formulazione della moderna interpretazione della gravità, come teoria metrica. Infatti, nel capitolo 3 discuteremo la teoria della relatività generale, sulla base dei postulati della relatività speciale e mediante l'uso del principio di equivalenza. Nel capitolo successivo svilupperemo l'approccio Hamiltoniano alla teoria della relatività ed illustreremo in dettaglio la decomposizione $3+1$, tramite la quale riusciremo a scrivere un primo esempio di teoria Hamiltoniana della gravità. In questo senso, unificheremo le conoscenze che abbiamo sviluppato nei capitoli precedenti e saremo in grado di formulare una quantizzazione della relatività generale mediante l'approccio di Wheeler-DeWitt, nel quale introdurremo una funzione d'onda dell'universo. Sebbene non affronteremo nello specifico le problematiche inerenti la quantizzazione canonica, mostreremo sia le principali proprietà di quest'ultima, sia le implicazioni fisiche inerenti al concetto di tempo. Termineremo il nostro lavoro evidenziando come il problema della trattazione del tempo per la quantizzazione canonica della gravità sia ancora un problema irrisolto.

Capitolo 1

Il formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano

1.1 Introduzione al formalismo Lagrangiano

In questo capitolo, vogliamo introdurre brevemente le nozioni di base del formalismo, Lagrangiano e Hamiltoniano, che ci serviranno per lo studio della decomposizione 3+1 dimensionale delle equazioni di campo di Einstein. Svolgeremo una disamina di alcuni punti principali, utili ai fini della relatività generale. In particolare, noteremo che le equazioni di Lagrange possono essere considerate come una riscrittura delle equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali. Le equazioni del moto corrispondenti assumono una forma diversa in base alla scelta del sistema di coordinate. Tali equazioni, tuttavia, preservano una forma universale che si ottiene tramite operazione di derivazione da un'unica funzione scalare, detta Lagrangiana $L = T - V$, definita dalla differenza tra l'energia cinetica T del sistema e l'energia potenziale V . Questo discorso vale sia per punti liberi sia nel caso di punti vincolati, in cui le equazioni si ottengono con un procedimento tale da eliminare automaticamente le reazioni vincolari. Come vedremo, un ulteriore pregio delle equazioni di Lagrange consiste nel mostrare immediatamente l'esistenza di leggi di conservazione, almeno in casi che presentano evidenti simmetrie. Esse, inoltre, risultano essenziali per formulare la meccanica statistica e per passare dalla meccanica classica alla meccanica quantistica. Altro aspetto, non meno rilevante, delle equazioni di Lagrange è la loro strettissima connessione con i principi variazionali. Analoghe considerazioni verranno mostrate circa le equazioni di Hamilton, che si basano sull'introduzione di una nuova funzione, detta Hamiltoniana, definita come trasformata di Legendre della funzione Lagrangiana. Di seguito, analizzeremo per prima cosa le equazioni di Lagrange e studieremo le conseguenze che esse hanno per sollecitazioni conservative. Svilupperemo successivamente il formalismo Hamiltoniano e le corrispondenti equazioni del moto dette equazioni canoniche di Hamilton.

1.1.1 Le equazioni di Lagrange

Consideriamo un sistema S di N sistemi fisici vincolati, soggetto alla sollecitazione attiva Σ^a , nonché alla sollecitazione vincolare Σ^ν imposta dai vincoli. Con il termine **vincolo** si intende una qualunque limitazione imposta a priori alle posizioni e agli atti di moto del sistema, la quale si esprime attraverso relazioni del tipo

$$\begin{cases} f_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{6N}, t) \leq 0, \\ f_m(\lambda_1, \dots, \lambda_{6N}, t) \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

con $m < 6N$. Nel nostro caso, tuttavia, vale l'uguaglianza stretta poiché consideriamo vincoli olonomi bilaterali. Supponiamo che le f_i siano di classe C^1 in un dominio $D \in \mathbb{R}^{6N}$ e che m sia il rango della matrice jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_j} \right), i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, 6N, \quad (1.2)$$

in tutti i punti di D . Se valgono le ipotesi (1.1) e (1.2), possiamo affermare che non tutti i parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_{6N}$ sono indipendenti. Di tali parametri, che prendono il nome di **gradi di libertà**, soltanto n possono essere fissati arbitrariamente in accordo con il fatto che la presenza dei vincoli riduce la mobilità di S . In luogo delle variabili $\lambda_1, \dots, \lambda_{6N}$, è possibile utilizzare una qualsiasi altra $n - pla$ di variabili $q_1, \dots, q_n$ legate alle prime da relazioni invertibili

$$\lambda_i = \lambda_i(q_1, \dots, q_n), i = 1, \dots, n.$$

Questi nuovi ed arbitrari parametri prendono il nome di **coordinate lagrangiane** di S . Per lo studio del moto di S , ci serviamo delle equazioni cardinali della meccanica applicate a ciascun corpo di S :

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_{G_i} = \mathbf{R}_i^a + \mathbf{R}_i^v, \quad (1.3)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_{G_i} = \mathbf{M}_{G_i}^a + \mathbf{M}_{G_i}^v, \quad (1.4)$$

$\forall i = 1, \dots, n$, dove le m_i rappresentano le masse, $\mathbf{r}$ è il vettore posizione, $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}$ il risultante e il momento risultante delle reazioni attive e vincolari e $\mathbf{K}$ è il momento angolare. Queste equazioni equivalgono ad un sistema di $6N$ equazioni scalari in cui figurano come incognite le $6N$ componenti dei risultanti e dei momenti delle reazioni vincolari, agenti su ciascun sistema fisico, nonché i parametri effettivamente necessari a determinare il moto di S ossia le coordinate Lagrangiane $q_1(t), \dots, q_n(t)$. Apparentemente, tale sistema non determina univocamente il moto di S in quanto presenta un numero di incognite, pari a $6N + n$, superiore rispetto alle equazioni di cui disponiamo. D'Alembert e Lagrange, tuttavia, hanno provato che tenendo conto della natura dei vincoli all'interno delle due equazioni cardinali il sistema risultante conduce ad una condizione priva delle reazioni vincolari, che equivale ad un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine, di forma normale, nelle incognite $q_1(t), \dots, q_n(t)$. Tale sistema è rappresenato dalle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h(q, \dot{q}, t), \quad (1.5)$$

$\forall h = 1, \dots, n$ laddove le

$$Q_h(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^s \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_h}, \quad (1.6)$$

prendono il nome di **componenti Lagrangiane della sollecitazione attiva** e rappresentano la parte della sollecitazione effettivamente attiva, tenuto conto dei vincoli mentre

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \rho \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i dl, \quad (1.7)$$

rappresenta l'energia cinetica del sistema in esame.

1.1.2 Le equazioni di Lagrange per sollecitazioni conservative

Una sollecitazione attiva Σ^a agente su un sistema S di corpi rigidi vincolati a vincoli olonomi, bilaterali, lisci e indipendenti dal tempo, si dice **conservativa** se essa è posizionale cioè se dipende soltanto dalle coordinate Lagrangiane $(q_1, \dots, q_n)$ e se esiste una funzione di classe C^1 , $U(q_1, \dots, q_n)$, con le sue derivate prime, detta **energia potenziale** tale che

$$Q_h(q) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q_h}. \quad (1.8)$$

In tale ipotesi le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial}{\partial q_h} (T - U) = 0, \quad (1.9)$$

$\forall h = 1, \dots, n$. Inoltre, poiché si ha

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} = 0, \quad (1.10)$$

le (1.9) possono porsi nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0, \quad (1.11)$$

dove la funzione $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ è detta **funzione di Lagrange** o **Lagrangiana** del sistema S . Tale funzione determina l'intera dinamica del sistema S .

1.2 Il formalismo Hamiltoniano

Il formalismo Hamiltoniano fu introdotto da Hamilton per l'analisi dei sistemi ottici e successivamente fu esteso alla meccanica. E esso, rendendo più agevole lo studio del moto di un sistema meccanico vincolato, fu riconosciuto come una formulazione della meccanica molto più potente di quella Lagrangiana in quanto consente di pervenire alla formulazione e alla successiva generalizzazione dell'energia del sistema.

Introduciamo uno strumento geometrico utile nella deduzione della forma Hamiltoniana delle equazioni del moto: **la trasformata di Legendre**. Supponiamo assegnata una funzione $f: U \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$ dove $U \subset \mathbb{R}$ è un aperto e supponiamo che la funzione sia convessa, ovvero che sia di classe C^2 e che valga $f''(x) > 0$ in U . Preso un punto $x \in U$ si definisce $p = f'(x)$ e si osserva che questa relazione può essere invertita, grazie alla convessità di $f(x)$. Risulta, dunque, definita in modo univoco una funzione $x(p)$. Si traccia, poi, la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $(x, f(x))$. Si definisce, infine, la **trasformata di Legendre** di $f(x)$ come l'ordinata all'origine, di questa retta, cambiata di segno:

$$g(p) = [px - f(x)]|_{x=x(p)}. \quad (1.12)$$

Una rappresentazione di tale trasformata è riportata in Fig. 1.

1.2.1 Le equazioni di Hamilton

Il formalismo Hamiltoniano parte dall'idea di trasformare il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in forma normale di Lagrange, in un sistema equivalente del primo ordine, anch'esso di forma normale. Hamilton adottò come nuove variabili i **momenti cinetici** ossia le funzioni

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(q, \dot{q}_h, t), \quad (1.13)$$

$\forall h = 1, \dots, n$. Se osserviamo che il determinante hessiano:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0, \quad (1.14)$$

inferiamo che le p_h possono essere localmente invertibili e riscrivibili nella forma

$$\dot{q}_h = u_h(q, p, t), \quad (1.15)$$

$\forall h = 1, \dots, n$. Per ricercare la forma assunta dalle equazioni di Lagrange con l'introduzione delle nuove incognite, osserviamo che esse possono scriversi

$$\dot{p}_h = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right)_{\dot{q}=u(q,p,t)}, \quad (1.16)$$

dove, al secondo membro, ogni variabile $\dot{q}_h$ è sostituita da $u_h(q, p, t)$. Le equazioni di Lagrange equivalgono, quindi, al seguente sistema di equazioni differenziali di forma normale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{q}_h = u_h(q, \dot{q}, t) \\ \dot{p}_h = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right)_{\dot{q}=u(q,p,t)} \end{cases}$$

$\forall h = 1, \dots, n$.

Tale sistema può porsi in una forma particolarmente simmetrica introducendo la **funzione di Hamilton** o l'**Hamiltoniana** del sistema S

$$H(q, p, t) = [p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)]|_{\dot{q}=u(q,p,t)}, \quad (1.17)$$

che per costruzione per quanto visto nell'equazione è la trasformata di Legendre della Lagrangiana. Derivando tale funzione rispetto alle q e rispetto alle p perveniamo alle **equazioni canoniche di Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}(q, p, t) \\ \dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h}(q, p, t) \end{cases}$$

$\forall h = 1, \dots, n$. Tale sistema è del primo ordine, in forma normale nelle incognite $q(t)$, $p(t)$ le quali definiscono ad ogni istante la configurazione meccanica in esame. Le $2n$ variabili (q, p) definiscono lo **stato** del sistema e la regione M^* di $\mathbb{R}^{2n}$ in cui esse variano viene denominata **spazio delle fasi** o **degli stati**. Inoltre, se la funzione di Hamilton non dipende esplicitamente dal tempo, coincide con l'energia totale del sistema, in quanto si ha

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (1.18)$$

dove abbiamo tenuto conto della cancellazione di termini dovuta alla definizione stessa dei momenti. L'espressione della seconda riga deve essere confrontata con il differenziale dell'Hamiltoniana a sostituzione effettuata, e dunque pensata come funzione delle sole variabili q, p, t che è

$$dH = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (1.19)$$

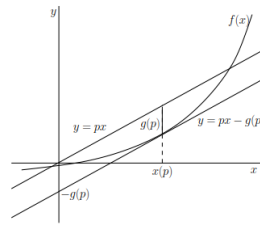


Figura 1: Interpretazione geometrica della trasformata di Legendre della funzione Lagrangiana.

Da ciò si vede che dH è l'energia del sistema se e solo se

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0. \quad (1.20)$$

Capitolo 2

Dalla meccanica quantistica alla relatività speciale

In questo capitolo forniremo le nozioni fondamentali su cui si basa la teoria quantistica considerando, in particolare, l'inevitabile indeterminazione con cui tale teoria è in grado di fornire i risultati sperimentali. La meccanica quantistica, infatti, tipicamente riesce a stabilire una **probabilità** associata alla determinazione delle proprietà di una particella in seguito ad una osservazione. Descriveremo, inoltre, il passaggio dalla meccanica quantistica alla relatività speciale, della quale forniremo i postulati e ne svilupperemo le caratteristiche in termini tensoriali. Infine, introdurremo uno dei principali problemi cui si va incontro in tale passaggio: **il problema del tempo**. La formulazione Hamiltoniana (o canonica) della Meccanica è alla base degli sviluppi della Meccanica Statistica, della Meccanica Quantistica e degli sviluppi più recenti della teoria dei Sistemi Dinamici. Gli strumenti utili ai fini dello sviluppo successivo della teoria Hamiltoniana sono da un lato l'algebra delle parentesi di Poisson, che nasce in modo spontaneo dalla ricerca di integrali primi, dall'altro il gruppo delle trasformazioni canoniche, che si può costruire partendo dalla ricerca di una classe di trasformazioni che mantenga invariata la forma Hamiltoniana delle equazioni. La ricerca di integrali primi è interessante in quanto la loro conoscenza consente immediatamente di ricavare informazioni qualitative sulla dinamica del sistema. A questo scopo, le parentesi di Poisson consentono di ricondurre la ricerca di integrali primi alla soluzione di un'equazione alle derivate parziali. Inoltre, grazie alle parentesi di Poisson l'insieme delle variabili dinamiche risulta dotato di una struttura algebrica profonda ed interessante, che trova poi notevoli analogie nella Meccanica Quantistica. Il ricorso alle trasformazioni canoniche ha lo scopo di porre il sistema di equazioni in una forma che consenta di pervenire in modo semplice alla soluzione. Il risultato più rilevante in quest'ambito è la possibilità di costruire una trasformazione canonica a partire da un'unica funzione, detta funzione generatrice. Quest'ultimo fatto conduce in modo spontaneo alla scrittura dell'equazione di Hamilton–Jacobi: si tratta di un'equazione che, ove risolta, fornisce la generatrice di una trasformazione che pone il sistema in una forma direttamente integrabile. La connessione tra la conoscenza di integrali primi e l'integrazione mediante trasformazioni canoniche è stabilita dal teorema di Liouville: la soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi può ricondursi ad una semplice operazione di quadratura quando si conosca un numero sufficiente di integrali primi del sistema.

La meccanica classica, sin dai tempi di Newton, è stata progressivamente sviluppata e applicata a una categoria sempre più ampia di sistemi dinamici. La necessità di distaccarsi dalla meccanica classica fu suggerita da diversi risultati sperimentali tra cui la famosa catastrofe dell'ultravioletto che enfatizzò la necessità di introdurre scambi di energia

quantizzata. Dall'esperienza di Planck è possibile inferire una ulteriore illustrazione dell'inadeguatezza della meccanica classica nell'ambito della spiegazione del comportamento della luce. I fenomeni di interferenza e diffrazione possono essere analizzati attraverso una teoria ondulatoria, mentre, l'emissione fotoelettrica e la diffusione della luce da parte di elettroni liberi, prevedono che la luce stessa si comporti come composta da particelle. Questi corpuscoli, detti fotoni, hanno un impulso e un'energia ben definiti e presentano la stessa individualità fisica degli elettroni o di qualunque altra particella. I lavori di de Broglie e l'esperienza hanno mostrato che questo comportamento anomalo non è peculiare solo della luce ma è del tutto generale: **tutte le particelle materiali possiedono delle proprietà ondulatorie che si possono rilevare in condizioni opportune.**

2.1 I postulati della meccanica quantistica

Per descrivere la meccanica quantistica, scegliamo l'approccio assiomatico, enunciando di seguito alcuni postulati fondamentali dai quali l'approccio quantistico segue.

1) Ad ogni sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ e lo stato del sistema è rappresentato da un vettore $|\Psi\rangle \in \mathbb{H}$ a ogni dato istante t_0 . Poiché $\mathbb{H}$ è uno spazio vettoriale, una combinazione lineare di vettori di stato è un vettore di stato.

2) Ogni grandezza fisica misurabile $\mathbb{O}$ è descritta da un **operatore** $\hat{O}$ che agisce su $\mathbb{H}$. Tale operatore rappresenta la generica **osservabile** e in meccanica quantistica diremo che una osservabile fisica è associata ad un operatore autoaggiunto, che gode della proprietà $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$. A differenza della meccanica classica, la meccanica quantistica descrive lo stato di un sistema tramite vettori e le grandezze fisiche tramite operatori.

3) L'unico risultato possibile per una misura di una grandezza fisica $\mathbb{O}$ è uno degli autovalori del corrispondente operatore lineare osservabile $\hat{O}$. Una misura di $\mathbb{O}$ fornisce sempre un valore reale, poiché per definizione, $\hat{O}$ è autoaggiunto. Inoltre, se lo spettro di $\hat{O}$ è discreto, i possibili valori ottenibili da una misura di $\mathbb{O}$ sono quantizzati.

4) Quando la grandezza fisica $\mathbb{O}$ è misurata su un sistema nello stato normalizzato $|\Psi\rangle$, supponendo di aver risolto il problema agli autovalori $\hat{O}|u_n\rangle = \Theta_n|u_n\rangle$, la probabilità $P(\Theta_n)$ di ottenere come risultato l'autovalore non degenere Θ_n dell'osservabile corrispondente $\hat{O}$ è:

$$P(\Theta_n) = |\langle u_n | \Psi \rangle|^2, \quad (2.1)$$

dove $|u_n\rangle$ è l'autovettore normalizzato di $\hat{O}$ relativo all'autovalore Θ_n . Tale postulato, definito nel caso di spettro discreto non degenere, continua ad essere valido anche nel caso di spettro continuo a patto di considerare la probabilità $dP(\alpha)$ di ottenere come risultato un valore compreso tra α e $\alpha + d\alpha$ pari a

$$dP(\alpha) = p(\alpha)d\alpha = |\langle v_\alpha | \Psi \rangle|^2 d\alpha \quad (2.2)$$

dove v_α è l'autovettore corrispondente all'autovalore α dell'osservabile $\hat{O}$ associato a $\mathbb{O}$, e $p(\alpha)$ è detta **densità di probabilità**.

5) Nel caso in cui si abbia spettro degenere, quando la grandezza fisica $\mathbb{O}$ è misurata su un sistema nello stato normalizzato $|\Psi\rangle$, la probabilità $P(\Theta_n)$ di ottenere come risultato

l'autovettore Θ_n del corrispondente osservabile $\hat{O}$ è:

$$P(\Theta_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \Psi \rangle|^2 \quad (2.3)$$

dove g_n è il grado di degenerazione di Θ_n e $|u_n^i\rangle$ con $i = 1, \dots, g_n$ è un insieme ortonormale di vettori che forma una base dell'autospazio associato all'autovalore Θ_n di $\hat{O}$.

6) Se la misura di una grandezza fisica $\mathbb{O}$ sul sistema nello stato $|\Psi\rangle$ fornisce come risultato Θ_n , lo stato del sistema immediatamente successivo alla misura è la proiezione normalizzata di $|\Psi\rangle$ sull'autospazio associato a Θ_n :

$$|\bar{\Psi}\rangle = \frac{P_n|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}}. \quad (2.4)$$

7) L'evoluzione temporale di un vettore di stato $|\Psi(t)\rangle$ è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (2.5)$$

dove $H(t)$ è l'osservabile associato all'energia totale del sistema.

Affinché valga l'interpretazione probabilistica dell'equazione di Schrödinger è necessario che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = 1. \quad (2.6)$$

Ciò, dal punto di vista matematico, è equivalente a richiedere l'appartenenza della Ψ ad $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$. In generale, le grandezze che caratterizzano una distribuzione di probabilità sono i valori medi, nonché i vari momenti di ordine n . Definiamo il **valor medio della posizione** $\langle \vec{x} \rangle$ sullo stato Ψ la quantità $\langle \Psi | \vec{x} | \Psi \rangle$. Per caratterizzare una determinata particella, tuttavia, è necessario anche il **valor medio dell'impulso** $\langle \vec{p} \rangle_\Psi$. Mentre la posizione è un operatore moltiplicativo, per l'impulso vale:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}.$$

Tale associazione prende il nome di **principio di corrispondenza di Bohr**. Inoltre, definiamo **commutatore** di $\hat{x}$ e $\hat{p}$ la quantità

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}.$$

Se il commutatore di due generici osservabili $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è uguale a zero, le due grandezze si dicono **compatibili**, altrimenti sono **incompatibili**. La quantità $[\hat{x}, \hat{p}]$ si dimostra essere pari a $i\hbar$, dunque le due grandezze sono incompatibili. La non commutatività di due generici osservabili è strettamente legata alla cosiddetta **relazione di indeterminazione di Heisenberg**

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle. \quad (2.7)$$

Tale disuguaglianza, esprime l'impossibilità, in meccanica quantistica, di misurare con precisione arbitraria due osservabili contemporaneamente. In particolare, nel caso di $\hat{x}$ e $\hat{p}$, non è possibile stimare con la stessa precisione le posizioni e le velocità di una determinata particella, allo stesso istante t .

2.2 I postulati della relatività speciale

Contestualmente alla formulazione della meccanica quantistica, l'osservazione di fenomeni che coinvolgevano la luce condusse al problema della misura dell'etere, ossia del presunto mezzo materiale nel quale la luce avrebbe dovuto propagarsi. Michelson, nel 1881, sviluppò un famoso esperimento in cui mostrò che la velocità con cui la luce proveniente dal Sole arriva sulla Terra, è la stessa sia quando la luce procede parallelamente al moto della Terra rispetto al Sole, sia quando essa viene deviata ortogonalmente a tale moto. La precisione dell'esperimento è stata sufficiente a mettere in evidenza l'effetto di somma delle velocità previsto da Galileo; effetto che non si dimostrava a livello sperimentale. L'atteggiamento generale dei fisici dell'epoca fu quello di considerare il suddetto etere che avrebbe pervaso uniformemente lo spazio vuoto, individuando fra tutti i sistemi di riferimento inerziali un sistema privilegiato, quello in quiete rispetto all'etere stesso. In questo schema la velocità della luce aveva valore pari a c rispetto all'etere e i risultati dell'esperimento di Michelson potevano essere interpretati ipotizzando una perturbazione indotta dalla Terra al suo passaggio nell'etere. A questo punto, Einstein nel 1905, propose la sua **teoria della relatività ristretta**, basata su una riaffermazione del principio di relatività enunciato da Galileo, con l'estensione di tale principio a tutti i fenomeni fisici e non solo a quelli meccanici. I principi su cui si basa la relatività ristretta sono dunque:

1) **Principio di relatività.** Qualunque esperimento fornisce gli stessi risultati quando venga eseguito in due sistemi di riferimento dotati di moti relativo traslatorio rettilineo e uniforme.

2) **Principio di costanza della velocità della luce.** La velocità c con cui si propaga un segnale luminoso è sempre la stessa, indipendentemente da quale sia il sistema di riferimento in cui ci si pone per effettuare la misura.

3) **Principio di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto.** In un sistema di riferimento inerziale, la quantità di moto totale e il momento angolare totale di un sistema fisico isolato restano costanti nel tempo.

L'assunzione del principio di costanza della velocità della luce comporta necessariamente un **riesame critico del concetto di spazio e tempo**.

2.2.1 Le trasformazioni di Lorentz

Poiché i concetti di spazio e tempo devono subire modificazioni a causa del secondo postulato, abbiamo bisogno di riconsiderare le trasformazioni di Galileo tra due o più sistemi di riferimento inerziali. Le trasformazioni di coordinate più generali tra due sistemi di riferimento inerziali Oxt e $O'x't'$ sono del tipo (per brevità esplicheremo il caso a due dimensioni)

$$\begin{cases} x' = f(x, t), \\ t' = g(x, t), \end{cases} \quad (2.8)$$

ovvero

$$\begin{cases} x = \bar{f}(x', t'), \\ t = \bar{g}(x', t'). \end{cases} \quad (2.9)$$

Se la legge del moto di un corpo in Oxt è data da

$$x = wt, \quad (2.10)$$

allora deve valere

$$x' = w't', \quad (2.11)$$

in $O'x't'$. D'altra parte se espandiamo le (2.8) in serie di potenze otteniamo:

$$\begin{cases} x' = \xi + \gamma x + \rho t + \dots, \\ t' = \tau + \eta x + \kappa t + \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

Se vogliamo che la (2.10) si trasformi in (2.11) è necessario porre a zero tutti i termini di ordine superiore al primo eventualmente presenti all'interno dello sviluppo in serie di potenze¹ ottenendo quindi:

$$\begin{cases} x' = \xi + \gamma x + \rho t, \\ t' = \tau + \eta x + \kappa t. \end{cases} \quad (2.13)$$

dove ξ e τ rappresentano rispettivamente la coordinata spaziale e temporale di O all'istante $t = 0$ osservate in $O'x't'$. Considerando nulle queste coordinate, stabiliamo di misurare il tempo e lo spazio in $O'x't'$ in modo che O e O' siano coincidenti a $t = t' = 0$. In definitiva, quindi, avremo

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \rho t \\ t' = \eta x + \kappa t \end{cases} \quad (2.14)$$

Queste equazioni possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \rho \\ \eta & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \equiv T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Notiamo che T è una matrice invertibile infatti,

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T$$

Sostituendo le espressioni (2.10) e (2.11) in (2.14) otteniamo la **legge di composizione delle velocità**

$$w' = \frac{\gamma w + \rho}{\eta w + \kappa}. \quad (2.16)$$

Sfruttando la condizione di reciprocità e supponendo che all'istante $t = 0$, quando i due sistemi sono coincidenti, si sia accesa una sorgente di luce per cui $x = ct$ e $x' = ct'$, è possibile vincolare il valore assunto dai quattro parametri $\gamma, \eta, \rho, \kappa$. In particolare si ricava $\kappa = \eta$, $\eta = -\gamma \frac{v}{c^2}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ con $\frac{v}{c} = \beta$. Reintroducendo le altre due variabili (che non sono toccate dalle trasformazioni) con $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, le **trasformazioni di Lorentz** in forma matriciale sono date da:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

che è equivalente a

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}. \quad (2.18)$$

Le trasformazioni di Galileo, dunque, rappresentano un caso particolare delle trasformazioni di Lorentz purché si considerino velocità molto minori rispetto alla velocità della luce c .

¹L'ipotesi di linearità è l'ipotesi più semplice assumibile. Attraverso una formulazione più generale, che faccia uso dell'intervallo spazio temporale si possono desumere gli stessi risultati. In relatività generale vedremo che l'ipotesi di linearità non è assolutamente necessaria.

2.3 I quadrivettori e l'approccio tensoriale

In relatività speciale, così come accade in meccanica newtoniana, le leggi fisiche devono assumere la medesima forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In tali sistemi valgono, come già detto in precedenza, le trasformazioni di Lorentz, che permettono altresì il passaggio da un sistema inerziale ad un altro.

È, dunque, lecito aspettarsi che le leggi della fisica debbano essere riscritte in termini di **equazioni covarianti**. La proprietà di covarianza, infatti, permette trasformazioni che preservano sia la forma che l'operazione di misura, nel passaggio da un sistema inerziale a un altro. Per richiedere la proprietà di covarianza è sufficiente che vi sia **invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz**. Una trasformazione di Lorentz comporta una trasformazione lineare delle quattro coordinate spazio-temporali.

Tali coordinate possono essere formalizzate mediante l'uso dei **quadrivettori**, in analogia all'analisi vettoriale classica. Nel caso in esame, diversamente dal caso classico, i quadrivettori sono definiti in uno spazio 3+1 dimensionale, detto **spazio-tempo di Minkowski**, che incorpora la coordinata tempo come quarta coordinata, oltre alle coordinate spaziali.

Un quadrivettore rappresenta un **evento** che avviene al tempo t nel punto (x, y, z) di un dato sistema di riferimento. Per l'individuazione di un determinato evento utilizziamo le posizioni:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (2.19)$$

o in forma compatta attraverso le **coordinate controvarianti**: x^μ , laddove $\mu = 0, 1, 2, 3$. Inoltre, a partire dalle considerazioni finora fatte, si nota che la quantità

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2, \quad (2.20)$$

rimane invariante nel passaggio tra due sistemi di riferimento inerziali, ossia risulta che:

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2. \quad (2.21)$$

Diremo quindi che la quantità costruita nella (2.20) è invariante sotto trasformazioni di Lorentz.

La convenzione che fa uso degli indici contravarianti può essere estesa a una ulteriore espressione di vettori nello spazio di Minkowski, mediante l'uso degli indici covarianti. Per costruire vettori covarianti, ci serviamo dell'introduzione di una metrica spazio-temporale piatta o più semplicemente di uno spazio-tempo piatto².

Introduciamo il **tensore metrico** o **metrica**, con indici **covarianti**, rispetto ai quali esso è simmetrico. Le componenti di quest'ultimo, ossia le $g_{\mu\nu}$, sono definite come segue:

$$\begin{aligned} g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} &= 1, \\ g_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Per giustificare il significato di **coordinate covarianti** x_μ , le possiamo relazionare con le già citate coordinate controvarianti mediante la relazione

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\nu \equiv (ct, -\mathbf{r}).$$

Considerando le coordinate controvarianti $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ come le componenti di un quadrivettore controvariante, la quantità³

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (2.23)$$

²Chiariremo il perché dell'aggettivo piatto quando introdurremo i concetti portanti della relatività generale.

³Adottiamo le seguenti convenzioni: un indice greco può assumere i valori 0, 1, 2, 3, mentre un indice latino può assumere i valori 1, 2, 3. La ripetizione di un indice, in forma covariante e controvariante in un prodotto, sottintende una somma rispetto ai valori che l'indice può assumere.

rappresenta la "lunghezza" (finita) del quadrivettore spazio-temporale in esame. Essa è una quantità invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Analogamente si ha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d(x^0)^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2,$$

che gode della stessa accezione della relazione precedentemente imposta, per lunghezze infinitesime.

Alla metrica $g_{\mu\nu}$ si associa il tensore metrico controvariante $g^{\mu\nu}$ in modo tale che valga la relazione

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda, \quad (2.24)$$

con

$$\delta_\nu^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = \nu, \\ 0 & \text{se } \lambda \neq \nu. \end{cases} \quad (2.25)$$

Grazie alla (2.24), inoltre, valgono le relazioni

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu,$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu.$$

Generalizziamo le trasformazioni di Lorentz in termini tensoriali: una qualsiasi trasformazione lineare omogenea del tipo

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad (2.26)$$

per la quale resti soddisfatta la condizione (2.21), è una trasformazione di Lorentz. Per garantire che le coordinate spazio e tempo restino reali, in seguito ad una trasformazione di Lorentz, è necessario che i coefficienti Λ_ν^μ siano tutti reali.

2.4 Il problema del tempo

Nel modello di Einstein della relatività speciale, spazio e tempo sono tra loro equivalenti e rappresentano coordinate quadridimensionali in uno spazio di Minkowski 3+1 dimensionale. Alla luce di ciò che abbiamo discusso introducendo i principi di base della meccanica quantistica, cosa succede al concetto di tempo, dato che la relatività lo rivoluziona così drasticamente? Poniamo, pertanto l'attenzione sul concetto di tempo ed analizziamone la sua epistemologia. In generale, prima dell'avvento della scienza moderna, il tempo rappresentava una quantità misurabile associata ad un certo tipo di moto. L'idea classica di tempo, in particolare, prevedeva che esso fosse assoluto e continuo, così come veniva considerato da Newton, che ipotizzò che esso fosse il parametro rispetto al quale si manifesta il cambiamento di una certa configurazione fisica. Ovviamente, in questa rappresentazione, il tempo è un parametro esterno rispetto ad un determinato sistema di coordinate, che con l'aggiunta dello stesso tempo assoluto, viene definito più propriamente come sistema di riferimento. In meccanica quantistica il tempo è molto diverso dallo spazio, per esempio non è possibile associarvi un operatore. Come in fisica classica, anche in meccanica quantistica il tempo è considerato come un parametro rispetto al quale è possibile caratterizzare l'evoluzione del sistema. In particolare, esso risulta la variabile indipendente che parametrizza l'evoluzione quantistica dettata dalla equazione di Schrödinger (2.5). Inoltre, l'idea di eventi che avvengono contemporaneamente svolge un ruolo cruciale in meccanica quantistica: la nozione di una misurazione effettuata in un determinato momento è un elemento

fondamentale nell'interpretazione della scuola di Copenaghen⁴. In particolare, un oggetto osservabile è tale se e solo se esso può essere misurato ad un preciso istante di tempo. D'altra parte, un insieme di eventi da misurare non ha un diretto significato fisico (non è misurabile), se non si presuppone che ogni misura abbia lo stesso calibro nella misurazione del tempo e che le misure siano il risultato di una sequenza di misurazioni effettuate in ordine di tempo. Il tempo newtoniano che appare esplicitamente all'interno dell'equazione di Schrödinger è, tuttavia, un'astrazione poiché nessun orologio fisico è in grado di fornirne una misura precisa. Il superamento del problema del tempo in ambito quantistico si ha con lo studio della meccanica quantistica relativistica e della teoria di campo. Nell'ambito della meccanica quantistica, tuttavia, in che termini possiamo conciliare il concetto di tempo relativistico con quello quantistico? La risposta verrà data quando studieremo i rudimenti della relatività generale e cercheremo una soluzione su come disaccoppiare la variabile tempo rispetto alla variabile spazio. Il modo più semplice, infatti, per trattare una delle quattro variabili dello spazio di Minkowski come parametro, in una teoria classica di campo, è quello di disaccoppiare quest'ultima, richiedendo che la covarianza generale sia persa e definendo una ipersuperficie sulla quale⁵ valgono le stesse leggi della meccanica quantistica, come se il tempo non fosse più un parametro dei quadri-vettori, così come lo abbiamo introdotto precedentemente. Svilupperemo tale formalismo quando parleremo della decomposizione 3+1 della gravità, dopo aver introdotto i rudimenti della relatività generale, nel prossimo capitolo.

⁴Altre interpretazioni, come per esempio la meccanica quantistica alla Bohm sono, per motivi di brevità, omesse in questo lavoro di tesi. In taluni casi, il concetto di tempo è modificato, ma prevalentemente esso risulta sempre il parametro che entra nelle equazioni quantistiche.

⁵E solo su quella.

Capitolo 3

Dalla relatività speciale alla relatività generale

In questo capitolo forniremo i rudimenti della relatività generale tramite i quali saremo in grado di dedurre la struttura Hamiltoniana della gravità, la sua successiva quantizzazione per giungere, infine, alla funzione d'onda dell'universo. In particolare, enunceremo il principio di equivalenza in forma debole, fondamentale nella teoria della gravità. Definiremo, inoltre, gli strumenti matematici necessari per la formulazione delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto e in presenza di materia.

La teoria della relatività generale venne pubblicata da Einstein nel 1916. Tale teoria va oltre la pura estensione della relatività speciale, infatti, la vera rivoluzione introdotta da Einstein consiste nell'aver riconosciuto che campo gravitazionale, spazio-tempo e distribuzione di materia-energia sono intimamente connessi e governati da equazioni di campo. La gravitazione newtoniana è indipendente dal tempo e ciò implica che tale interazione può propagarsi istantaneamente a tutte le distanze. Tale considerazione risulta evidentemente in contrasto con la relatività speciale, per la quale la massima velocità di propagazione delle interazioni è la velocità della luce. Nella teoria di Newton, inoltre, lo spazio ed il tempo sono strutture rigide non influenzabili dalla distribuzione delle masse. Il concetto di azione a distanza da parte di una massa gravitazionale risulta, quindi, difficile da giustificare. Geometrizzando il campo gravitazionale, cioè legando intimamente la struttura dello spazio-tempo con le sorgenti gravitazionali e considerando anche la gravitazione come un'interazione che si propaga a velocità finita, Einstein scoprì che curvatura e materia sono legate strettamente nella stessa struttura dinamica. Lo strumento matematico per tale realizzazione è il calcolo differenziale assoluto, sviluppato da Gauss, Riemann, Ricci-Cubastro, Christoffel e Levi-Civita. Tramite questo approccio matematico, tutte le nozioni del calcolo differenziale possono essere fornite su varietà qualsiasi e per trasformazioni di coordinate qualsiasi, purché non singolari. In tal modo, lo spazio-tempo non deve essere necessariamente piatto, le traiettorie estremali dei corpi possono essere geodetiche qualsiasi e la curvatura delle traiettorie dei corpi è relativa alle sorgenti gravitazionali che curvano lo spazio-tempo.

3.1 Il principio di Equivalenza

La prima formulazione del principio di equivalenza proviene dalla teoria della gravitazione studiata da Galileo e Newton; tale formulazione, detta Principio di Equivalenza in forma debole, asserisce che la “massa inerziale” m_i e la “massa gravitazionale” m_g di un qualsiasi oggetto sono equivalenti. Nella fisica newtoniana, la “massa inerziale” m_i è il coefficiente

che appare nella seconda legge di Newton: $\vec{F} = m_i \vec{a}$ dove $\vec{F}$ è la forza esercitata su una massa m_i avente accelerazione $\vec{a}$; nella Relatività Ristretta (senza gravitazione) la “massa inerziale” di un corpo appare essere proporzionale all’energia a riposo del corpo: $E = m_i c^2$. Tenendo conto dell’attrazione gravitazionale newtoniana, si introduce la “massa gravitazionale” m_g : la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi con “massa gravitazionale” m_g e M è $F = G_N m_g M / r^2$ dove G_N è la costante gravitazionale newtoniana e r la distanza tra i due corpi. Diversi esperimenti dimostrano che $m_i \equiv m_g$. L’attuale accuratezza di questa relazione è dell’ordine di $10^{-(13 \div 14)}$. Si noti che, in genere, M è considerata la massa che genera il campo gravitazionale mentre m_g è la massa della particella di prova. Il Principio di Equivalenza in forma debole implica che è impossibile distinguere gli effetti di un campo gravitazionale da quelli effettuati in un sistema uniformemente accelerato usando la semplice osservazione del comportamento di una particella in caduta libera. Il Principio di Equivalenza in forma debole può essere formulato come segue:

Se un corpo di prova non carico è posto in corrispondenza di un evento iniziale nello spazio-tempo con velocità assegnata, allora la sua conseguente traiettoria sarà indipendente dalla sua struttura interna e dalla sua composizione.

Una generalizzazione a noi utile per il prosieguo del Principio di Equivalenza in forma debole asserisce che la Relatività Ristretta è valida solo localmente.

3.2 Il tensore metrico e i simboli di Christoffel

La meccanica classica è, dunque, fondata sull’uguaglianza della massa inerziale e della massa gravitazionale. Einstein, da tale uguaglianza dedusse che gli effetti di un campo gravitazionale sono annullati all’interno di un ascensore in caduta libera che si comporta, quindi, come un sistema di riferimento inerziale. Il moto in caduta libera della particella di prova, infatti, è un moto uniforme nel sistema dell’ascensore e le sue equazioni del moto in tale sistema sono:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} = 0, \quad (3.1)$$

con

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (3.2)$$

Le (3.2) rappresentano rispettivamente l’elemento metrico spazio-temporale e la metrica di Minkowski. Le trasformazioni di coordinate

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\beta), \quad (3.3)$$

consentono il passaggio dal riferimento del laboratorio a quello inerziale. Applicando tali trasformazioni alla (3.1) e moltiplicando il risultato per $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$, otteniamo l’equazione per le geodetiche

$$\frac{d^2 \xi^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (3.4)$$

con

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (3.5)$$

Le quantità $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sono dette connessioni affini e descrivono la presenza di un campo gravitazionale. Con le trasformazioni (3.3), la metrica diventa

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.6)$$

dove

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (3.7)$$

Derivando l'Eq.(3.7) rispetto a x^λ e tenendo conto della (3.5), dopo banale algebra si possono scrivere le seguenti tre relazioni

$$g_{\mu\nu,\lambda} = g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \quad (3.8)$$

$$g_{\nu\lambda,\mu} = g_{\rho\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + g_{\rho\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (3.9)$$

$$g_{\lambda\mu,\nu} = g_{\rho\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho + g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho. \quad (3.10)$$

Sottraendo la prima delle precedenti espressioni dalla somma delle ultime due, si ricava

$$(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) = 2g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho, \quad (3.11)$$

avendo tenuto conto della simmetria delle matrici Γ rispetto allo scambio di due indici. Definendo la nuova quantità con tre indici covarianti

$$g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \{\lambda, \mu\nu\} = \{\lambda, \nu\mu\}, \quad (3.12)$$

la (3.11) diventa

$$\{\lambda, \mu\nu\} = \frac{1}{2} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (3.13)$$

L'Eq.(3.13) definisce i cosiddetti simboli di Christoffel di prima specie. Moltiplicando l'Eq (3.12) per $g^{\alpha\lambda}$ si ha

$$g^{\alpha\lambda} g_{\rho\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\rho = g^{\alpha\lambda} \{\lambda, \mu\nu\}. \quad (3.14)$$

Utilizzando, in quest'ultima relazione, la matrice inversa della metrica

$$g^{\alpha\rho} g_{\rho\beta} = \delta_\beta^\alpha, \quad (3.15)$$

si ottiene l'espressione esplicita per le affinità

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = g^{\alpha\lambda} \{\lambda, \mu\nu\} \equiv \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}, \quad (3.16)$$

dove la seconda uguaglianza definisce i simboli di Christoffel di seconda specie i quali svolgono il ruolo delle accelerazioni gravitazionali.

3.3 Dal tensore di Riemann al tensore di Einstein

Il concetto di curvatura dello spazio tempo è l'elemento di maggior rilievo nella teoria della Relatività Generale. È necessario, dunque, introdurre alcuni strumenti matematici utili per gli sviluppi successivi. Su una generica varietà M si possono considerare diversi oggetti matematici definiti unicamente attraverso la struttura della varietà stessa. Introduciamo il concetto di connessione su M . Tale connessione rappresenta il modo in cui vengono collegati gli spazi tangenti alla varietà. Una connessione lineare ∇ di classe C^r su una varietà differenziale M di classe C^k con $k \geq r + 2$ permette di associare ad ogni campo vettoriale $\mathbf{X}$ di classe C^h con $h > 1$ un campo di tensori $(1, 1)$ di classe C^{h-1} , detto derivata covariante di $\mathbf{X}$ e indicato con $\nabla \mathbf{X}$, per la quale valgono le regole di linearità e di Leibnitz. Mediante la connessione ∇ di classe C^r è possibile definire il **tensore di curvatura di Riemann** nel modo seguente.

Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ campi vettoriali di classe C^{r+1} . Definiamo, in una base di coordinate, il campo tensoriale di classe C^{r-1} di tipo $(3, 1)$

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}. \quad (3.17)$$

Il tensore di curvatura gode delle seguenti simmetrie:

$$\begin{aligned} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= -R_{\beta\nu\mu}^{\alpha}, \\ R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} + R_{\nu\beta\mu}^{\alpha} + R_{\mu\nu\beta}^{\alpha} &= 0, \\ R_{\beta\lambda\mu;\nu}^{\alpha} + R_{\beta\mu\nu;\lambda}^{\alpha} + R_{\beta\nu\lambda;\mu}^{\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

L'ultima simmetria rappresenta l'identità di Bianchi. Si definisce **tensore di Ricci** il tensore di tipo $(0, 2)$ ottenuto dalla contrazione del tensore di Riemann:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\nu}^{\mu}. \quad (3.18)$$

Si chiama, invece, **scalare di curvatura** la funzione ottenuta dalla traccia del tensore di Ricci:

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Contraendo le identità di Bianchi con il tensore metrico si ottiene, infine il **tensore di Einstein**

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.20)$$

che soddisfa identicamente la relazione

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0. \quad (3.21)$$

3.4 Le equazioni di Einstein

Nello scrivere le equazioni differenziali del campo gravitazionale, nel caso più semplice dello spazio vuoto, abbiamo, almeno a “priori”, una grande arbitrarietà; usando criteri di senso fisico, vediamo, però, che la scelta da fare risulta praticamente unica. Infatti, equazioni di campo accettabili devono essere

1. scritte in forma tensoriale per obbedire al principio di covarianza;
2. del secondo ordine;
3. tali da fornire la soluzione newtoniana per campi deboli.

Questi criteri sembrano suggerire equazioni del tipo

$$R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = 0 \quad (3.22)$$

le quali, però, ammettono come unica soluzione lo spazio piatto e, quindi, non contemplano l'esistenza di campi gravitazionali. Per ottenere delle equazioni di campo accettabili, dobbiamo rendere la condizione (3.22) meno stringente, richiedendo che non sia separatamente uguale a zero ciascuna componente del tensore di Riemann ma che si annullino solo alcune combinazioni di componenti; esiste solo un modo covariante per fare ciò ed è mediante l'operazione di contrazione. Abbiamo visto che il tensore di Ricci, $R_{\alpha\beta}$, si ottiene mediante

contrazione dal tensore di Riemann. Postuliamo, quindi, che le equazioni di campo nel vuoto siano

$$R_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.23)$$

Tali equazioni soddisfano le condizioni 1) e 2). Inoltre, esse sono equivalenti alle

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0. \quad (3.24)$$

Infatti, se vale l'Eq.(3.23) si ha che $R = 0$ e, quindi, anche $G_{\alpha\beta} = 0$. Viceversa, se $G_{\alpha\beta} = 0$, allora

$$G = 0, \quad R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Gg_{\alpha\beta} = 0.$$

Ora sorge il problema di definire le sorgenti per le equazioni di Einstein, cioè dobbiamo costruire un tensore energia-impulso in forma covariante. Come semplice esempio, possiamo considerare materia incoerente sotto forma di polvere, cioè priva di pressione e tensione.

Le equazioni di campo in presenza di materia si scrivono uguagliando fra loro due tensori a divergenza nulla, ossia il tensore di Einstein e il tensore energia impulso, avendo:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \chi T_{\alpha\beta}, \quad (3.25)$$

dove χ è una costante di accoppiamento opportuna e vale $\frac{8\pi G}{c^4}$.

Capitolo 4

L'approccio Wheeler–DeWitt alla quantizzazione della gravità: la funzione d'onda dell'universo

4.1 La formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale

Alla luce di ciò che abbiamo detto nei capitoli precedenti, siamo adesso interessati a formulare la teoria della relatività generale in termini di una possibile interpretazione Hamiltoniana. Non vi è univocità nella scelta dell'Hamiltoniana per la teoria generale della relatività, in quanto non è possibile definire in modo univoco l'Hamiltoniana del sistema. Tuttavia, in questo lavoro di tesi siamo interessati al modello canonico, probabilmente anche il più semplice, che formalizza la formulazione di una Hamiltoniana di sistema in ambito della relatività generale: la decomposizione 3+1 della gravità. In questo contesto, riusciremo a quantizzare in modo canonico la stessa gravità e saremo altresì in grado di formulare il concetto di funzione d'onda per l'universo. Per spiegare nel dettaglio le ragioni che ci portano prima a formulare una teoria Hamiltoniana e poi a quantizzare la stessa, facciamo notare subito che se seguiamo l'evoluzione cosmologica all'indietro nel tempo, si perviene ad una singolarità iniziale in cui le equazioni della Relatività Generale non sono più adatte a descrivere la fisica del sistema.

Pertanto, la formulazione Hamiltoniana della gravità è preposta a comprendere cosa realmente avviene all'origine dell'universo, in quanto una quantizzazione dello stesso modello Hamiltoniano che vogliamo mostrare nel seguito permetterà di trattare quest'ultimo da un punto di vista quantistico e rappresentarlo mediante una funzione d'onda che assegna l'ampiezza di probabilità di ottenere una certa configurazione delle variabili spazio-temporali e materiali.

Il nostro obiettivo è proprio pervenire a tale funzione d'onda passando per la struttura Hamiltoniana della gravità, dopo averla quantizzata.

L'approccio che seguiamo è quello inizialmente seguito da DeWitt e Misner. Esso è diventato sempre più popolare negli ultimi anni. Il quadro che emerge da questa linea di ricerca è che l'universo possa enucleare dal “nulla”, cioè da uno stato privo di uno spazio-tempo classico. Per implementare questo schema, consideriamo la formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale nel tentativo di una quantizzazione canonica della gravitazione. In particolare, trattiamo la cosiddetta tecnica di Arnowitt–Deser–Misner che porta ai concetti di superspazio e supermetrica. Tale formalismo consente di ricavare l'equazione di Wheeler–DeWitt la cui soluzione è il *funzionale d'onda dell'universo*, una grandezza direttamente correlata, in linea di principio, con la probabilità che, passando da un regime

di piena gravità quantistica ad uno di gravità classica, si realizzi proprio il *nostro* cosmo osservabile. Prima di tutto, vogliamo far notare la differenza tra la formulazione Lagrangiana della Relatività Generale e quella Hamiltoniana. Nella formulazione Lagrangiana, il campo fondamentale è il tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, e la formulazione è covariante a vista. Introduciamo l'azione di Hilbert-Einstein in quanto le equazioni di campo si possono ottenere come minimizzazione di tale principio variazionale:

$$S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G_N} \int_V d^4x \sqrt{-g} R(g) + \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial V} d^3x \sqrt{h} K, \quad (4.1)$$

dove $K \equiv h^{ij} K_{ij}$ è la traccia del tensore di curvatura entrinseca K_{ij} della ipersuperficie tridimensionale compatta ∂V la quale è immersa in una varietà di dimensione 4, V , e h è il determinante della metrica indotta sulla varietà tridimensionale. In questo capitolo, indichiamo con S l'azione in conformità con la letteratura corrente. Il secondo termine dell'azione è introdotto in modo opportuno per eliminare le derivate seconde della metrica, provenienti tramite le derivate delle connessioni affini. Al contrario, la formulazione Hamiltoniana non è spazio-tempo covariante, ma richiede una decomposizione $3 + 1$ della metrica, in cui i gradi di libertà dinamici sono le componenti **spaziali**: utilizziamo, a tal fine, il formalismo ADM (Arnowitt, Deser e Misner, 1959).

Fissata una topologia nello spazio-tempo $R \times M^3$, ove M^3 è una varietà compatta, e una griglia di coordinate X^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$, introduciamo il metodo del fogliettamento per ipersuperfici tridimensionali del genere spazio di topologia M^3 .

Una trasformazione di coordinate

$$X^\alpha = X^\alpha(x^0, x^i) \quad (4.2)$$

può essere riletta nello spazio-tempo come una famiglia di ipersuperfici a un parametro dato dalla coordinata temporale x^0 , mentre le coordinate spaziali x^i costituiranno una scelta di coordinate locali su ognuna di queste ipersuperfici. Ovvero, avremo, per ogni scelta di x^0 , una ipersuperficie di genere spazio $X^\alpha = X^\alpha(x^i)$ che, col variare della coordinata x^0 , ci dà il fogliettamento.

Per ciascun punto della ipersuperficie, avremo i vettori di base costituiti dai vettori tangenti alla stessa superficie (chiameremo d'ora in poi semplicemente superficie la ipersuperficie del genere spazio precedentemente definita; inoltre, indicheremo, impropriamente, con il termine di metrica il tensore metrico) $X_i^\alpha \equiv X_{,i}^\alpha$ e dal versore normale n^α , cioè dati dalle condizioni

$$g_{\mu\nu} X_i^\mu n^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1. \quad (4.3)$$

Definiamo il vettore di deformazione

$$N^\alpha \equiv \dot{X}^\alpha = \partial_0 X^\alpha(x^0, x^i), \quad (4.4)$$

il quale connette i punti con le stesse coordinate locali x^i su due superfici contigue $x^0, x^0 + dx^0$ e decomponiamolo secondo la base locale di vettori $\{n^\alpha, X_i^\alpha\}$

$$N^\alpha \equiv N n^\alpha + N^i X_i^\alpha. \quad (4.5)$$

Le proiezioni in tale base, le cosiddette funzioni di *lapse* e *shift* N, N^j , descrivono, rispettivamente, lo spostamento locale e quello tangenziale alla superficie con $x^0 = \text{costante}$. Ovvero, le N, N^j descrivono la deformazione relativa alla superficie del fogliettamento e permettono di passare da una superficie fissata alle altre tramite il fogliettamento. Per assegnare la dinamica di un campo arbitrario, proiettiamo il campo perpendicolarmente

e parallelamente alla superficie e osserviamo come cambiano queste proiezioni quando la superficie si modifica. In questo caso, abbiamo a che fare con la metrica dello spazio-tempo e la sola proiezione non banale sarà quella parallela alla superficie

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} (X^\alpha (x^s; x^0)) X_i^\mu X_j^\nu. \quad (4.6)$$

Questa è la metrica tridimensionale indotta sulla generica superficie, a x^0 fissato, dal fogliettamento: essa descrive la geometria intrinseca della superficie nelle coordinate locali x^i . Riscriviamola tramite le g_{ij} e le n_i come

$$h_{ij} = g_{ij} + n_i n_j. \quad (4.7)$$

Se il versore normale alla superficie è del genere tempo ($n_i = 0, n_0 = 1$), si ottiene

$$h_{ij} = g_{ij}. \quad (4.8)$$

Sfruttando le definizioni di h_{ij}, N, N^j , le condizioni

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1 \\ g_{\mu\nu} n^\mu X_j^\nu = 0, \quad (\forall j) \end{cases} \quad (4.9)$$

(le quali significano che n^μ è un versore del genere tempo ortogonale a X_j^ν) e la definizione di differenziale, è possibile scrivere la metrica spazio-temporale

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (4.10)$$

nel modo seguente

$$ds^2 = - (N^2 - N^j N_j) dt^2 + 2N^i dx_i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.11)$$

Questa è la cosiddetta forma ADM, o 3 + 1 standard della metrica dello spazio-tempo. Essa costituisce solo una utile parametrizzazione di $g_{\mu\nu}$ in termini delle N, N^j, h_{ij} , cioè

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - (N^2 - N^i N_i) & N_j \\ N_j & h_{ij} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

E' da sottolineare che, non avendo fatto nessuna particolare restrizione sulla scelta delle coordinate, la covarianza generale della teoria non è ancora perduta.

Sostituendo la metrica data dall'Eq. (4.11) nella (4.1) otteniamo la forma ADM dell'azione di Hilbert-Einstein, dove, ora, la curvatura scalare è espressa secondo la formula di Gauss-Codazzi, in termini della curvatura intrinseca ${}^{(3)}R$ e di quella estrinseca $K_{ij} K^{ij} - K^2$

$$S(N, N^j, h_{ij}) = \int N dt d^3x \mathcal{L}. \quad (4.13)$$

$\mathcal{L}$ è la densità di Lagrangiana data da

$$\mathcal{L}(N, N_i, h_{ij}) = \sqrt{h} N \left(K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R \right) / 16\pi G_N + t.s.. \quad (4.14)$$

dove, riferendoci alla generica superficie $t = \text{costante}$ del fogliettamento,

$$K_{ij} \equiv \frac{1}{2N} \left(N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij} \right); \quad (4.15)$$

K_{ij} è la seconda forma fondamentale o tensore di curvatura estrinseca, h è il determinante della metrica tridimensionale, ${}^{(3)}R$ è la curvatura intrinseca della superficie tridimensionale,

scalare per diffeomorfismi $x^i \rightarrow x'^i = x'^i(x^i)$ di M^3 , e “t.s.” denota il termine di superficie. Ricordiamo, anche, che la (4.15) è un tensore per gli stessi diffeomorfismi per cui ${}^{(3)}R$ è uno scalare. La densità di Lagrangiana così scritta ha la forma classica di “energia cinetica meno energia potenziale”, con la curvatura estrinseca che gioca il ruolo dell’energia cinetica e la curvatura intrinseca, cambiata di segno, che gioca il ruolo dell’energia potenziale. Notiamo, altresì, che i simboli “.” e “|” significano, rispettivamente, la derivata parziale rispetto a t e la derivata covariante rispetto alla metrica spaziale h_{ij} . Il termine superficiale della (4.14), “t.s.”, può essere scritto esplicitamente come

$$-2 \left[\partial_0 \left(\sqrt{h} K \right) + \partial_i \left(\sqrt{h} h^{ij} N_{,j} - \sqrt{h} K N^i \right) \right] / 16\pi G_N. \quad (4.16)$$

Sommare una 4-divergenza alla densità di Lagrangiana non cambia le equazioni del moto, ma contribuisce solo come un termine di superficie all’azione che, quindi, può essere omesso. Dalla (4.15) si nota che K_{ij} (e la sua traccia) contengono derivate temporali di h_{ij} e derivate spaziali di N_i . La curvatura intrinseca ${}^{(3)}R$ contiene solo derivate spaziali di h_{ij} . Poiché in (4.14) non compaiono derivate temporali di N o N_i , possiamo dedurre una proprietà importante della Relatività Generale: non tutte le 10 componenti indipendenti del tensore metrico sono variabili dinamiche. Le funzioni N , N^i dovranno considerarsi solo come moltiplicatori di Lagrange associati a vincoli sulle variabili canoniche e saranno assegnati arbitrariamente fogliettando opportunamente lo spazio-tempo.

Quindi, le vere variabili dinamiche saranno solo le h_{ij} , componenti della 3-metrica della nostra ipersuperficie.

Questo si può vedere anche attraverso i momenti coniugati di N e N_i definiti come

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}} = 0, \\ \pi^i &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{N}_i} = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Questi due momenti coniugati sono chiamati anche vincoli “primari”. I momenti coniugati a h_{ij} sono

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{h}_{ij}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G_N} (h^{ij} K - K^{ij}). \quad (4.18)$$

Si può dedurre la forma Hamiltoniana dell’azione esprimendo la Lagrangiana $\mathcal{L}$ in termini della trasformata di Legendre $\mathcal{H}$ e dei momenti coniugati π^{ij} , cioè

$$\mathcal{L} = \pi_{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{H}. \quad (4.19)$$

Si ottiene, quindi,

$$S(\pi^{ij}, h_{ij}, N, N^i) = \int dt d^3x \left(\pi_{ij} \dot{h}_{ij} - N \mathcal{H}_0 - N^i \mathcal{H}_i \right), \quad (4.20)$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &\equiv \frac{\sqrt{h}}{16\pi G_N} \left(K_{ij} K^{ij} - K^2 - {}^{(3)}R \right) = \\ &= \frac{16\pi G_N}{2\sqrt{h}} (h_{ik} h_{jl} + h_{il} h_{jk} - h_{il} h_{kl}) \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R / 16\pi G_N \equiv \\ &\equiv 16\pi G_N G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h} {}^{(3)}R / 16\pi G_N \end{aligned} \quad (4.21)$$

e

$$\mathcal{H}_i \equiv -2\pi_i^j{}_{|j}/16\pi G_N. \quad (4.22)$$

La (4.21) è chiamata anche *superHamiltoniana* e la (4.22) *supermomento*. Per ottenere le equazioni di campo classiche, dobbiamo variare l'azione rispetto alle variabili canoniche indipendenti π^{ij} , h_{ij} , N , N^i .

Costruendo direttamente l'Hamiltoniana, dobbiamo ottenere gli stessi risultati

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left(\pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \pi^i \dot{N}_i + \pi \dot{N} - \mathcal{L} \right) = \\ &= \int d^3x \left(N \mathcal{H}_0 + N^i \mathcal{H}_i \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Poiché i vincoli primari valgono sempre, otteniamo che $\dot{\pi} = \dot{\pi}_i = 0$. Quindi scrivendo le rispettive parentesi di Poisson, troviamo

$$\dot{\pi} = -\{H, \pi\} = \frac{\delta H}{\delta N} = 0,$$

$$\dot{\pi}_i = -\{H, \pi_i\} = \frac{\delta H}{\delta N^i} = 0.$$

Otteniamo, quindi, i vincoli secondari o dinamici

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_i = 0. \quad (4.24)$$

4.2 L'equazione di Wheeler-DeWitt e il concetto di Superspazio

Nella procedura di quantizzazione canonica, il primo passo consiste nel trasformare le variabili dinamiche della teoria classica in operatori che soddisfino regole di commutazione appropriate. Nella varietà fissata M^3 le nostre variabili canoniche sono le h_{ij} , π^{ij} e nella rappresentazione di Schrödinger avremo

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{h}_{ij}(\mathbf{x}), \hat{\pi}^{kl}(\mathbf{x}')] = i\delta_{ij}{}^{kl} \delta^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \\ [\hat{h}_{ij}, \hat{h}_{kl}] = 0, \\ [\hat{\pi}^{ij}, \hat{\pi}^{kl}] = 0, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in M^3) \end{array} \right. \quad (4.25)$$

con

$$\delta_{ij}{}^{kl} \equiv \frac{1}{2} \left(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k \right). \quad (4.26)$$

Gli operatori quantistici così ottenuti vanno sostituiti in $\mathcal{H}_0$ e $\mathcal{H}_i$ che diventano essi stessi operatori agenti su uno stato $|\Psi\rangle$. I vincoli dinamici (4.25) si trasformano in equazioni quantistiche per lo stato $|\Psi\rangle$, cioè si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathcal{H}}_0 |\Psi\rangle = 0 \\ \hat{\mathcal{H}}_i |\Psi\rangle = 0. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

Il vincolo Hamiltoniano seleziona, in principio, fra tutti gli stati, quelli fisicamente permessi. Il passo successivo è quello di specificare la rappresentazione adottata per gli operatori.

Scegliamo quella che si chiama *rappresentazione metrica* ove

$$\begin{aligned}\hat{h}_{ij} &= h_{ij}, \\ \hat{\pi} &= -i \frac{\delta}{\delta N} \\ \hat{\pi}^i &= -i \frac{\delta}{\delta N_i} \\ \hat{\pi}^{ij} &= -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Con questa rappresentazione, la $|\Psi\rangle$ diventa un funzionale delle configurazioni metriche h_{ij} , del tipo $\Psi[h_{ij}(\mathbf{x})]$, il quale descrive lo stato del campo gravitazionale come vettore nello spazio delle configurazioni metriche.

Esistono vari problemi associati ai passi descritti. Il primo è quello dell'ordinamento dei fattori, derivante dalla non commutatività degli operatori $\hat{h}_{ij}$, $\hat{\pi}^{ij}$ e verrà discusso in seguito. Il secondo deriva dal fatto che le equazioni (4.28), per lo stato quantistico dell'universo e il funzionale d'onda $\Psi[h_{ij}]$, non dipendono in modo esplicito dal tempo: questo sembrerebbe portare a modelli, in contrasto con la realtà, di universi stazionari.

Questo aspetto paradossale della teoria era già stato messo in risalto dal lavoro originale di DeWitt: la Relatività Generale è un esempio di teoria *parametrizzata*, in cui il tempo coordinato è solo un'etichetta, come le x^i , dei gradi di libertà del sistema senza un effettivo significato fisico. Dovremo, perciò, pensare al tempo come già contenuto nelle variabili dinamiche h_{ij} descriventi la teoria stessa.

Esprimendo quanto detto in un altro modo, poiché le superfici tridimensionali sono compatte, la loro geometria intrinseca, specificata dalla 3-metrica, fissa pressoché univocamente la loro posizione relativa nello spazio-tempo (in particolare, fissa una specifica cronologia intrinseca). Si può vedere che il numero delle variabili implicate attraverso questa "etichettatura" del funzionale d'onda è corretto. Vi sono 6 componenti di h_{ij} in ogni punto dello spazio. Tre di queste possono essere scelte arbitrariamente con una opportuna scelta delle coordinate spaziali e sono quelle chiamate di "pura *gauge*". Se una componente corrisponde al tempo, ne rimangono due. Questo è il numero corretto di gradi di libertà di un campo senza massa di spin 2, quale quello gravitazionale.

Possiamo, ora, scrivere le equazioni vincolari nella rappresentazione scelta (metrica o di Schrödinger) come

$$\left[16\pi G_N \nabla^2 + \frac{\sqrt{h}^{(3)} R}{16\pi G_N} \right] \Psi[h_{ij}] = 0, \tag{4.29}$$

con

$$\nabla^2 \equiv G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \gamma_{ij} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \tag{4.30}$$

per il superHamiltoniano. Per il supermomento, si avrà

$$2ih_{km} D_l \frac{\delta \Psi[h_{ij}]}{\delta h_{kl}} = 0, \tag{4.31}$$

dove il coefficiente γ_{ij} nella (4.31) dipende dalla scelta dell'ordinamento dei fattori e D_j è la derivata covariante nella metrica h_{ij} . La (4.30) è l'equazione di Wheeler-DeWitt e la sua soluzione $\Psi[h_{ij}]$, con opportune condizioni al contorno, prende il nome di funzionale d'onda dell'universo. Nella (4.32) l'ordinamento dei fattori è implicitamente fissato dalla scrittura del vincolo, avendo deciso di mettere i termini della metrica interamente a sinistra del supermomento.

Ricordando che la Relatività Generale è invariante per il gruppo dei diffeomorfismi in quattro dimensioni e sapendo che l'invarianza implica la presenza di vincoli (e viceversa), andiamo a vedere quali sono tali vincoli, aspettandoci, naturalmente, che questi siano eguali a quelli trovati precedentemente. Scriviamoli attraverso la decomposizione $3 + 1$ scegliendo una famiglia di superfici di tipo spazio e usando come variabili di base la loro metrica intrinseca, h_{ij} , e il tensore di curvatura estrinseca, K_{ij} . Dei quattro vincoli, quelli che esprimono l'invarianza sotto diffeomorfismi nella 3-superficie, ci danno l'equazione quantistica del supermomento. Da questa si ricava che il funzionale d'onda $\Psi[h_{ij}]$ dipende solo dalla 3-geometria e non dalla scelta delle coordinate usate per descriverla, cioè il funzionale d'onda deve essere lo stesso per due 3-metriche connesse da un diffeomorfismo. Si può dimostrare anche il viceversa. Infatti, consideriamo lo spostamento infinitesimo dell'argomento del funzionale d'onda per un diffeomorfismo sulla superficie, a t fissato avremo $x^i \rightarrow x^i - \xi^i$. In corrispondenza, il tensore metrico si trasforma come

$$h_{ij} \rightarrow h_{ij} + 2D_{(i}\xi_{j)} \quad (4.32)$$

mentre, per il funzionale d'onda, si ottiene

$$\Psi[h_{ij} + 2D_{(i}\xi_{j)}] = \Psi[h_{ij}] + 2 \int_{M^3} d^3x D_{(i}\xi_{j)} \frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}. \quad (4.33)$$

Integrando per parti, il termine di bordo si annulla poiché la 3-varietà è compatta. Ne segue che

$$\delta\Psi = -2 \int_{M^3} d^3x \xi_j D_i \left(\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}} \right) = i \int_{M^3} d^3x \xi_i \mathcal{H}^i \Psi. \quad (4.34)$$

Quindi, richiedendo che il funzionale d'onda dipenda solo dalla metrica, risulta che $\delta\Psi = 0$ e, allora, il vincolo è identicamente soddisfatto.

In letteratura, è stato dimostrato che, attraverso la scelta dei fattori adottata nella (4.32), le $\mathcal{H}_i$ sono i generatori dei diffeomorfismi in M^3 .

Possiamo, ora, introdurre lo spazio delle configurazioni dell'universo come lo spazio di tutte le possibili 3-metriche, denotato dal simbolo $\mathcal{G} = \text{Riem}(M^3)$, a meno dei loro diffeomorfismi, $\text{Diff}(M^3)$. Esso prende il nome di *superspazio* e viene indicato con la lettera S , intendendo $S = \mathcal{G}/\text{Diff}(M^3)$.

Dopo aver dimostrato che il vincolo sul momento non è altro che l'espressione dell'invarianza della teoria per trasformazioni di coordinate tridimensionali, possiamo passare all'ultimo vincolo il quale esprime l'invarianza per riparametrizzazione temporale (ricordiamo infatti che la Relatività Generale è un esempio di teoria parametrizzata nella quale il tempo entra come una delle variabili dinamiche).

Per illustrare questo, useremo un modello semplice. Consideriamo una particella non relativistica la cui dinamica sia descritta dall'azione

$$S[X(T)] = \int dT \mathcal{L}(dX/dT, X). \quad (4.35)$$

Esprimiamo sia X che T come funzioni di un parametro τ e con ciò introduciamo il tempo T come variabile dinamica nell'azione

$$S[X(\tau), T(\tau)] = \int d\tau \dot{T} \mathcal{L}(\dot{X}/\dot{T}, X), \quad (4.36)$$

dove il punto indica la derivata rispetto al parametro τ . L'azione è invariante per riparametrizzazione del tempo, cioè

$$\tau = f(\tau'), \quad X'(\tau') = X(f(\tau')), \quad T'(\tau') = T(f(\tau')). \quad (4.37)$$

Se si calcola l'Hamiltoniana associata alla nuova Lagrangiana che compare nella (4.37), si trova che

$$H = \dot{T}(p_T + \mathcal{H}), \quad (4.38)$$

dove p_T è il momento coniugato a T e $\mathcal{H}$ è la Hamiltoniana associata alla Lagrangiana $\mathcal{L}$. Infine, si trova che, identicamente, deve essere

$$H = 0. \quad (4.39)$$

Possiamo affermare, quindi, che l'annullamento dell'Hamiltoniana è una caratteristica tipica delle teorie che sono invarianti per riparametrizzazione del tempo. Il vincolo classico, in Meccanica Quantistica, si trasforma in una relazione fra operatori; dalla (4.40), si ottiene

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial T} + \hat{\mathcal{H}}\right)\psi(X, T) = 0 \quad (4.40)$$

la quale non è altro che la forma operatoriale del vincolo (4.40). Quindi, l'annullamento della Hamiltoniana, in una teoria parametrizzata, non comporta l'assenza di dinamica: anzi, è essa stessa la relazione dinamica.

Applicando la dimostrazione fatta alla Relatività Generale, troveremo il quarto vincolo della teoria che esprime l'invarianza della teoria per scelte delle superfici di tipo spazio ed è equivalente alla riparametrizzazione temporale. Come nel modello usato precedentemente, il vincolo causa l'annullamento della Hamiltoniana totale e, anche per questa ragione, è chiamato vincolo Hamiltoniano.

Fatto questo, possiamo tornare all'equazione di Wheeler-DeWitt per il funzionale d'onda dell'universo e al suo spazio delle configurazioni, ovvero il superspazio. La struttura matematica del superspazio ancora non è del tutto chiara; questo è un infinito dimensionale ($6 \times \infty^3$), include al bordo tutte le 3-geometrie singolari e la quantità G_{ijkl} , definita nelle (4.21), può essere usata come metrica locale nel superspazio, chiamata, in analogia alle altre grandezze, supermetrica. Chiariamo che le 3-geometrie singolari corrispondono a singolarità effettive della curvatura spazio-temporale e non sono introdotte dal particolare fogliettamento della varietà spazio-temporale; si parla, altrimenti, di bordo non singolare del superspazio.

Se δh_{ij} e $\delta h'_{ij}$ sono le variazioni della 3-metrica in corrispondenza a spostamenti infinitesimi nel superspazio, si può definire il prodotto interno di questi due spostamenti. Esso è dato da

$$\delta\sigma^2 = (\delta h, \delta h') = \int d^3G^{ijkl}\delta h_{ij}\delta h'_{kl}. \quad (4.41)$$

Il tensore supermetrico controvariante è l'inverso di quello definito nelle (4.21). Esso soddisfa la relazione

$$G^{ijkl}G_{klmn} = \delta_{mn}^{ij} \quad (4.42)$$

e la sua forma esplicita è

$$G^{ijkl} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{h}\left(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk} - 2h^{ij}h^{kl}\right). \quad (4.43)$$

La G_{ijkl} può essere considerata come una matrice 6×6 nello spazio degli indici simmetrici (ij). Possono definirsi altre metriche nel superspazio inserendo una funzione arbitraria nella (4.42). Questa metrica suggerisce un modo elegante per scegliere l'ordinamento dei fattori nell'equazione di Wheeler-DeWitt considerando ∇^2 come il "laplaciano covariante" in tale metrica. In ciascun punto dello spazio, la segnatura della metrica è $(- + + + +)$,

iperbolica ed indipendente dalla segnatura dello spazio-tempo. L'equazione di Wheeler-DeWitt è, quindi, di tipo iperbolico nel superspazio.

Ricordiamo che uno dei sei gradi di libertà rappresenta il tempo, nel senso di individuare la superficie di tipo spazio rispetto alla 4-geometria. Si può pensare, dunque, a una scelta fissata per questo tempo definente una famiglia di ipersuperfici nel superspazio e, tramite l'equazione di Wheeler-DeWitt, specificare la propagazione del funzionale d'onda da una ipersuperficie a un'altra. E' in questo senso che l'equazione di Wheeler-DeWitt implementa la dinamica quantistica.

Possiamo ancora far notare che, nell'approccio canonico, il superspazio è associato a una varietà M^3 fissata, ovvero a una topologia fissata dell'universo. Classicamente, non si ritengono possibili dei cambiamenti di topologia. La possibilità di effettuare ciò nella Teoria Quantistica e l'eventuale modo di descriverli sono problemi ancora aperti. Uno studio di tali problemi è stato proposto da Hartle e Hawking, attraverso un approccio alternativo a quello canonico, cioè eseguito tramite integrali funzionali su cammini euclidei. Le successive considerazioni e gli sviluppi moderni di tali approcci vanno, tuttavia, oltre lo scopo della presente tesi. Pertanto, qui ci limitiamo alla trattazione suddetta e tratteremo adesso il concetto di tempo nell'ambito del modello quantistico di Wheeler-DeWitt.

4.3 Il problema del tempo in relatività quantistica

Il tempo gioca un ruolo centrale e peculiare nella formulazione Hamiltoniana della Meccanica Quantistica. Il prodotto scalare che determina lo spazio di Hilbert degli stati è definito a un istante di tempo. Gli stati specificano direttamente la probabilità di osservazione eseguita a un tempo fissato. Il tempo è la sola osservabile non rappresentata da un operatore nello spazio di Hilbert ma entra nella teoria come un parametro descrivente l'evoluzione del sistema.

Nella Meccanica Quantistica relativistica sorge subito il problema della scelta del tempo ma esiste anche la soluzione. Possiamo costruire la Meccanica Quantistica usando come variabile temporale particolare quella associata al riferimento di Lorentz. Si dimostra che esiste una relazione unitaria tra le teorie quantistiche costruite in differenti riferimenti inerziali e, quindi, le ampiezze di probabilità sono invarianti, anche se non lo sono i vettori di stato con cui sono costruite.

Per la costruzione di teorie quantistiche in spazi-tempi curvi, la scelta del tempo diventa cruciale. Per formulare la teoria, è necessario un fogliettamento dello spazio-tempo attraverso superfici di tipo spazio. Vi è un conflitto tra l'approccio canonico della gravità quantistica e la covarianza generale della Relatività Generale e, inoltre, non è possibile dimostrare che due teorie, formulate su due differenti fogliettamenti, sono unitariamente equivalenti. Questo è il secondo aspetto del problema del tempo nella quantizzazione della Relatività Generale. Il primo, ovvero l'apparente stazionarietà dell'equazione della dinamica quantistica, è risolubile, come visto, introducendo un tempo intrinseco e facendolo così divenire, in tal maniera, una variabile dinamica. Si può trovare, in letteratura, anche una nozione probabilistica di tempo. Abbiamo ancora un'altra difficoltà fondamentale connessa alla scelta del tempo, derivante ancora dalla covarianza della teoria classica. Non possiamo definire l'operatore dell'energia in un universo quantistico; ovvero, non possiamo ricondurre la funzione d'onda dello stato di minima eccitazione allo stato fondamentale della Hamiltoniana. Tempo ed energia, in fisica, sono concetti coniugati. L'energia è la quantità conservata che proviene dalla simmetria per traslazioni temporali ma, in genere, non esiste questa invarianza. Per esempio, l'energia è definibile solo per universi asintoticamente piatti, mentre si può far vedere che per modelli cosmologici chiusi non esiste tale

simmetria. Se anche si decidesse di identificare la Hamiltoniana come il generatore che ci porta da una superficie alla successiva, non riusciremmo a trovare l'autostato fondamentale. Questo perché non esiste un fogliettamento per cui la Hamiltoniana risultante sia indipendente dal tempo e con cui costruire un unico stato fondamentale.

In definitiva, il problema della gravità quantistica non può prescindere da una definizione autoconsistente e operatoriale del tempo. Tale definizione al momento manca e questa è una delle sfide principali della gravità quantistica.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo introdotto alcune tecniche basilari riguardanti la quantizzazione standard della gravità e la funzione d'onda dell'universo nell'approccio di Wheeler-DeWitt. Nonostante una teoria definitiva della gravità quantistica sia ancora non nota, ci siamo focalizzati sull'approccio canonico e su alcuni problemi concettuali legati ad esso. Per far ciò abbiamo sviluppato brevemente il formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano nel primo capitolo. Tali formalismi ci sono serviti al fine di definire la decomposizione $(3+1)$ delle equazioni di campo di Einstein e il conseguente fogliettamento delle stesse su superfici spaziali. Successivamente, nel capitolo due, abbiamo discusso gli aspetti principali su cui si basano le teorie della meccanica quantistica e della relatività speciale, dalle quali abbiamo tratto le nozioni di funzione d'onda e di spazio tempo di Minkowski, utili al fine di redigere in modo chiaro l'equazione di Wheeler-DeWitt e di giustificare la fisica associata ad essa. Nel capitolo tre abbiamo, quindi, introdotto la teoria della relatività generale, basandoci sui principi portanti della relatività speciale ed estendendoli a spazi tempi curvi. Abbiamo, pertanto, mostrato come passare dalla metrica piatta di Minkowski a spazi tempi curvi, declinando le conseguenze fisiche di tale approccio e riscrivendo, altresì, le equazioni di campo di Einstein, sia nel vuoto che in presenza di materia. Successivamente, avendo introdotto il formalismo matematico necessario, abbiamo proposto la decomposizione $(3+1)$ dello spazio-tempo, al fine di scrivere l'Hamiltoniana dell'universo nell'ambito della teoria della relatività generale. In seguito, abbiamo spiegato come passare dal regime classico a quello quantistico e come formulare un primo approccio, detto comunemente approccio standard, alla gravità quantistica. Per far ciò ci siamo serviti di specifici vincoli sul modello in esame, partendo dall'azione di Hilbert-Einstein. Abbiamo, quindi, discusso il ruolo della funzione d'onda dell'universo ed alcune delle sue principali problematiche teoriche. Nel lavoro di tesi abbiamo dato risalto al concetto di tempo, sottolineando le diverse interpretazioni che esso acquisisce nel passaggio dalla relatività alla gravità quantistica.

Bibliografia

- [1] E. A. Milne, “World structure and expansion of universe”, *Zeitschrift für Astrophysik*, Vol.6, p.1,1993.
- [2] W. H. McRae, E. A. Milne, *Newtonian universe and curvature of space*, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, 1934.
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, (W.H.Freeman and Co., San Francisco, 1973).
- [4] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis *The Large Scale Structure of Spacetime*, (Cambridge University Press, 1973).
- [5] P. A. M. Dirac *General Theory of Relativity*, (University press, Princeton, N.J. 1975).
- [6] A. Einstein, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsberichte der physicalish-mathematischen Klasse*, (1916).
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Teoria dei campi*, (Editori Riuniti, 1976).
- [8] R. M. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, Chicago 1984).
- [9] P. J. E. Peebels, *The large scale structure of universe*, (Princeton University NJ,1980).
- [10] E. W. Kolb, M.S.Turner, *The early universe*, Addison-Wesley, NY 1990.
- [11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (J. Wiley & Sons, N.Y., 1972).
- [12] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to current research*, (Wiley, N.Y. 1962).
- [13] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Phys.Rev.* 113,745 (1959).
- [14] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Phys.Rev.* 116,1322(1959).
- [15] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science. Monographs Series, vol.2, (Yeshiva Press, New York, U.S.A., 1964).
- [16] A. Ashtekar, “New Hamiltonian Formulation of General Relativity”, *Phys. Rev. D*, 36(6), 1587-1602, (1987).
- [17] C. Kiefer: *Quantum Gravity*, second edition (Oxford University Press, Oxford) (2007).
- [18] S. M. Carroll, *Living Rev. Rel.* 4 (2001) 1.
- [19] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*, Liguori (2007).
- [20] A. Romano, *Meccanica Analitica*, Apogeo 2007.