

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

**Ampiezza di diffusione  
nella teoria quantistica dello scattering**

**Relatori:**  
Prof. Gennaro Miele

**Candidato:**  
Antonio Circiello  
Matricola N85000595

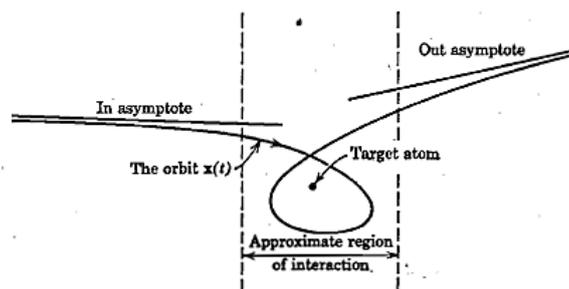
A.A. 2016/2017

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Ampiezza di diffusione</b>	<b>7</b>
1.1 Onde parziali . . . . .	8
1.2 Approssimazione di Born . . . . .	9
1.3 Teoremi generali . . . . .	12
1.4 Campi centrali . . . . .	14
<b>2 Caso Quasi-Classico</b>	<b>17</b>
2.1 Calcolo delle fasi . . . . .	20
2.2 Condizioni di convergenza . . . . .	20
2.3 Limite classico . . . . .	22
<b>3 Energie limite</b>	<b>25</b>
3.1 Alte energie . . . . .	25
3.2 Basse energie . . . . .	26
3.3 Risonanza con livelli discreti . . . . .	28
<b>Conclusione</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>32</b>

# Introduzione

Apriamo il discorso sulla teoria dello scattering effettuando un breve riassunto della teoria classica. In questo tipo di analisi la quantità da analizzare è la traiettoria del proiettile, che caratterizza univocamente il moto. Supponiamo, per fissare le idee, di avere un proiettile puntiforme che interagisca con un centro diffusore sorgente di un campo repulsivo a simmetria sferica. Possiamo dividere lo spazio di lavoro in due zone, una più interna (*zona di interazione*), in cui il proiettile risente dell'azione del campo diffusore, ed una più esterna (*zona asintotica*), in cui si può trascurare il campo e trattare il proiettile come se fosse una particella libera.

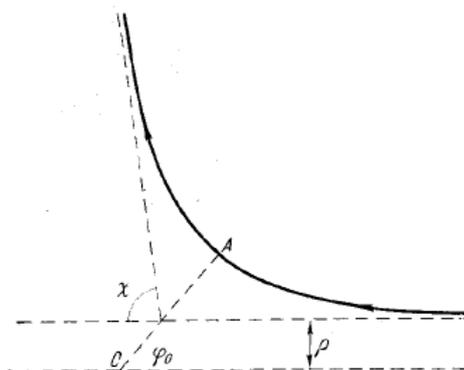


**Figura 1:** *Suddivisione dello spazio di lavoro - (ST)*

Tale suddivisione dello spazio di lavoro non è da intendersi come rigorosa, in quanto non è effettivamente definita una frontiera tra di esse. L'ampiezza della zona di interazione dipende dalle caratteristiche del campo. In esperimenti con le particelle è solitamente troppo piccola per essere rilevata sperimentalmente, per cui le misure vengono tutte effettuate sulla zona esterna. Anche la traiettoria può essere divisa in più parti: una prima parte in cui il moto è praticamente rettilineo, fin quando il proiettile non inizia a risentire significativamente degli effetti di campo, una seconda parte in cui il moto è dettato dagli effetti di campo e una terza parte in cui il proiettile non risente più del campo e si allontana con moto sostanzialmente rettilineo dal centro diffusore. La prima e la terza parte della traiettoria, situate nella zona esterna, possono essere sostituite asintoticamente con traiettorie rettilinee indicanti un moto libero del proiettile. Per la descrizione matematica del processo di scattering cerchiamo di svincolarci quanto più possibile dalla

forma della seconda parte della traiettoria (che spesso non è osservabile sperimentalmente) e di concentrarci sulle suddette forme asintotiche. Un'orbita è, infatti, completamente determinata dalla conoscenza degli asintoti d'entrata e d'uscita. La corrispondenza tra gli andamenti asintotici in entrata e in uscita, inoltre è univoca; ossia ad ogni asintoto d'uscita corrisponde un unico asintoto d'entrata. Non è però vero il viceversa, poiché ad alcuni asintoti in ingresso potrebbe non corrispondere alcun asintoto d'uscita, in quanto si viene a generare un'orbita stazionaria intorno al centro diffusore. Le traiettorie che presentano ambedue gli asintoti sono dette "*orbite di scattering*", mentre quelle che presentano il solo asintoto d'entrata sono dette "*orbite legate (o stazionarie)*". L'insieme di questi due tipi di traiettorie dà la totalità delle soluzioni del moto. Infine, tutte le proprietà che abbiamo citato e che citeremo non sono valide per ogni tipo di potenziale; abbiamo infatti bisogno di un potenziale che decresca abbastanza rapidamente all'infinito o, ad esempio, non potremo mai assimilare la traiettoria alla forma asintotica di moto libero. Non discuteremo delle caratteristiche del campo necessarie per la trattazione classica in quanto vogliamo qui darne solo un breve riassunto, per poter introdurre al meglio l'analisi quantistica del problema.

Vediamo ora di quantificare almeno in minima parte quanto appena detto. Supponiamo, per semplicità, che il centro diffusore generi un campo centrale. In questo caso si può vedere che la traiettoria del proiettile è simmetrica rispetto alla retta che congiunge il punto più vicino dell'orbita e il centro diffusore. I due asintoti formano con questa retta angoli uguali (che chiameremo  $\varphi_0$ ).



**Figura 2:** Traiettoria di un proiettile in campo centrale - FT1

L'angolo di deflessione, com'è evidente dalla **Figura 2**, sarà quindi  $\vartheta = |\pi - 2\varphi_0|$ . Un altro modo di ottenere tale angolo, non essendo nota in generale la traiettoria, è sfruttando la conservazione dell'energia totale e quella del

momento angolare. Possiamo infatti scriverlo in forma integrale come:

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{L^2}{r^2}}}$$

In cui  $r_{min}$  rappresenta la distanza minima raggiunta dal proiettile rispetto al centro diffusore ed annulla la radice al denominatore. Sfruttando le conservazioni sopra citate, sostituiamo  $E$  ed  $L$  con i valori che assumono sull'asintoto in entrata, introducendo la velocità all'infinito  $v_{\infty}$  del proiettile e il **parametro d'urto**  $\rho$ , che è il segmento perpendicolare che separa  $v_{\infty}$  dalla retta ad essa parallela passante per il centro diffusore (ossia la minima distanza dal centro che il proiettile raggiungerebbe in assenza di campo diffusore). Possiamo quindi scrivere  $E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}$  e  $L = m\rho v_{\infty}$ . Così, sostituendo nella formula per  $\varphi$  ed eguagliando alla precedente, otteniamo per l'angolo di diffusione la relazione:

$$\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_{\infty}^2}}} = \frac{\pi - \vartheta}{2} \quad (1)$$

Avendo ottenuto un'espressione per l'angolo di diffusione, possiamo ricavare l'asintoto d'uscita conoscendo quello d'entrata.

Nelle situazioni pratiche, non si ha in generale a che fare con lo scattering di un'unica particella, bensì con quello di un fascio (che supponiamo essere uniforme in ogni sua sezione). Per cui ogni particella componente il fascio avrà un diverso parametro d'urto e, di conseguenza, un diverso angolo di deflessione. Per trattare un problema di questo tipo è utile introdurre il concetto di **sezione d'urto**, definito attraverso il rapporto:

$$d\sigma = \frac{dN}{n}$$

ove  $dN$  è il numero di particelle del fascio diffuse con angolo compreso tra  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$  nell'unità di tempo e  $n$  è il numero di particelle passanti per una sezione trasversale del fascio nell'unità di tempo. Geometricamente questo rapporto rappresenta la superficie efficace che le particelle del campo devono attraversare per subire una deflessione di angolo compreso tra  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$ . Se la relazione tra  $\vartheta$  e  $\rho$  è biunivoca<sup>1</sup>, subiranno una deflessione del genere solo le particelle con parametro d'urto compreso tra  $\rho(\vartheta)$  e  $\rho(\vartheta) + d\rho(\vartheta)$ , ossia solo le particelle che incidono sulla corona circolare compresa tra le circonferenze aventi tali due raggi. Possiamo quindi scrivere  $dN = 2n\pi\rho d\rho$ .

<sup>1</sup> si può dimostrare esserlo se  $\vartheta(\rho)$  è monotona decrescente.

Da cui la sezione d'urto assume la forma:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\vartheta) \left| \frac{d\rho(\vartheta)}{d\vartheta} \right| d\vartheta \quad (2)$$

A titolo di esempio, analizziamo lo scattering di una particella carica in un campo coulombiano. Tale tipo di problema fu trattato da E.Rutherford tra il 1909 ed il 1911 nell'analizzare l'esperimento effettuato da H.W. Geiger e E. Marsden. Per riportare i risultati ottenuti da Rutherford andremo ad applicare le relazioni viste in precedenza usando un campo del tipo  $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ . Sostituendo tale tipo di campo nella formula per  $\varphi_0$ , integrando, ed isolando il parametro d'urto, otteniamo:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0$$

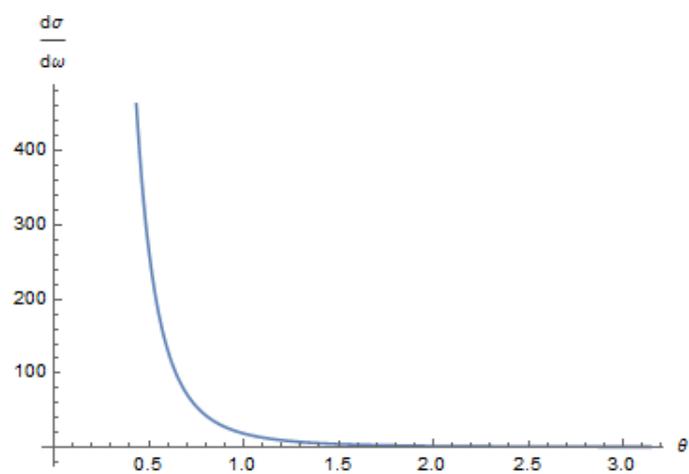
nella quale, ricordando la relazione tra  $\varphi_0$  e  $\vartheta$  possiamo sostituire  $\operatorname{tg}^2 \varphi_0 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\vartheta}{2}$ . Così da scrivere per la sezione d'urto la relazione:

$$d\sigma = \pi \left( \frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{sen}^3 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta \quad (3)$$

In realtà la formula per  $d\sigma$  è spesso scritta per un elemento di angolo solido  $d\omega$  e non di angolo piano  $d\vartheta$ . Il passaggio da una forma all'altra è però semplice ricordando che l'angolo solido tra due coni di apertura  $\vartheta$  e  $\vartheta + d\vartheta$  è dato da  $d\omega = 2\pi \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta$ . Così, la sezione d'urto può essere posta nella forma:

$$d\sigma = \left( \frac{\alpha}{m v_\infty^2} \right)^2 \frac{d\omega}{\operatorname{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (4)$$

che è nota come **Formula di Rutherford**. Pur avendo inizialmente supposto di avere un campo repulsivo, si noti che quest'ultima formula è valida sia per campi repulsivi che per campi attrattivi.



*Figura 3: Sezione d'urto Rutherford, caso classico - Mathematica*

# Capitolo 1

## Ampiezza di diffusione

Nel passaggio alla meccanica quantistica, l'analisi della diffusione subisce delle modifiche sostanziali dovute alla natura statistica della teoria. Continuiamo ad utilizzare la descrizione tipica dei problemi a due corpi, ossia ci poniamo in un riferimento in cui risulti a riposo il centro di massa del sistema e in esso studiamo il comportamento della particella di massa ridotta. Manteniamo anche la suddivisione dello spazio in zona di interazione e asintotica ed andiamo ancora una volta a studiare le grandezze d'interesse nella seconda di queste due zone. Perdiamo, invece, il concetto di traiettoria, che non sarà più determinabile a causa del principio di indeterminazione; il problema andrà quindi descritto attraverso una funzione d'onda, soluzione dell'equazione di Schrödinger che lo caratterizza. Tale funzione d'onda verrà qui scritta sempre nella sua forma asintotica. Questa, pur rappresentando il limite a distanze infinite della funzione d'onda del sistema, è in pratica approssimabile ad essa praticamente ovunque, in quanto, sia a causa della risoluzione degli strumenti attuali, sia a causa del principio di indeterminazione, non è generalmente possibile effettuare misure all'interno zona di interazione. Siano  $m$  la massa di tale particella e  $\theta$  l'angolo di diffusione, tali grandezze sono legate con le usuali relazioni alle masse e agli angoli di diffusione delle due particelle reali. Questo tipo di descrizione può applicarsi al moto di una particella qualsiasi in un campo qualsiasi, non essendo in effetti legata alla natura del proiettile o delle sorgenti di campo. La funzione d'onda  $\Psi$  descrittiva del problema in esame è data dalla combinazione lineare di quelle della particella incidente e della particella diffusa. La particella incidente è descritta da un'onda piana <sup>1</sup> del tipo :

$$\psi_i = e^{ikz} \tag{1.1}$$

La particella diffusa è invece descritta da un'onda sferica divergente nella forma

---

<sup>1</sup> la normalizzazione è scelta in modo che la densità di corrente sia pari alla velocità  $v$  delle particelle

$$\psi_d = \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \quad (1.2)$$

La funzione d'onda complessiva, nella sua forma asintotica (e quindi a grandi distanze dal centro diffusore) è data da:

$$\Psi \simeq e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \quad (1.3)$$

La sezione d'urto del processo, ottenuta dal rapporto tra la probabilità di transizione del processo e la densità di corrente dell'onda incidente è legata alla  $f(\theta)$  dalla relazione:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\omega \quad (1.4)$$

ove  $\omega$  rappresenta l'elemento di angolo solido.

La funzione  $f(\theta)$  prende quindi il nome di **Ampiezza di diffusione** del processo ed è attraverso la sua analisi che possiamo studiare il fenomeno della diffusione.

## 1.1 Onde parziali

Supponiamo di studiare la diffusione di un proiettile in un campo centrale  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ . Il problema, in questo modo, guadagna simmetria assiale rispetto alla direzione della particella incidente (che supponiamo essere l'asse  $z$ ).

La funzione d'onda potrà quindi scriversi come serie di funzioni d'onda di diverso momento angolare orbitale:

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r) \quad (1.5)$$

ove  $A_l$  sono fattori costanti scelti in modo da ottenere la forma (1.3) a grandi distanze dal centro diffusore,  $P_l(\cos\theta)$  sono i polinomi di Legendre ed  $R_{kl}$  sono le soluzioni radiali dell'equazione di *Schrödinger* per un dato  $l$ .

Le  $R_{kl}(r)$  dovranno soddisfare, quindi, l'equazione:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{kl}}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U(r) \right] R_{kl} = 0 \quad (1.6)$$

e avranno forma asintotica:

$$R_{kl}(r) \approx \frac{1}{ir} [(-i)^l e^{i(kr+\delta_l)} - i^l e^{-i(kr+\delta_l)}] \quad (1.7)$$

Imponendo l'andamento (1.3) otteniamo, quindi:

$$\Psi \approx \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) [(-1)^{l+1} e^{-ikr} + S_l e^{-ikr}] \quad (1.8)$$

con  $S_l = e^{2i\delta_l}$

(notare che i fattori in  $e^{-ikr}$  esprimono lo sviluppo in serie dell'onda piana incidente  $e^{ikz}$ ).

Dall'ultima relazione, confrontando il coefficiente del termine  $e^{ikr}$  con quello nella (1.3), otteniamo l'espressione dell'**ampiezza di diffusione**  $f(\theta)$ :

$$f(\theta) = \frac{1}{2ikr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos\theta) \quad (1.9)$$

da questa relazione, definiamo le **ampiezze di diffusione parziali**  $f_l$ , come i coefficienti dei termini dello sviluppo:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) \quad (1.10)$$

esse, sono legate agli sfasamenti  $\delta_l$  delle  $R_{kl}$ .

In questo modo, possiamo studiare l'ampiezza di diffusione attraverso le fasi  $\delta_l$  che vi compaiono.

## 1.2 Approssimazione di Born

Possiamo, in alternativa, ottenere una forma approssimata dell'**ampiezza di diffusione** sfruttando la teoria delle perturbazioni agli stati continui di M. Born. Supponiamo, a tal scopo, di poter considerare il campo diffuso come perturbazione. Il problema imperturbato si riduce allo studio del moto di una particella libera, rispondente all'equazione di Schrödinger:

$$\nabla^2 \Psi^{(0)} + k^2 \Psi^{(0)} = 0 \quad (1.11)$$

con  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar}$

Il moto imperturbato è quindi descritto, come usuale, da un'onda piana ed ammette spettro continuo. Dalla teoria di Born, possiamo calcolare la correzione al primo ordine a questa funzione d'onda attraverso l'equazione:

$$\nabla^2 \Psi^{(1)} + k^2 \Psi^{(1)} = \frac{2mU}{\hbar} \Psi^{(0)} \quad (1.12)$$

ove  $U(\mathbf{r})$  è l'energia potenziale che stiamo considerando come perturbazione e la soluzione può essere ottenuta sotto forma di "potenziali ritardati":

$$\Psi^{(1)}(x, y, z) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \Psi^{(0)} U(x', y', z') e^{ikr} \frac{dV'}{r} \quad (1.13)$$

con  $dV' = dx'dy'dz'$  e  $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$

Possiamo stimare i limiti di applicabilità di questo metodo imponendo che la correzione  $\Psi^{(1)}$  sia molto minore della funzione d'onda imperturbata:

$$\Psi^{(1)} \ll \Psi^{(0)}$$

notiamo che nella formula di  $\Psi^{(1)}$  figura il campo diffusore  $U(r)$ , per cui la regione di applicabilità della teoria dipenderà dall'ordine di grandezza delle dimensioni della regione di spazio ove il campo è sostanzialmente diverso da zero, che chiameremo  $a$ . Inoltre la condizione ottenuta dipenderà dall'energia della particella,  $ka$ . Supponiamo dapprima che tale energia sia minore o al più dell'ordine dell'unità ( $ka \lesssim 1$ ); in tal caso, il fattore  $e^{ikr}$  nella formula per  $\Psi^{(1)}$  non ha peso sul calcolo dell'ordine di grandezza di tale funzione, cosicché per esso otterremo  $\Psi^{(1)} \simeq (ma^2|U|\hbar^2)\Psi^{(0)}$ .

Imponendo quindi che  $\Psi^{(1)} \ll \Psi^{(0)}$  otteniamo la condizione:

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (1.14)$$

con  $ka \lesssim 1$

La condizione ottenuta è di facile interpretazione: ci dice, infatti, che per basse energie della particella l'ordine di grandezza del campo  $U$  deve essere molto minore di quello dell'energia cinetica di una particella racchiusa in un volume di dimensione lineari  $a$ .

Ipotizzando invece che la particella abbia energia sufficientemente elevata da avere  $ka \gg 1$ , il fattore  $e^{ikr}$  ha un peso elevato nell'integrale per  $\Psi^{(1)}$ , riducendone il valore considerevolmente. Per valutare la condizione ottenuta in questo caso, ripartiamo dall'equazione:

$$\nabla^2 \Psi^{(1)} + k^2 \Psi^{(1)} = \frac{2mU}{\hbar} \Psi^{(0)} \quad (1.15)$$

ed imponiamo che la parte perturbativa della funzione d'onda abbia la forma  $\Psi^{(1)} = e^{ikz} f(x, y, z)$  ove  $z$  è anche la direzione lungo cui supponiamo propagarsi la  $\Psi^{(0)} = e^{ikz}$ . Sviluppando  $\nabla^2 \Psi^{(1)}$ , sostituendo nella (1.5) e semplificando i termini in  $e^{ikz}$  otteniamo:

$$\nabla^2 f + 2ik \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2mU}{\hbar^2} \quad (1.16)$$

In cui, avendo effettuato l'ipotesi per cui  $ka \gg 1$ , possiamo trascurare il

termine  $\nabla^2 f$  ottenendo la relazione:

$$2ik \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2mU}{\hbar^2} \quad (1.17)$$

Dalla quale possiamo ricavare  $f(r)$  per integrazione, così da avere:

$$\Psi^{(1)} = e^{ikz} f = -\frac{im}{\hbar^2 k} e^{ikz} \int U dx \quad (1.18)$$

L'ordine di grandezza di tale integrale è  $|\Psi^{(1)}| \simeq m|U|a/\hbar^2 k$  il che ci porta alla condizione:

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka = \frac{\hbar v}{a} \quad (1.19)$$

ove  $v = \hbar k/m$  è la velocità delle particelle. Tale condizione è applicabile nel **regime di alte energie**, ossia con  $ka \gg 1$ .

Ricapitolando, possiamo sfruttare la teoria delle perturbazioni nel caso in cui il campo diffusore  $U(r)$  soddisfi una delle due condizioni:

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (1.20)$$

o

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} ka = \frac{\hbar v}{a} \quad (1.21)$$

di cui la seconda è applicabile solo a particelle sufficientemente veloci.

Per ricavare l'ampiezza di diffusione, andiamo ad analizzare la funzione d'onda, che ricerchiamo ancora nella forma  $\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)}$ . Questa volta, però, non fissiamo la direzione di propagazione dell'onda incidente, che scriveremo come  $\Psi^{(0)} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ . Al fine di riscrivere la formula di  $\Psi^{(1)}$ , introduciamo il raggio vettore  $R_0$  nel punto di osservazione di tale funzione d'onda e indichiamo con  $\mathbf{n}'$  il versore associato:

$$\Psi^{(1)}(x, y, z) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(x', y', z') e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' + kR)} \frac{dV'}{R} \quad (1.22)$$

ove abbiamo posto  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}'$

A grandi distanze dal centro diffusore, dove avremo  $R_0 \gg r'$  e, quindi,  $R \simeq R_0 - r'n'$  potremo scrivere  $\Psi^{(1)}$  nella sua forma asintotica:

$$\Psi^{(1)} \simeq -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int U(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}'} dV' \quad (1.23)$$

ove  $\mathbf{k}' = k\mathbf{n}'$  è il vettore d'onda della particella diffusa.

Confrontando la forma ottenuta di  $\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)}$  con la forma (1.3), otteniamo

un'ulteriore espressione per l'**ampiezza di diffusione**:

$$f(q) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV \quad (1.24)$$

ove il vettore  $\mathbf{q}=\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  tiene conto dell'impulso trasferito durante l'interazione ed il suo modulo è legato all'angolo di diffusione dalla relazione:

$$q = 2k \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (1.25)$$

Notiamo, prima di concludere il paragrafo, che per la forma ricavata dell'ampiezza di diffusione (a cui ci si riferisce solitamente come *approssimazione di Born*) vale la relazione:

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \quad (1.26)$$

Tale relazione ci dice che processi che si differenziano per il solo scambio dell'impulso finale e iniziale del proiettile presentano la stessa ampiezza di diffusione e, di conseguenza, la stessa sezione d'urto. Un modo ulteriore di raggiungere la stessa forma di  $f(q)$  sarebbe sfruttare la **regola aurea di Fermi**; non abbiamo qui utilizzato tale metodo poiché esso porta direttamente alla sezione d'urto, perdendo quindi informazioni sulla fase di  $f(q)$ . La formula ottenuta per l'**ampiezza di diffusione** è valida per un qualsiasi campo che soddisfi una delle due condizioni viste. Possiamo semplificare ulteriormente tale formula introducendo l'ipotesi che il campo diffusore goda di simmetria sferica. Sfruttando le coordinate sferiche e integrando sulla parte angolare, l'**ampiezza di diffusione** assume la forma:

$$f(q) = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) \frac{\operatorname{sen}(qr)}{q} r dr \quad (1.27)$$

Tale integrale, per  $q = 0$ , diverge se  $U(r)$  decresce come  $1/r^3$  o più lentamente.

### 1.3 Teoremi generali

Possiamo ricavare dei teoremi generali sull'ampiezza di diffusione utilizzando la notazione operatoriale. Per farlo scriviamo la funzione d'onda asintotica per il moto in un generico campo diffusore:

$$\psi \simeq e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}\mathbf{n}\mathbf{n}'} + \frac{f(\mathbf{n}, \mathbf{n}')}{r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (1.28)$$

ove  $\mathbf{n}$  è il versore relativo alla direzione di propagazione del fascio incidente e  $\mathbf{n}'$  quello relativo al fascio diffuso. Si noti che per un campo generico l'ampiezza di diffusione dipende da  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$  e non solo dall'angolo tra di essi. Ogni combinazione lineare di funzioni d'onda di questo tipo sarà ancora soluzione del problema, per cui costruiamo una generica soluzione moltiplicando  $\psi$  per coefficienti arbitrari  $F(\mathbf{n})$  ed integrando sull'elemento di angolo solido  $d\omega$ :

$$\Psi \simeq \int F(\mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}\mathbf{n}\mathbf{n}'} d\omega + \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') d\omega \quad (1.29)$$

Dato che stiamo considerando la forma asintotica della funzione d'onda, la

distanza  $r$  dal centro diffusore è arbitrariamente grande; ciò fa sì che nel primo integrale il fattore  $e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'}$  sia una funzione rapidamente variabile del versore  $\mathbf{n}$ . Tale integrale sarà quindi determinato sostanzialmente dai soli valori di  $\mathbf{n}$  vicini agli estremi dell'esponenziale, che si hanno in  $\mathbf{n} = \pm\mathbf{n}'$ . Così, sostituendo nel primo integrale, possiamo riscrivere la  $\Psi$  come:

$$\Psi \simeq 2\pi i F(-\mathbf{n}') \frac{e^{-ikr}}{kr} - 2\pi i F(\mathbf{n}') \frac{e^{ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{kr} \int f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') F(\mathbf{n}) d\omega \quad (1.30)$$

Introduciamo a questo punto la notazione operatoriale, definendo l'**operatore di diffusione**  $\hat{S}$  come:

$$\hat{S} = 1 + 2ik\hat{f} \quad (1.31)$$

in cui  $\hat{f}$  è l'operatore:

$$\hat{f}F(\mathbf{n}') = \frac{1}{4\pi} \int f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') F(\mathbf{n}) d\omega \quad (1.32)$$

Così, possiamo riscrivere la soluzione come:

$$\Psi \simeq \frac{e^{-ikr}}{r} F(-\mathbf{n}') - \frac{e^{ikr}}{r} \hat{S}F(\mathbf{n}) \quad (1.33)$$

In questa forma, il primo termine è un'onda convergente e il secondo una divergente, entrambe centrate sul centro diffusore. Possiamo imporre la **conservazione del numero di particelle**, che è ovviamente verificata durante la diffusione elastica, imponendo che siano uguali tra loro i flussi delle due onde nella  $\Psi$ . Affinché ciò sia vero, l'**operatore di diffusione** deve essere **unitario**:

$$\hat{S}\hat{S}^\dagger = 1 \quad (1.34)$$

Sostituendo la definizione di  $\hat{S}$  e, successivamente, quella di  $\hat{f}$  ed effettuando la moltiplicazione, possiamo ottenere la **condizione di unitarietà** direttamente per la ampiezza di diffusione nella sua forma analitica:

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') - f^*(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \frac{ik}{2\pi} \int f(\mathbf{n}, \mathbf{n}'') f^*(\mathbf{n}', \mathbf{n}'') d\theta'' \quad (1.35)$$

In questa formula, per  $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ , il primo termine si riduce alla parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione ad angolo zero ed il secondo alla sezione d'urto del processo, restituendo la relazione:

$$Im f(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \frac{k}{4\pi} \sigma \quad (1.36)$$

che prende il nome di **Teorema ottico della diffusione**.

Così come abbiamo ottenuto tale proprietà imponendo la conservazione del numero di particelle, possiamo ottenere un'altra caratteristica generale della diffusione imponendo la **simmetria per inversione temporale**. Tale simmetria, in meccanica quantistica, consiste nel fatto che se una certa funzione  $\Phi$  è uno stato possibile per

il sistema, deve esserlo anche la sua coniugata  $\Phi^*$ . Così, la funzione:

$$\Psi^* \simeq \frac{e^{ikr}}{r} F^*(-\mathbf{n}') - \frac{e^{-ikr}}{r} \hat{S}^* F^*(\mathbf{n}') \quad (1.37)$$

che è la complessa coniugata della funzione d'onda  $\Psi$  che abbiamo utilizzato in questo paragrafo come soluzione del problema, è descrittiva di un possibile processo di diffusione. Introduciamo la funzione  $\Phi(-\mathbf{n}') \equiv -\hat{S}^* F^*(\mathbf{n}')$  e l'operatore di inversione delle coordinate  $\hat{P}$  (che cambia il segno di  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$ ), così da poter scrivere (sfruttando l'unitarietà di  $\hat{S}$ ) l'equivalenza:

$$F^*(-\mathbf{n}') = -\hat{P} F^*(\mathbf{n}') = -\hat{P} \hat{S}^{*-1} \Phi(-\mathbf{n}') \equiv -\hat{P} \tilde{\hat{S}} \hat{P} \Phi(\mathbf{n}') \quad (1.38)$$

in cui abbiamo definito  $\tilde{\hat{S}} \equiv \hat{S}^{*-1}$ .

Così, sostituendo nella  $\Psi^*$  otteniamo una nuova funzione d'onda, invertita rispetto al tempo:

$$\Psi = \frac{e^{-ikr}}{r} \Phi(-\mathbf{n}') - \frac{e^{ikr}}{r} \hat{P} \tilde{\hat{S}} \hat{P} \Phi(\mathbf{n}') \quad (1.39)$$

essendo quest'ultima l'invertita della funzione d'onda che abbiamo ottenuto per inversione temporale, deve in effetti coincidere con la funzione d'onda iniziale (è questo il motivo per cui ci siamo riferiti ad essa come  $\Psi$ ). Confrontando quindi le due espressioni di  $\Psi$  otteniamo una ulteriore condizione sull'operatore di diffusione:

$$\hat{P} \tilde{\hat{S}} \hat{P} = \hat{S} \quad (1.40)$$

Questa condizione si traduce sulla forma analitica dell'ampiezza di diffusione come **Teorema di reciprocità**:

$$f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = f(-\mathbf{n}', -\mathbf{n}) \quad (1.41)$$

che ci dice che *due processi di diffusione che sono l'uno l'inverso temporale dell'altro devono avere la stessa ampiezza di diffusione*. Quindi l'inversione temporale ha il solo effetto di scambiare gli stati iniziale e finale.

## 1.4 Campi centrali

Le relazioni che abbiamo appena ricavato si semplificano nel caso consideriamo un campo diffusore centrale. Innanzitutto l'ampiezza di diffusione diventa una funzione del solo angolo di diffusione  $\theta$ , così che il teorema di reciprocità diventi semplicemente una identità. Anche la condizione di unitarietà è semplificata:

$$Im f(\theta) = \frac{k}{4\pi} \int f(\xi) f^*(\xi') d\vartheta'' \quad (1.42)$$

in cui  $\xi$  e  $\xi'$  sono gli angoli formati da  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$  con una certa direzione  $\mathbf{n}''$  dello spazio. Con tale scrittura, ancor più che con quella per campi qualsiasi, è evidente che non ogni funzione  $f(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  (o, in questo caso,  $f(\theta)$ ) può rappresentare un'ampiezza di diffusione, bensì la sua parte reale e la sua parte immaginaria devono essere legate da una determinata relazione.

Da questa forma della condizione di unitarietà, possiamo ricavare la forma che devono assumere le ampiezze di diffusione parziali in un campo centrale <sup>2</sup>.

Sfrutteremo invece un metodo più diretto, calcolando direttamente le quantità di cui abbiamo bisogno, in modo da mostrare più semplicemente le equivalenze cercate. Calcoliamo innanzitutto  $Im f_l$ :

$$f_l = \frac{1}{2ik}(e^{2i\delta_l} - 1) = -\frac{i}{2k}(\cos 2\delta_l - 1 + i \sin 2\delta_l) = \frac{\sin 2\delta_l + i(1 - \cos 2\delta_l)}{2k} \quad (1.45)$$

da cui otteniamo:

$$Im f_l = \frac{1 - \cos 2\delta_l}{2k} \quad (1.46)$$

Calcoliamo, poi, il modulo dell'ampiezza di diffusione parziale:

$$|f_l|^2 = \frac{(e^{2i\delta_l} - 1)(e^{-2i\delta_l} - 1)}{4k^2} = \frac{1 - \cos 2\delta_l}{2k^2} \quad (1.47)$$

è quindi evidente che tali grandezze sono legate dalla relazione:

$$Im f_l = k |f_l|^2 \quad (1.48)$$

Partendo da questa relazione, valutiamo  $Im \left( \frac{1}{f_l} \right)$ , da cui otterremo la forma di  $f_l$ .

Possiamo scrivere  $\frac{1}{f_l} = \frac{f_l^*}{|f_l|^2}$ , da cui:

$$Im \left( \frac{1}{f_l} \right) = Im \left( \frac{f_l^*}{|f_l|^2} \right) = \frac{Im(f_l^*)}{|f_l|^2} = -\frac{Im(f_l)}{|f_l|^2} = -k \quad (1.49)$$

così, la dipendenza di  $\frac{1}{f_l}$  da  $l$  deve essere contenuta nella sua parte reale, che deve essere una certa funzione  $g_l$ . Le ampiezze di diffusione parziali devono quindi assumere la forma:

$$f_l = \frac{1}{g_l - ik} \quad (1.50)$$

Infine, si può mostrare che  $g_l = g_l(k)$  deve essere legata alla fase  $\delta_l$  dalla relazione:

$$g_l = k \operatorname{ctg} \delta_l \quad (1.51)$$

Sempre sfruttando l'ipotesi di avere un campo diffusore centrale, possiamo legare le grandezze operatoriali introdotte in questo paragrafo a quelle scritte analiticamente nello *sviluppo in onde parziali*.

Partiamo dall'operatore  $\hat{S}$ , esso deve commutare con l'operatore momento orbitale, in quanto nel moto in un campo centrale è conservato tale momento. Ciò si riflette nella nostra trattazione con l'essere diagonale della matrice  $S$  rappresentativa

<sup>2</sup> ciò può essere fatto sfruttando lo sviluppo in armoniche sferiche dei polinomi di Legendre

$$P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (1.43)$$

si noti che la dipendenza di  $P_l$  è dal prodotto scalare tra i due vettori  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{n}'$ , ossia dall'angolo compreso tra i due e non dai due versori separati. Bisogna inoltre sfruttare lo sviluppo in  $f_l$  dell'ampiezza di diffusione, precedentemente ricavato:

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) \quad (1.44)$$

dell'operatore diffusione; considerando poi la condizione  $\hat{S}\hat{S}^\dagger$ , gli autovalori di tale matrice dovranno avere modulo unitario. Possiamo calcolarne la forma supponendo di prendere come coefficienti  $F(\mathbf{n})$  per la costruzione della soluzione  $\Psi$  i polinomi di Legendre  $P_l(\cos\theta)$ ; così facendo, la funzione d'onda

$$\Psi \simeq \frac{e^{-ikr}}{r} F(-\mathbf{n}') - \frac{e^{ikr}}{r} \hat{S}F(\mathbf{n}) \quad (1.52)$$

deve coincidere con la singola *onda parziale* dello sviluppo ottenuto nel paragrafo 1. Otteniamo quindi l'equazione agli autovalori di  $\hat{S}$ :

$$\hat{S}P_l(\cos\theta) = S_l P_l(\cos\theta) \quad (1.53)$$

Abbiamo quindi mostrato che gli autovalori di  $\hat{S}$  coincidono con le quantità  $S_l$  introdotte nel primo paragrafo, ossia assumono la forma  $S_l = e^{2i\delta_l}$

Possiamo poi mostrare come l'operatore  $\hat{f}$  sia legato all'ampiezza di diffusione. Supponiamo di avere come onda incidente un'onda piana che si propaghi lungo l'asse  $z$ ; per costruire la soluzione relativa, utilizziamo come coefficienti  $F = 4\delta_{(1-\cos\theta)}$ . Utilizzando poi lo sviluppo della delta di Dirac in polinomi di Legendre e applicando l'operatore  $\hat{f}$  si riottiene la serie trovata per l'ampiezza di diffusione  $f(\theta)$ .

## Capitolo 2

# Caso Quasi-Classico

Analizziamo l'ampiezza di diffusione ottenuta nel limite in cui il moto possa considerarsi quasi-classico. Tale approssimazione può essere applicata se la lunghezza d'onda di de Broglie della particella diffusa è piccola rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema. Proviamo ad ottenere una condizione che ne esprima i limiti di applicabilità.

Supponiamo di avere un sistema di particelle descritto dalla funzione d'onda  $\Psi$ ; essa obbedirà all'equazione di Schrödinger:

$$\sum_a \frac{\hbar^2}{2m_a} \nabla_a^2 \Psi + (E - U)\Psi = 0 \quad (2.1)$$

Sostituendo in essa la soluzione  $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}\sigma}$ , otteniamo per  $\sigma$  l'equazione seguente:

$$\sum_a \frac{1}{2m_a} (\nabla_a \sigma)^2 - \sum_a \frac{i\hbar}{2m_a} \nabla_a^2 \sigma = E - U \quad (2.2)$$

Supponiamo che questo sistema abbia caratteristiche vicine a quelle di un sistema classico, ossia che ad esso possiamo applicare l'approssimazione quasi-classica. Potremo quindi scrivere  $\sigma$  come serie di  $\hbar$  e stimare l'effettiva vicinanza del sistema al caso classico a seconda di quale sia il minimo ordine trascurabile nella serie.

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i} \sigma_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \sigma_2 + \dots \quad (2.3)$$

Limitiamoci per ora allo studio del moto unidimensionale (lungo l'asse  $x$ ) e consideriamo in  $\sigma$  il solo termine di ordine zero:  $\sigma = \sigma_0$ .

Stiamo trascurando tutti i termini che siano al più dell'ordine di  $\hbar$ , ragion per cui ci aspettiamo di ottenere soluzioni molto vicine a quelle classiche.

L'equazione di Schrödinger si riduce a:

$$\frac{1}{2m} \sigma_0'^2 = E - U(x) \quad (2.4)$$

da cui, integrando:

$$\sigma_0 = \pm \int \sqrt{2m[E - U(x)]} dx \quad (2.5)$$

Ove la funzione integranda, come atteso, non è altro che la quantità di moto classica del sistema. L'aver trascurato i termini in  $\hbar$  nell'equazione di Schrödinger è legittimo solo se essi sono piccoli rispetto agli altri, ossia se:

$$\hbar \left| \frac{\sigma''}{\sigma'^2} \right| \ll 1 \quad (2.6)$$

cioè se:

$$\left| \frac{d}{dx} \left( \frac{\hbar}{\sigma'} \right) \right| \ll 1 \quad (2.7)$$

che, essendo  $\sigma' = p$  (ove con  $p$  indichiamo la quantità di moto classica del sistema), si traduce nella condizione:

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1 \quad (2.8)$$

Tale relazione è la **condizione di quasi-classicità** cercata e asserisce che *la lunghezza d'onda della particella deve variare poco su distanze che siano del suo stesso ordine di grandezza.*

Possiamo riscrivere questa condizione attraverso la definizione classica di impulso del proiettile ( $p = \sqrt{2m(E - U)}$ ):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{2m(E - U)} = -\frac{m}{p} \frac{dU}{dx}$$

così, essendo  $\lambda = \frac{\hbar}{p}$ , possiamo scrivere la condizione di quasi-classicità in modo che sia esplicita la sua dipendenza dal potenziale di diffusione:

$$\frac{m\hbar}{p^3} \left| \frac{dU}{dx} \right| \ll 1 \quad (2.9)$$

Nel caso in cui il campo considerato fosse centrale, possiamo trovare una condizione più semplice per esprimere la quasi-classicità del sistema.

Sappiamo, innanzitutto, che la funzione d'onda in tal caso sarà separata in parte angolare e parte radiale, che potremo analizzare separatamente.

Partiamo dall'analisi della parte angolare, limitandoci al caso in cui il numero quantico  $m$  sia nullo. Otterremo una restrizione sui valori dell'angolo di diffusione.

In questo caso essa coincide con il polinomio di Legendre  $P_l(\cos\theta)$  ed è soluzione dell'equazione:

$$\frac{d^2 P_l}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dP_l}{d\theta} + l(l+1)P_l = 0 \quad (2.10)$$

che, attraverso la sostituzione  $P_l(\cos\theta) = \frac{\chi}{\sqrt{\sin\theta}}$  può essere scritta come:

$$\chi'' + \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\sin^2\theta} \right] \chi = 0 \quad (2.11)$$

ossia nella forma di una equazione di Schrödinger unidimensionale, in cui la lunghezza

d'onda di deBroglie è:

$$\lambda = \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4\text{sen}^2\theta} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

così, imponendo che la derivata spaziale di  $\lambda$  sia molto minore dell'unità, otteniamo la condizione cercata:

$$\theta l \gg 1 \quad (2.13)$$

che per  $l$  grandi è rispettata da quasi tutti i valori di  $\theta$ , a parte quelli molto vicini a 1 o  $\pi$ .

L'analisi della parte radiale, invece, limiterà la zona di applicabilità della teoria a determinati range di distanza dal centro diffusore. Sappiamo che essa può essere studiata mediante la funzione  $\varphi = rR(r)$ , che soddisfa un'equazione di Schrödinger con potenziale  $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2}$ , in cui il secondo termine è rappresentativo dell'energia centrifuga della particella.

Tale contributo si annulla nel caso in cui  $l = 0$ , così, se è soddisfatta la condizione vista in precedenza, l'approssimazione quasi-classica è valida in tutto lo spazio. In caso contrario, invece, dobbiamo includere anche l'energia centrifuga nella condizione.

È facile vedere che per piccole distanze dal centro, ciò porta alla necessità che sia  $l \gg 1$ , in quanto in tale zona l'energia centrifuga è dell'ordine dell'energia totale, per cui  $\lambda = \frac{\hbar}{p} \sim \frac{r}{l}$ , sostituita nella condizione (2.8) dà tale restrizione. Particolare menzione va fatta per il caso in cui il potenziale abbia andamento coulombiano ( $U = \pm \frac{\alpha}{r}$ ).

La zona d'interesse è quella delle distanze  $r \sim \frac{\alpha}{|E|}$ , ossia dove il potenziale e l'energia della particella sono dello stesso ordine di grandezza. Qui, scrivendo la lunghezza d'onda  $\lambda \sim \frac{\hbar}{\sqrt{2m|E|}}$  e richiedendo che sia piccola rispetto alle dimensioni di questa regione, otteniamo una condizione sull'energia della particella:

$$|E| \ll \frac{m\alpha^2}{\hbar^2} \quad (2.14)$$

che, notando che il secondo membro rappresenta l'energia della particella nella prima orbita di Bohr, è di facile interpretazione.

Per piccole distanze dal centro, ove  $U(r) \gg |E|$ , dobbiamo invece separare il caso di campo attrattivo da quello di campo repulsivo. In un campo repulsivo, infatti, la funzione d'onda decresce esponenzialmente in tale zona non rappresentando un problema.

Se il campo è invece attrattivo, è alta la probabilità che il proiettile penetri in questa regione per piccole  $l$  e dobbiamo verificare se il moto è approssimabile al caso quasi-classico. Riprendiamo quindi la condizione (2.9) e sostituiamo la forma coulombiana supposta per il potenziale, ricordando inoltre che in tale regione  $p \sim \sqrt{2m|U|} \sim \sqrt{\frac{m\alpha}{r}}$ . Otteniamo, svolgendo il calcolo, che la regione di applicabilità è ristretta alle distanze:

$$r \gg \frac{\hbar^2}{m\alpha} \quad (2.15)$$

Cioè il moto può essere considerato quasi-classico solo in regioni periferiche rispetto alla prima orbita di Bohr.

## 2.1 Calcolo delle fasi

Abbiamo calcolato, nell'approssimazione quasi-classica:

$$\sigma_0 = \pm \int \sqrt{2m [E - U(x)]} dx \quad (2.16)$$

che, sostituito nella forma  $\Psi = e^{\frac{i}{\hbar}\sigma}$  della funzione d'onda, ci dà una fase:

$$\phi_1 = \int_{r_0}^r \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} - \frac{2mU(r)}{\hbar^2}} dr + \frac{\pi}{4} \quad (2.17)$$

Nella radice abbiamo, rispettivamente, un termine cinetico, uno rotazionale ed uno dovuto all'energia potenziale. Annullando quest'ultimo, otteniamo la fase della funzione d'onda di moto libero:

$$\phi_0 = \int_{r_0}^r \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}} dr + \frac{\pi}{4} \quad (2.18)$$

Sottraendo tra loro queste due fasi e ponendo  $r \rightarrow \infty$  otteniamo la fase  $\delta_l$  del nostro sviluppo in serie:

$$\delta_l = - \int_{r_0}^{\infty} \frac{mU(r)dr}{\hbar^2 \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}} \quad (2.19)$$

che, nel caso in cui l'integrale converga (analizzeremo in seguito le condizioni necessarie affinché ciò accada), è dell'ordine di  $\frac{mU(r_0)l}{k^2\hbar^2}$

## 2.2 Condizioni di convergenza

Riprendiamo la formula (1.10) per l'ampiezza di diffusione:

$$f(\theta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta) \quad (2.20)$$

Tale formula è in linea di principio applicabile alla diffusione in un potenziale  $U(r)$  qualsiasi che si annulli all'infinito. Possiamo studiare  $f(\theta)$  attraverso le fasi  $\delta_l$  che figurano all'interno delle ampiezze di diffusione parziali:

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2ik\delta_l} - 1) \quad (2.21)$$

Studiamo tali fasi per  $l$  grandi, in modo da rientrare nei limiti di applicabilità dell'approssimazione quasi-classica, nella quale abbiamo ottenuto un'espressione esplicita per le  $\delta_l$ :

$$\delta_l = - \int_{r_0}^{\infty} \frac{mU(r)dr}{\hbar^2 \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}} \quad (2.22)$$

Com'è evidente, la convergenza delle fasi  $\delta_l$  dipende dall'andamento del campo  $U(r)$ . L'integrale nella (2.19) converge se il campo  $U(r)$  si annulla all'infinito come  $r^{-n}$  con  $n > 1$ , cosicchè le fasi risultano finite.

Sostituendo, invece, le  $\delta_l$  all'interno della serie per la sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{sen}^2 \delta_l \quad (2.23)$$

osserviamo che essa converge se il campo  $U(r)$  decresce all'infinito come  $r^{-n}$  con  $n > 2$ , in quanto per grandi  $l$  abbiamo  $\delta_l \ll 1$  (tenendo conto che il campo decresce almeno come  $r^{-1}$ ) cosicchè la serie si riduce sostanzialmente a  $\sum_{l \gg 1} l \delta_l^2$  che converge solo se il campo ha l'andamento enunciato.

Abbiamo qui sostituito direttamente nella sezione d'urto e non nell'ampiezza di diffusione per mettere in evidenza il significato della possibile non convergenza di tale grandezza.

Avere una sezione d'urto infinita significa avere interazione (che nel nostro caso si traduce in deflessione) a qualsiasi distanza d'urto incida la particella; ciò avviene in meccanica classica per qualsiasi campo che si annulli all'infinito. La particolarità della meccanica quantistica sta quindi proprio nel poter avere sezione d'urto finita anche per campi che si annullano all'infinito, a patto che abbiano un decrescenza abbastanza rapida. Ciò avviene a causa del principio di indeterminazione: l'indeterminazione sulla componente trasversale dell'impulso della particella fa sì che si possa parlare di deflessione solo per angoli abbastanza grandi ( $\theta \geq \frac{\hbar}{mv} \Delta \rho$ ).

La diffusione ad angoli piccoli con un campo  $U(r)$  lentamente decrescente assume quindi fondamentale importanza in quanto ci permette di studiare i limiti della nostra teoria. Per questo motivo, cerchiamo l'andamento di  $U(r)$  necessario affinché  $f(\theta = 0)$  converga. Il ragionamento è identico a quello fatto per la convergenza della sezione d'urto.

Presa l'espressione dell'ampiezza di diffusione:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta) \quad (2.24)$$

poniamo in essa  $\theta = 0$ ; in tal modo la sommatoria si ridurrà a  $\sum_{l \gg 1} l \delta_l$  che converge se il campo  $U(r)$  si annulla all'infinito almeno come  $r^{-3}$ .

Abbiamo detto che, nel caso in cui il campo decresca più lentamente di  $r^{-1}$ , le fasi  $\delta_l$  risultano infinite (così come la sez. d'urto e l'ampiezza di diffusione per angolo di deflessione nullo). Potremo però calcolare comunque l'ampiezza di diffusione per  $\theta \neq 0$ .

Consideriamo, all'interno della (2.24), il termine:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \quad (2.25)$$

esso, a meno di un fattore  $\frac{1}{4}$ , è una unità approssimata, per cui possiamo sostituirlo con la funzione  $4\delta_{(1-\cos\theta)}$ . Così, per tutti i termini con  $\theta \neq 0$  la somma è nulla e

può quindi essere trascurata in  $f(\theta)$ , che diventa:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l} \quad (2.26)$$

In tale equazione, possiamo moltiplicare il secondo membro per  $e^{-2i\delta_0}$ , ove  $\delta_0$  è la fase per  $l=0$ ; in tal modo elimineremo la parte divergente della fase, modificando la  $f(\theta)$  di una fase costante ed inessenziale, che non influirà sulla sezione d'urto del processo. Quindi, nel caso considerato, l'**ampiezza di diffusione** può calcolarsi come:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i(\delta_l - \delta_0)} \quad (2.27)$$

## 2.3 Limite classico

In questo paragrafo applicheremo l'approssimazione quasi-classica ai risultati ottenuti nel primo capitolo, mostrando come essa restituisca effettivamente le grandezze classiche. Inoltre, vedremo come la condizione di quasi-classicità possa essere ulteriormente modificata.

Escludiamo, però, dalla nostra analisi la diffusione ad angolo nullo.

Riprendiamo la serie ottenuta per l'ampiezza di diffusione:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l} \quad (2.28)$$

ed imponiamo che le fasi  $\delta_l$  siano grandi, così da rientrare nel limite di applicabilità dell'approssimazione quasi-classica. In questo modo, possiamo sostituire i polinomi di Legendre con la loro forma asintotica<sup>1</sup>, ottenendo per  $f(\theta)$  la forma:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{\frac{l}{2\pi \text{sen}\theta}} \left[ e^{i[2\delta_l - (l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]} - e^{i[2\delta_l + (l + \frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}]} \right] \quad (2.32)$$

<sup>1</sup> questa forma può ottenersi imponendo che i  $P_l$  siano soluzioni dell'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 P_l}{d\theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{dP_l}{d\theta} + l(l+1)P_l = 0 \quad (2.29)$$

che, può essere semplificata ricordando le condizioni di quasi-classicità; in questo range, infatti, potremo scrivere  $\text{ctg}\theta \simeq \frac{1}{\theta}$  e  $l(l+1) \simeq (l + \frac{1}{2})^2$  così, risolvendo l'equazione attraverso la funzione di Bessel di ordine zero e passando alla forma asintotica, otteniamo:

$$P_l \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{\text{sen} \left[ (l + \frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\text{sen}\theta}} \quad (2.30)$$

o, sfruttando la relazione di Eulero:

$$P_l(\cos\theta) \simeq -\frac{i}{\sqrt{2\pi l \text{sen}\theta}} \left[ e^{i[(l + \frac{1}{2})\theta + \frac{\pi}{4}]} - e^{-i[(l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]} \right] \quad (2.31)$$

L'andamento della serie è dato sostanzialmente dai valori di  $l$  vicini agli estremi dell'esponente, cioè vicini alle soluzioni di:

$$2\frac{d\delta_l}{dl} \pm \theta = 0 \quad (2.33)$$

Sostituiamo in questa equazione l'espressione trovata per le  $\delta_l$  quasi-classiche. Non utilizziamo però la forma (2.16), bensì deriviamo direttamente la differenza tra la (2.14) e la (2.15), in modo che il termine  $kr_0$  della derivata si cancelli col termine dovuto alla dipendenza dell'estremo inferiore di integrazione da  $l$ . Sostituendo poi la quantità  $\hbar(l+1/2)$ , rappresentativa del momento angolare, con il suo equivalente classico  $m\rho v$ , ove  $\rho$  è la distanza d'urto e  $v$  la velocità della particella all'infinito, l'equazione diventa:

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{U}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}} = \frac{\pi \mp \theta}{2} \quad (2.34)$$

in cui il segno negativo è preso in caso di campo repulsivo e quello positivo in caso di campo attrattivo. Si noti che, con le dovute sostituzioni, questa relazione è identica alla (1).

Possiamo mostrare con altrettanta semplicità che anche la sezione d'urto si riduce a quella classica nell'approssimazione fatta.

Consideriamo l'esponente del primo termine nella (2.32) e sviluppiamolo in potenze di  $l' \equiv l - l_0(\theta)$  (ove  $l_0(\theta)$  è ricavata dalle (2.33) e (2.34), in cui supponiamo di aver preso il segno positivo).

Scriviamo lo sviluppo di  $\delta_l$  come:

$$\delta_l \simeq \delta_l|_{l_0} + \frac{d\delta_l}{dl} l' + \frac{1}{2} \frac{d^2\delta_l}{dl^2} l'^2 + \dots$$

ove, nel nostro caso, possiamo definire  $\xi_{l_0} \equiv \delta_l|_{l_0}$ , effettuare la sostituzione  $\frac{d^2\delta_l}{dl^2} = \frac{1}{2} \frac{d\theta}{dl_0}$  (ottenuta derivando la (2.33)) e trascurare il termine relativo alla derivata prima (in quanto ci troviamo in vicinanza di un estremo).

Quindi, l'esponente può risciversi come:

$$i \left[ 2\xi_{l_0} - \left( l_0 + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{i}{2} \frac{d\theta}{dl_0} l'^2$$

Possiamo poi sostituire l'operazione di somma con l'integrazione in  $dl'$  intorno a  $l' = 0$ . Al fine del calcolo di quest'integrale, estendiamo  $l'$  al campo complesso e scegliamo come direzione di integrazione quella lungo la quale l'esponenziale decresce più rapidamente (ossia quella inclinata di  $\pm \frac{\pi}{4}$  rispetto all'asse reale).

Stiamo in sostanza ponendo  $l' = \xi e^{\pm i \frac{\pi}{4}}$  e integrando sui valori reali di  $\xi$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi}{2} \left| \frac{d\theta}{dl_0} \right|} d\xi = \left( 2\pi \left| \frac{dl_0}{d\theta} \right| \right)^{\frac{1}{2}}$$

in cui abbiamo esteso gli estremi di integrazione all'infinito data la rapida convergenza della funzione integranda.

Così, possiamo riscrivere l'ampiezza di diffusione come:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \left( \frac{l_0}{\text{sen}\theta} \left| \frac{d\theta}{dl_0} \right| \right)^{\frac{1}{2}} e^{i[2\delta_{l_0} - (l_0 + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]} \quad (2.35)$$

da cui, ricordando la definizione di **sezione d'urto**, otteniamo:

$$d\sigma = 2\pi |f|^2 \text{sen}\theta d\theta = 2\pi \frac{l_0}{k^2} \left| \frac{dl_0}{d\theta} \right| d\theta \quad (2.36)$$

che è esattamente la forma classica di  $d\sigma$  una volta definito il parametro d'urto  $\rho = \frac{l_0}{k}$ .

Per concludere il capitolo, analizziamo brevemente il significato dei risultati ottenuti.

Per poter considerare quasi-classica la diffusione ad un certo angolo  $\theta$  con parametro d'urto  $\rho$ , abbiamo visto che sono necessari grandi valori di  $l$  e  $\delta_l$ . Ciò accade perché devono essere trascurabili le indeterminazioni quantistiche su tali parametri ( $\Delta\rho \ll \rho$  e  $\Delta\theta \ll \theta$ ). L'indeterminazione sull'angolo di diffusione è legata a quella sulla componente trasversale dell'impulso ( $\Delta p$ ), mentre l'impulso è a sua volta legato al parametro d'urto. Questo ci porta a trovare una condizione che leghi questi due fattori:

$$\begin{aligned} \theta \gg \Delta\theta &\sim \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{\hbar}{p\Delta\rho} \gg \frac{\hbar}{p\rho} \\ \theta &\gg \frac{\hbar}{\rho m v} \end{aligned} \quad (2.37)$$

ove, essendo il fattore  $m v \rho$  rappresentativo del momento angolare, possiamo sostituirlo con  $\hbar l$ , riottenendo la condizione  $\theta l \gg 1$ . Possiamo valutare l'angolo di deflessione classico di una particella come il rapporto tra l'incremento trasversale  $\Delta p$  dell'impulso durante il tempo di collisione  $\tau \sim \frac{\rho}{v}$  e la quantità di moto iniziale  $m v$ . La forza agente sulla particella, quando essa è a distanza  $\rho$ , è  $F = -\frac{dU(\rho)}{f\rho}$ ; per cui possiamo scrivere  $\Delta p \sim \frac{F\rho}{v}$ , che equivale a

$$\theta \sim \frac{pF}{m v^2}$$

Questa relazione è rigorosa per  $\theta \ll 1$ , ma continua ad essere valida (nel caso si voglia semplicemente valutare l'ordine di grandezza) fino ad angoli dell'ordine dell'unità. Così, dalla condizione trovata per l'angolo, ne otteniamo un'altra per la forza (ed equivalentemente per il campo) agente sulla particella:

$$|F|\rho^2 \gg \hbar v \quad (2.38)$$

soddisfatta per tutti i valori di  $\rho$  tali che  $|U(\rho)| \leq E$ .

Per campi che decrescono all'infinito più rapidamente di  $r^{-1}$ , questa condizione non è più valida per gradi parametri d'urto.

Notando che a tali valori di  $\rho$  corrispondono piccoli  $\theta$ , possiamo asserire che, *per angoli di deflessione sufficientemente piccoli, la diffusione non ha mai comportamento classico*

## Capitolo 3

# Energie limite

In questo capitolo analizzeremo il comportamento dell'ampiezza di diffusione nel limite in cui l'energia del proiettile sia particolarmente elevata o particolarmente ridotta, introducendo rapidamente anche la possibile formazione di risonanze per questo secondo caso.

### 3.1 Alte energie

Esaminiamo il problema nel range energetico:

$$\frac{\hbar\nu}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2}ka \leq |U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}k^2a^2 \sim E \quad (3.1)$$

con  $ka \gg 1$ .

Stiamo, quindi, analizzando la diffusione di particelle veloci a cui non possiamo applicare l'approssimazione di Born.

Studiamo queste particelle nella zona di spazio  $a \ll z \ll ka^2$  e, non potendo utilizzare la forma asintotica della funzione d'onda, la scriviamo come:

$$\Psi = e^{ikz}F(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

con  $F(\mathbf{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar\nu} \int_{-\infty}^z Udz}$ .

L'intervallo di integrazione all'esponente può essere esteso all'infinito, essendo esso sostanzialmente determinato dai valori della funzione integranda all'interno della regione sopra citata. In luogo di  $F(\mathbf{r})$ , utilizziamo quindi:

$$S(\rho) = e^{2i\delta(\rho)} \quad (3.3)$$

con  $\delta(\rho) = -\frac{1}{2\hbar\nu} \int_{-\infty}^{\infty} Udz$ , ove  $\rho$  è la distanza dall'origine nel piano  $xy$  (stiamo supponendo che  $\Psi$  si propaghi lungo l'asse  $z$ ).

É proprio a tale piano che possiamo considerare appartenere l'impulso trasferito  $\hbar\mathbf{q}$ , poichè, essendo la diffusione di particelle veloci sostanzialmente limitata ad angoli piccoli, possiamo supporre che tale vettore sia perpendicolare al vettore d'onda  $\mathbf{k}$  dell'onda incidente, oltre ad avere dimensioni ridotte ( $\mathbf{q} \ll \mathbf{k}$ ).

L'ampiezza di diffusione relativa al vettore d'onda  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$  sarà proporzionale alla trasformata di Fourier dell'onda diffusa, che otteniamo come differenza tra la

$\Psi$  utilizzata e quella dell'onda incidente ( $e^{ikr}$ ):

$$f \sim \int [S(\rho) - 1] e^{-i\mathbf{q}\rho} d^2\rho \quad (3.4)$$

Si può mostrare che il fattore di proporzionalità è  $\frac{k}{2\pi i}$ . Applicando il teorema ottico, dal valore di  $f$  per  $\theta = 0$ , ossia per  $\mathbf{q} = 0$ , otteniamo la sezione d'urto, come:

$$\sigma = \int 2\text{Re}(1 - S)d^2\rho = \int 4\text{sen}^2\delta(\rho)d^2\rho \quad (3.5)$$

La validità di questa formula non è ridotta a campi centrali, ma per tali tipi di campo possiamo ottenerla direttamente dalla formula esatta dell'ampiezza di diffusione ottenuta nel primo capitolo.

## 3.2 Basse energie

Andiamo ora ad analizzare l'ampiezza di diffusione nel caso in cui la particella incidente abbia velocità tale da rendere la lunghezza d'onda grande rispetto al raggio d'azione del campo in cui avviene l'interazione, cioè imponiamo la condizione  $ka \ll 1$  ove  $a$  è il raggio d'azione di  $U(r)$ .

Il primo passo della nostra analisi sta nel trovare la funzione d'onda da utilizzare, in particolare siamo interessati ad ottenerne la parte radiale  $R_l(r)$ .

Essa dovrà, in generale, soddisfare l'equazione differenziale:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar} U(r) \right] R_l = 0 \quad (3.6)$$

A seconda della regione in cui analizziamo questa equazione, possiamo semplificarla in diversi modi, ottenendo diverse soluzioni che poi raccorderemo.

L'unica ipotesi di partenza da fare sul campo diffusore è che decresca abbastanza rapidamente da rendere lecite tutte le approssimazioni che faremo (specificheremo in seguito più precisamente quale debba essere la pendenza minima).

Nella regione  $r \leq a$ , possiamo trascurare solo il termine in  $k^2$ , ottenendo l'equazione:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ -\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar} U(r) \right] R_l = 0$$

Nella regione  $a \ll r \ll \frac{1}{k}$ , invece, possiamo trascurare anche il termine in  $U(r)$  oltre quello in  $k^2$  ottenendo l'equazione:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_l = 0$$

La cui soluzione generale è:

$$R_l = c_1 r^l + \frac{c_2}{r^{l+1}} \quad (3.7)$$

ove le costanti  $c_1$  e  $c_2$  dipendono dal campo  $U(r)$  e dal valore di  $l$ .

A distanze ancora più elevate ( $r \sim \frac{1}{k}$ ) possiamo trascurare unicamente il termine

in  $U(r)$  e non quello in  $k^2$ , così da ottenere l'equazione del moto libero:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0$$

Infine, nell'zona in cui  $kr \gg 1$  la soluzione assume la forma asintotica:

$$R_l \sim \frac{A}{r} \text{sen} \left( kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l \right) \quad (3.8)$$

ove le fasi  $\delta_l$  risultano proporzionali a  $k^{(2l+1)}$  e piccole, essendo tale quest'ultimo. Presa la definizione delle ampiezze di diffusione parziali:

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1)$$

ed essendo le fasi  $\delta_l$  piccole, possiamo sviluppare l'esponente in serie e trascurare tutti i termini superiori al primo, ottenendo:

$$f_l \simeq \frac{\delta_l}{k}$$

o, ricordando l'andamento predetto per le  $\delta_l$ :

$$f_l \sim k^{2l} \quad (3.9)$$

Così, essendo  $k$  piccolo, tutte le ampiezze parziali con  $l \neq 0$  saranno molto inferiori dell'ampiezza  $f_0$  e potremo trascurarle. L'ampiezza di diffusione sarà quindi approssimabile alla sola ampiezza  $f_0$ , risultando così costante e indipendente dall'energia:

$$f(\theta) \simeq f_0 \equiv -\alpha \quad (3.10)$$

Tale valore costante, che indichiamo con  $\alpha$ , assume il nome di *lunghezza di diffusione*.

Analizziamo più approfonditamente le caratteristiche necessarie ad  $U(r)$  affinché le approssimazioni fatte siano legittime.

Ad esempio, nella soluzione (3.7) abbiamo tenuto entrambi i termini, pur essendo il secondo più piccolo rispetto al primo. Ciò è lecito a patto che, sostituendo nell'equazione differenziale da cui abbiamo ottenuto tale soluzione, il termine  $\frac{c_2}{r^{l+3}}$  sia ancora grande rispetto al termine trascurato per ottenere tale equazione. Ossia, deve essere rispettata la relazione:

$$\frac{c_2}{r^{l+3}} \gg U c_1 r^l \quad (3.11)$$

che mostra la validità delle approssimazioni fatte se il campo decresce più rapidamente di  $r^{-(2l+3)}$ .

In particolare, visto che abbiamo approssimato l'ampiezza di diffusione totale all'ampiezza di diffusione con  $l = 0$  (*ampiezza di diffusione s*), il campo deve decrescere più rapidamente di  $r^{-3}$  (notare come questo sia esattamente quanto ottenuto nel paragrafo 2.2).

Possiamo però fare delle previsioni sui casi in cui la nostra approssimazione non è valida.

Preso ad esempio un campo che decresce come  $r^{-n}$  con  $n \leq 1$ , se la particella ha velocità sufficientemente piccole, la condizione di quasi-classicità del moto

$$\rho|U(\rho)| \gg \hbar v$$

(ove  $\rho$  è il parametro d'urto e  $v$  la velocità all'infinito della particella) è soddisfatta da quasi tutti i valori di  $\rho$ , per cui possiamo trattare la diffusione come visto in precedenza.

Nel caso di  $1 < n < 2$  tale condizione è ancora soddisfatta solo per  $\rho$  sufficientemente piccoli. Così, data l'inversa proporzionalità tra le due grandezze, la diffusione è ancora quasi-classica per angoli di diffusione  $\theta$  non piccoli. Per tale tipo di campo, inoltre, c'è un intervallo di valori di  $\rho$  in cui è applicabile l'approssimazione di Born, ossia in cui si ha:

$$\rho|U(\rho)| \ll \hbar v$$

Considerando invece un campo che decresce con  $2 < n < 3$ , si verifica la condizione:

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{mr^2}$$

a patto che sia elevata la distanza dal centro diffusore.

Per questo motivo a tali distanze è ancora applicabile l'approssimazione di Born. Fissiamo  $r = r_0$  in modo che sia applicabile la teoria delle perturbazioni e supponiamo che per tale distanza risulti anche  $r_0 \ll \frac{1}{k}$ .

Possiamo calcolare l'ampiezza di diffusione attraverso la formula ricavata nel paragrafo 1.3:

$$f = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty U(r) \frac{\sin qr}{qr} r^2 dr \quad (3.12)$$

Sostituendo il campo con  $U(r) \simeq \beta r^{-n}$ , vediamo che tale integrale converge per velocità piccole e possiamo estendere il limite inferiore a zero. In tale range otteniamo che l'ampiezza di diffusione è proporzionale a  $q^{n-3}$  (che notiamo essere una potenza negativa dell'impulso, essendo  $n < 3$ ).

Resta da analizzare il caso in cui si abbia  $n = 3$ .

L'integrale nella formula di Born è ora divergente nel limite inferiore di integrazione, con andamento logaritmico, possiamo però ancora scrivere l'ampiezza di diffusione come proporzionale a tale contributo ( $f \sim \ln\left(\frac{A}{q}\right)$ ).

### 3.3 Risonanza con livelli discreti

Caso particolare della diffusione a basse energie è quella in cui il sistema presenti uno stato  $s$  poco profondo e, quindi, vicino all'energia della particella. Supponiamo di avere un sistema di tale tipo e che sia  $\epsilon < 0$  l'energia di tale stato, piccola rispetto all'intensità che il campo  $U(r)$  ha nel suo raggio di azione  $a$ . Prendiamo l'equazione di Schrödinger per  $l = 0$ :

$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(r)] \chi = 0$$

ove abbiamo, come usuale, definito  $\chi = rR_0(r)$ .

All'interno del raggio d'azione del campo, possiamo trascurare l'energia della par-

ticella in tale equazione, ottenendo la forma approssimata:

$$\chi'' - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\chi = 0 \quad (3.13)$$

All'esterno della regione in cui il campo è significativamente non nullo, possiamo invece trascurare quest'ultimo rispetto all'energia della particella, ottenendo l'equazione del moto libero.

Le soluzioni di queste due equazioni devono poi essere raccordate per un certo  $r_1$  nella zona  $\frac{1}{k} \gg r_1 \gg a$  attraverso la continuità del rapporto  $\frac{\chi'}{\chi}$ ; bisogna inoltre imporre nella zona interna l'ulteriore condizione di continuità  $\chi(0) = 0$ .

Invece di analizzare il problema nella zona interna, per poi saldare le due soluzioni, andiamo direttamente ad applicare sulla soluzione della zona esterna una condizione al contorno che tenga conto del moto per piccoli  $r$ . Tale condizione dovrà essere indipendente dall'energia della particella, in quanto essa è stata trascurata nella zona interna, la scriviamo quindi:

$$\left. \frac{\chi'}{\chi} \right|_{r \rightarrow 0} = -\tau \quad (3.14)$$

Essendo  $\tau$  una costante indipendente da  $E$ , quest'ultima relazione è ancora valida per la soluzione relativa ad un'energia negativa piccola  $E = -\epsilon$ , come quella dello stato discreto ipotizzato. Prendiamo quindi la soluzione del moto libero in cui supponiamo essere  $E = -\epsilon$ , e sostituiamola nella condizione (3.14); otteniamo così la forma che deve avere  $\tau$  perchè il nostro ragionamento sia valido:

$$\tau = \frac{\sqrt{2m|\epsilon|}}{\hbar} \quad (3.15)$$

Quindi, applichiamo la condizione (3.14) alla soluzione della zona esterna (che è la  $\chi$  del moto libero) e sostituiamo questo valore di  $\tau$ :

$$\left. \frac{\chi'}{\chi} \right|_{r \rightarrow 0} = \frac{k \cos \delta_0}{\sin \delta_0} = k \operatorname{ctg} \delta_0 = -\tau \quad (3.16)$$

da cui possiamo ottenere la relazione tra la fase e l'energia:

$$\operatorname{ctg} \delta_0 = -\frac{\tau}{k} = -\sqrt{\frac{|\epsilon|}{E}} \quad (3.17)$$

Potendo essere l'energia anche grande rispetto ad  $|\epsilon|$ , la fase relativa ad  $l = 0$  (e con essa l'ampiezza di diffusione  $s$ ) può assumere valori elevati. Le ampiezze e le fasi relative ad  $l > 0$  continueranno invece ad essere trascurabili. Possiamo quindi ancora approssimare l'ampiezza di diffusione totale all'ampiezza di diffusione  $s$ , che assumerà la forma:

$$f = -\frac{1}{\tau + ik} \quad (3.18)$$

ottenuta dal confronto tra la formula generale e la (1.50) in cui abbiamo sostituito  $\operatorname{ctg} \delta_0$  dalla precedente.

Dall'ampiezza di diffusione, otteniamo la sezione d'urto in funzione dell'energia

come:

$$\sigma = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{E + |\epsilon|} \quad (3.19)$$

Si vede in quest'ultima che l'isotropia della diffusione è mantenuta, ma nella sezione d'urto compare una dipendenza dall'energia tale da farla risultare grande rispetto al quadrato del raggio d'azione del campo per valori di  $E$  vicini ad  $|\epsilon|$  (regione di risonanza).

# Conclusione

Concludiamo questo studio illustrando la validità dei risultati ottenuti. A tal fine analizziamo ancora una volta lo scattering coulombiano, mostrando che la teoria introdotta descrive bene questo tipo di problema, in quanto restituisce un'espressione simile a quella ottenuta da Rutherford con l'analisi classica. Il modo più semplice per farlo è sfruttare l'approssimazione di Born introdotta nel capitolo 1. Utilizzeremo, in particolare, la formula (1.27) per ottenere l'ampiezza di diffusione, da cui possiamo poi calcolare la sezione d'urto. Per prima cosa notiamo che il potenziale coulombiano non decresce abbastanza rapidamente per poter essere utilizzato nella nostra teoria, in quanto esso si annulla all'infinito come  $r^{-1}$ . Introduciamo, quindi, il **potenziale di Yukawa**, nella forma:

$$U(r) = A \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

con  $A = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}$  e  $\mu$  costante e positivo.

Esso è sostanzialmente un potenziale schermato, che approssima bene quello Coulombiano nella regione di interazione e decresce più rapidamente all'esterno.

Utilizzando questo tipo di  $U(r)$  non abbiamo problemi di convergenza nelle nostre formule e rientriamo nei limiti di applicabilità dell'approssimazione di Born.

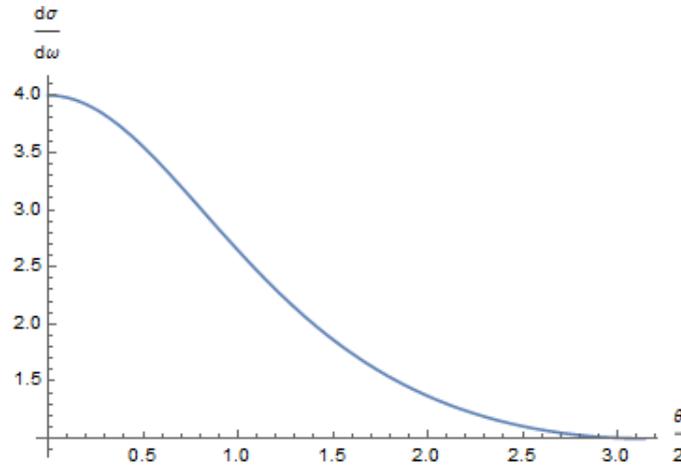
Calcoliamo quindi l'ampiezza di diffusione:

$$f(q) = -\frac{2Am}{\hbar} \int_0^\infty \frac{\sin qr}{q} e^{-\mu r} dr = -\frac{2Am}{\hbar q} \int_0^\infty \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2i} e^{-\mu r} dr = -\frac{2Am}{\hbar^2(\mu^2 + q^2)} \quad (3.20)$$

Sostituendo  $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ , possiamo calcolare la sezione d'urto come:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{4A^2 m^2}{\hbar^4(\mu^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2} \quad (3.21)$$

Valutiamo graficamente l'andamento di tale sezione d'urto fissando a valore unitario i parametri costanti. Ciò è lecito in quanto non siamo interessati ai valori effettivi della sezione d'urto, bensì vogliamo mostrare di aver riottenuto una forma molto simile a quella classica.

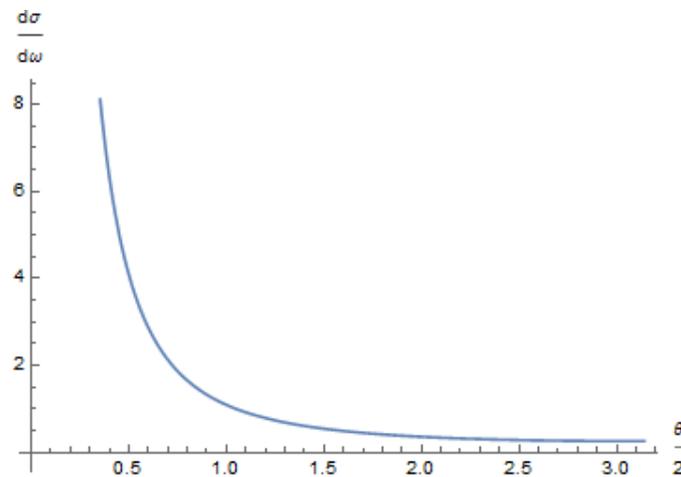


**Figura 3.1:** Andamento della sezione d'urto Rutherford - Mathematica

La mancata divergenza per  $\theta = 0$  è un effetto dovuto all'aver introdotto il potenziale di Yukawa; inoltre l'andamento è sempre dipendente da  $\frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}}$ , ma smorzato a causa del doppio prodotto che compare al denominatore.

Nel caso di grandi impulsi trasferiti ( $q^2 \gg \mu^2$ ), invece, potendo trascurare  $\mu^2$  nell'ampiezza di diffusione, otteniamo una forma per la sezione d'urto del tutto simile a quella classica:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \simeq \frac{A'^2}{4} \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.22)$$



**Figura 3.2:** Andamento della sezione d'urto Rutherford per grandi impulsi trasferiti - Mathematica

Questo risultato è un buon indicatore della consistenza della teoria ricavata, in quanto mostra che nel limite in cui l'urto si avvicina al caso classico (per grandi impulsi trasferiti è rispettata la condizione di quasi-classicità), l'andamento è effettivamente quello atteso dalla teoria classica.

# Bibliografia

- [1] E. Lifschis L. Landau. *Fisica Teorica [Vol 01] (Meccanica)*. MIR, 1976.
- [2] E. Lifschis L. Landau. *Fisica Teorica [Vol 03] (Mecc. Quantistica)*. MIR, 1976.
- [3] M. Napolitano. *Elementi di fisica nucleare e subnucleare*. 2013.
- [4] John Robert Taylor. *Scattering Theory The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*. Wiley, 1972.