

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Paradosso EPR e No Transmission Theorem

Relatori:

Prof. Luigi Rosa

Candidato:

Davide Rattacaso

Matricola N85000674

A.A. 2016/2017

Indice

1	Il paradosso EPR: la M.Q. fornisce una descrizione completa della realta'?	2
1.1	Introduzione	2
1.2	Gli stati entangled	3
1.3	Alcune definizioni	5
1.4	Il paradosso	6
1.5	La versione di Bohm	7
1.6	Conclusioni	9
2	Il teorema di Bell	10
2.1	Introduzione	10
2.2	L'esperimento mentale di Mermin	10
2.3	Il caso della meccanica quantistica	13
2.4	La disuguaglianza CHSH	17
2.5	L'esperimento di Aspect	19
3	No Transmission Theorem	24
3.1	Introduzione	24
3.2	No Transmission Theorem	25
	Appendici	28
A	Simulazione dell'esperimento di Bohm	29
B	L'operatore di densità e la traccia ridotta	31

Capitolo 1

Il paradosso EPR: la M.Q. fornisce una descrizione completa della realtà?

1.1 Introduzione

Spesso, nel raccontare la proverbiale avversione di Albert Einstein per la meccanica quantistica, si fa ricorso ad una sua citazione che, riportata in modo più completo, recita «*la meccanica quantistica è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. È una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare più a fondo il segreto del Grande Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi col mondo.*»[6]. Lo scienziato appare così rifiutare il carattere probabilistico della teoria, anche a rischio di chiudersi in un atteggiamento ottuso, quasi a voler dire alla natura in che modo comportarsi o, volendo usare le parole di una celebre risposta di Bohr, dire a Dio cosa fare dei suoi dadi. L'obiezione di Einstein è in realtà tutt'altro che un pregiudizio. Si tratta piuttosto di un'intuizione molto profonda, seppur scorretta, sul rischio che la teoria fosse incompleta e sulla necessità di cercare una teoria che la completasse. Einstein non teme infatti che la teoria sia sbagliata, ma contesta l'idea predominante nella comunità scientifica, cioè che essa descriva *a fondo* la natura. Un conto è affermare che *non riusciamo a determinare* contemporaneamente posizione e traiettoria di una particella, tutt'altro è dire che la traiettoria *non è una sua proprietà, non esiste* e che, come vuole il postulato del collasso del pacchetto d'onda, la posizione della particella sia definita nell'atto della sua misurazione. Questo, agli occhi di Einstein, è come affermare che «la Luna esiste solo mentre la sto guardando». I sospetti dello scienziato, a lungo discussi nella sua corrispondenza epistolare con Bohr, trovano un'apparente prova quando, nel 1935, egli pubblica, insieme a Boris Podolsky e Nathan Rosen, un articolo in cui dimostra tramite un celebre paradosso l'incompletezza della meccanica quantistica[1]. Alla base della prova dei tre scienziati vi è un'ipotesi tanto

fondamentale da sembrare irrinunciabile per qualsiasi teoria fisica sensata, e dunque anche per la meccanica quantistica: il principio di località. Scriverà più tardi Einstein in una delle sue lettere a Bohr: «*Ciò che esiste realmente in B dovrebbe [...] essere indipendente da quale misura venga fatta in una parte dello spazio A; dovrebbe essere anche indipendente dal fatto che sia fatta o meno una qualche misura in A. Se si aderisce a questo programma, si può difficilmente considerare la descrizione della teoria quantistica come una rappresentazione completa della realtà fisica. Se a dispetto di ciò uno prova comunque a farlo, allora deve assumere che la realtà fisica in B subisca un repentino cambiamento a causa della misura in A. Questo irrita il mio senso fisico*»[9].

1.2 Gli stati entangled

Vero cuore della dimostrazione di E.P.R. e di tutto il dibattito che essa ha generato sono gli stati *entangled*, letteralmente *intrecciati*. E' infatti l'esistenza di tali stati, unita al postulato del collasso del pacchetto d'onda, ad implicare, come vedremo, o la presenza di una «*spaventosa azione a distanza*» oppure, negando tale possibilità come si fa nella formulazione del paradosso, l'incompletezza della M.Q.. Non c'è quindi da stupirsi se il termine *entangled* fu coniato da Schrödinger nel 1935 proprio in una recensione del paradosso E.P.R.[13]

Illustriamo ora la forma matematica degli stati entangled e le sue conseguenze. Siano A e B due sistemi non interagenti, ciò significa che l'Hamiltoniana totale dei due sistemi potrà essere scritta come somma delle Hamiltoniane dei singoli sistemi:

$$H = H_1 + H_2 \quad (1.1)$$

con H_1 e H_2 che operano su spazi di Hilbert differenti H_A e H_B . Allora, detti $|\psi\rangle_A \in H_A$ e $|\psi\rangle_B \in H_B$ gli stati del primo e del secondo sistema, lo stato complessivo dell'unione dei due sistemi sarà il prodotto tensoriale dei due stati:

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \quad (1.2)$$

Se allora Γ è un'osservabile di A e Δ un'osservabile di B, dette $|i\rangle_\Gamma$ e $|j\rangle_\Delta$ le basi di autostati associate rispettivamente ai due osservabili e $\{\gamma_i\}$ e $\{\delta_j\}$ i rispettivi set di autovalori potremo scrivere:

$$|\psi\rangle = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i |i\rangle_\Gamma \right) \otimes \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j |j\rangle_\Delta \right) \quad (1.3)$$

Uno stato che può essere scritto in questa forma è detto *stato separabile*. Si noti che se a questo punto si effettua una misura dell'osservabile $\Gamma \otimes \mathbb{1}$ e successivamente una misura dell'osservabile $\mathbb{1} \otimes \Delta$ le probabilità associate ai possibili risultati di quest'ultima misura non sono influenzate dalla prima misura. Infatti se dalla prima misura si ottiene l'autovalore $\gamma_{i'}$ lo stato viene proiettato sull'autospazio associato assumendo la forma

$$|\psi'\rangle = |i'\rangle_{\Gamma} \otimes \sum_{j=0}^{\infty} b_j |j\rangle_{\Delta} \quad (1.4)$$

per cui la probabilità di misurare $\delta_{j'}$ nella seconda misurazione sarà il modulo quadro del coefficiente associato al corrispondente autovettore $|i'j'\rangle$ di $\mathbb{1} \otimes \Delta$ (si ricordi che qualsiasi vettore $|i\rangle$ è autovettore dell'identità)

$$|\langle i'j'|\psi'\rangle|^2 = |\langle i'|i'\rangle_{\Gamma} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j \langle j'|j\rangle_{\Delta}|^2 = |b_{j'}|^2 \quad (1.5)$$

che è indipendente da i . In questo modo una misurazione sul sistema A, che potrebbe essere arbitrariamente lontano da B, non influenza lo stato di B, non generando alcuna apparente contraddizione col principio di località.

Tuttavia lo stato più generale possibile per il nostro sistema complessivo è espresso da una combinazione lineare dei prodotti tensoriali delle autofunzioni delle sue osservabili e si scrive dunque:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} (|i\rangle_{\Gamma} \otimes |j\rangle_{\Delta}) \quad (1.6)$$

Non sempre l'espressione (1.6) può essere riscritta come (1.3) poiché non è detto che data la matrice c_{ij} esistano i vettori a_i e b_j tale che $c_{ij} = a_i b_j$. In questo caso si dice che lo stato non è separabile ma è uno *stato entangled* e non è più possibile dimostrare l'impossibilità di influenzare B con una misura fatta su A. Infatti dopo la prima misura e la conseguente proiezione lo stato assume la forma::

$$|\psi'\rangle = |i'\rangle \langle i'|\psi\rangle = \sum_j c_{i'j} (|i'\rangle_{\Gamma} \otimes |j\rangle_{\Delta}) \quad (1.7)$$

Da cui otteniamo una probabilità di misurare $\delta_{j'}$ uguale a

$$|\langle i'j'|\psi'\rangle|^2 = \left| \sum_j c_{i'j} \langle i'|i'\rangle_{\Gamma} \cdot \langle j'|j\rangle_{\Delta} \right|^2 = |c_{i'j'}|^2 \quad (1.8)$$

che è dipendente da i' e dunque dalla misura effettuata su A.

Esistono a questo punto due possibili vie di interpretazione: se si accetta che la realtà fisica (tutto ciò che può essere conosciuto con arbitraria precisione dagli esperimenti) sia totalmente descritta dagli stati, dobbiamo ammettere che la misura in A ha istantaneamente mutato la realtà fisica in B, trasmettendo l'informazione «è stata effettuata una misura» a velocità infinita, se vogliamo invece salvare la teoria dalle assurde conseguenze che potrebbero nascere dall'azione a distanza dovremo negare che la descrizione data dagli stati A e B sia completa. Quest'ultima fu l'idea di Einstein, Podolsky e Rosen.

1.3 Alcune definizioni

Prima di illustrare il paradosso nella forma data dagli autori è necessario stabilire alcune definizioni.

Seguendo la definizione data nell'articolo di E. P. ed R.[1], chiameremo **completa** una teoria che contiene la rappresentazione formale di ogni **elemento di realtà** e considereremo un elemento di realtà qualsiasi grandezza fisica per la quale sia possibile in linea di principio prevedere con esattezza il valore che si misurerebbe in un esperimento che non perturbi il sistema. Affermare quindi che una teoria è completa significa affermare che in essa compaiono tutte le proprietà oggettive del sistema. Affermare che la teoria è incompleta equivale ad affermare che esistono **variabili nascoste**, elementi di realtà che essa omette arrivando di conseguenza a conclusioni di carattere solamente statistico.

Definiamo **principio di località** il principio fisico secondo cui nessuna azione fisica che coinvolge un determinato sistema A può influenzare istantaneamente lo stato di un secondo sistema B lontano dal primo. La Relatività Ristretta, nel postulare che *nessuna informazione può viaggiare più veloce della luce*, implica già tale principio. Tuttavia la necessità di questo principio pare essere ancora più profonda poiché riguarda la stessa possibilità di verificare empiricamente i principi su cui si fondano le teorie. Citando Albert Einstein «*se questo assioma venisse ad essere completamente abolito, l'idea dell'esistenza di sistemi quasi-chiusi, e perciò la postulazione delle leggi che possono essere verificate empiricamente nel senso accettato, diverrebbe impossibile.*»[7]. Si dice **locale** una teoria che rispetta questo principio. Le teorie di campo, ad esempio, sono teorie locali: in esse l'interazione fra regioni di spazio distanti è mediata da un campo che si propaga a velocità finita. Il fatto che la meccanica quantistica debba essere locale è dato per scontato dai tre autori nella dimostrazione del paradosso.

1.4 Il paradosso

Partiamo col notare che se la meccanica quantistica è una teoria completa allora due osservabili che non commutano non possono essere elementi di realtà: se fossero tali la teoria, essendo completa, dovrebbe predirne con certezza il valore. Dunque **o la meccanica quantistica non è completa oppure posizione e momento non sono contemporaneamente elementi di realtà**. Dopo aver assunto che la meccanica quantistica sia completa, sottintendendo la validità del principio di località, i tre autori dimostrano che due quantità fisiche che non commutano possono avere realtà simultanea, il che è in contraddizione con l'ipotesi di partenza e ci spinge a credere che la teoria in esame sia incompleta.

Procediamo con la dimostrazione. Siano I e II due sistemi fisici che supporremo, per semplicità, unidimensionali. Supponiamo che tali sistemi siano stati in interazione e successivamente si siano considerevolmente allontanati. Dopo l'interazione il sistema sarà descritto da un'unica funzione $\Phi(x_1, x_2)$.

Sia A un'osservabile associato al sistema I e $\{\phi_1(x_1); \phi_2(x_1); \phi_3(x_1)...\}$ un sistema ortonormale completo di autovettori dell'osservabile di autovalori $\{a_1; a_2; a_3...\}$. Sia B un altro osservabile di I e $\{\varphi_1(x_2); \varphi_2(x_2); \varphi_3(x_2)...\}$ un sistema ortonormale completo di autovettori dell'osservabile di autovalori $\{b_1; b_2; b_3...\}$. Sarà allora possibile rappresentare $\Phi(x_1, x_2)$ nelle due basi suddette:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x_2) \phi_n(x_1) \quad (1.9)$$

e

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x_2) \varphi_n(x_1) \quad (1.10)$$

dove $u_n(x_2)$ e $v_n(x_2)$ sono i coefficienti di Fourier nelle rispettive basi.

Supponiamo ora di effettuare una misura dell'osservabile A e misurare a_i . Per il postulato del collasso del pacchetto d'onda lo stato del sistema diverrà $\Phi(x_1, x_2) = \phi_i(x_1) u_i(x_2)$, il che equivale a dire che i due sistemi si trovano rispettivamente negli stati $\phi_i(x_1)$ e $u_i(x_2)$. Tuttavia, se anziché misurare A misurassimo B ottenendo l'autovalore b_j i due sistemi verrebbero rispettivamente proiettati negli stati $\varphi_j(x_1)$ e $v_j(x_2)$. Tale proiezione avviene all'istante stesso della misura e i due sistemi sono lontani fra loro e dunque -e qui interviene il principio di località- ciò che avviene in I non può cambiare istantaneamente alcun elemento di realtà del sistema II. Questo significa che le funzioni $u_i(x_2)$ e $v_j(x_2)$, che devono rappresentare ciascuna *tutti* gli

elementi di realtà del sistema II per la completezza della M.Q., rappresentano gli stessi elementi di realtà. *Dunque tramite questo processo di proiezione generiamo stati quantistici che rappresentano la stessa realtà fisica.*

Supponiamo ora che il nostro sistema sia costituito da due particelle e che la nostra funzione di stato di partenza sia

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)} dp$$

e siano A e B rispettivamente gli operatori Q e P (posizione e momento) della prima particella che, come sappiamo, non commutano.

Se misuriamo la posizione della prima particella ottenendo X_1 lo stato della seconda particella diverrà il coefficiente di Fourier di Φ rispetto all'autostato $\delta(x - X_1)$ di Q, cioè:

$$u(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}(X_1 - x_2 + x_0)} dp = 2\pi\hbar\delta(x_2 - X_1 - x_0)$$

che è autostato dell'operatore Q' di posizione della seconda particella di autovalore $X_1 + x_0$. E' quindi possibile prevedere con esattezza la posizione della seconda particella: essa è un elemento di realtà.

Se ora misuriamo il momento della prima particella ottenendo P_1 lo stato della seconda particella diverrà il coefficiente di Fourier di Φ rispetto all'autostato $e^{i\frac{P_1}{\hbar}x_1}$ di Q, cioè:

$$v(x_2) = e^{i\frac{P_1}{\hbar}(x_0 - x_2)}$$

che è a sua volta autostato dell'operatore P' di momento della seconda particella di autovalore $-P_1$. Possiamo allora prevedere con esattezza il momento della seconda particella: esso è un elemento di realtà.

Abbiamo così mostrato che è possibile ottenere due stati che siano autostati di operatori che non commutano e rappresentino tuttavia la stessa realtà fisica. Poiché allora i valori delle grandezze associate agli operatori sono elementi di realtà di due stati che rappresentano la stessa realtà, essi sono simultaneamente elementi di realtà, e la meccanica quantistica, che non è in grado di prevederli contemporaneamente, non fornisce una descrizione completa della realtà.

1.5 La versione di Bohm

Analizziamo ora una versione del paradosso dovuta a David Bohm[4]. Tale versione è perfettamente identica all'originale dal punto di vista delle conse-

guenze ma più semplice sul piano formale e molto più vicina agli esperimenti realmente fatti sul paradosso negli anni successivi.

Supponiamo di avere una molecola biatomica di spin totale $S=0$. Scindiamo tale molecola nei suoi due atomi tramite un'interazione che non ne alteri lo spin totale. La parte in spin dello stato del sistema costituito dai due atomi separati è uno stato entangled. Nella base dei rispettivi spin lungo l'asse z S_{Z1} ed S_{Z2} si scrive come:

$$\phi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_+(1)u_-(2) - u_+(2)u_-(1)] \quad (1.11)$$

dove il significato della notazione è ovvio. Questa funzione rappresenta due possibilità: o la prima particella si trova nello stato di spin up e la seconda di spin down o viceversa.

Supponiamo di misurare, quando le particelle sono abbastanza lontane da non poter interagire in tempo breve, lo spin lungo z della particella 1 ed ottenere $\frac{\hbar}{2}$, possiamo allora essere certi che lo spin della particella 2 misurato con arbitraria precisione è $-\frac{\hbar}{2}$. Se avessimo ottenuto il valore opposto avremmo potuto allo stesso modo essere certi del risultato di una misura dello spin lungo z della particella 2: esso è un elemento di realtà. Inoltre, poiché la seconda particella è lontana dalla prima e non può sentire gli effetti della misura per il principio di località, esso era un elemento di realtà già prima della misura e del collasso del pacchetto d'onda.

Riscriviamo ora la (1.12) nella base $\{v_+; v_-\}$ degli spin lungo x . E' facile vedere che la scrittura dello stato di singoletto è la stessa che nella base precedente:

$$\phi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v_+(1)v_-(2) - v_+(2)v_-(1)] \quad (1.12)$$

Possiamo allora ripetere il ragionamento fatto sopra per una misura dello spin lungo l'asse x e giungere alla conclusione che lo spin lungo l'asse x della particella 2 era un elemento di realtà già prima della misura dello spin della particella 1. Di conseguenza prima che effettuassimo la misura, che poteva arbitrariamente essere fatta sia sull'asse x che sull'asse z , gli osservabili S_{Z1} ed S_{Z2} erano contemporaneamente elementi di realtà. Poiché la meccanica quantistica non è in grado di descrivere simultaneamente queste due grandezze in quanto associate a operatori che non commutano, dobbiamo dedurre che tale teoria è incompleta.

1.6 Conclusioni

Il paradosso appena dimostrato può essere riassunto affermando che località e completezza non possono sussistere contemporaneamente nella meccanica quantistica, dunque, poiché negare la località porterebbe a problematiche ancora più profonde, dobbiamo pensare che la teoria sia incompleta, dunque a variabili nascoste.

Come mostreremo più avanti il ragionamento di Einstein, Podolsky e Rosen è corretto ma sfrutta un'ipotesi sbagliata cioè che la meccanica quantistica debba essere una teoria locale. Vedremo infatti come Bell riuscì a mostrare che una teoria locale a variabili nascoste porta a previsioni diverse da quelle della meccanica quantistica, le cui previsioni sono invece confermate con ottima precisione dagli esperimenti. La realtà non può allora essere descritta da una teoria locale a variabili nascoste e dunque, essendo corretto il ragionamento fatto da E.P.R. deve essere sbagliata la loro ipotesi: se la teoria in esame descrive correttamente la realtà -come gli esperimenti effettuati hanno finora confermato-, il principio di località è falso.

Capitolo 2

Il teorema di Bell

2.1 Introduzione

La forza del paradosso EPR risiedeva nel fatto che fosse costruito partendo da un'implicita assunzione, cioè *l'indipendenza delle realtà fisiche presenti in parti diverse dello spazio*, che, per quanto come ammesso da Einstein non venisse mai esplicitamente usata dalla meccanica quantistica, pareva irrinunciabile poiché non si trovava *da nessuna parte alcun fatto che facesse pensare che tale richiesta andasse abbandonata*[9]. Fu così fino al 1964 quando John S. Bell riuscì in un celebre articolo a mostrare una differenza quantitativa e sperimentabile fra le previsioni della meccanica quantistica e quelle di una teoria locale a variabili nascoste, dimostrando così che l'assunzione della località, apparentemente irrinunciabile, non si applica alla meccanica quantistica. La dimostrazione di Bell risultò sorprendente e inaspettata poiché mostrava gli effetti sulle misure di qualcosa, le variabili nascoste, che non poteva essere misurato, mostrava dunque che esiste una differenza di fatto, e non meramente filosofica, fra l'affermare che posizione e momento non possono essere misurati contemporaneamente e l'affermare che non esistono contemporaneamente.

2.2 L'esperimento mentale di Mermin

Per comprendere come una simile differenza possa emergere da dati sperimentali illustreremo un gedankenexperiment dovuto a David Mermin[9], utilizzando i dati prodotti da una simulazione effettuata supponendo che l'esperimento obbedisca alla meccanica quantistica (si veda il paragrafo 2.3).

Si supponga di disporre di un apparato costituito da un emettitore di una qualche entità fisica, che chiameremo particella, e di due ricevitori. I ricevitori non possono comunicare fra loro le rispettive impostazioni di misura¹ e non possono comunicare col trasmettitore se non tramite le particelle

¹Per realizzare tale condizione è sufficiente fare in modo che la distanza fra i due sia maggiore di τc dove τ è il tempo fra l'impostazione dei parametri del ricevitore e la misura

emesse. Su ognuno dei ricevitori sono presenti un selettore a tre uscite che viene settato casualmente durante il "volo" della particella ed una lampadina che può illuminarsi di verde o di blu quando la particella arriva.

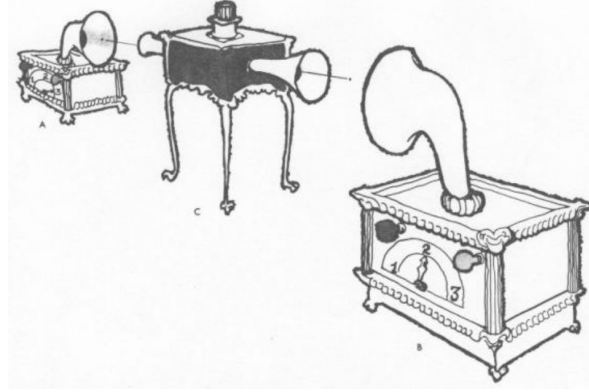


Figura 2.1: Apparato dell'esperimento mentale di Mermin[9].

Supponiamo ora di emettere una coppia di particelle nelle direzioni dei due ricevitori e registrare il risultato della misura nella forma $nmcC$ dove n ed m sono rispettivamente le due uscite selezionate casualmente e c e C sono i colori emessi dai ricevitori. Iteriamo l'esperimento in modo da raccogliere una quantità di dati statisticamente significativa. Supponiamo ora di raccogliere i seguenti dati², che sono, come vedremo, un risultato sensato per un simile esperimento regolato dalle leggi della meccanica quantistica:

22RR	20VR	02RV	00RR	12RV	10VR	12VV	20VR	22VV	02RV	11VV	11RR	00RR	00VV	21RV	10RV	22VV	02RV	22RR	12RV	01VR	20VR	10VR	02RV	22RR	21VV	21RV	21RV	01VR	00VV	11RR	20VR	01RR	22RR	10VR	02RR	21RV	22VV	20VR	11VV	02VV	20RV	01RR	01VR	20VR	00RR	10RV	10VR	12VV	02RV	20VV	22RR	00VV	01RR	22VV	12RV	00VV	10RR	22RR	02VR	22VV	02RV	01RV	21RR	01VR	10RV	01VR	02VR	02VR	10VR	12RV	20VR	01VV	20VR	22RR	20VR	12VR	10RV	10RV	00RR	21RV	01RR	12VR	11RR	22VV	11VV	10RV	22RR	10RV	22RR	01RV	12RV	22VV	00VV	10VR	12VR	02VR	22RR	10VV	20RV	20VV	12RV	12RV	00RR	12VR	01RV	20RV	22VV	22RR	01RR	00VV	20VV	11RR	12VR	21VR	11RR	01RV	10VR	11VV	01VR	01RV	01RV	02VR	11RR	12RV	01RV	01VR	10VR	21VR	10RV	00RR	11RR	01VV	02RV	01RR	00RR	01RV	10RV	10VV	12RV	12RR	01RR	21VR	02VR	02RR	11VV	11VV	11RR	02VR	01VR	10RV	20VR	11RR	11VV	11VV	11RR	12VR	10VV	21VR	02VR	20VR	10RV	21RV	20RV	22RR	21RV	00RR	11RR
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

e c è la velocità della luce.

²I dati mostrati sono un piccolo estratto di una simulazione (Appendice (A))

Dall'analisi dei dati emergono due caratteristiche fondamentali:

- 1- Ogni volta che i selettori sono impostati allo stesso modo si accendono luci dello stesso colore.
- 2- Se si guarda a tutte le misure, indipendentemente dall'impostazione dei selettori, la metà delle volte il colore delle luci coincide e l'altra metà delle volte non coincide.³

Cerchiamo ora di trovare una spiegazione per la prima caratteristica, immaginando di realizzare l'esperimento in modo che sia sempre rispettata. Potremmo fare in modo che i due colori coincidano programmando i ricevitori prima dell'esperimento affinché emettano sempre lo stesso segnale, ma se così fosse allora il colore delle luci dovrebbe coincidere anche quando i selettori sono impostati in modo differente, e questo non avviene. Un altro metodo è quello di programmare i due ricevitori in modo che all'arrivo delle particelle emettano lo stesso output se i selettori sono impostati allo stesso modo. Affinché questo avvenga è però necessario che ciascun ricevitore "conosca" l'impostazione dell'altro, ma ciò non può avvenire perché i due strumenti non possono comunicare. Si potrebbe allora pensare che quando viene misurata la prima particella questa trasmetta alla seconda l'informazione sul risultato della misura così che a sua volta quest'ultima possa comunicarla al proprio ricevitore. In questo modo un ricevitore conoscerebbe i dati ricevuti dall'altro e di conseguenza il suo output. Anche questa possibilità è tuttavia da escludere perché la trasmissione da particella a particella dovrebbe essere istantanea e dunque non locale. Non ci rimane allora che un'unica possibile spiegazione: le due particelle contengono due set completi di informazioni, identici e letti allo stesso modo dai ricevitori come istruzioni che indicano quale output emettere in funzione dell'impostazione selezionata. Indicheremo per chiarezza ciascuno di questi set tramite i colori in output che essi fanno corrispondere a ciascuna impostazione del ricevitore. Ad esempio chiameremo RRV la coppia di particelle che fa accendere la luce rossa se il selettore è impostato su 1, ancora la rossa se è impostato su 2, la verde se è impostato su 3. Le possibili combinazioni saranno 8 (2^3): RRR, RRV, RVR, VRR, VVV, VVR, VRV ed RVV. In questo modo la prima caratteristica dei dati è sempre verificata. Si noti che, volendo rispettare la località, non è possibile trovare alcuna diversa spiegazione per la prima caratteristica dei dati, se non altre spiegazioni equivalenti che si limitano a dare nomi diversi ai set di informazioni trasportati delle particelle.

Veniamo ora alla seconda caratteristica. Come si è precedentemente af-

³L'esperimento è stato simulato 1000000 di volte, le luci coincidono 500899, cioè la metà delle volte con un errore relativo dello 0.001

fermato esistono 8 possibili pacchetti di informazione. L'informazione contenuta in tali pacchetti non può essere del tutto conosciuta, poiché ad ogni misura possiamo al più conoscere due delle tre istruzioni presenti nel pacchetto. Stiamo dunque parlando di un qualcosa, una variabile nascosta, che non può essere conosciuta, eppure vedremo ora come la presenza di tale variabile influenzi i risultati dell'esperimento: ammettendo che la prima caratteristica dei dati sia la conseguenza di un set di variabili nascoste, non è più possibile spiegare la seconda caratteristica. Supponiamo infatti che alla coppia di particelle sia associato il set RRV, le possibili impostazioni dei selettori, casuali ed equiprobabili, sono 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, in corrispondenza di 5 di queste impostazioni (11, 22, 33, 12,21) si accendono luci identiche, in corrispondenza delle altre 4 luci diverse. Concludiamo che al set di istruzioni RRV corrisponde una probabilità di $\frac{5}{9}$ dell'accensione di luci identiche. Lo stesso ragionamento può essere ripetuto per i set RVR, VRR, VVR, VRV ed RVV, mentre la probabilità di accensione di luci identiche è 1 per i restanti 2 set (RRR e VVV). Ne consegue che, nel caso delle variabili nascoste qui analizzato, la probabilità $P(V, V) + P(R, R)$ di avere luci identiche, qualsiasi sia la distribuzione di probabilità associata alla produzione di particelle con ciascun pacchetto di informazione, è maggiore di $\frac{5}{9}$:

$$P(V, V) + P(R, R) > \frac{5}{9} \quad (2.1)$$

La (2.1) è la disuguaglianza di Bell associata al nostro esperimento, ottenuta supponendo che esso non sia descritto da una teoria non locale. Tale disuguaglianza è chiaramente violata dalla seconda caratteristica dei dati: non ci resta che credere che le leggi fisiche che regolano il nostro apparato sperimentale siano non locali.

2.3 Il caso della meccanica quantistica

E' possibile riprodurre l'esperimento mentale di Mermin, con gli stessi risultati, in meccanica quantistica seguendo il procedimento indicato da Bohm nella sua versione del paradosso EPR.

Supponiamo di produrre una coppia di particelle a spin $\frac{1}{2}$ nello stato di singoletto $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$, ad esempio tramite il procedimento indicato da Bohm. I due elettroni viaggiano verso due ricevitori che consistono ciascuno in un magnete di Stern e Gerlach orientabile in tre possibili direzioni, ognuna differente dalle altre di 120° , scelte casualmente tramite il selettore. Se la particella viene deviata verso nord (spin up) si accende

una luce verde, se deviata verso sud (spin down) si accende una luce rossa. L'altro rivelatore usa una convenzione opposta per le luci. I due rivelatori sono più lontani della distanza coperta dalla luce nel tempo fra una ricezione e l'altra e nel tempo fra una selezione casuale dell'orientazione e l'altra, in modo da non poter comunicare informazioni sulle rispettive particelle ricevute e sulle proprie orientazioni prima della raccolta dei dati. L'impostazione di quest'esperimento è una possibile realizzazione dell'esperimento mentale appena illustrato.⁴

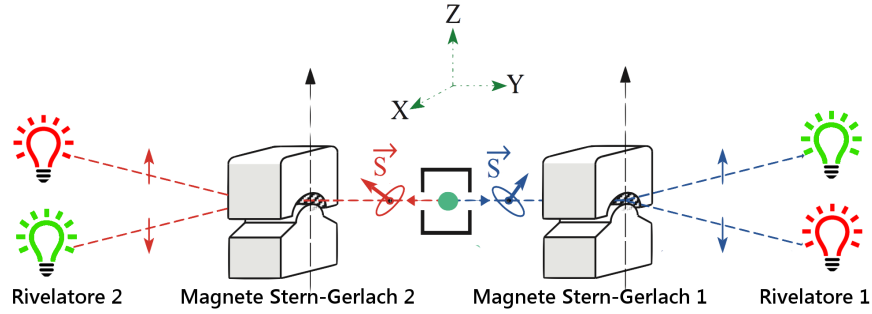
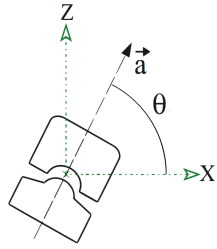


Figura 2.2: Una possibile realizzazione dell'esperimento di Mermin.



Analizziamo ora le caratteristiche dei dati raccolti. Poniamo l'origine del nostro sistema di riferimento sull'emettitore di elettroni, e i due ricevitori lungo l'asse y . Lo spin di ciascuna particella è misurato lungo una direzione appartenente al piano xy , che definisce un angolo θ con l'asse x . Se i rivelatori si misurano rispettivamente agli angoli θ_1 e θ_2 la probabilità di ciascun possibile risultato delle misure può essere calcolata riscrivendo lo stato di singoletto nel CSCO $\{S_{\theta_1}; S_{\theta_2}\}$ degli spin lungo

gli assi appena definiti, dove

$$S_{\theta} = \vec{S} \cot \vec{i} = (S_x, S_y, S_z) \cdot (\cos \theta, 0, \sin(\theta))$$

Poichè

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

⁴Le immagini sono una rielaborazione di un'immagine tratta da http://graphene.limited/_Media/epr-bohm_experiment_setup.png.

Abbiamo che

$$S_\theta = \cos(\theta) \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice saranno i λ tali che $\det[S_\theta - \lambda] = 0$:

$$\frac{\hbar^2}{2} (\sin(\theta) - \lambda)(-\sin(\theta) - \lambda) - \cos(\theta)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Sia $\uparrow_\theta = \alpha \uparrow + \beta \downarrow$ l'autovettore associato ad $\frac{\hbar}{2}$, risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) - 1 & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

otteniamo

$$\uparrow_\theta = \sin(\phi) \uparrow + \cos(\phi) \downarrow \quad (2.2)$$

con $\phi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Imponendo poi $\langle \uparrow_\theta | \downarrow_\theta \rangle = 0$ abbiamo

$$\downarrow_\theta = -\cos(\phi) \uparrow + \sin(\phi) \downarrow \quad (2.3)$$

Invertendo le (2.2) e (2.3) otteniamo

$$\uparrow = \sin(\phi) \uparrow_\theta - \cos(\phi) \downarrow_\theta \quad (2.4)$$

$$\downarrow = \cos(\phi) \uparrow_\theta + \sin(\phi) \downarrow_\theta \quad (2.5)$$

Sostituendo le ultime due equazioni nello stato di singoletto otteniamo dopo semplici passaggi algebrici che

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\phi_1 - \phi_2) \uparrow_{\theta_1} \uparrow_{\theta_2} + \sin(\phi_1 - \phi_2) \downarrow_{\theta_1} \downarrow_{\theta_2} + \cos(\phi_1 - \phi_2) \uparrow_{\theta_1} \downarrow_{\theta_2} - \cos(\phi_1 - \phi_2) \downarrow_{\theta_1} \uparrow_{\theta_2})$$

Che ricordando la definizione di ϕ diventa

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \uparrow_{\theta_1} \uparrow_{\theta_2} + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \downarrow_{\theta_1} \downarrow_{\theta_2} + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \uparrow_{\theta_1} \downarrow_{\theta_2} - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \downarrow_{\theta_1} \uparrow_{\theta_2} \right) \quad (2.6)$$

Poniamo le tre possibili direzioni di misura dello spin uguali rispettivamente a 0 , $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. Se i due selettori sono allineati $\theta_1 - \theta_2 = 0$ e la (2.6) si riduce a

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2} - \downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2})$$

Poiché i due rivelatori hanno convenzione opposta entrambi gli stati $\uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2}$ e $\downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}$ se misurati accendono entrambe le luci con lo stesso colore, dunque, la prima caratteristica dei dati mostrati nel paragrafo precedente è verificata.

Veniamo alla seconda caratteristica. La probabilità P_{ij} che i due rivelatori si trovino rispettivamente a $\theta_i = i\frac{2\pi}{3}$ e $\theta_j = j\frac{2\pi}{3}$ è $\frac{1}{9}$ per ogni coppia ij . Fissati i e j la probabilità che le luci si accendano dello stesso colore è la somma dei quadrati dei coefficienti che accompagnano le autofunzioni $\uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2}$ e $\downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}$ cioè $\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)^2$, quindi la probabilità totale di ottenere due segnali identici in una qualsiasi esecuzione dell'esperimento è:

$$P = \sum_{i,j} P_{i,j} \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{9} \left(3\cos(0)^2 + 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \right) = \frac{1}{2}$$

Con analogo ragionamento concludiamo che la probabilità di ottenere segnali diversi in una qualsiasi esecuzione dell'esperimento è:

$$P = \sum_{i,j} P_{i,j} \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{9} \left(3\sin(0)^2 + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \right) = \frac{1}{2}$$

Anche la seconda caratteristica dei dati è dunque rispettata.

Dalla simulazione (Appendice A) di tale esperimento sono stati ottenuti i dati del paragrafo precedente che, naturalmente, rispettano le ipotesi.

Abbiamo così mostrato che il precedente esperimento mentale non è altro che un'applicazione della meccanica quantistica, che di conseguenza viola la particolare disuguaglianza di Bell (2.1) per questo genere di apparato. Quanto detto è sufficiente a scardinare il paradosso EPR, mostrando che la località non è una caratteristica della meccanica quantistica nella formulazione da noi usata, e che dunque il paradosso non è valido. Per mostrare tuttavia che i fenomeni reali seguono la meccanica quantistica e violano le disuguaglianze di Bell è necessario introdurre un esperimento meglio realizzabile, ed effettivamente realizzato, l'esperimento di Aspect. La disuguaglianza di Bell utilizzata in tale esperimento è, come vedremo, la disuguaglianza CHSH.

2.4 La disuguaglianza CHSH

La disuguaglianza originalmente formulata da Bell[3]⁵ presuppone, nella sua dimostrazione, la *perfetta* anticorrelazione dei risultati dei rivelatori al corrispondere delle rispettive impostazioni. Tale condizione, verificata da un punto di vista teorico, è sperimentalmente irrealizzabile. Al fine di mostrare come in esperimenti reali siano state violate le disuguaglianze di Bell le reintrodurremo quindi in una forma particolarmente utile elaborata da Clauser, Horne, Shimony e Holt[8]: la disuguaglianza CHSH. Si seguirà la dimostrazione pubblicata da Bell nel celebre articolo "I calzini di Bertlmann"[2]. Immaginiamo un generico apparato sperimentale con un emettitore e due rivelatori che rispetti le caratteristiche di non comunicazione fra le componenti e di settaggio casuale e indipendente dei rivelatori visto nei precedenti paragrafi. Siano A e B i risultati delle due misure e a e b le impostazioni dei due rivelatori. A e B possono avere soltanto due valori(ad esempio nel caso del paragrafo precedente due colori possibili per l'accensione delle luci), chiameremo questi valori s e n . Sia $P(A, B|a, b)$ la probabilità fissati a e b di ottenere A e B . Ci aspettiamo che i due risultati siano fra loro correlati cioè che

$$P(A, B|a, b) \neq P_1(A|a)P_2(B|b)$$

Si noti che abbiamo associato a ad P_1 e b a P_2 : stiamo ipotizzando che a e b siano variabili locali dunque possano influenzare solamente i rispettivi rivelatori. A questo punto sulla scia di EPR attribuiamo la nostra correlazione alla presenza di variabili nascoste che riassumeremo nella variabile λ . Se tale ipotesi è giusta, fissato λ le due probabilità sono scorrelate e possiamo scrivere

$$P(A, B|a, b, \lambda) = P_1(A|a, \lambda)P_2(B|b, \lambda) \quad (2.7)$$

Allora detta $f(\lambda)$ la distribuzione di probabilità associata a λ abbiamo che

$$P(A, B|a, b) = \int d\lambda f(\lambda)P_1(A|a, \lambda)P_2(B|b, \lambda) \quad (2.8)$$

Introduciamo ora la funzione

$$E(a, b) = P(s, s|a, b) + P(n, n|a, b) - P(s, n|a, b) - P(n, s|a, b) \quad (2.9)$$

⁵La disuguaglianza originale è $C(a, c) - C(a, b) - C(b, c) \leq 1$, dove C è la correlazione fra i dati e a e b i settaggi casuali degli rivelatori.

Sostituendo la (2.8) nella (2.9) otteniamo

$$E(a, b) = \int d\lambda f(\lambda) [P_1(s|a, \lambda) - P_1(n|a, \lambda)] [P_2(s|b, \lambda) - P_2(n|a, \lambda)] \quad (2.10)$$

Definiamo ora $A(a, \lambda) = P_1(s|a, \lambda) - P_1(n|a, \lambda)$ e $B(b, \lambda) = P_2(s|b, \lambda) - P_2(n|a, \lambda)$, poiché la probabilità P è un valore sempre compreso fra 0 ed 1 avremo che

$$|A(a, \lambda)| \leq 1 \quad (2.11)$$

$$|B(b, \lambda)| \leq 1$$

Dalle (2.10) e (2.11) scriviamo:

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| = \left| \int d\lambda f(\lambda) A(a, \lambda) [B(b, \lambda) \pm B(b', \lambda)] \right| \leq \quad (2.12)$$

$$\int d\lambda f(\lambda) |A(a, \lambda)| |B(b, \lambda) \pm B(b', \lambda)| \leq \int d\lambda f(\lambda) |B(b, \lambda) \pm B(b', \lambda)|$$

Ed analogamente

$$|E(a', b) \mp E(a', b')| \leq \int d\lambda f(\lambda) |B(b, \lambda) \mp B(b', \lambda)| \quad (2.13)$$

Sommando le (2.12) e (2.13) otteniamo

$$\begin{aligned} & |E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \leq \quad (2.14) \\ & \leq \int d\lambda f(\lambda) \left[|B(b, \lambda) \pm B(b', \lambda)| + |B(b, \lambda) \mp B(b', \lambda)| \right] \end{aligned}$$

ricordando le (2.11) e considerando che $|x + y| + |x - y| \leq 2 \quad \forall (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ la (2.14) diventa

$$|E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')| \leq 2 \int d\lambda f(\lambda) = 2 \quad (2.15)$$

che è la disuguaglianza CHSH.

Consideriamo ora l'esperimento illustrato nel paragrafo precedente, che è una particolare realizzazione dell'apparato appena trattato, dove con s indichiamo l'accensione della luce verde e con n l'accensione della luce rossa (rispettivamente particella deviata a nord o sud per il magnete di destra e

viceversa per il magnete di sinistra). Calcoliamo il valore atteso di $|(E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b) + E(a', b')|$, dove

$$a = \theta_1 \quad a' = \theta'_1 \quad b = \theta_2 \quad b' = \theta'_2$$

Lo stato del nostro sistema è descritto dalla (2.6), gli autostati associati a (s, s) , (n, n) , (s, n) e (n, s) sono rispettivamente $|\uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2}\rangle$, $|\downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}\rangle$, $|\uparrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}\rangle$ e $|\downarrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2}\rangle$. Possiamo quindi scrivere

$$E(\theta_1, \theta_2) = \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & P(\uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2} | \theta_1, \theta_2) + P(\downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2} | \theta_1, \theta_2) - P(\uparrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2} | \theta_1, \theta_2) - P(\downarrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2} | \theta_1, \theta_2) = \\ & |\langle \uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2} | \psi_{\theta_1, \theta_2} \rangle|^2 + |\langle \downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2} | \psi_{\theta_1, \theta_2} \rangle|^2 - |\langle \uparrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2} | \psi_{\theta_1, \theta_2} \rangle|^2 - |\langle \downarrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2} | \psi_{\theta_1, \theta_2} \rangle|^2 = \\ & \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)^2 = -\cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

E dunque

$$\begin{aligned} & |(E(a, b) - E(a, b'))| + |E(a', b) + E(a', b')| = \quad (2.17) \\ & |\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta'_2)| + |\cos(\theta'_1 - \theta_2) + \cos(\theta'_1 - \theta'_2)| \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione viola chiaramente la disuguaglianza CHSH: i valori che essa può assumere sono tutti quelli compresi fra 0 e $2\sqrt{2}$, e dunque anche al di fuori dell'intervallo $[-2, 2]$ imposto dalla (2.15). Ad esempio se utilizziamo i valori

$$a = 0 \quad a' = \frac{\pi}{2} \quad b = \frac{\pi}{4} \quad b' = 3\frac{\pi}{4}$$

Otteniamo dalla (2.17)

$$|(E(a, b) - E(a, b'))| + |E(a', b) + E(a', b')| = 2\sqrt{2} > 2 \quad (2.18)$$

Non resta a questo punto che illustrare una realizzazione sperimentale di quanto detto fin'ora.

2.5 L'esperimento di Aspect

Una prima notevole violazione sperimentale delle disuguaglianze di Bell fu ottenuta fra il 1981 e il 1982 da Alain Aspect e dal suo team ad Orsay.

Il team condusse tre esperimenti utilizzando coppie di fotoni in stato di singoletto di polarizzazione prodotti dal decadimento a cascata del calcio e analizzati tramite polarizzatori. La natura dell'esperimento è analoga

a quella dell'esperimento di Bohm, tuttavia gli elettroni sono sostituiti da fotoni, la polarizzazione assume il ruolo che fin'ora ha avuto lo spin, e i magneti di Stern e Gerlach sono sostituiti da polarizzatori. Tale impostazione dell'esperimento fu preferita perché meglio realizzabile con le tecnologie a disposizione. In tutti e tre gli esperimenti le disuguaglianze di Bell furono violate ottenendo la conferma sperimentale, a meno di eventuali bachi ancora da scoprire, che il fenomeno in esame non può essere descritto da una teoria locale a variabile nascoste.

L'impostazione sperimentale da noi analizzata fin'ora, per la quale abbiamo scritto le disuguaglianze CHSH, prevedeva un conteggio delle coincidenze sia nel caso in cui lo stato misurato del sistema fosse $\uparrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2}$ che nel caso in cui fosse $\downarrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}$. Volendo utilizzare polarizzatori anziché magneti definiremo coincidenza il passaggio di una coppia di fotoni ciascuno di polarizzazione parallela all'orientamento del rispettivo polarizzatore, osservabile associato stavolta allo stato $\uparrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}$, oppure ciascuno ortogonale, osservabile corrispondente allo stato $\downarrow_{\theta_1}\downarrow_{\theta_2}$. Questo cambiamento di definizione non implica nessuna sostanziale modifica né alla disuguaglianza CHSH né alla previsione teorica del valore atteso per $|(E(a, b) - E(a, b'))| + |E(a', b) + E(a', b')|$ espresso dalla (2.17). Tuttavia quest'impostazione, detta a due canali, è utilizzata soltanto dal secondo esperimento di Aspect[12] che fu il primo test a due canali per le disuguaglianze di Bell. Il primo esperimento[11] ed il terzo[10] utilizzano un'impostazione ad un solo canale, cioè in cui in ogni iterazione della misura è analizzato solo il passaggio attraverso una coppia di polarizzatori e sono dunque misurate soltanto le coincidenze corrispondenti allo stato $\uparrow_{\theta_1}\uparrow_{\theta_2}$. Il terzo esperimento è il più famoso poiché esso fu il primo esperimento in cui veniva rispettata la richiesta di Bell che i polarizzatori fossero orientati in modo casuale durante il tempo di volo del fotone, scongiurando qualsiasi possibilità di comunicazione fra i due. Tuttavia gli esperimenti di Bell ad un canale utilizzano una versione della disuguaglianza differente da quella precedentemente presentata, la disuguaglianza CH74. Al fine di rimanere coerenti con la trattazione portata avanti fin ora si analizzerà il secondo degli esperimenti di Aspect.

L'apparato sperimentale, mostrato in figura 2.3, è costituito da una sorgente di coppie di fotoni nello stato di singoletto, una coppia di polarizzatori a due canali montati su un supporto rotabile posti simmetricamente rispetto alla sorgente, una coppia di rivelatori per ciascun polarizzatore di cui uno per ciascun canale, e un sistema di conteggio delle coincidenze.

La sorgente, identica a quella usata nel primo esperimento, è costituita da un fascio atomico di Ca irradiato da due fasci laser ortogonali di fotoni di lunghezze d'onda $\lambda_1 = 406.7nm$ e $\lambda_2 = 581nm$. L'assorbimento dei due

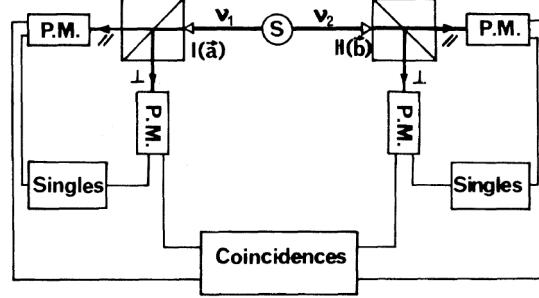


Figura 2.3: Impostazione dell'apparato sperimentale nel secondo esperimento di Aspect[12]

fotoni porta il calcio dallo stato fondamentale $4s^2\ ^1S_0$ allo stato eccitato $4p^2\ ^1S_0$ che torna allo stato fondamentale tramite il decadimento a cascata $4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1 \rightarrow 4s^2\ ^1S_0$ (Figura 2.4).

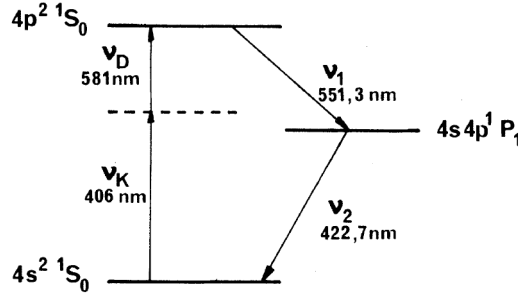


Figura 2.4: Eccitazione del calcio e successivo decadimento a cascata[12]

In un simile decadimento viene emessa una coppia di fotoni lasciando inalterato il momento angolare totale dell'atomo, dunque la coppia emessa deve essere nello stato entangled di singoletto, come richiesto nell'esperimento mentale di Bohm. I fotoni emessi sono poi collimati nelle direzioni dei polarizzatori da un sistema di lenti ed eventuali fotoni "intrusi" dovuti ad altri processi sono assorbiti da un sistema di filtri che seleziona la lunghezza d'onda. I polarizzatori a due canali sono dei beam splitter polarizzatori che trasmettono la luce incidente polarizzata parallelamente e riflettono a 90 gradi la luce polarizzata ortogonalmente. I fotoni riflessi e trasmessi sono poi rivelati da fotomoltiplicatori che inviano un segnale all'elettronica che si occupa di conteggiare le coppie di fotoni entrambi di polarizzazione paralle-

la $N(s, s|\theta_1, \theta_2)$, entrambe ortogonali $N(n, n|\theta_1, \theta_2)$, il primo ortogonale e il secondo parallelo $N(s, n|\theta_1, \theta_2)$ e viceversa $N(n, s|\theta_1, \theta_2)$.

L'esperimento è iterato a sufficienza da poter far corrispondere con ottima approssimazione la probabilità della misura alla frequenza dei corrispondenti conteggi, dunque la (2.9) può essere riscritta come

$$E_{exp}(\theta_1, \theta_2) = \frac{N(s, s|\theta_1, \theta_2) + N(no, no|\theta_1, \theta_2) - N(s, no|\theta_1, \theta_2) - N(no, s|\theta_1, \theta_2)}{N(s, s|\theta_1, \theta_2) + N(no, no|\theta_1, \theta_2) + N(s, no|\theta_1, \theta_2) + N(no, s|\theta_1, \theta_2)} \quad (2.19)$$

Mentre il valore predetto dalla meccanica quantistica è:

$$E_{MQ}(\theta_1, \theta_2) = F \frac{(T_1^{\parallel} - T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} - T_2^{\perp})}{(T_1^{\parallel} + T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} + T_2^{\perp})} \cos(2(\theta_1 - \theta_2)) \quad (2.20)$$

Quest'ultima espressione differisce dalla (2.16) soltanto a causa del differente ruolo posseduto dall'angolo di inclinazione dei polarizzatori rispetto all'angolo di inclinazione dei magneti⁶ e poiché abbiamo tenuto conto del fatto che né i polarizzatori né i fotomoltiplicatori sono ideali. $T^{\parallel}$ e $T^{\perp}$ rappresentano le trasmissioni parallele e perpendicolari dei due polarizzatori, F l'efficienza dei fotomoltiplicatori, leggermente minore di uno a causa dell'angolo di rivelazione limitato.

I valori di E_{exp} ottenuti da Aspect e dal suo team seguono con ottima approssimazione le previsioni della meccanica quantistica espresse nella formula precedente (figura 2.5).

Il valore misurato per

$$S \equiv |E(a, b) \pm E(a, b')| + |E(a', b) \mp E(a', b')|$$

agli angoli per cui la meccanica quantistica prevede la massima violazione della disuguaglianza CHSH ($\theta_1 - \theta_2 = \theta'_1 - \theta'_2 = \theta_2 - \theta'_1 = 22.5^\circ$ e $\theta_1 - \theta'_2 = 22.5^\circ$) è $S_{exp} = 2.697 \pm 0.015$ e viola abbondantemente la disuguaglianza, mentre è in ottimo accordo col valore previsto dalla meccanica quantistica $S_{MQ} = 2.70 \pm 0.05$.

In conclusione con questo esperimento Aspect ottenne una forte violazione delle disuguaglianze, lasciando tuttavia aperte due possibili scappatoie. La prima è determinata dal carattere statico dell'esperimento: poiché l'orientazione dei polarizzatori non è scelta durante il tempo di volo della particella, come richiesto da Bell, esiste la possibilità che qualche meccanismo sconosciuto permetta a ciascun polarizzatore di "conoscere" l'orientazione

⁶Una rotazione di π rad per i primi corrisponde a una rotazione di 2π rad per i secondi.

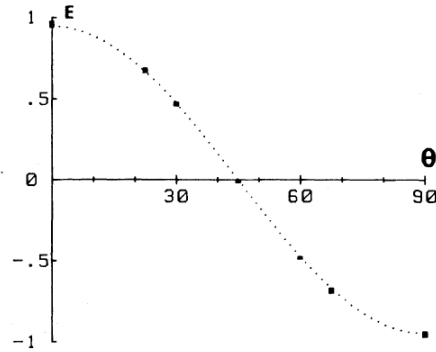


Figura 2.5: Risultati della misura di $E(\theta_1 - \theta_2)$ nell'esperimento di Aspect. L'errore indicato coincide con due deviazioni standard. La curva tratteggiata non è ottenuta dal fit dei dati ma rappresenta le previsioni della meccanica quantistica.[12]

dell'altro, invalidando l'ipotesi di località dei parametri utilizzata per ricavare le disuguaglianze. Tale eventualità fu testata nell'esperimento successivo mostrando un'ulteriore violazione delle disuguaglianze. Un'altra possibile scappatoia è dovuta al fatto che non sempre le particelle sono rivelate in entrambe le direzioni, è possibile dimostrare come questo implichi la possibilità che le correlazioni quantistiche registrate siano dovute ad una collezione imprecisa del campione di misure causata da un'insufficiente efficienza dei rivelatori.

I molti e sempre più sofisticati esperimenti effettuati a partire dal 1981 sulla disuguaglianza di Bell non hanno fatto che rigettare l'ipotesi di realismo locale, quasi del tutto abbandonata dalla comunità scientifica. Alcune delle possibili scappatoie presentate negli anni, come l'ipotesi del superdeterminismo secondo la quale un totale determinismo dell'universo escluderebbe la possibilità di rendere scorrelate le impostazioni dei rivelatori, si sono mostrate infalsificabili e dunque prive di valore scientifico.

Capitolo 3

No Transmission Theorem

3.1 Introduzione

Quanto detto fin'ora è sufficiente a scardinare alle fondamenta il paradosso EPR confermando la non-località della meccanica quantistica. Nasce allora il sospetto che, come l'intuizione suggerisce, la non-località possa essere sfruttata per la comunicazione superluminale, una forma di comunicazione logicamente inaccettabile poiché, ammettendo la validità della relatività ristretta come gli esperimenti suggeriscono, implica la violazione della causalità. Non resta dunque che ipotizzare degli esperimenti che sfruttino gli effetti non locali legati all'entanglement e scoprire se essi possano o meno essere sfruttati per una paradossale comunicazione superluminale. Tali esperimenti sono formalmente simili a quello coinvolto nelle varie formulazioni del paradosso EPR. Un emettitore di particelle genera una coppia entangled, la coppia è poi separata e le singole particelle sono portate in luoghi lontani dello spazio dove risiedono i due sperimentatori, Alice e Bob. Uno dei due sperimentatori, diremo Alice, effettua una misura sulla parte del sistema a cui ha accesso e spera di poter sfruttare la modifica non locale apportata allo stato fisico, cioè la proiezione, per comunicare un'informazione con l'altro osservatore. Quale informazione? Naturalmente, visto che l'azione che Alice può compiere è necessariamente una misura, l'informazione è "ho effettuato la misura" oppure "non ho effettuato la misura". Si otterrebbe così un dispositivo in grado di comunicare a ogni istante un valore binario, una specie di telegrafo superluminale. Bob, che riceve l'altra particella, ha un unico modo per indagare su ciò che Alice ha fatto: effettuare misure sulla parte del sistema a cui ha accesso. Dunque se i valori medi delle misure registrati Bob quando Alice ha appena effettuato una misura sono in qualche modo diversi da quelli registrati quando ciò non è avvenuto l'informazione si è propagata più velocemente della luce. Per salvare la causalità è necessario dimostrare che non vi è alcuna differenza fra i due casi nei valori misurati da Bob, cioè dimostrare il *No Transmission Theorem*.

3.2 No Transmission Theorem

Prima di procedere alla dimostrazione[14] è necessario introdurre un formalismo adatto a descrivere l'esperimento che, nel caso più generale, potrebbe coinvolgere una miscela statistica di stati. Si ricordi che una miscela statistica è definita come un insieme di possibili stati (parliamo stavolta di probabilità statistica e non solamente quantistica) in cui si può trovare un sistema quantistico, ciascuno con una determinata probabilità. Ad esempio la luce naturale, detta non polarizzata, è una miscela statistica di fotoni nei due stati di polarizzazione, ciascuno equiprobabile. Anche la nostra sorgente di coppie entangled potrebbe allora emettere una miscela statistica anziché coppie tutte nello stesso stato. Sarà dunque necessario, per la dimostrazione del teorema, ragionare in termini di operatore di densità¹.

Siano i possibili stati S del nostro sistema appartenenti allo spazio di Hilbert $H = H_A \otimes H_B$, dove H_A e H_B sono rispettivamente gli spazi associati alla prima particella, rivelata dall'apparato di Alice, e alla seconda, rivelata dall'apparato di Bob, dove abbiamo supposto che le due particelle non siano più in interazione. Lo stato del sistema è descritto dall'operatore di densità σ . Tale operatore può sempre essere riscritto come

$$\sigma = \sum_i T_i \otimes S_i; \quad T_i \in H_A, S_i \in H_B \quad (3.1)$$

dove T_i ed S_i potrebbero ad esempio essere operatori di proiezione nei rispettivi spazi, condizione tuttavia non necessaria. Supponiamo che Alice misuri un'osservabile nella parte del sistema a cui ha accesso, l'operatore associato sarà $O_A \otimes \mathbb{1}_B$.

La misura di un determinato valore per l'osservabile O su uno stato $|\psi\rangle$ ha come risultato la proiezione dello stesso sull'autovalore o_i associato al valore registrato da Alice. Supponiamo di avere invece una miscela statistica. Se lo stato $|\psi\rangle$ appare nella miscela con una probabilità statistica $p = 1$, dopo aver effettuato una misura troveremo nella miscela statistica proiezioni dello stato su tutti i diversi autovalori associati ai possibili risultati, ciascuna con una probabilità, adesso statistica, uguale alla probabilità quantistica che la misura effettuata registrasse l'autovalore corrispondente. Da un punto di vista formale ci aspettiamo allora la seguente evoluzione

$$\sigma = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow$$

¹Appendice B

$$\sigma' = \sum_i |\langle o_i | \psi \rangle|^2 |o_i\rangle\langle o_i| = \sum_i |o_i\rangle\langle o_i| \langle \psi | o_i \rangle \langle o_i | \psi \rangle = \sum_i P_i \sigma P_i$$

dove P_i è il proiettore sull'autospazio associato all' i -esimo autovalore di O . Si ricordi che, poiché O è un'osservabile, vale la relazione di chiusura $\sum_i P_i = \mathbb{1}$. Se allora estendiamo il nostro ragionamento a miscele statistiche di più stati $|\psi_i\rangle$ ciascuno con probabilità statistica p_i la formula precedente può essere facilmente generalizzata, tenendo conto delle proprietà della probabilità, nella seguente:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \rightarrow \\ \sigma' &= \sum_{i,j} p_j |\langle o_i | \psi_j \rangle|^2 |o_i\rangle\langle o_i| = \sum_{i,j} p_j |o_i\rangle\langle o_i| \langle \psi_j | o_i \rangle \langle o_i | \psi_j \rangle = \sum_i P_i \sigma P_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nel nostro caso il generico operatore di proiezione associato alla misura effettuata da Alice è:

$$P_A = V_i \otimes \mathbb{1}_B \quad (3.3)$$

Dunque, considerando la (3.2) e la (3.3), lo stato del sistema dopo la misura di Alice diventa:

$$\sigma' = \sum_i (V_i \otimes \mathbb{1}_B) \sigma (V_i \otimes \mathbb{1}_B) \quad (3.4)$$

Lo stato della parte del sistema a cui Bob ha accesso coincide con la traccia parziale dell'operatore di densità² rispetto al sottospazio di Alice H_A , cioè

$$\sigma_{Bob} = Tr_{H_A}(\sigma) \quad (3.5)$$

se Alice non effettua la misura, e

$$\sigma'_{Bob} = Tr_{H_A}(\sigma') \quad (3.6)$$

se effettua la misura. Se sostituiamo la (3.4) nell'equazione precedente tenendo conto della (3.1) e della relazione di chiusura otteniamo:

$$\begin{aligned} \sigma'_{Bob} &= Tr_{H_A}(\sigma') = \\ Tr_{H_A} \left(\sum_i (V_i \otimes \mathbb{1}_B) \sigma (V_i \otimes \mathbb{1}_B) \right) &= Tr_{H_A} \left(\sum_i (V_i \otimes \mathbb{1}_B) \left(\sum_j T_j \otimes S_j \right) (V_i \otimes \mathbb{1}_B) \right) = \end{aligned} \quad (3.7)$$

²Appendice B

$$\begin{aligned}
Tr_{H_A} \left(\sum_{i,j} (V_i T_j V_i) \otimes S_j \right) &= Tr_{H_A} \left(\sum_{i,j} (T_j V_i V_i) \otimes S_j \right) = Tr_{H_A} \left(\sum_{i,j} (T_j V_i) \otimes S_j \right) = \\
Tr_{H_A} \left(\sum_j \left(T_j \left(\sum_i V_i \right) \right) \otimes S_j \right) &= Tr_{H_A} \left(\sum_j T_j \otimes S_j \right) = Tr_{H_A}(\sigma) = \sigma_{Bob}
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato l'invarianza della traccia rispetto alla permutazione ciclica e l'idempotenza dell'operatore di proiezione. L'equazione (3.7) mostra che la parte del sistema a cui Bob ha accesso, e dunque le misure su di essa effettuate, non risentono delle operazioni effettuate da Alice: **l'entanglement, nonostante la sua natura non locale, non permette la comunicazione superluminale e non implica una violazione della causalità.**

Appendici

Appendice A

Simulazione dell'esperimento di Bohm

Al fine di ottenere dati utili all'illustrazione dell'esperimento mentale di Mermin si è proceduto alla simulazione dello stesso, con la configurazione illustrata nel Capitolo 2.3 e supponendo che i fenomeni in gioco siano ben descritti dalla meccanica quantistica. La simulazione, scritta in linguaggio C, itera l'esperimento 1000000 di volte. Ad ogni iterazione sono settati due parametri casuali, le orientazioni dei magneti di Stern e Gerlach, ciascuno in una delle tre possibili configurazioni che differiscono di 120° . Le configurazioni vengono stampate a schermo e sono passate come parametri ad una funzione che si occupa di estrarre casualmente un numero che viene fatto corrispondere ad uno dei quattro possibili autostati misurati del sistema, secondo la probabilità pesata calcolata dai rispettivi coefficienti nell'equazione (2.6) Cap. 2.3. Agli autostati sono associati, come nell'esperimento di Mermin, i colori di accensione delle luci: VV, RR, VR e RV, che vengono stampati a schermo. Inoltre ad ogni iterazione viene incrementato un contatore di coincidenze avvenute oppure uno di coincidenze mancate in base al risultato dell'iterazione stessa. L'estrazione di un valore casuale discreto fra n possibili secondo una probabilità pesata è effettuata estraendo un numero fra 0 ed 1, dividendo l'intervallo $[0,1]$ in sottointervalli proporzionali alle n probabilità in gioco e controllando a quale intervallo il numero appartiene: la probabilità che appartenga all'intervallo sarà proporzionale all'area dello stesso. Dall'osservazione dei risultati ottenuti è evidente che ogni qual volta le configurazioni coincidono si accendono luci dello stesso colore. Dal conteggio delle coincidenze effettuato nella simulazione è risultato che su 1000000 di iterazioni 500899 volte le si sono accese luci dello stesso colore. Entrambe le caratteristiche rispecchiano quelle dell'esperimento di Mermin.

Segue il sorgente:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
```

```

int wRand(float a, float b);

int main() {
    int rand1, rand2, result, i, coinc1 = 0, coinc2 = 0;
    float randomangle1, randomangle2;
    const float angle = 2.094395;

    srand(time(NULL));
    for(i=0; i<1000000; i++){
        rand1 = rand() % 3;
        rand2 = rand() % 3;
        randomangle1 = rand1*angle;
        randomangle2 = rand2*angle;
        printf("%d", rand1);
        printf("%d", rand2);
        if (wRand(randomangle1, randomangle2)==0) coinc1++;
        else coinc2++;
    }
    printf("\nStesso colore:%d\tColore diverso:%d\n", coinc2, coinc1);
    return 0;
}

int wRand(float a, float b) {
    int out;
    double random, weight;
    random = (double)rand()/(double)(RAND_MAX);
    weight = (double)((b-a)/2);
    weight = sin(weight);
    weight = weight*weight/2;

    if(random < weight) {
        printf("VR\t");
        return 0;
    }
    else if(random > weight && random < 0.5) {
        printf("VV\t");
        return 1;
    }
    else if(random > 0.5 && random < (0.5+weight)) {
        printf("RV\t");
        return 0;
    }
    else {
        printf("RR\t");
        return 1;
    }
}

```

Appendice B

L'operatore di densità e la traccia ridotta

L'operatore di densità Illustriamo l'utilizzo dell'operatore di densità, necessario alla dimostrazione del No Transmission Theorem (Cap. 3). I concetti saranno presentati seguendo C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe in "Quantum Mechanics"[5].

Supponiamo di dover trattare, anziché una singola particella in un determinato stato, una miscela statistica di stati $|\psi_i(t)\rangle$ ciascuno con probabilità p_i tali che $\sum_i p_i = 1$. Data un'osservabile A ci proponiamo di calcolarne il valore medio che un eventuale esperimento registrerebbe per la miscela in esame. Iniziamo dal caso banale di uno *stato puro*, cioè una miscela statistica costituita da un unico stato con probabilità 1. Detti $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots\}$ i vettori di una possibile base per lo spazio di Hilbert a cui lo stato appartiene avremo che

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t) |u_i\rangle$$

e che

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{i,j} c_i(t) c_j^*(t) \langle u_j | A | u_i \rangle = \sum_{i,j} c_i(t) c_j^*(t) A_{ji} \quad (\text{B.1})$$

Dove A_{ji} sono gli elementi di matrice di A nella base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots\}$. Il valor medio di A è dunque una forma quadratica dei coefficienti $c_i(t)$. Definiamo ora operatore di densità $\sigma(t)$ il proiettore sullo stato del sistema $|\psi_i(t)\rangle$:

$$\sigma(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (\text{B.2})$$

Detti σ_{ij} gli elementi di matrice dell'operatore di densità la (B.1) può essere riscritta come:

$$\langle A \rangle(t) = \sum_{i,j} c_i(t) c_j^*(t) A_{ji} = \sum_{i,j} \langle u_i | \psi \rangle \langle \psi | u_j \rangle(t) A_{ji} = \sum_{ij} \sigma_{ij} A_{ji} = Tr(\sigma A) \quad (B.3)$$

Tale equazione ci permette di calcolare il valore medio di un'osservabile A sul nostro stato puro rappresentato tramite operatore di densità. Si noti che il vincolo di normalizzazione sullo stato ψ può essere riscritto nella forma $Tr(\sigma) = 1$, ricordando che $\sigma_{ij} = c_i c_j^*$.

Applicando l'equazione di Schrödinger possiamo calcolare l'evoluzione temporale di σ :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \sigma = \left(i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle \right) \langle \psi| + |\psi\rangle \left(i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi| \right) = H |\psi\rangle \langle \psi| - |\psi\rangle \langle \psi| H = [H, \sigma] \quad (B.4)$$

Infine possiamo calcolare la probabilità $P(a_i)$ di ottenere come risultato di una misura l'autovalore a_i associato all'autovettore $|a_i\rangle$ dell'osservabile A . Usando i postulati della meccanica quantistica otteniamo:

$$P(a_i) = |\langle a_i | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle = \langle \psi | P_i | \psi \rangle = Tr(\sigma P_i) \quad (B.5)$$

Dove P_i è il proiettore sull'autostato $|a_i\rangle$.

Estendiamo ora il nostro ragionamento al caso generale di una miscela statistica contenente più stati $|\psi_i\rangle$ ciascuno di probabilità p_i . Data l'osservabile A sia $P_k(a_n)$ la probabilità di misurare l'autovalore a_n sul k -esimo stato della miscela. Sia σ_i l'operatore di densità associata al solo stato $|\psi_i\rangle$. Allora la probabilità di ottenere a_n da una misura di A su tutta la miscela sarà:

$$P(a_n) = \sum_i p_i P_i(a_n) = \sum_i p_i Tr(\sigma_i P_n) = Tr\left(\sum_i p_i \sigma_i P_n\right) = Tr(\sigma P_n) \quad (B.6)$$

Dove abbiamo definito $\sigma = \sum_i p_i \sigma_i = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ l'operatore di densità della miscela statistica. Poichè per il teorema spettrale l'osservabile A può essere riscritto come $A = \sum_i a_i P_i$ tramite la (B.6) possiamo dimostrare che anche la (B.3) è ancora valida:

$$\langle A \rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n Tr(\sigma P_n) = Tr\left(\sigma \sum_n a_n P_n\right) = Tr(\sigma A) \quad (B.7)$$

Anche l'equazione (B.4) può essere semplicemente estesa al caso di una miscela di più stati sfruttando la linearità dell'operatore di derivazione.

La traccia ridotta Supponiamo che la miscela statistica in esame rappresenti un sistema fisico suddiviso a sua volta in due sottosistemi A e B. Gli stati del nostro sistema faranno parte dello spazio di Hilbert $H = H_A \otimes H_B$, spazio in cui agisce l'operatore di densità σ dell'intero sistema. Supponiamo che le nostre misure interessino solo uno dei due sottosistemi, A (o B). Vogliamo allora costruire un operatore σ_A (o σ_B) che agisca solo sul rispettivo spazio di Hilbert e ci permetta di fare predizioni sulle misure fatte in tale spazio. A tal fine definiamo la traccia parziale Tr_B rispetto ad H_B di un operatore σ agente su H l'operatore σ_A agente su H_A tale che i suoi elementi di matrice siano:

$$\langle u_n | \sigma_A | u_m \rangle = \sum_i \langle u_n | \langle v_i | \sigma | u_m \rangle v_i \rangle \quad (\text{B.8})$$

Dove $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots\}$ è una base ortonormale per H_A e $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \dots\}$ una base ortonormale per H_B . Verifichiamo ora che l'operatore appena definito rispetta le caratteristiche descritte all'inizio del paragrafo, cioè che data un'osservabile O agente soltanto su H_A il valore atteso per tale osservabile sullo stato $\sigma_A = Tr_B(\sigma)$ coincide con il valore atteso per la sua estensione $O \otimes \mathbb{1}$ a tutto lo spazio di Hilbert sullo stato σ . Utilizzando la definizione di traccia parziale e l'ortonormalità della base possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
\langle O \otimes \mathbb{1} \rangle_H &= \text{Tr}(\sigma O \otimes \mathbb{1}) = \sum_{i,j} \sum_{i',j'} \langle u_i | \langle v_j | \sigma | u_{i'} \rangle | v_{j'} \rangle \langle u_{i'} | \langle v_{j'} | O \otimes \mathbb{1} | u_i \rangle | v_j \rangle = \\
&\hspace{25em} \text{(B.9)} \\
\sum_{i,j} \sum_{i',j'} \langle u_i | \langle v_j | \sigma | u_{i'} \rangle | v_{j'} \rangle \langle u_{i'} | O | u_i \rangle \langle v_{j'} | v_j \rangle &= \sum_{i,j} \sum_{i',j'} \langle u_i | \langle v_j | \sigma | u_{i'} \rangle | v_{j'} \rangle \langle u_{i'} | O | u_i \rangle \delta_{j,j'} = \\
\sum_{i,i'} \left(\sum_j \langle u_i | \langle v_j | \sigma | u_{i'} \rangle | v_j \rangle \right) \langle u_{i'} | O | u_i \rangle &= \sum_{i,i'} \sigma_{A i, i'} O_{i', i} = \text{Tr}(\sigma_A O) = \langle O \rangle_{H_A}
\end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

Bibliografia

- [1] N. Rosen A. Einstein, B. Podolsky. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47:777–780, Maggio 1935.
- [2] J. Bell. I calzini di bertlmann e la natura della realtà. In J. Bell, editor, *Dicibile e indicibile in meccanica quantistica*. Adelphi, 1987.
- [3] John Stewart Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1(3):195–200, 1964.
- [4] D. Bohm. *Quantum Theory*. Dover Publications, 1951. pp. 611-623.
- [5] Frank Laloe Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu. *Quantum Mechanics*, volume 1. WILEY, 1977. pp. 295-307.
- [6] A. Einstein. Letter to max born (4 december 1926). In Irene Born, editor, *The Born-Einstein Letters*. Walker and Company, New York, 1971.
- [7] Albert Einstein. Quanten-mechanik und wirklichkeit. *Dialectica*, 2:320–324, 1984.
- [8] A. Shimony R.A. Holt J.F. Clauser, M.A. Horne. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Ottobre 1935.
- [9] N. David Mermin. Is the moon there when nobody looks? reality and the quantum theory. *Physics Today*, pages 38–47, Aprile 1985.
- [10] A. Aspect; J. Dalibard; G. Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dicembre 1982.
- [11] A. Aspect; P. Grangier; G. Roger. Experimental test of realistic local theories via bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460–463, Agosto 1981.
- [12] A. Aspect; P. Grangier; G. Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: A new violation of bell’s inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91–94, Luglio 1982.

- [13] Schrodinger. Discussion of probability relations between separated systems. In *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, number 31, pages 555–563, 1935.
- [14] Wikipedia. No-communication theorem — wikipedia, the free encyclopedia, 2017. [Online; accessed 27-September-2017].

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il professor Luigi Rosa per la disponibilità, la gentilezza e l'attenzione con la quale ha guidato il mio lavoro.

Grazie a mia madre per tutto il tempo e la passione con cui ha sempre cercato di insegnarmi l'amore per lo studio, a mio padre per avermi trasmesso la meraviglia di fronte al mondo e il desiderio di comprenderlo e a tutta la mia famiglia per avermi sempre accompagnato e sostenuto con amore.

Grazie a Vittoria per essere sempre stata per me confidente e sostegno, per avermi ascoltato con amore e pazienza offrendomi rifugio nella stanchezza e condivisione nella gioia. Grazie ai miei amici che come fratelli hanno camminato al mio fianco sempre accoglienti e generosi nel momento del bisogno.

In ultimo, ma non per importanza, grazie a tutti quei docenti ed ai colleghi che si sono sempre mostrati disponibili ad aiutarmi e appassionati nei tanti e preziosissimi momenti di discussione e confronto, vero cuore di questo percorso universitario.