Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"



Laurea triennale in Fisica

Modelli risolubili di ambiente quantistico

Relatori: Prof. Rodolfo Figari **Candidato:** Maria Grazia Di Luca Matricola N85000736

A.A. 2016/2017

INDICE

INTRODUZIONE	1
CAPITOLO I - NOZIONI PRELIMINARI	
1.1 I postulati della meccanica quantistica	
1.2 L'operatore densità	5
1.3 L'operatore densità ridotto	8
CAPITOLO II - ESPERIMENTO DELLA DOPPIA FENDITURA	
2.1 Premessa	
2.2 Interferenza	
2.3 Effetti della misura	
CAPITOLO 3 - LA RIDUZIONE DEL PACCHETTO D'ONDA	
3.1 Premisura di Von Neumann	
3.2 Il modello di Coleman-Hepp	
CAPITOLO 4 – INTERAZIONI PUNTUALI	
4.1 Definizione e dominio	
4.2 Spettro	24
CAPITOLO 5 - CAMERA DI WILSON	
5.1 Prefazione	27
5.2 Il modello	
CONCLUSIONI	
Bibliografia	
Sitografia	

INTRODUZIONE

La meccanica quantistica costituisce un modello teorico efficacemente applicabile all'analisi dell'evoluzione dei sistemi microscopici. Basata su di un formalismo matematico semplice e completo, essa fornisce previsioni teoriche che hanno raggiunto una precisione priva di precedenti nella storia delle teorie fisiche.

La sua formulazione ortodossa, tuttavia, si presenta concettualmente delicata e non intuitiva; l'aspetto interpretativo più ambiguo è indubbiamente quello di misura.

Il presente lavoro di tesi affronta il problema della misura, allo scopo di analizzare la risposta dell'ambiente in interazione con un sistema quantistico. Lo stesso ambiente, in particolare, sarà considerato come un oggetto di natura quantistica, piuttosto che come un apparato macroscopico, descrivibile solo per via classica.

Saranno preliminarmente riepilogati i principi della meccanica quantistica e introdotti nuovi strumenti formali che faciliteranno le successive trattazioni. Particolare rilievo verrà posto sulla differenza tra la statistica prevista nei modelli di dinamica casuale classica e quella prevista dalla meccanica quantistica: la comprensione di tale differenza risulterà indispensabile per l'introduzione del tema centrale del lavoro. Gli aspetti matematici di quest'ultima saranno esposti nel secondo capitolo, tramite la descrizione dell'esperimento paradigmatico della doppia fenditura per elettroni. Nel caso di onde elettromagnetiche o di onde materiali in mezzi deformabili, i fenomeni di interferenza non costituiscono una difficoltà interpretativa: a propagarsi sono campi vettoriali che si sommano costruttivamente o distruttivamente a seconda della loro fase relativa. Nel caso trattato, invece, la funzione che si propaga è puramente ausiliaria e non corrisponde ad alcuna grandezza osservabile: ad avere significato fisico è unicamente il suo modulo quadro, il quale fornisce la statistica delle possibili misurazioni su un sistema quantistico.

In seguito, sarà ripercorso il tentativo di Von Neumann di assiomatizzazione della meccanica quantistica, basato sulla postulazione della *riduzione del pacchetto d'onda*.

Il corpo vero e proprio della tesi sarà costituito dalla descrizione di due modelli risolubili di ambiente. A partire dal 1970 si è, infatti, sviluppata una linea alternativa di ricerca incentrata sulla formulazione di simili modelli, allo scopo di ottenere compatibilità con i fenomeni osservati dallo studio della dinamica complessiva di sistema microscopico ed environment.

Il primo modello presentato, ovvero il modello di Coleman-Hepp per un misuratore di spin, approfondirà il tema della riduzione del pacchetto d'onda, della quale riuscirà a fornire una spiegazione rigorosa, nel caso specifico trattato.

Infine, verrà analizzato un modello unidimensionale di camera di Wilson che fa uso delle *interazioni puntuali*. Queste ultime saranno introdotte ad hoc per giustificare dal punto di vista quantistico le tracce osservate nella camera, tracce che vengono interpretate come traiettorie delle particelle.

CAPITOLO I - NOZIONI PRELIMINARI

1.1 I postulati della meccanica quantistica

Si espone di seguito la formulazione assiomatica della cosiddetta scuola di Copenaghen, commentando brevemente le implicazioni interpretative dei cinque postulati dai quali si deduce l'intero modello [2].

Postulato 1

Ad ogni sistema fisico S è associato uno spazio di Hilbert H_S. Ciascuno stato del sistema di cui si abbia conoscenza massimale corrisponde ad un vettore $|\Psi\rangle \in H_S$ di norma unitaria.

Nel primo postulato, dunque, viene introdotto il modello matematico astratto nel quale, per opportune corrispondenze, si inquadreranno le grandezze fisiche del sistema.

Postulato 2

Ad ogni grandezza fisica osservabile A del sistema è associato un operatore \hat{A} autoaggiunto su H_S. I possibili risultati di una misura di A corrispondono ai punti dello spettro di \hat{A} . Dall'autoaggiuntezza di \hat{A} derivano le seguenti proprietà:

1) Lo spettro di \hat{A} è reale

$$\sigma(\hat{A}) \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

2) Ad \hat{A} è associata biunivocamente una famiglia spettrale E_{λ} :

$$\hat{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda} \tag{1.2}$$

Dove E_{λ} si dirà famiglia spettrale se rispetta le seguenti proprietà:

- $\lim_{\lambda \to -\infty} E_{\lambda} = 0 \tag{1.3}$
- $\lim_{\lambda \to +\infty} E_{\lambda} = I$ (1.4)
- $E_{\lambda}E_{\lambda'} = E_{\lambda'}E_{\lambda} = E_{\min\{\lambda;\lambda'\}}$ (1.5)
- $E_{\lambda+0} \equiv \lim_{\epsilon \to 0^+} E_{\lambda+\epsilon} = E_{\lambda}$ (1.6)

Postulato 3

Dato lo stato $|\psi\rangle$ del sistema, la probabilità di ottenere da una misura di *A* un valore contenuto in un intervallo *J* è data da

$$P(I) = \int_{J} d(\psi, E_{\lambda}\psi)$$
(1.7)

Come conseguenza di tale postulato, il valor medio di un operatore \hat{A} su uno stato $|\psi\rangle$ si esprime nel modo seguente

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(\psi, E_{\lambda} \psi)$$
(1.8)

Il terzo postulato racchiude l'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica.

E' fondamentale sottolineare che il senso di questa probabilità non è legato ad una non conoscenza completa del sistema, come nel caso classico: gli stati descritti finora (detti stati *puri*) codificano infatti la conoscenza massimale sul sistema in esame.

La probabilità quantistica, dunque, è associata all'impossibilità intrinseca di esplicitare con esattezza tutti i valori delle variabili classiche. Si rimanda al successivo paragrafo la descrizione degli stati non associati ad una conoscenza massimale del sistema.

Postulato 4

Sia \widehat{H} l'operatore associato all'hamiltoniana del sistema; l'equazione di Schrödinger determina l'evoluzione temporale dello stato del sistema

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{1.9}$$

Si nota che tale equazione è lineare in $|\psi(t)\rangle$, quindi dati due stati $|\psi_1(t)\rangle$ e $|\psi_2(t)\rangle$ che ne siano soluzioni, una loro generica combinazione lineare a coefficienti costanti ne è ancora soluzione.

Il quarto postulato può anche essere espresso come segue, introducendo l'operatore unitario di evoluzione temporale U(t,t₀) = exp($-\frac{i}{\hbar}$ (t-t₀) \widehat{H})

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle \qquad (1.10)$$

Postulato 5

Dato un sistema S nello stato $|\psi\rangle$, ed effettuata una misura di A, lo stato del sistema collassa istantaneamente nella sua proiezione nel sottospazio relativo all'autovalore misurato di \hat{A} .

Per come enunciato, questo postulato rappresenta una rinuncia alla modellizzazione quantistica dell'apparato di misura; quest'ultimo viene considerato un oggetto macroscopico classico che ha l'unica funzione di indurre il collasso del pacchetto d'onda del sistema microscopico.

È evidente che l'assioma lascia adito ad una serie di dubbi. Innanzitutto, il collasso è assunto istantaneo: non esiste un momento esatto, prevedibile teoricamente, in cui esso avviene. Inoltre, non vi è un metodo prescrittivo per stabilire il confine tra il sistema, oggetto quantistico, e l'apparato di misura, oggetto classico. Infine, non ci si sofferma sulla composizione atomica dello stesso apparato, la quale, essendo intrinsecamente quantistica, ne permetterebbe una modellizzazione coerente con quella del sistema.

1.2 L'operatore densità

Come già anticipato, bisogna trattare il caso in cui il sistema si trovi in una miscela statistica di stati puri.

Il formalismo matematico che permette di classificare tali miscele è quello degli operatori densità [8].

Definizione 1

Sia H un generico spazio di Hilbert e $\hat{\rho}$ un operatore su H. Esso si dirà operatore densità se rispetta le seguenti proprietà:

- $\hat{\rho}$ è autoaggiunto;
- $\hat{\rho}$ è definito positivo;
- $\hat{\rho}$ ha traccia unitaria.

Definizione 2

 $\hat{\rho}$ si dirà somma convessa di $\hat{\rho}_i$ i=1,...,s \Leftrightarrow :

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{s} a_i \hat{\rho}_i, a_i \ge 0 \ i = 1, \dots, s \land \sum_{i=1}^{s} a_i = 1$$
 (1.11)

Si ricavano di seguito due proprietà nel caso finito dimensionale.

Proprietà 1

Una somma convessa di operatori densità è ancora un operatore densità.

Si dimostra, di seguito, che $\hat{\rho}$, definito nella 1.11, è un operatore densità.

•
$$\hat{\rho}^{\dagger} = (\sum_{i=1}^{s} a_i \hat{\rho}_i)^{\dagger} = \sum_{i=1}^{s} a_i (\hat{\rho}_i)^{\dagger} = \sum_{i=1}^{s} a_i \hat{\rho}_i = \hat{\rho}$$
 (1.12)

•
$$\operatorname{Tr}(\hat{\rho}) = \operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{s} a_i \hat{\rho}_i) = \sum_{i=1}^{s} a_i Tr(\hat{\rho}_i) = \sum_{i=1}^{s} a_i = 1$$
 (1.13)

•
$$\forall |\psi\rangle \in H \langle \psi |\hat{\rho} |\psi\rangle = \langle \psi | \sum_{i=1}^{s} a_i \hat{\rho}_i |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{s} a_i \langle \psi |\hat{\rho}_i |\psi\rangle \ge$$
(1.14)

0

Proprietà 2

Sia $|\phi\rangle \in H$ un vettore di norma unitaria; l'operatore di proiezione $\hat{P}_{\phi} = |\phi\rangle\langle\phi|$ è un operatore densità.

Sia $\{|u_i\rangle\}_{i=1,...,n}$ una base ortonormale per H, essa rispetta la seguente relazione di chiusura

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i\rangle \langle u_i| = \mathbf{I} \tag{1.15}$$

Si dimostra di seguito che \hat{P}_{ϕ} è un operatore densità.

•
$$\hat{P}_{\phi} \dagger = (|\phi\rangle\langle\phi|) \dagger = |\phi\rangle\langle\phi| = \hat{P}_{\phi}$$
 (1.16)

•
$$Tr(\hat{P}_{\phi}) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i | \phi \rangle \langle \phi | u_i \rangle = \langle \phi | (\sum_{i=1}^{n} | u_i \rangle \langle u_i |) | \phi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle$$

=1 (1.17)

•
$$\forall |\psi\rangle \in H \quad \langle \psi | \hat{P}_{\phi} | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle = |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \ge 0$$
 (1.18)

Si applicherà, ora, tale formalismo ad una miscela statistica. Si denoti con $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,...,s}$ l'insieme degli stati di essa, ad ognuno dei quali è associato un numero reale $p_i \in [0,1]$ con il significato di probabilità classica del sistema di trovarsi nello stato $|\phi_i\rangle$.

Si vuole ricavare il valor medio di un operatore \hat{A} su tale miscela statistica, introducendo il concetto di operatore densità della stessa.

Assumendo indipendenza tra probabilità classica e quantistica, il valor medio di \hat{A} sulla miscela può essere scritto come media pesata dei valor medi di \hat{A} sugli stati $|\phi_i\rangle$ della miscela, ciascuno pesato con la probabilità p_i di trovarsi nello stato corrispondente

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^{s} p_i \langle \phi_i | \hat{A} | \phi_i \rangle$$
(1.19)

Per semplicità di notazione si assuma che \hat{A} ammetta spettro discreto e non degenere e che lo spazio di Hilbert associato al sistema abbia dimensione finita n.

Detta $\{|a_i\rangle\}_{i=1,...,n}$ la base per quest'ultimo di autostati di \hat{A} , si riscrive di seguito la relazione precedente, introducendo due volte l'identità (sfruttando la relazione di chiusura)

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j,k=1}^{n} p_i \langle \phi_i | a_j \rangle \langle a_j | \hat{A} | a_k \rangle \langle a_k | \phi_i \rangle$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} \langle a_j | \hat{A} | a_k \rangle \sum_{i=1}^{s} p_i \langle a_k | \phi_i \rangle \langle \phi_i | a_j \rangle$$
(1.20)

Posto $\hat{\rho} = \sum_{i=1}^{s} p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i |$, per la proprietà 1 e per la proprietà 2 esso è un operatore densità: si dirà *operatore densità della miscela*. Si riscrive di seguito il valor medio di \hat{A} in termini di tale operatore

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \langle a_k | \hat{\rho} | a_j \rangle \langle a_j | \hat{A} | a_k \rangle = Tr \left(\hat{\rho} \hat{A} \right)$$
(1.21)

Si può, quindi, dare una definizione formale di stato puro.

Definizione 3

Dato un sistema S, esso si dice in uno *stato puro* se il suo operatore densità è un proiettore.

Si vuole, infine, valutare l'evoluzione temporale di un operatore densità. Si parta dal caso in cui il sistema di trovi in uno stato puro all'istante iniziale t_0 e sia $\hat{P}_{\psi}(t_0) = |\psi(t_0)\rangle\langle\psi(t_0)|$ l'operatore densità associato.

Dal quarto postulato si avrà

$$\hat{P}_{\psi}(t) = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \langle \psi(t_0) | U^{\dagger}(t, t_0) = U \hat{P}_{\psi}(t_0) U^{\dagger}$$
(1.22)

In generale, se si assume che l'operatore di evoluzione temporale non introduca sovrapposizione tra i termini della somma che definisce un generico operatore densità $\hat{\rho}$, si può scrivere

$$\hat{\rho}(t) = U\hat{\rho}(t_0)U^{\dagger} \tag{1.23}$$

1.3 L'operatore densità ridotto

Si considerino due spazi di Hilbert H_1 e H_2 ed il loro prodotto tensoriale

 $H = H_1 \bigotimes H_2$. Siano $n_1 e n_2$ rispettivamente le dimensioni dei due spazi e siano $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1,\dots,n_1} e \{|\chi_j\rangle\}_{i=1,\dots,n_2}$ due basi ortonormali per essi.

Come è noto vale il teorema di Schmidt, per cui $\{|\phi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle\}_{i=1,...,n_1, j=1,...,n_2}$ costituisce una base per *H*.

Si consideri un operatore \hat{A}_1 su H_1 che agisce su H come $\hat{A}_1 \otimes I_2$. Sia $\hat{\rho}$ l'operatore densità di una miscela di sati di H; si avrà che il valor medio di \hat{A}_1 su tale miscela è espresso come segue [5]

$$\langle \hat{A}_{1} \rangle = Tr\left(\left(\hat{A}_{1} \otimes I_{2}\right)\hat{\rho}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n_{1}} \sum_{j=1}^{n_{2}} \langle \phi_{i} | \langle \chi_{j} | (\hat{A}_{1} \otimes I_{2}) \hat{\rho} | \phi_{i} \rangle | \chi_{j} \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n_{1}} \sum_{j=1}^{n_{2}} \langle \phi_{i} | \langle \chi_{j} | \hat{A}_{1} \hat{\rho} | \phi_{i} \rangle | \chi_{j} \rangle \qquad (1.24)$$

Definendo *l'operatore di densità ridotto* $\hat{\rho}^{(1)} \equiv \sum_{j=1}^{n_2} \langle \chi_j | \hat{\rho} | \chi_j \rangle$ si ottiene la seguente espressione per il valor medio di \hat{A}_1

$$\langle \hat{A}_1 \rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \langle \phi_i | \hat{A}_1 \, \hat{\rho}^{(1)} | \phi_i \rangle = T r^{(1)} (\hat{\rho}^{(1)} \hat{A}_1)$$
(1.25)

Dove con $Tr^{(1)}$ si è indicata la traccia parziale, cioè valutata solo su una base dello spazio H_1 .

Si nota che, dato uno stato puro $|\psi\rangle \in H$ e il suo operatore densità $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, l'operatore ridotto non descrive necessariamente uno stato puro di H_1 ; dal teorema di Schmidt si può scomporre $|\psi\rangle$ come segue

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} c_{ij} |\phi_i\rangle |\chi_j\rangle$$
(1.26)

Sostituendo nell'espressioni di $\hat{\rho}^{(1)}$, si ottiene la seguente forma

$$\hat{\rho}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n_2} \langle \chi_k | \psi \rangle \langle \psi | \chi_k \rangle =$$

$$\sum_{j,k,m=1}^{n_2} \sum_{i,l=1}^{n_1} c_{ij} c_{lm}^* \langle \chi_k | \chi_j \rangle \langle \chi_m | \chi_k \rangle | \phi_i \rangle \langle \phi_l | =$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} \sum_{i,l=1}^{n_1} c_{ij} c_{lj}^* | \phi_i \rangle \langle \phi_l | \qquad (1.27)$$

Quindi, a meno che i coefficienti dello sviluppo di $|\psi\rangle$ non siano diagonali, $\hat{\rho}^{(1)}$ descrive una miscela statistica. Tale proprietà dipende dal fatto che uno stato di *H* non è sempre esprimibile come prodotto tensoriale tra uno stato di H_1 e uno stato di H_2 .

CAPITOLO II - ESPERIMENTO DELLA DOPPIA FENDITURA

2.1 Premessa

Come già anticipato, verrà trattato in questo capitolo l'esperimento della doppia fenditura per elettroni [6]. L'interferenza delle "onde di materia" ha evidenziato la necessità di formulare la meccanica quantistica come una teoria probabilistica. La statistica che regola tale fenomeno, tuttavia, differisce sostanzialmente rispetto a quella prevedibile tramite un qualsiasi modello classico.

L'esperimento consiste nell'inviare un alto numero di elettroni su una barriera, sulla quale siano praticate due fenditure puntiformi per permetterne il passaggio. Sul lato opposto rispetto alla barriera è posto uno schermo sul quale si possa visualizzare la distribuzione di particelle incidenti. Nella prima versione dell'esperimento, risalente agli anni trenta del secolo scorso, le particelle venivano inviate sotto forma di fascio; a partire dagli anni settanta, grazie ad un'implementazione tecnologica dell'apparato sperimentale, invece, si è riusciti ad inviare gli elettroni uno ad uno, in modo da poter osservare la formazione della distribuzione degli impatti sullo schermo.

Se si effettua l'esperimento chiudendo una delle due fenditure, si osserva una distribuzione approssimativamente gaussiana, centrata in corrispondenza della fenditura aperta: a parità di condizioni iniziali si ottengono diversi esiti, da cui la natura probabilistica della teoria. Ovviamente, nel caso in cui venga chiusa l'altra fenditura, il risultato è perfettamente simmetrico. Se, invece, non viene chiusa alcuna fenditura, non si osserva la sovrapposizione delle due distribuzioni ottenute nei casi precedenti, ma un'alternanza di massimi e minimi, caratteristica delle figure di interferenza. Tale risultato accosta la statistica associata alla meccanica quantistica a fenomeni di natura ondulatoria, piuttosto che a fenomeni casuali classici.

Di seguito saranno trattati due casi: un primo che non prevede misure preliminari sul percorso della particella e un secondo che prevede la presenza di un apparato di misura ideale che possa determinare con precisione variabile la localizzazione iniziale della particella. In entrambi i casi si assumerà che la particella si trovi inizialmente nella sovrapposizione di due gaussiane centrate rispettivamente in corrispondenza delle due fenditure e che l'evoluzione temporale inizi dopo l'attraversamento della barriera.

2.2 Interferenza

Si analizzerà di seguito il primo caso, allo scopo di giustificare in virtù degli assiomi la figura di interferenza osservata. Verrà trattato un problema semplificato, ovvero unidimensionale con l'introduzione di un sistema di riferimento con origine nel punto medio tra le due fenditure. Sia x la coordinata del sistema di riferimento introdotto e 2L la distanza tra le due fenditure. Per semplicità di notazione le si considerino adimensionalizzate.

Sfruttando la regola di Born, il 3° e il 4° postulato, si valuterà la densità di probabilità per unità di lunghezza di trovare la particella in una posizione x ad un istante di tempo t, la quale sarà indicata con P(x, t).

Proiettando la funzione d'onda che descrive lo stato iniziale della particella nello spazio coordinato si ottiene la seguente espressione

$$\langle x|\psi(0)\rangle = \psi(x,0) = A[e^{-\frac{(x-L)^2}{2}} + e^{-\frac{(x+L)^2}{2}}]$$
 (2.1)

Con A coefficiente di normalizzazione.

Utilizzando l'hamiltoniana di particella libera $H= p^2/2$ si ottiene la seguente evoluzione temporale

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \psi(x',0) \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-i\frac{p^2 t}{2}} e^{ip(x-x')}$$
(2.2)

Sostituendo per la $\psi(x', 0)$ la 2.1 si ottiene

$$\psi(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1+it}} \left[e^{-\frac{(x-L)^2}{2(1+it)}} + e^{-\frac{(x+L)^2}{2(1+it)}} \right]$$
(2.3)

Come è evidente, la linearità dell'equazione di Schrödinger porta ad avere ad un istante t generico uno stato sovrapposizione delle due evoluzioni temporali delle gaussiane di partenza. Volendo ottenere la P(x,t) bisogna considerare che, per la regola di Born, la posizione è associata all'operatore di moltiplicazione per x, che ammette spettro continuo con autofunzioni improprie le $\delta(x - x')$, $x' \in \mathbb{R}$. Noto, inoltre, che

 $\psi(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\delta(x-x')dx$, allora dal terzo postulato $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Utilizzando la 2.3 si ottiene

$$P(x,t) = \gamma(x,t) \left[\cosh\left(\frac{2xL}{1+t^2}\right) + \cos\left(\frac{2txL}{1+t^2}\right) \right]$$
(2.4)

Dove γ è definito come segue

$$\gamma(x,t) = \frac{2A^2}{\sqrt{1+t^2}} e^{-\frac{x^2+L^2}{1+t^2}}$$
(2.5)

Il termine di interferenza nella 2.4 è rappresentato dal coseno.

2.3 Effetti della misura

Si vuole ora valutare come il pattern di interferenza venga perso in corrispondenza dell'acquisizione di informazioni da parte dell'apparato di misura.

Si consideri un processo di misura ideale, che ammetta diversi livelli di precisione i quali varino con continuità dall'assenza totale di misura alla misura perfetta. Questo processo necessiterà di un ambiente quantistico ausiliario, l'apparato A, mentre si indicherà con S il sistema quantistico di partenza.

Siano dati i due stati di S $|\psi^S\rangle$ e $|\psi^D\rangle$ che, proiettati nello spazio coordinato, siano localizzati rispettivamente attorno alla fenditura di sinistra e alla fenditura di destra. L'apparato si trova in uno stato iniziale $|0\rangle$; quando esso interagisce con una particella che si trova in $|\psi^S\rangle$, esso transisce allo stato $|S\rangle$, quando interagisce con una particella in $|\psi^D\rangle$ esso transisce allo stato $|D\rangle$. I due stati $|S\rangle$ e $|D\rangle$ costituiscono una base per lo spazio di Hilbert associato ad A dopo che esso ha interagito con S.

Complessivamente, per il sistema completo, costituito da S ed A, le transizioni descritte sono espresse come segue

$$|\psi^{S}\rangle|0\rangle \rightarrow |\psi^{S}\rangle|S\rangle$$
 (2.6)

$$|\psi^D\rangle|0\rangle \to |\psi^D\rangle|D\rangle \tag{2.7}$$

Si è inoltre assunto che l'interazione tra S ed A avvenga subito dopo l'attraversamento della fenditura da parte della particella, la cui autofunzione dunque non ha subito evoluzione temporale.

Nel caso in cui la particella si trovi in uno stato $|\psi\rangle$ generico, si avrà la seguente transizione

$$|\psi\rangle|0\rangle \to |M_{\sigma}^{S}\psi\rangle|S\rangle + |M_{\sigma}^{D}\psi\rangle|D\rangle \equiv |\phi\rangle$$
(2.8)

Lo stato $|\phi\rangle$ così ottenuto, in generale non può essere scritto come prodotto tensoriale tra uno stato di S e uno stato di A: l'interazione ha causato la formazione di uno stato entangled. $M_{\sigma}^{S} \in M_{\sigma}^{D}$ sono degli operatori su H_S tali che

$$|\psi^{S}\rangle \propto M_{\sigma}^{S}|\psi\rangle, |\psi^{D}\rangle \propto M_{\sigma}^{D}|\psi\rangle$$
 (2.9)

Essi si dicono *operatori di misura* e σ costituisce un parametro reale che, variando da zero a infinito, quantifica la localizzazione della funzione attorno alla fenditura, ovvero la precisione della misura.

Si esplicita di seguito l'azione degli operatori di misura nello spazio coordinato

$$M^{S}_{\sigma}\psi(x) = m^{S}_{\sigma}(x)\psi(x), \qquad M^{D}_{\sigma}\psi(x) = m^{D}_{\sigma}(x)\psi(x)$$
(2.10)

Dove $m_{\sigma}^{S}(x)$ e $m_{\sigma}^{D}(x)$ sono dette *funzioni di misura* : con questa scelta, l'azione degli operatori di misura è puramente moltiplicativa.

Affinchè $|\phi\rangle$ sia normalizzato ad uno, noto che $|S\rangle$ e $|D\rangle$ sono ortonormali, si deve avere

$$M_{\sigma}^{S} \dagger M_{\sigma}^{S} + M_{\sigma}^{D} \dagger M_{\sigma}^{D} = I$$

$$\iff |m_{\sigma}^{S}(x)|^{2} + |m_{\sigma}^{D}(x)|^{2} = 1$$
(2.11)

Si consideri ora l'operatore densità che descrive lo stato $|\phi\rangle$, $\hat{\rho} = |\phi\rangle\langle\phi|$ e l'operatore densità ridotto che agisce su H_s

$$\hat{\rho}^{(S)} = \operatorname{Tr}^{(A)}\hat{\rho} = \langle S|\hat{\rho}|S\rangle + \langle D|\hat{\rho}|D\rangle = M_{\sigma}^{S}|\psi\rangle\langle\psi|M_{\sigma}^{S}^{\dagger}^{\dagger} + M_{\sigma}^{D}|\psi\rangle\langle\psi|M_{\sigma}^{D}^{\dagger}^{\dagger}^{\dagger} = \operatorname{C}^{S}|\psi^{S}\rangle\langle\psi^{S}| + \operatorname{C}^{D}|\psi^{D}\rangle\langle\psi^{D}|$$
(2.12)

Il sistema S è dunque passato da uno stato puro ad una miscela: tale effetto prende il nome di *decoerenza*. Noto che C^S e C^D hanno il significato in tale miscela di probabilità classiche per il sistema di trovarsi rispettivamente in $|\psi^{S}\rangle$ e $|\psi^{D}\rangle$, assumendo che il problema sia simmetrico rispetto all'origine C^S= C^D= ¹/₂. Sostituendo nella 2.12 si ottengono le due seguenti relazioni

$$\hat{\rho}^{(S)} = \frac{1}{2} |\psi^{S}\rangle \langle \psi^{S}| + \frac{1}{2} |\psi^{D}\rangle \langle \psi^{D}| \qquad (2.13)$$

$$M_{\sigma}^{S}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi^{S}\rangle , \qquad M_{\sigma}^{D}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi^{D}\rangle$$
 (2.14)

Per successive valutazioni, bisogna scegliere la forma delle funzioni di misura, la quale rispetti la 2.

Si consideri al variare di x' il seguente set di operatori, che tendono per $\sigma \to 0$ al proiettore $|x'\rangle\langle x'|$

$$F_{\sigma}(x')|x\rangle \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}}|x\rangle$$
(2.15)

Integrando sui due intervalli]- ∞ , 0] e [0,+ ∞ [si ottengono due nuovi operatori dipendenti dal solo paramentro σ

$$F_{\sigma}^{S}|x\rangle \equiv \int_{-\infty}^{0} F_{\sigma}(x')|x\rangle dx' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{2}\sigma}^{+\infty} e^{-u^{2}} du|x\rangle$$
$$\equiv \frac{1}{2} Erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)|x\rangle$$
(2.16)

Analogamente $F_{\sigma}^{D}|x\rangle = \frac{1}{2} Erfc\left(-\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)|x\rangle$. Tali operatori corrispondono ad una localizzazione a sinistra e a destra dello zero rispettivamente, con precisione σ . Utilizzando le espressioni trovate per tali operatori è facile verificare che

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ F_{\sigma}^{S} + F_{\sigma}^{D} = \mathbf{I}$$
(2.17)

Si può, quindi, porre $m_{\sigma}^{S}(x) = m_{\sigma}^{D}(-x) \equiv \sqrt{F_{\sigma}^{S}(x)}$. Tale relazione rispetta sia il significato fisico alle funzioni di misura sia la relazione di vincolo 2.11.

Resta da valutare l'evoluzione temporale dello stato inziale, verificando che il termine di interferenza si annulla per $\sigma \rightarrow 0$. Poiché, tuttavia, non è nota l'espressione analitica delle funzioni di misura, bisogna procedere ad uno sviluppo. Si tenga conto che le funzioni di misura agiscono come operatori di moltiplicazione sulla $\psi(x)$, che ha la forma di sovrapposizione di due gaussiane, centrate in -L e +L

$$\psi^{S}(x) = \sqrt{2}A \left[m_{\sigma}^{S}(x)e^{-\frac{(x+L)^{2}}{2}} + m_{\sigma}^{S}(x)e^{-\frac{(x-L)^{2}}{2}} \right]$$
(2.18)

Sviluppando all'ordine zero la $m_{\sigma}^{s}(x)$ attorno a –L nel primo prodotto e attorno a +L nel secondo e procedendo analogamente per la $\psi^{D}(x)$ si ottiene

$$\psi^{S}(x) \approx B[m_{\sigma}^{S}(-L) e^{-\frac{(x+L)^{2}}{2}} + m_{\sigma}^{S}(L) e^{-\frac{(x-L)^{2}}{2}}]$$
 (2.19)

$$\psi^{D}(x) \approx B[m_{\sigma}^{D}(-L) e^{-\frac{(x+L)^{2}}{2}} + m_{\sigma}^{D}(L) e^{-\frac{(x-L)^{2}}{2}}]$$
(2.20)

Dove il coefficiente B è determinato per rinormalizzazione

$$B^{-2} = \sqrt{\pi} \left(1 + \beta_{\sigma} e^{-L^2} \right)$$
 (2.21)

$$\beta_{\sigma} \equiv 2 \, m_{\sigma}^{S}(L) m_{\sigma}^{D}(L) \tag{2.22}$$

Si verifica che il termine β_{σ} dipende dal rapporto σ/L : si vedrà che esso è il parametro che quantifica la perdita di interferenza.

Si valuterà ora l'evoluzione temporale dell'operatore densità introdotto nella 2.13

$$\hat{\rho}^{(S)}(t) = U(t, t_0) \left(\frac{1}{2} |\psi^S\rangle \langle \psi^S | + \frac{1}{2} |\psi^D\rangle \langle \psi^D | \right) U^{\dagger}(t, t_0)$$
(2.23)

Ponendo, quindi, $|\psi^{S}(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi^{S}\rangle$ e analogamente

 $|\psi^{D}(t)\rangle = U(t, t_{0})|\psi^{D}\rangle$, si ottiene

$$\hat{\rho}^{(S)}(t) = \frac{1}{2} |\psi^{S}(t)\rangle \langle \psi^{S}(t)| + \frac{1}{2} |\psi^{D}(t)\rangle \langle \psi^{D}(t)| \qquad (2.24)$$

Il sistema, dunque, al generico istante t si trova nella miscela statistica dell'evoluzione degli stati $|\psi^D\rangle \in |\psi^S\rangle$, ciascuno con peso 1/2

La densità di probabilità all'istante t sarà quindi data dall'espressione seguente

$$P_{\sigma}(x,t) = \frac{1}{2} |\psi^{S}(x,t)|^{2} + \frac{1}{2} |\psi^{D}(x,t)|^{2}$$
(2.25)

Utilizzando l'hamiltoniana di particella libera, si trova

$$\psi^{S}(x,t) = \frac{B}{\sqrt{1+it}} \left[m_{\sigma}^{S}(-L)e^{-\frac{(x+L)^{2}}{2(1+it)}} + m_{\sigma}^{S}(L)e^{-\frac{(x-L)^{2}}{2(1+it)}} \right]$$
(2.26)

$$\psi^{D}(x,t) = \frac{B}{\sqrt{1+it}} \left[m_{\sigma}^{D}(-L)e^{-\frac{(x+L)^{2}}{2(1+it)}} + m_{\sigma}^{D}(L)e^{-\frac{(x-L)^{2}}{2(1+it)}} \right]$$
(2.27)

Sostituendo tali espressioni nella 2.25, si ottiene

$$P_{\sigma}(x,t) = \gamma_{\sigma}(x,t) \left[\cosh\left(\frac{2xL}{1+t^2}\right) + \beta_{\sigma}\cos\left(\frac{2txL}{1+t^2}\right)\right]$$
(2.28)

Dove γ_{σ} è definito come segue

$$\gamma_{\sigma}(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2 + L^2}{1 + t^2}}}{\sqrt{\pi + \pi t^2 (1 + \beta_{\sigma} e^{-L^2})}}$$
(2.29)

Il termine di interferenza è modulato da β_{σ} e tende, quindi, a zero per $\sigma \rightarrow 0$: tale effetto prende il nome di *decoerenza*.

Si è mostrato come la precisione con cui si determina il cammino delle particelle attraverso la fenditura è direttamente correlata alla perdita di interferenz. In particolare, la perdita totale di interferenza può essere attribuita ad un apparato di misura che acquisisce conoscenza massimale sul sistema, mentre una misura con la quale non si ottengano informazioni non ha effetto sull'interferenza.

CAPITOLO 3 - LA RIDUZIONE DEL PACCHETTO D'ONDA

3.1 Premisura di Von Neumann

Si intende ora fornire una definizione matematica di decoerenza, universalmente valida: ci si concentra, quindi, sul quinto postulato, riproponendo la trattazione di Von Neumann [7]. Egli ipotizzò la suddivisione del processo di misura in due fasi

• Per interazione con l'apparato di misura il sistema passa da una sovrapposizione di autostati di un operatore \hat{A} (stato puro) alla miscela statistica degli stessi.

• L'operazione di misura di A avviene sulla miscela secondo le regole della probabilità classica

In particolare, ci si soffermerà sulla prima fase, che prende il nome di *premisura* di Von Neumann. Volendo formalizzare matematicamente questo processo, si procede di seguito nel caso semplice di operatore con spettro discreto non degenere.

Siano $\{|a_j\rangle\}_{j=1,...,n}$ gli autostati di $\hat{A} \in \hat{P}_j = |a_j\rangle\langle a_j|$ con j=1,...,n i relativi proiettori. Sia $|\psi\rangle$ lo stato iniziale del sistema, espresso come segue

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j |a_j\rangle \tag{3.1}$$

 $e \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ l'operatore densità associato. Si nota che, trattandosi di una sovrapposizione di autostati e non di una miscela statistica, $\hat{\rho}$ non può essere esplicitato in termini di soli proiettori \hat{P}_{l} ma presenta anche termini non diagonali

$$\hat{\rho} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j c_k^* \left| a_j \right\rangle \langle a_k |$$
(3.2)

Il processo di premisura, dunque, consiste nel passaggio da $\hat{\rho}$ ad un nuovo operatore densità $\hat{\rho}'$ definito come segue

$$\hat{\rho}' = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 |a_j\rangle \langle a_j| = \sum_{j=1}^{n} \hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j$$
(3.3)

Tale passaggio prende il nome di riduzione del pacchetto d'onda.

Si può fornire, dunque, una formulazione alternativa del 5º postulato:

Dato un sistema S descritto dall'operatore densita $\hat{\rho}$, sia \hat{A} un osservabile del sistema e $\{\hat{P}_j\}_{j=1,...,n}$ l'insieme dei proiettori sui suoi autostati, la misura di A comporta l'evoluzione istantanea dallo stato descritto da $\hat{\rho}$ allo stato descritto da $\hat{\rho}'$ con

$$\hat{\rho}' = \sum_{i=1}^{n} \hat{P}_i \hat{\rho} \hat{P}_i \tag{3.4}$$

Formalmente, quindi, la decoerenza consiste in una perdita dei termini non diagonali dell'operatore densità.

3.2 Il modello di Coleman-Hepp

Il modello di Coleman-Hepp si propone di fornire una spiegazione rigorosa della riduzione del pacchetto d'onda [4]. Di seguito se ne tratta una versione semplificata. L'environment è costituito da una catena lineare semi-infinita di particelle di spin $\frac{1}{2}$, fissate nelle posizioni x=1,2,...,n,... con x coordinata adimensionalizzata del sistema di riferimento monoassiale introdotto nella direzione della catena. Il sistema, invece, è una particella di spin $\frac{1}{2}$ in moto nella direzione x: l'osservabile che si intende misurare è la terza componente di spin di tale particella.

Sia $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x}$ l'operatore di quantità di moto della particella e sia

 $\boldsymbol{\sigma}_0 = (\sigma_0^1, \sigma_0^2, \sigma_0^3)$ l'operatore di spin della particella. Siano infine

 $\sigma_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2, \sigma_n^3), n \in \mathbb{N}$, gli operatori di spin delle particelle costituenti l'appartato. Il sistema completo è rappresentato da una funzione d'onda $\psi(t, x, \sigma_0, \sigma_1, ...)$, in una rappresentazione in cui tutte le terze componenti degli operatori di spin sono diagonali e dove con σ_n si sono denotati gli autovalori corrispondenti

$$\sigma_n^3 \psi(t, x, \sigma_0, \sigma_1, \dots) = \sigma_n \psi(t, x, \sigma_0, \sigma_1, \dots)$$
(3.5)

Si assume per convenzione che i σ_n possano assumere come valore ± 1 . Supponendo la forma seguente per l'hamiltoniana

$$H = H_0 + H_1 \tag{3.6}$$

Dove H_0 ha il significato di hamiltoniana di particella libera e H_1 quello di hamiltoniana di interazione.

$$H_0 = p, \qquad H_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} V(x-n)\sigma_n^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma_0^3\right)$$
(3.7)

Dove V(x) è una funzione definita positiva, a supporto compatto in] – r; r [con la seguente proprietà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx V(X) = \frac{\pi}{2}$$
(3.8)

Dalla scelta di tale hamiltoniana derivano le seguenti due proprietà:

• Poiché il termine di energia cinetica è lineare in *p*, la cinematica della particella è classica, cioè il pacchetto d'onda si muove nella direzione dell'asse x senza cambiare forma.

L'equazione di Schrödinger ammette la seguente soluzione

$$\psi(t, x, \sigma_0, \sigma_1, \dots) = \prod_{i=1}^{+\infty} e^{-iF(x-n)\sigma_n^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sigma_0^3\right)} \phi(x - t, \sigma_0, \dots)$$
(3.9)

Con ϕ arbitraria e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} dy V(y)$. Dalla 3.8

$$F(x) = 0, \quad x < -r \tag{3.10}$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2}, \ x > r$$
 (3.11)

Si consideri, ora, il caso specifico in cui gli spin della catena siano tutti up: i due possibili stati per $\sigma_0 = \pm 1$ sono dati dalle seguenti funzioni

$$\psi_{+}(t, x, ...) = \chi(x - t)\phi_{+}(\sigma_{0})\prod_{n=1}^{+\infty}\phi_{+}(\sigma_{n})$$
(3.12)

$$\psi_{-}(t, x, ...) = \chi(x - t)\phi_{-}(\sigma_{0})\prod_{n=1}^{+\infty}\phi'_{+}(\sigma_{n}, x - n)$$
(3.13)

Dove, per definizione $\phi_{\pm}(\sigma) = \delta_{\sigma\pm 1}$, $\phi'_{+}(\sigma_n, x - n) = e^{-iF(x-n)\sigma_n^1}\phi_{+}(\sigma_n)$. La forma della 3.12 dipende dal fatto che se la particella inizialmente ha spin up, l'hamiltoniana di interazione di annulla e quindi gli spin della catena restano invariati. Dalle equazioni 3.10 e 3.11

$$\phi'_{+}(\sigma_{n}, x - n) = \phi_{+}(\sigma_{n}), \ x - n < -r$$
(3.14)

$$\phi'_{+}(\sigma_{n}, x - n) = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_{n}^{1}}\phi_{+}(\sigma_{n}), \quad x > r$$
(3.15)

Noto che $(\sigma_n^1)^j = \sigma_n^1$ per j dispari e $(\sigma_n^1)^j = II$ per j pari, si ottiene

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_{n}^{1}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(-i\frac{\pi}{2}\sigma_{n}^{1}\right)^{j}$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \left(-i\frac{\pi}{2}\right)^{2j+1} \sigma_{n}^{1}$$

$$+ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2j!} \left(-i\frac{\pi}{2}\right)^{2j}$$

$$= (-i) \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{j} \frac{1}{(2j+1)!} \frac{\pi^{2j+1}}{2} \sigma_{n}^{1}$$

$$+ \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{j} \frac{1}{2j!} \frac{\pi^{2j}}{2} = -isen\left(\frac{\pi}{2}\right) \sigma_{n}^{1} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.16)$$

Sostituendo nella 3.15

$$\phi'_{+}(\sigma_{n}, x - n) = -i\phi_{-}(\sigma_{n}), \ x - n > r$$
(3.17)

Si supponga, inoltre, che il pacchetto d'onda χ abbia supporto compatto in] – w, w[. Sostituendo questi estremi come limite inferiore e superiore rispettivamente per x-t nella 3.14 e nella 3.17 si ottengono le seguenti relazioni

$$\phi'_{+}(\sigma_{n}, x - n) = \phi_{+}(\sigma_{n}), \quad n > t + r + w$$
(3.18)

$$\phi'_{+}(\sigma_{n}, x - n) = -i\phi_{-}(\sigma_{n}), \ n < t - r - w$$
(3.19)

Al crescere di t, dunque, se lo spin iniziale della particella è down, le particelle dell'apparato subiscono ad una ad una *spin-flip*, passano cioè da spin up a spin down. Se Q è un generico operatore che si esprime in termini dei primi N spin, $\forall t > 1 + N + r + w$

$$\langle \psi_{\pm} \big| Q \psi_{\mp} \rangle = 0 \tag{3.20}$$

In corrispondenza dell'acquisizione di informazione sul sistema da parte dell'apparato di misura, si assiste ad una perdita dei termini non diagonali del generico operatore Q: si tratta della riduzione del pacchetto d'onda.

CAPITOLO 4 – INTERAZIONI PUNTUALI

4.1 Definizione e dominio

Per presentare l'ultimo modello di environment, è necessario fornire delle nozioni di base sul concetto di interazioni puntuali [8].

Per definizione, l'hamiltoniana di una particella sottoposta ad interazione puntuale in un generico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è un operatore che rispetti le seguenti proprietà

• Su funzioni con supporto non contenente **x**, essa coincide con l'hamiltoniana di particella libera.

• Su funzioni che non si annullano in **x**, essa agisce diversamente dall'operatore laplaciano, in maniera non triviale.

Dal punto di vista fisico, una tale hamiltoniana descrive una particella sottoposta ad una forza molto intensa, di corto range rispetto alla lunghezza d'onda associata alla particella stessa. Un esempio, nel caso unidimensionale e per un'interazione localizzata nell'origine, è dato dall'espressione seguente

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta_0 \tag{4.1}$$

Dove δ_0 è la delta di Dirac centrata nell'origine e α è un numero reale che quantifica l'intensità dell'interazione. Sebbene di seguito si mostrerà che tale hamiltoniana rispetta le proprietà precedentemente enunciate, è importante sottolineare che essa non è l'unica e che da una teoria generale se ne possono trovare delle altre. Ai fini della trattazione, tuttavia, sarà sufficiente considerare quest'unica forma per *H*. Il primo problema da affrontare è quello di trovare un dominio D(H) sul quale l'espressione formale 4.1 definisca univocamente un operatore autoaggiunto. Ovviamente, poiché nella forma di *H* figura la δ_0 , potrà essere attribuito un significato solo in senso distribuzionale all'hamiltoniana. $\forall \phi \in D(H) \in \forall \xi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ si dovrà avere

$$(\xi, H\phi) = \int dx \xi^*(x) H_0 \phi(x) + \alpha \xi^*(0) \phi(0)$$
(4.2)

Con H_0 hamiltoniana di particella libera. Da tale relazione, innanzitutto, è evidente che *H* rispetti la prima proprietà enunciata. Per quanto riguarda la seconda proprietà, invece, bisogna distinguere i due casi $\alpha < 0$, ovvero di interazione attrattiva, e $\alpha > 0$, ovvero di interazione repulsiva. Nel primo caso è sufficiente considerare lo spettro dell'hamiltoniana, la quale infatti ammette uno stato legato. Nel secondo caso, invece, si può ricorrere ad un problema di scattering e verificare che la scelta di tale hamiltoniana comporta in coefficiente di riflessione non nullo. Per non appesantire la trattazione, tuttavia, non verrà fornita prova di nessuna delle due precedenti affermazioni. Si intende, ora, ricavare D(H) sfruttando la 4.2: affinché l'azione di *H* sia ben posta $\phi(x)$ deve essere continua nell'origine e deve appartenere alla classe $H^2(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Si può verificare che queste due condizioni sono equivalenti ad imporre $\phi(x) \in H^2(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cap H^1(\mathbb{R})$. Integrando, quindi, per parti la 4.2 si ottiene

$$(\xi, H\phi) = \frac{\hbar^2}{2m} \int dx \xi^{*'}(x) \phi'(x) + \alpha \xi^{*}(0) \phi(0)$$
(4.3)

D'altra parte deve anche valere che

$$\begin{aligned} (\xi, H\phi) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \xi^*(x) H_0 \phi(x) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int dx \xi^{*'}(x) \phi'(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \xi^*(0) [\phi'(0^+) \\ &- \phi'(0^-)] \end{aligned}$$
(4.4)

Confrontando le due espressioni si ottiene la seguente condizione al bordo

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\phi(0) \tag{4.5}$$

Quindi D(H) resta caratterizzato come segue

$$D(H) = \left\{ \phi \in L^2(\mathbb{R}) : \phi$$

$$\in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap H^1(\mathbb{R}), \phi'(0^+) - \phi'(0^-)$$

$$= \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \phi(0) \right\}$$
(4.6)

È, tuttavia, conveniente riscrivere il dominio in un'altra forma. Sia posto, $\forall \lambda > 0, G^{\lambda}$:

$$(H_0 + \lambda)G^{\lambda} = \delta_0 \Rightarrow G^{\lambda}(x) = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{e^{-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{\lambda}|x|}}{2\sqrt{\lambda}}$$
(4.7)

È facile verificare che $G^{\lambda} \in H^1(\mathbb{R}), G^{\lambda} \notin H^2(\mathbb{R}); \forall \phi \in D(H), \forall \lambda > 0$ si pone

$$\phi = w^{\lambda} + qG^{\lambda} \tag{4.8}$$

$$q \equiv -\alpha \phi(0) \tag{4.9}$$

Banalmente, $w^{\lambda} \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap H^1(\mathbb{R})$ e , inoltre, dalla scelta di q

$$w^{\lambda'}(0^+) - w^{\lambda'}(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \phi(0) - q \left(G^{\lambda'}(0^+) - G^{\lambda'}(0^-) \right)$$
$$= \frac{2m\alpha}{\hbar^2} (\alpha \phi(0) + q) = 0$$
(4.10)

Il che implica $w^{\lambda} \in H^2(\mathbb{R})$. Infine, dalla condizione al contorno si ottiene che

$$w^{\lambda}(0) = -\left(\alpha^{-1} + G^{\lambda}(0)\right)q$$
(4.11)

È ora possibile riscrivere il dominio come segue

$$D(H) = \left\{ \phi \in L^2(\mathbb{R}) : \phi = w^{\lambda} + qG^{\lambda}, w^{\lambda} \in H^2(\mathbb{R}), q \\ \in \mathbb{C}, w^{\lambda}(0) = -\left(\alpha^{-1} + G^{\lambda}(0)\right)q \right\}$$
(4.12)

Ciascun elemento del dominio, dunque, è dato dalla somma di una parte regolare w^{λ} e di q volte la funzione di Green dell'equazione 4.7, dove q resta definito dal valore in zero della parte regolare, per soddisfare la condizione al bordo di salto della derivata. Con questa forma per la generica $\phi \in D(H)$, si può esplicitare l'azione di *H* nel modo seguente

$$(\xi, H\phi) = ((H_0 + \lambda)\xi, \phi) + \alpha\xi^*(0)\phi(0) - \lambda(\xi, \phi)$$
$$= ((H_0 + \lambda)\xi, w^{\lambda}) + q\xi^*(0) + \alpha\xi^*(0)\phi(0)$$
$$-\lambda(\xi, \phi) = ((H_0 + \lambda)\xi, w^{\lambda}) - \lambda(\xi, \phi)$$
(4.13)

$$\Rightarrow (H+\lambda)\phi = (H_0+\lambda)w^{\lambda} \tag{4.14}$$

A partire da tale azione si può infine dimostrare che H è un operatore autoaggiunto sul suo dominio.

Un discorso analogo può essere effettuato nel caso di N interazioni puntuali. Sia $Y = \{y_1; ...; y_N\}, y_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., N$, l'insieme dei punti in cui sono localizzate le interazioni. Sia $\alpha_j, j = 1, ..., N$, l'intensità della j-esima interazione e si ponga $\alpha \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_N)$. L'hamiltoniana di questo sistema si scriverà quindi nella forma seguente

$$H' = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{y_j}$$
(4.15)

Anche in questo caso il generico elemento del dominio presenta una parte regolare, indicata con ψ_{λ} , e una parte che, invece, soddisfi le condizioni al bordo di discontinuità della derivata nei punti di Y. Ciascuna funzione di Green $G^{\lambda}(x - y_{j'})$, tuttavia, si comporta regolarmente in $y_{j'}$, $\forall j \neq j'$. Pertanto, il coefficiente che moltiplica tale funzione deve dipendere dal valore della ψ_{λ} non solo in $y_{j'}$ ma anche negli altri punti di Y. Più specificamente, si può dimostrare che posta $[\Gamma_{\alpha,Y}(\lambda)]_{j,j'} = -[\alpha_j^{-1}\delta_{jj'} + G^{\lambda}(y_j - y_{j'})]^N$ allora il dominio si scrive come segue

$$D(H') = \left\{ \phi(x) \in L^{2}(\mathbb{R}) : \phi(x) \right\}$$
$$= \psi_{\lambda}(x)$$
$$+ \sum_{j,j'=1}^{N} [\Gamma_{\alpha,Y}(k)]_{j,j'}^{-1} \psi_{\lambda}(y_{j'}) G^{\lambda}(x - y_{j}), \psi_{\lambda}$$
$$\in H^{2}(\mathbb{R}) \right\}$$
(4.16)

Analogamente al caso di una sola interazione, quindi, si potrà scrivere che $(H' + \lambda)\phi = (H_0 + \lambda)\psi_{\lambda}$.

4.2 Spettro

Si intende, ora, determinare spettro e autofunzioni di *H* e stabilire che tipo di evoluzione temporale comporti tale hamiltoniana, nei due casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. In particolare, ci si concentrerà sul mostrare che essa ammette spettro continuo in $[0; +\infty[$ e sul ricavare le autofunzioni generalizzate corrispondenti. Si consideri il problema agli autovalori

$$H\phi(x) = E\phi(x) \tag{4.17}$$

Noto che, per $x \neq 0$ l'hamiltoniana è quella di particella libera, si cercheranno soluzioni per $E \ge 0$ nella forma seguente

$$\phi_k(x) = e^{ikx} + \eta_k(x) \tag{4.18}$$

Dove l'onda piana rappresenta la soluzione dell'equazione agli autovalori per la particella libera, avendo quindi posto $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, e η_k ne costituisce una perturbazione:

rispettivamente costituiranno la parte regolare e quella con derivata discontinua dell'autofunzione. Sostituendo nella 4.17 si ottiene

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - k^2\right)\eta_k(x) + \alpha_0\delta_0\eta_k(x) = -\alpha_0\delta_0 \tag{4.19}$$

Avendo posto

$$\alpha_0 \equiv \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \tag{4.20}$$

Si può facilmente verificare che per ogni valore di k la 4.19 ammette le seguenti due soluzioni

$$\eta_{\pm,k}(x) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_0 \pm 2i|k|} e^{\pm i|k||x|}$$
(4.21)

Poste $\phi_{\pm,k}(x) \equiv e^{ikx} + \eta_{\pm,k}$, esse sono soluzioni della 4.17 per $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ e rappresentano le autofunzioni generalizzate di *H*. È ora possibile enunciare il teorema di espansione delle autofunzioni, che permetterà di valutare l'evoluzione temporale di un generico stato iniziale per il sistema di hamiltoniana *H*.

Teorema

i) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, la sua trasformata generalizzata , definita come segue

$$\widehat{f_{\pm}}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} dy \phi_{\pm,k}^*(y) f(y)$$
(4.22)

Esiste ed è di classe $L^2(\mathbb{R})$.

ii) $\forall \alpha > 0$ l'operatore $W_{\pm}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, definito come segue

$$W_{\pm}f = \widehat{f_{\pm}} \tag{4.23}$$

È unitario e ammette il seguente inverso

$$(W_{\pm}^{-1}\hat{g})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} dk \hat{g}(k) \phi_{\pm,k}(x)$$
(4.24)

iii) $\forall \alpha < 0$, l'operatore $U_{\pm}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{C}$, definito come segue

$$U_{\pm}f = \{\widehat{f_{\pm}}, \widehat{f_{0}}\}, \widehat{f_{0}} = (\xi_{0}, f), \ \xi_{0}(x) = \frac{\sqrt{m|\alpha|}}{\hbar^{2}} e^{-\frac{m|\alpha|}{\hbar^{2}}|x|}$$
(4.25)

È unitario e ammette il seguente inverso

$$\left(U_{\pm}^{-1}\{\widehat{g_{\pm}};\widehat{g_{0}}\}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}dk\widehat{g_{\pm}}(k)\phi_{\pm,k}(x) + \widehat{g_{0}}\xi_{0}(x)$$
(4.26)

iv) Sia u(x) appartenente al dominio dell'hamiltoniana definita come operatore autoaggiunto, se $\int dk |k^2 \widehat{u_{\pm}}(k)|^2 < +\infty$, allora si avrà

•
$$Hu(x) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} dk \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m} \widehat{u_{\pm}}(k) \phi_{\pm,k}(x), \forall \alpha > 0 \qquad (4.27)$$
• $Hu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} dk \frac{\hbar^{2}k^{2}}{2m} \widehat{u_{\pm}}(k) \phi_{\pm,k}(x) +$
 $E_{0} \widehat{u_{0}} \xi_{0}(x), E_{0} = -\frac{m\alpha^{2}}{2\hbar^{2}}, \forall \alpha < 0 \qquad (4.28)$

Tale teorema, del quale non si fornirà la dimostrazione, permette di rappresentare esplicitamente l'evoluzione temporale $e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0$ di un arbitrario stato iniziale $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Si ottiene

$$\psi(x,t) \equiv \left(e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-it\frac{\hbar k^2}{2m}} \widehat{\psi_{0,+}}(k)\phi_{+,k}(x), \alpha$$

$$> 0 \qquad (4.29)$$

$$\psi(x,t) \equiv \left(e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_{0}\right)$$

= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dk e^{-it\frac{\hbar k^{2}}{2m}}\widehat{\psi_{0,+}}(k)\phi_{+,k}(x)$
+ $e^{-i\frac{t}{\hbar}E_{0}}\widehat{\psi_{0,0}}\xi_{0}(x), \qquad \widehat{\psi_{0,0}} \equiv (\xi_{0},\psi_{0}), \alpha < 0$ (4.30)

CAPITOLO 5 - CAMERA DI WILSON

5.1 Prefazione

L'ultimo modello che resta da analizzare è quello unidimensionale applicato alla camera di Wilson. Quanto osservato in tale rivelatore di particelle aprì formalmente il dibattito sul problema della misura alla 5^a conferenza di Solvay del 1927 [3]. La particella all'interno della camera, infatti, segue apparentemente una cinematica classica, pur costituendo un sistema microscopico, in pieno regime di applicabilità della meccanica quantistica. Tuttavia, visti gli enormi successi che quest'ultima otteneva a livello sperimentale, il problema non fu particella come conseguenza dell'assioma del collasso del pacchetto d'onda. Tale assunzione costituì una rinuncia alla modellizzazione del gas che riempie la camera come sistema quantistico. Il modello che sarà introdotto di seguito, invece, ha come scopo quello di riprodurre il comportamento classico della particella in base alla sua interazione con gli atomi del gas.

In particolare, si assumerà che la particella si trovi inizialmente in uno stato sovrapposizione di due pacchetti identici con valor medio opposto della quantità di moto (l'analogo nel caso unidimensionale dell'onda sferica) [1]. Inoltre, si considererà una particella di energia iniziale molto elevata, in modo che rispetto ad essa l'energia scambiata con il sistema risulti trascurabile. L'environment sarà costituito da una catena lineare di N spin nella direzione dell'asse coordinato del riferimento unidimensionale introdotto. Tale catena sarà modellizzata tramite un particolare tipo di interazioni puntuali, dette spin-dipendenti. Si intende mostrare che, con questa scelta, si ha una probabilità significativamente diversa da zero soltanto che lo stato della particella evolva nella seguente somma incoerente di due stati: il primo che dascrive la particella in moto verso sinistra con un gran numero di spin di sinistra che cambiano stato, il secondo che descrive la situazione speculare a destra. In questo modo, si ottiene una giustificazione delle tracce osservate nella camera. Di seguito si esporrà in cosa consiste il modello e, poiché non è possibile procedere ad una risoluzione analitica, saranno unicamente forniti dei risultati ottenuti tramite calcolo numerico.

5.2 Il modello

A differenza delle interazioni puntuali trattate nel capitolo precedente, l'hamiltoniana H di un sistema sottoposto ad interazioni puntuali spin dipendenti agisce sul seguente spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes S_N \tag{5.1}$$

Con S_N spazio delle configurazioni degli N spin della catena. H, infatti, rappresenta una delle possibili estensioni autoaggiunte dell'operatore laplaciano libero che moltiplica tensorialmente il prodotto per una fase su S_N . In questo modo, infatti, si tiene conto della struttura interna dell'environment, per cui la variazione di energia della particella corrisponde al cambiamento di stato di uno o più spin della catena, che costituiscono ciascuno un sistema atomico a due livelli. Siano $\sigma_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2, \sigma_n^3), n =$ 1, ... N, gli operatori di spin delle particelle costituenti l'appartato e σ_n l'autovalore associato alla terza componente dell'n-esimo spin che per convenzione si sceglie pari a ± 1 . Sia posto $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_N) \in S$, dove S, dunque, rappresenta l'insieme delle posibili configurazioni di spin della catena. Il generico stato del sistema si potrà scrivere come segue

$$\psi = \sum_{S} \psi_{\sigma} \otimes \chi_{\sigma} \tag{5.2}$$

Dove $\psi_{\sigma} \in L^2(\mathbb{R})$ rappresenta la funzione d'onda della particella quando la catena assuma la configurazione σ e $\chi_{\sigma} = \chi_{\sigma_1} \otimes ... \otimes \chi_{\sigma_N}$, con χ_{σ_j} che rappresenta lo stato del j-esimo spin per $\sigma_j = \pm 1$. L'hamiltoniana del sistema si scrive nella forma seguente

$$H = H_0 + H_1 \tag{5.3}$$

Dove H_0 costituisce l'hamiltoniana di evoluzione libera del sistema, mentre H_1 costituisce quella di interazione. Sia posto $\alpha \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_N), \alpha_j \in \mathbb{R}^+, j = 1, ..., N$ e siano dati due numeri reali non negativi β, ρ . Sia, infine, $Y = \{y_1; ...; y_N\}$ l'insieme dei punti in cui sono localizzati gli spin con $y_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., N$. Estendendo quanto visto per le interazioni puntuali, il dominio di H si scrive come segue

$$D(H) = \left\{ \psi = \sum_{S} \psi_{\sigma} \otimes \chi_{\sigma} \in \mathcal{H} : \psi_{\sigma} \in H^{2}(\mathbb{R} \setminus Y) \forall \sigma \in S; \psi_{\sigma} \\ \in C^{0}(Y), \forall \sigma, \psi_{\sigma}'(y_{j}^{+}) - \psi_{\sigma}'(y_{j}^{-}) \\ = \beta \psi_{\sigma}(y_{j}) \pm i \sigma_{j} \rho \psi_{\sigma'}(y_{j}), \forall \sigma, \sigma' \in S: \sigma_{j} \neq \sigma_{j}', \sigma_{k} \\ = \sigma_{k}', \forall k \neq j \right\}$$

$$(5.4)$$

L'azione dell'hamiltoniana, inoltre, può essere esplicitata nel seguente modo per $x \in \mathbb{R} \setminus Y$

$$H\psi = \sum_{S} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \alpha \cdot \sigma \right) \psi_{\sigma} \otimes \chi_{\sigma}$$
(5.5)

Si assume, inoltre, che lo stato iniziale del sistema non sia entangled e che si possa quindi scrivere nella forma seguente

$$\psi(t=0,x,\sigma_1,\ldots,\sigma_N)=\psi_0(x)\chi_{\sigma_1}\ldots\chi_{\sigma_N}$$
(5.6)

Avendo posto $\sigma_1 = \dots = \sigma_N = -1$, cioè tutti gli spin della catena down e $\psi_0(x) = c \left[f(x)e^{-i\frac{p_0}{\hbar}x} + f(x)e^{i\frac{p_0}{\hbar}x} \right], f(x) = e^{-\frac{x^2}{4\delta^2}}$ per $x \in]-a; a[, a, \delta \in \mathbb{R}^+, f(x) = 0$ per $x \notin]-a; a[$ come anticipato nella prefazione.

Per $N = 8 \text{ e} \rho = 150$ dall'analisi numerica si ottengono i seguenti risultati

- i) La probabilità di avere una configurazione in cui si osserva spin flip solo a destra (o analogamente a sinistra) dello zero, escluso il caso di un solo spin flip, è data da $p_{dos} = 0.197957193495$.
- ii) La probabilità di osservare soltanto uno spin flip è data da $p_{us}=0.534889312125$.
- iii) La probabilità che non si verifichi neanche uno spin flip è data da $p_n = 0.0691963008808$.

Questo risultato è, quindi, perfettamente compatibile con l'osservazione di tracce all'interno della camera.

CONCLUSIONI

Nel corso del presente lavoro di tesi è stato esposto un particolare approccio al problema della misura in meccanica quantistica. Il processo di misura, infatti, è stato posto in correlazione biunivoca con l'interazione del sistema con un ambiente quantistico. Si è mostrato come la formazione di stati entangled, conseguente a tale interazione, induca il sistema ad evolvere da una sovrapposizione di autostati ad una miscela statistica. Con il procedere della trattazione la modellizzazione è stata affinata, fino ad arrivare alla descrizione di un ambiente fisico vero e proprio, costituito da un insieme di atomi a due livelli.

L'idea di guardare all'evoluzione dello stato dell'intero sistema risale ai primi anni della meccanica quantistica: tale prospettiva fu adottata da Mott proprio per descrivere la camera di Wilson. Riferendosi alle tracce osservate, egli scrive :"It is a little difficult to picture how it is that an outgoing spherical wave can produce a straight track; we think intuitively that it should ionise atoms at random throughout space"⁽¹⁾.

Mott, dunque, ipotizza che quanto osservato possa coincidere con un'onda dipendente da tutti i gradi di libertà del sistema nella sua totalità, comprensivo, cioè, degli atomi del gas all'interno della camera. In tale ottica, non vi è alcun collasso in quanto il sistema nella sua totalità non è sottoposto ad operazioni di misura. Grazie al modello costruito nel caso tridimensionale, Mott riesce a dimostrare che, una volta urtato un atomo del gas, la particella ha una probabilità significativamente diversa da zero soltanto di urtarne un secondo allineato con la sorgente e il primo atomo. Tale risultato costituisce un grande successo: esso pone le basi per una teoria in cui non sia necessaria l'assunzione assiomatica del collasso del pacchetto d'onda.

⁽¹⁾ N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. A, 126, 79-84, 1929.

Bibliografia

[1] Raffele Carlone, Rodolfo Figari, Claudia Negulescu, *A Model of a Quantum Particle in a Quantum Environment: a Numerical Study*, in "Communications in Computational Physics", 18, 247 (2015)

[2] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë, *Quantum Mechanics*, Hermann, Parigi (1977)

[3] Rodolfo Figari, Alessandro Teta, *Quantum Dynamics of a particle in Tracking Chamber*, Springer (2013)

[4] Klaus Hepp, *Quantum Theory of Measurement and Macroscopic Observables*, Helv. Phys. Acta 45, 237 (1972)

[5] Chris J. Isham, *Lectures on Quantum Theory : Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College, Londra (1995)

[6] Joshua Kincaid, Kyle McLelland, Michael Zwolak, *Measurement-induced decoherence and information in double slit interference*, in "American Journal of Physics", 84, 522 (2016)

[7] John von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (1932)

Sitografia

[8] https://sites.google.com/site/sandroprova/didattica-1/appunti-ed-esercizi