

Università degli Studi di Napoli
“Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea Triennale in Fisica

L'ESPERIMENTO DI STERN E GERLACH

RELATORE:
Prof. Pietro Santorelli

CANDIDATO:
Giuseppe D'Orio
N85/701

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Indice

Elenco delle figure	ii
Introduzione	1
1 La teoria di Bohr-Sommerfeld e l'effetto Zeeman	2
1.1 Il modello atomico di Bohr	2
1.2 Le correzioni di Sommerfeld al modello di Bohr	8
1.3 L'effetto Zeeman	10
1.3.1 L'effetto Zeeman classico	12
1.3.2 L'effetto Zeeman quantistico	13
2 L'esperimento di Stern e Gerlach	15
2.1 L'ideazione dell'esperimento	15
2.2 La teoria alla base dell'esperimento	17
2.3 Descrizione dell'esperimento, risultati ed interpretazione	21
2.4 L'introduzione dello spin e la reinterpretazione dell'esperimento	25
Conclusioni	28
Bibliografia	29

Elenco delle figure

1.1	Livelli energetici dell'atomo di idrogeno ($Z=1$) e di alcuni atomi idrogenoidi quali He^+ ($Z=2$) e Li^{++} ($Z=3$) [1].	7
1.2	Orbite ellittiche di Sommerfeld per i primi tre livelli energetici. Si noti che la notazione utilizzata è quella moderna.	9
2.1	L'apparato sperimentale di Stern e Gerlach	16
2.2	Sistema di riferimento che mostra la direzione del campo e quella del momento magnetico.	18
2.3	La cartolina di congratulazioni inviata da Gerlach a Bohr che mostra una foto dello splitting del fascio atomico [2].	23
2.4	I valori di J e J_z secondo la vecchia e la nuova teoria quantistica. Si noti come la vecchia teoria quantistica identifica i valori di J_z con quelli di J [3].	24

Introduzione

L'esperimento di Stern e Gerlach è stato un esperimento importante nell'ambito della teoria di Bohr-Sommerfeld ed i suoi risultati sono stati successivamente inglobati nella moderna Meccanica Quantistica. Oggi si tende ad interpretare l'esperimento secondo le leggi della moderna Meccanica Quantistica, spesso sottolineando come i suoi risultati, al tempo, abbiano lasciato perplessi gli sperimentatori stessi. La realtà però è ben diversa: Stern e Gerlach non solo si aspettavano i risultati ottenuti, ma li considerarono anche una forte conferma della teoria di Bohr-Sommerfeld.

Lo scopo di questa tesi sarà, quindi, quello di analizzare l'esperimento in modo da darne una rappresentazione congruente al periodo storico cercando, per quanto possibile, di sottolineare gli spunti di riflessione che da esso nacquerò. Per comprendere tutto ciò, nel primo capitolo, a partire da una descrizione della teoria di Bohr-Sommerfeld, ottenuta facendo uso dei postulati di Bohr, arriviamo all'introduzione del modello di Sommerfeld che prevede la presenza di orbite ellittiche. Ci concentreremo, poi, sui problemi che questa teoria lascia irrisolti ed approfondiremo le problematiche connesse all'effetto Zeeman anomalo. Tutto ciò rappresenta il complesso delle conoscenze che costituirono la base dalla quale Stern e Gerlach partirono per l'ideazione del loro esperimento.

Nel secondo capitolo daremo una prima descrizione dell'esperimento di Stern e Gerlach senza trascurarne le difficoltà relative alla costruzione dell'apparato sperimentale, presentandone i possibili risultati. Analizzeremo quindi più da vicino gli aspetti teorici connessi all'esperimento, ricavando anche delle stime numeriche dei risultati e discuteremo poi l'interpretazione di quest'ultimi senza tralasciarne aspetti meno noti in letteratura. Infine presenteremo il concetto di spin di una particella e lo utilizzeremo per dare una descrizione dei risultati prodotti dell'esperimento più affine a quella moderna.

Capitolo 1

La teoria di Bohr-Sommerfeld e l'effetto Zeeman

L'esperimento di Stern e Gerlach rappresenta un fondamentale punto di svolta nel dibattito tra la teoria classica e la "vecchia teoria quantistica", nome con cui era nota la teoria di Bohr-Sommerfeld, poichè non solo mostrò che i risultati sperimentali erano in contraddizione con il modello classico, ma, analizzato a posteriori, minò anche la validità del vecchio modello quantistico. Per comprendere le motivazioni e le idee che hanno portato alla realizzazione ed esecuzione dell'esperimento, è necessario comprendere le teorie del tempo e gli interrogativi che queste lasciavano irrisolti. Presenteremo quindi il modello atomico di Bohr e ne mostreremo l'efficacia nel descrivere lo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno, permettendo di arrivare al valore della costante di Rydberg, ricavata all'epoca solo dai dati sperimentali, per via teorica. Ne presenteremo, poi, anche i difetti, ed è da questi, soprattutto dall'incapacità di spiegare la struttura fine delle righe spettrali e l'effetto Zeeman anomalo, che partiremo per poi mostrare le correzioni alla teoria dovute a Sommerfeld, tra cui l'introduzione delle orbite ellittiche e della costante di struttura fine. Ci concentreremo, poi, sull'effetto Zeeman, fornendo una spiegazione completa del fenomeno utilizzando la teoria moderna; successivamente analizzeremo la teoria classica e la teoria quantistica del fenomeno, evidenziando da dove nasce il problema dell'effetto Zeeman anomalo. Fatto ciò avremo gli strumenti per comprendere e analizzare in ogni suo aspetto l'esperimento di Stern e Gerlach.

1.1 Il modello atomico di Bohr

Nel 1921 la teoria quantistica più avanzata era il modello atomico di Bohr, nella sua versione generalizzata per gli atomi idrogenoidi costruita da Sommerfeld nel 1916 [2]. Si tratta di un modello semiclassico, in cui la struttura dell'atomo è ricavata classicamente, mentre le transizioni tra i vari livelli energetici sono di natura quantistica.

Il modello è basato sull'ipotesi, derivata dalla meccanica classica, che l'elettrone dell'atomo di idrogeno, sotto l'influenza dell'attrazione coulombiana, si muova verso il nucleo positivo percorrendo un'orbita circolare o ellittica¹. Preso in considerazione, per semplicità, il caso di orbite circolari, ed ottenuta la stabilità meccanica grazie all'accelerazione centripeta dovuta alla forza di Coulomb, la teoria classica fa sorgere un problema di instabilità elettrica: nel suo movimento lungo l'orbita l'elettrone è soggetto ad accelerazione e dovrebbe quindi irraggiare energia ad una frequenza uguale a quella del suo moto. L'atomo dovrebbe quindi collassare poichè l'elettrone, con un moto a spirale, cadrebbe sul nucleo perdendo la propria energia.

Bohr "risolse" questo problema assumendo che gli elettroni possano orbitare su delle traiettorie circolari, dette *stati stazionari*, sulle quali l'elettrone non emette radiazione; l'irraggiamento si ottiene solo nel momento in cui l'elettrone passa da uno stato stazionario ad energia maggiore ad uno ad energia minore.

Essendo la massa del protone molto maggiore di quella dell'elettrone, il sistema può essere paragonato ad un sistema planetario dove il centro di massa coincide con il protone e l'elettrone ruota attorno a questi su delle orbite circolari. Ognuna di queste orbite rappresenta una diversa energia dell'elettrone e, poichè il moto è confinato, ci troveremo di fronte ad energie negative, con l'orbita più interna, ovvero quella ad energia minore, che rappresenta lo stato fondamentale del sistema. Le altre orbite corrisponderanno invece a stati eccitati. L'eccitazione di un elettrone, da parte di un fotone di energia opportuna, causa una transizione verso uno stato eccitato (un'orbita più esterna). In questo processo il fotone viene assorbito e la sua energia viene acquisita dall'atomo che è così capace di effettuare la transizione. La diseccitazione avviene invece nella transizione da un'orbita più esterna ad una più interna: in questo processo l'atomo perde energia, cedendola ad un fotone generato nella transizione causando così l'emissione di radiazione.

I primi studi di Bohr su di un elettrone in rotazione intorno ad una carica positiva si basano principalmente sui seguenti postulati:

1. Un atomo non può assumere tutti i valori classicamente possibili di energia, ma solo una serie di valori discreti $E_1, E_2 \dots E_n$;
2. Gli stati corrispondenti a queste energie sono *stazionari*, ovvero in questi stati non avviene emissione di radiazione elettromagnetica;
3. L'emissione o l'assorbimento avviene solo nella transizione dell'atomo da uno stato stazionario all'altro. In questo caso verranno emessi o assorbiti fotoni di energia pari a

¹La trattazione successiva è ispirata a [1].

$$h\nu = E_n - E_m \quad (1.1)$$

4. Sussiste il *principio di corrispondenza*, ovvero il risultato di una teoria quantistica si avvicina tanto più al risultato classico quanto più grande è il numero quantico.

Il grande pregio di questo modello fu quello di dare un fondamento teorico ai risultati sperimentali di Balmer, successivamente ampliati da Rydberg, sullo spettro dell'atomo di idrogeno. Nel 1884 Balmer aveva osservato che era possibile calcolare alcune righe dello spettro di emissione dell'atomo di idrogeno tramite la formula

$$\lambda = (364,6nm) \frac{n^2}{n^2 - 4}. \quad (1.2)$$

Questa formula descriveva soltanto le emissioni relative alla parte visibile dello spettro e Balmer stesso ipotizzò che questa fosse un caso particolare di una legge più generale. Tale legge fu scoperta da Rydberg e Ritz ed è oggi nota col nome di legge di Rydberg-Ritz:

$$\nu = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right). \quad (1.3)$$

Tuttavia questa legge era di tipo empirico, ottenuta con l'introduzione di una costante, ricavata sperimentalmente, nota come costante di Rydberg. Se analizziamo questa formula alla luce dei primi due postulati di Bohr, possiamo identificare i valori delle energie degli stati atomici con quelli dei termini spettrali moltiplicati per hc . Fatto ciò otteniamo

$$h\nu = R_H hc \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1.4)$$

che confrontata con l'espressione precedente dell'energia del fotone emesso o assorbito restituisce

$$E_n = -\frac{R_H hc}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

L'uso di questo schema ci permette di spiegare le serie nello spettro di emissione dell'atomo di idrogeno: le righe di una determinata serie corrispondono all'energia emessa nella transizione da stati ad energia E_m verso uno stesso stato ad energia E_n con $E_m > E_n$. Utilizzando quindi i primi tre postulati di Bohr si possono mettere in relazione i termini spettrali con i livelli energetici.

Con l'utilizzo del quarto postulato è inoltre possibile ricavare, con sole considerazioni teoriche, un'espressione della costante di Rydberg il cui valore numerico riproduce perfettamente il dato sperimentale.

Come detto in precedenza, il risultato quantistico si avvicina a quello classico all'aumentare del numero quantico e quindi, nel nostro caso, per $n \rightarrow \infty$. Per n molto grande i livelli energetici sono molto vicini quindi possiamo approssimare l'energia del fotone creato nella transizione $E_n \rightarrow E_m$ con quella di una transizione $E_n \rightarrow E_{n-1}$. Fatta questa assunzione, avremo che, quantisticamente, l'espressione della frequenza di transizione sarà

$$\nu_q = R_H c \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_H c \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}. \quad (1.6)$$

Ricordando poi che $n \rightarrow \infty$ possiamo riscriverla come

$$\nu_q = \frac{2R_H c}{n^3}. \quad (1.7)$$

Infine, ricordando l'espressione di E_n , avremo

$$\nu_q = 2 \sqrt{\frac{|E|^3}{h^3 c R_H}}. \quad (1.8)$$

Dal punto di vista classico, l'elettrone è soggetto all'attrazione coulombiana del nucleo con una forza in modulo pari a

$$F = k \frac{q_e^2}{r^2}. \quad (1.9)$$

Sapendo che l'accelerazione centripeta è $a_c = \frac{v^2}{r}$, utilizzando la legge fondamentale della dinamica avremo che

$$m \frac{v^2}{r} = F = k \frac{q_e^2}{r^2}, \quad (1.10)$$

da cui si può ricavare

$$v = \sqrt{\frac{k q_e^2}{m r}}. \quad (1.11)$$

Sostituendo nella formula dell'energia del sistema

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - k \frac{q_e^2}{r}, \quad (1.12)$$

si ottiene che

$$E = -k \frac{q_e^2}{2r}, \quad (1.13)$$

da cui risulta $r = k q_e^2 / 2|E|$.

Ricordando che la frequenza in un moto circolare uniforme è data da $\nu_c = \omega / 2\pi$, otterremo, per la frequenza calcolata classicamente

$$\nu_c = \frac{q_e}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m r^3}} = \frac{1}{\pi q_e^2} \sqrt{\frac{2|E|^3}{m k^2}}. \quad (1.14)$$

Utilizzando a questo punto il quarto postulato, ovvero che il risultato quantistico deve coincidere con quello classico al crescere del numero quantico, possiamo uguagliare le due espressioni. Sostituendo l'espressione di $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ otteniamo

$$R_H = \frac{q_e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^3 c}. \quad (1.15)$$

Sostituendo quindi i valori numerici delle costanti:

$$q_e = 1,602176 \cdot 10^{-19} C, \quad m = 9,109382 \cdot 10^{-31} kg, \quad \epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \quad (1.16)$$

$$h = 6,626069 \cdot 10^{-34} J \cdot s, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (1.17)$$

otteniamo $R_H = 109661,28 cm^{-1}$, confrontabile con il suo valore sperimentale pari a $R_H = 109677,76 cm^{-1}$ [1].

Secondo Bohr, poichè i dati sperimentali sono rilevati da apparati macroscopici descritti da leggi classiche e l'esperimento a livello microscopico è un'amplificazione fino al livello macroscopico, anche la descrizione degli oggetti quantistici deve utilizzare il linguaggio della fisica classica [4]; egli ipotizzò quindi che negli stati stazionari gli elettroni obbedissero alle leggi della meccanica classica. Si ottiene quindi che i raggi delle orbite, che corrispondono alle energie permesse agli elettroni, sono anch'essi quantizzati in base alla formula

$$r_n = n^2 \frac{h^2}{4k\pi^2 m q_e^2}. \quad (1.18)$$

All'elettrone sono quindi permesse solo determinate orbite, che dipendono dal valore di n , chiamato *numero quantico principale* e da quest'ultimo dipende anche il valore dell'energia delle orbite permesse.

È anche possibile calcolare la velocità degli elettroni sulle orbite, ottenendo così anche la quantizzazione della velocità

$$v_n = \frac{q_e^2 k}{n \hbar}, \quad (1.19)$$

dove si è indicato $\hbar = h/2\pi$. Trovandoci nel caso di stati stazionari, ed essendo quantizzati sia il raggio dell'orbita che la velocità con cui l'elettrone la percorre, segue naturalmente che anche il momento angolare sia quantizzato, con la formula

$$L = m v_n r_n = \hbar n. \quad (1.20)$$

I risultati di questo modello possono essere estesi anche ad atomi idrogenoidi come

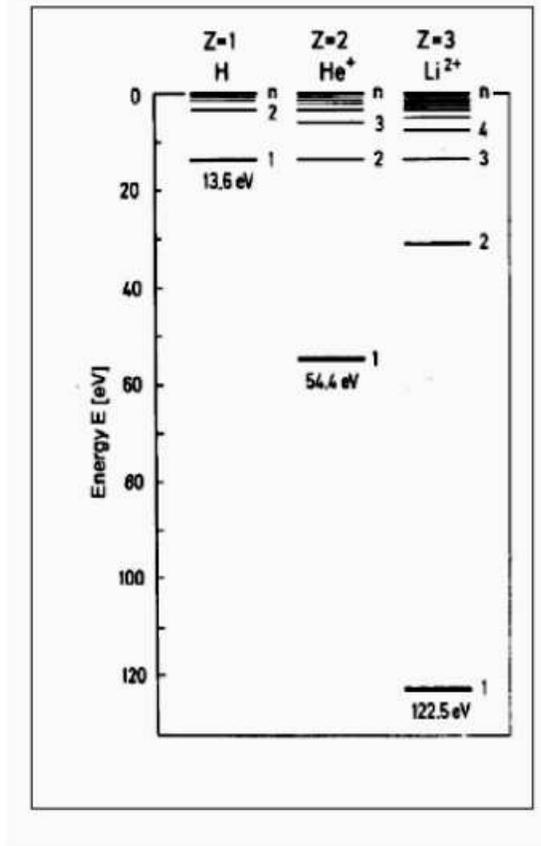


Figura 1.1: Livelli energetici dell'atomo di idrogeno ($Z=1$) e di alcuni atomi idrogenoidi quali $\text{He}^+(Z=2)$ e $\text{Li}^{2+}(Z=3)$ [1].

ad esempio Li^{++} , Be^{+++} , B^{++++} . Si trova empiricamente che per gli spettri di questi atomi vale la formula:

$$\nu = R_I Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (1.21)$$

dove R_I è una costante il cui valore, dipendente dallo ione, è molto vicino a quello di R_H . Sostituendo q_e^2 con Zq_e^2 nelle formule relative all'atomo di idrogeno(H), si trovano le seguenti relazioni per gli atomi idrogenoidi(I):

$$E_n^I = Z^2 E_n^H, \quad r_n^I = \frac{r_n^H}{Z}, \quad v_n^I = Z v_n^H, \quad (1.22)$$

ed è possibile verificare che la prima delle (1.22) è in accordo con i risultati spettroscopici della (1.21).

1.2 Le correzioni di Sommerfeld al modello di Bohr

Il modello finora descritto è inadatto a rappresentare i dati inerenti al comportamento spettroscopico di atomi plurielettronici, a partire dall'elio. Infatti si può osservare che, nello spettro dell'elio, sono presenti delle righe non previste dal modello di Bohr. Inoltre, avanzamenti nel campo della spettroscopia ad alta risoluzione, portarono alla scoperta della *struttura fine*: le righe dello spettro di emissione di atomi come l'idrogeno non erano singole, come previsto dalla teoria di Bohr, ma erano in realtà costituite da diverse linee con una spaziatura molto ristretta.

Nel 1915 Arnold Sommerfeld, nel suo lavoro [5], per risolvere i problemi discussi modificò il modello di Bohr introducendo, in analogia al modello planetario, delle orbite ellittiche in cui il nucleo occupa uno dei due fuochi. Egli ipotizzò che mentre nel primo livello l'elettrone può percorrere solo un'orbita circolare, nel secondo livello può percorrere anche un'orbita ellittica la cui dimensione dell'asse maggiore coincide con il diametro dell'orbita circolare.

Con l'introduzione delle orbite ellittiche si ha la necessità di considerare due variabili:

1. la distanza dell'elettrone dal nucleo;
2. la variazione della posizione angolare, nel piano dell'orbita, dell'elettrone rispetto al nucleo.

Sommerfeld introdusse quindi due numeri quantici:

1. il numero quantico n' , chiamato *numero quantico principale*, derivato dalla teoria di Bohr, che è legato alla dimensione dell'asse maggiore dell'orbita;
2. il numero quantico l (da non confondere con l'omonimo moderno), chiamato *numero quantico orbitale*, che è legato alla dimensione dell'asse minore dell'orbita e quindi caratterizza la geometria dell'orbitale, assumendo i valori $l = 0, 1, \dots, n' - 1$

Secondo questo modello, per ogni numero quantico principale n' ci sono n' possibili orbite di eccentricità variabile. Ricordando che l'eccentricità di un'ellisse può essere espressa come:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad (1.23)$$

dove a e b sono rispettivamente le dimensioni del semiasse maggiore e minore, avremo, nel nostro caso, che l'eccentricità dipenderà da

$$\frac{b}{a} = \frac{l + 1}{n'}. \quad (1.24)$$

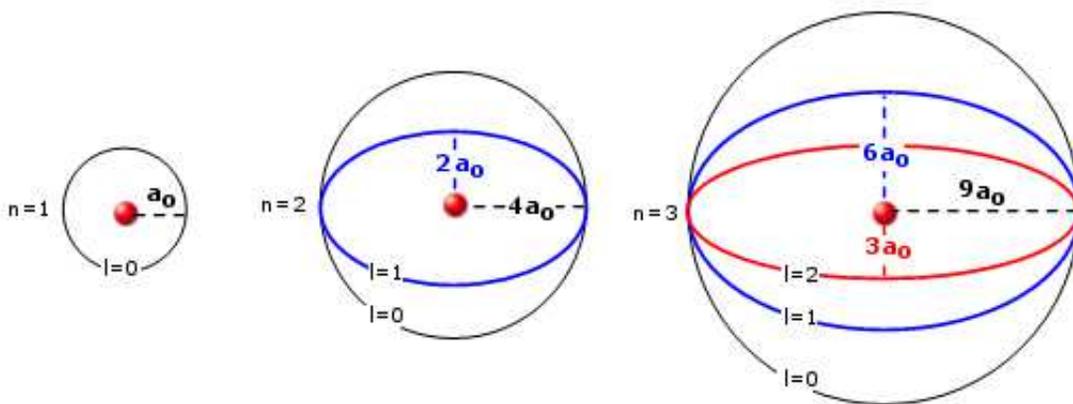


Figura 1.2: Orbite ellittiche di Sommerfeld per i primi tre livelli energetici. Si noti che la notazione utilizzata è quella moderna.

Si può quindi notare che, tra queste orbite, una è circolare, mentre le altre $n' - 1$ sono ellittiche. Egli inoltre ipotizzò che le orbite dovessero essere quantizzate anche per quanto riguarda la loro orientazione spaziale in relazione ad un determinato sistema di coordinate (come quello determinato da un campo magnetico esterno).

Postulò quindi l'esistenza di un terzo numero quantico, che chiamò n (*numero quantico spaziale*), e lo differenziò ulteriormente in n_1 (corrispondente al moderno m_l) e n_2 (corrispondente al moderno l) tali che soddisfino la condizione

$$n_1 + n_2 = n \quad (1.25)$$

Egli spiega che

*Per $n = 1$ ci sono solo due posizioni dei piani orbitali, perpendicolare ($n_1 = 0, n_2 = 1$) o parallela ($n_1 = 1, n_2 = 0$) al piano equatoriale. [...]
Generalmente, con n arbitrario, il numero di posizioni quantizzate è $2n$; includendo sempre le posizioni parallela e perpendicolare [3].*

A questo fenomeno, che consiste nella quantizzazione dei piani orbitali dell'elettrone, egli diede il nome di *Richtungsquantelung*: il termine viene normalmente tradotto come quantizzazione spaziale, ma una traduzione letterale, che meglio può farne comprendere il significato, è "schacciamento dell'orbita". Prendendo come riferimento la Figura 1.2, che, si ricordi, utilizza la notazione moderna e non quella di Sommerfeld, si può vedere come, per valori decrescenti di l , le orbite tendano a "schacciarsi" verso il piano definito dall'orbita con $l = 0$. Utilizzando questo modello Sommerfeld calcolò il rapporto tra la velocità dell'elettrone sulla prima orbita dell'atomo di Bohr e la velocità della luce nel vuoto, introducendo così la *costante di struttura fine* definita come:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{hc} \simeq \frac{1}{137}. \quad (1.26)$$

Utilizzando il numero quantico orbitale e la costante di struttura fine, Sommerfeld calcolò la correzione all'energia dei livelli degli atomi idrogenoidi:

$$E = -\frac{mZ^2q_e^4}{(4\pi\epsilon_0)^22n^2\hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{l+1} - \frac{3}{4n} \right) \right]. \quad (1.27)$$

Egli introdusse anche le condizioni relativistiche nel modello di Bohr, giustificato dal fatto che l'elettrone viaggia intorno al nucleo a velocità molto elevate. Quando questo si trova su di un'orbita ellittica avrà una velocità maggiore quando si trova più vicino al nucleo e una velocità minore quando invece è più lontano. A questo punto, ricordando la formula relativistica dell'energia

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \quad \text{con} \quad p = \gamma m_0 v, \quad (1.28)$$

si può comprendere come orbite ellittiche con differente eccentricità abbiano valori dell'energia leggermente differenti da quelli dell'orbita circolare del livello di appartenenza. Si può comprendere quindi come nella correzione all'energia dei livelli vi sia un'esplicita dipendenza da l che tiene conto dell'ellitticità delle orbite.

Questa modifica al modello riesce in parte a spiegare la *struttura fine delle linee spettrali*, ma ha anch'essa i suoi problemi. Se infatti si considerano i metalli alcalini ci si aspetterebbe che l'elettrone responsabile della forma dello spettro debba muoversi su un'orbita di raggio elevato a bassa velocità e ci si aspetta quindi che la variazione relativistica della massa sia piccola. Tuttavia lo splitting dovuto alla struttura fine risultava essere maggiore rispetto a quello dell'idrogeno. Ciò fece nascere dei dubbi sulla validità della spiegazione di Sommerfeld della struttura fine. Inoltre il modello di Bohr-Sommerfeld non risolve un altro problema, quello del cosiddetto *effetto Zeeman anomalo*.

1.3 L'effetto Zeeman

Questo effetto fu osservato per la prima volta nel 1896 da Pieter Zeeman, come esposto in [6]. Zeeman conduceva degli esperimenti sugli effetti di un campo magnetico esterno applicato ad un fascio luminoso: osservando la radiazione che proviene da una lampada a scarica, cioè una lampada basata sull'emissione per luminescenza da parte di un gas ionizzato, si può osservare che una riga spettrale, nel caso più semplice, si separa in tre componenti [7]. Se chiamiamo ν_0 la frequenza della riga iniziale, avremo che le tre componenti avranno frequenze rispettivamente pari a $\nu_0 - \nu_L, \nu_0$ e $\nu_0 + \nu_L$, dove con ν_L viene indicata la *frequenza di Larmor*, pari a

$$\nu_L = \frac{q_e B}{4\pi m c} = 1,3996 \cdot 10^{-6} B s^{-1} \quad (1.29)$$

dove con B si è indicato il campo magnetico espresso in Gauss.

Si vede, inoltre, che la struttura delle righe è diversa a seconda della direzione di osservazione: la radiazione emessa lungo la direzione del campo dà luogo a due righe,

polarizzate circolarmente, una con polarizzazione destra e l'altra con polarizzazione sinistra, con la scomparsa della componente centrale; la radiazione emessa perpendicolarmente al campo dà luogo a tre righe, polarizzate linearmente, di cui la centrale è polarizzata nella direzione del campo e quelle laterali sono polarizzate nella direzione perpendicolare.

Il fenomeno è completamente spiegato dalla moderna meccanica quantistica². Questo si verifica perchè gli elettroni sono particelle cariche confinate in livelli energetici caratterizzati da un numero quantico di momento angolare ed inoltre hanno un momento di spin semintero e quindi possiedono un momento magnetico. Il momento magnetico interagisce con il campo magnetico esterno, che supporremo orientato lungo l'asse z , e il risultato di quest'interazione può essere descritto con l'aggiunta di un termine perturbativo all'Hamiltoniana del sistema. Le considerazioni che verranno fatte sono riferite ad un generico atomo polielettronico. Di seguito indicheremo con \mathbf{L} l'operatore momento angolare orbitale, con \mathbf{S} l'operatore momento angolare di spin e con $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ l'operatore di momento angolare totale. Distinguiamo ora due casi:

1. Il caso di singoletto ($\mathbf{S} = 0$). In questa situazione avremo che il momento angolare totale \mathbf{J} coincide con il momento angolare orbitale \mathbf{L} . In analogia al caso classico possiamo definire un operatore di momento magnetico

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L}_z, \quad (1.30)$$

dove con μ_B si è indicato il magnetone di Bohr. Ricordando quindi che l'interazione può essere espressa come

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (1.31)$$

avremo che il termine perturbativo da aggiungere all'Hamiltoniana sarà

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L}_z B \quad (1.32)$$

e che la separazione in energia dei livelli sarà pari a:

$$\Delta E = m_l \mu_B B, \quad (1.33)$$

dove con m_l indichiamo gli autovalori di L_z . Poichè ci sono $2l + 1$ valori di m_l , avremo che ogni riga spettrale si dividerà in $2l + 1$ righe. Questo è noto come effetto Zeeman normale.

2. Il caso in cui $\mathbf{S} \neq 0$. In questa situazione le cose si complicano a causa della presenza dello spin. Si consideri quindi un atomo con momento angolare \mathbf{L} e spin \mathbf{S} , si avrà allora che il momento angolare totale sarà dato da

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (1.34)$$

²La trattazione moderna del fenomeno è ispirata a [8] e [9].

L'operatore associato al momento magnetico andrà quindi modificato come segue:

$$\boldsymbol{\mu} = -g_l \mu_B \frac{\mathbf{L}}{\hbar} - g_s \mu_B \frac{\mathbf{S}}{\hbar}, \quad (1.35)$$

dove con g_l e g_s sono stati indicati i fattori giromagnetici relativi a momento angolare e spin, rispettivamente. Il termine di perturbazione sarà quindi pari a

$$\mathbf{H}^{(1)} = -\frac{\mu_B}{\hbar} (g_l \mathbf{L} + g_s \mathbf{S}) \mathbf{B}. \quad (1.36)$$

Una singola riga spettrale si splitterà quindi, in questo caso, in $(2j + 1)$ righe. A differenza del caso precedente, lo splitting dipenderà da j , l e s e il numero di linee finali non sarà necessariamente dispari. La separazione in energia tra i livelli può essere calcolata tramite la formula:

$$\Delta E = g m_j \left(\frac{q_e \hbar B}{2m_e} \right) = g m_j \mu_B B, \quad (1.37)$$

dove si sono indicati con m_j gli autovalori di J_z e con g il *fattore di Landè* che è pari a

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \quad (1.38)$$

Si può notare che per $s = 0$ la formula dell'energia restituisce perfettamente l'effetto Zeeman normale. Questo secondo fenomeno è noto come *effetto Zeeman anomalo*.

Fu quest'anomalia a lasciare perplessi i fisici del tempo perchè, come mostreremo di seguito, non può essere spiegato nè dalla teoria classica, nè dalla teoria basata sul modello di Bohr-Sommerfeld.

1.3.1 L'effetto Zeeman classico

La prima spiegazione di questo effetto fu elaborata da Hendrick Lorentz, che nel 1897 ne costruì un modello classico, presentato in [10].

Secondo la teoria classica dell'elettrone, gli atomi possono essere schematizzati come oscillatori armonici costituiti da una carica che si muove sotto l'azione di una forza di richiamo elastica. Per spiegare l'emissione di una riga ad una frequenza ν_0 si assume che la costante elastica sia tale da dare una frequenza di risonanza dell'oscillatore pari proprio a ν_0 . Se si indica con \mathbf{x} la coordinata della carica, in assenza di perturbazioni esterne, la relativa equazione del moto sarà:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -4\pi^2 \nu_0^2 \mathbf{x}. \quad (1.39)$$

Introducendo un campo magnetico l'equazione viene modificata a causa della presenza della forza di Lorentz. Utilizzando come carica oscillante un elettrone di massa m e carica $-|e|$ si ottiene:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -4\pi^2\nu_0^2\mathbf{x} - \frac{|e|\hbar}{mc} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (1.40)$$

Se si decompone il vettore \mathbf{x} nelle sue componenti cartesiane, le equazioni differenziali che ne derivano risulteranno accoppiate. Per disaccoppiarle si utilizzano le componenti di \mathbf{x} sulle tre direzioni individuate dai versori $\mathbf{u}_{-1}, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$ definiti come:

$$\mathbf{u}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}) \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{k} \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + i\mathbf{j}), \quad (1.41)$$

dove $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sono i versori di una terna cartesiana ortogonale e \mathbf{k} è la direzione del campo magnetico. Ponendo quindi $\mathbf{x} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$ e osservando che:

$$\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B} = B\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{u}_0 = -iB\alpha\mathbf{u}_{\alpha} \quad (\alpha = -1, 0, 1) \quad (1.42)$$

si ottengono le equazioni disaccoppiate

$$\frac{d^2x_{\alpha}}{dt^2} = -4\pi^2\nu_0^2x_{\alpha} + 4\pi i\alpha\nu_L \frac{dx_{\alpha}}{dt}, \quad (1.43)$$

dove $\nu_L = \frac{q_e B}{4\pi m c}$ è la *frequenza di Larmor*.

Cercando la soluzione nella forma:

$$x_{\alpha} = A_{\alpha} e^{-2\pi i\nu_{\alpha} t} \quad (1.44)$$

con A_{α} costante, si ottiene un'equazione algebrica di secondo grado per ν_{α} :

$$\nu_{\alpha}^2 + 2\alpha\nu_L\nu_{\alpha} - \nu_0^2 = 0. \quad (1.45)$$

Osservando che per campi magnetici di laboratorio si ha che $\nu_L \ll \nu_0$ si ottiene

$$\nu_{\alpha} = \nu_0 - \alpha\nu_L \quad (1.46)$$

Si può vedere quindi come, sotto l'azione di un campo magnetico, si ottengono tre oscillatori distinti con frequenze $\nu_0, \nu_0 - \nu_L, \nu_0 + \nu_L$, come trovato da Zeeman.

1.3.2 L'effetto Zeeman quantistico

Un modello quantistico dell'effetto Zeeman per atomi ad un elettrone fu sviluppato, utilizzando la teoria di Bohr-Sommerfeld, da Sommerfeld stesso nel 1916. L'approccio di Sommerfeld, presentato in [11], consiste nell'introdurre un numero quantico

spaziale n , la cui esistenza egli aveva già ipotizzato in precedenza, i cui valori determinano le posizioni discrete dell'orbita dell'elettrone rispetto ad un campo magnetico esterno \mathbf{B} , dimodochè il $\cos \theta$, dove con θ si è indicato l'angolo tra la direzione del campo magnetico \mathbf{B} e la normale al piano dell'orbita, sia dato da:

$$\cos \theta = \frac{n}{l}. \quad (1.47)$$

Risolvendo l'equazione del moto di un elettrone in un campo magnetico, Sommerfeld trovò che le frequenze delle linee spettrali dell'idrogeno erano spostate di un ammontare pari a

$$\Delta\nu = \frac{f}{4\pi} \Delta n, \quad (1.48)$$

dove

$$f = \frac{q_e}{m_e c} |\mathbf{B}| \quad (1.49)$$

e Δn denota la differenza tra i numeri quantici spaziali nello stato iniziale e finale, rispettivamente. Si evince, quindi, che ci troveremo sempre in presenza di uno splitting in un numero di linee dispari. Tuttavia, mentre l'effetto Zeeman in alcuni atomi mostra, come atteso da entrambe le teorie, un tripletto equispaziato, in altri atomi il campo magnetico separa le linee spettrali in quattro, sei, o anche più ed alcuni tripletti mostrano una spaziatura più ampia di quella attesa. Questo fenomeno prende il nome di *effetto Zeeman anomalo* e lasciò perplessi i ricercatori dell'epoca. Nessuna delle due teorie era capace di spiegarlo e Sommerfeld nel 1919 lo riassunse con queste affermazioni:

1. le linee di singoletto di atomi idrogenoidi mostrano un effetto Zeeman normale, mentre le loro linee di tripletto ci si avvicinano per campi magnetici molto intensi;
2. in campi magnetici poco intensi i doppietti e tripletti spettrali degli atomi non idrogenoidi mostrano un effetto Zeeman anomalo.

Quindi Sommerfeld concluse che:

sono gli elettroni più esterni dell'atomo che determinano il carattere dell'effetto Zeeman; in particolare i loro campi magnetici, a patto che non siano superati dal campo magnetico esterno. Queste sono, tuttavia, solo congetture vaghe e generali. Una teoria completa dell'effetto Zeeman nel caso di atomi non idrogenoidi non può essere costruita finchè la ragione della molteplicità delle linee spettrali non sarà chiarita [11].

Sono questi gli interrogativi e le teorie che spingeranno Stern e Gerlach a concepire e mettere in atto il loro famoso esperimento.

Capitolo 2

L'esperimento di Stern e Gerlach

2.1 L'ideazione dell'esperimento

Otto Stern conseguì il dottorato in chimica fisica all'università di Breslavia e, con l'incoraggiamento di Born, cominciò a condurre esperimenti sui fasci molecolari. Egli, secondo gli studi di B. Friedrich e D.Herschbach confluiti nell'articolo [2], venne a conoscenza dell'idea della quantizzazione spaziale quando Pauli la invocò nel tentativo di spiegare perchè un campione di ferro completamente magnetizzato avesse un momento magnetico medio pari ad un quinto di un magnetone di Bohr. Lo stimolo per la realizzazione del suo esperimento gli venne dato da una proprietà implicata dalla quantizzazione spaziale del modello di Bohr che non era mai stata osservata, ovvero che un gas di atomi di idrogeno dovrebbe essere magneticamente birifrangente, cioè, immerso in un campo magnetico, dovrebbe acquisire proprietà analoghe a quelle di un cristallo uniassico con asse ottico nella direzione del campo, permettendo di osservare la birifrangenza in direzione ortogonale al campo. Questo è causato dal fatto che l'elettrone dovrebbe orbitare in un piano perpendicolare alla direzione del campo.

Secondo il modello di Bohr la quantizzazione spaziale dovrebbe essere duplice, poichè la proiezione del momento angolare è limitata a $\pm(h/2\pi)$. Questa caratteristica rendeva possibile un test per la quantizzazione spaziale usando la deflessione magnetica di un fascio di atomi.

Dal punto di vista quantistico, in un gradiente di campo abbastanza forte, le due componenti dovrebbero essere deflesse in un'ampiezza maggiore dell'area originale, creando delle "macchie" separate. Al contrario la meccanica classica prevede che gli atomi compiano un moto di precessione attorno alla direzione del campo magnetico dimodochè l'angolo che la direzione del momento angolare forma con il campo magnetico \mathbf{B} continua a poter assumere tutti i possibili valori, il che causerebbe un semplice allargamento del fascio, ma senza alcuna divisione.

Egli trovò un compagno in Gerlach [2], il quale si era interessato ai fasci molecolari in seguito alle osservazioni di Dunoyer del 1912 sulla fluorescenza di fasci di sodio.

Spinto da ciò, aveva cercato di osservare l'emissione da differenti fasci di atomi metallici, ma senza successo. Aveva inoltre escogitato un esperimento per verificare se gli atomi di bismuto presentassero lo stesso forte diamagnetismo del corrispettivo cristallo. I materiali diamagnetici sono caratterizzati dal fatto che la magnetizzazione ha verso opposto rispetto al campo magnetico in cui vengono immersi e risultano quindi da questo *respinti*. L'idea di Gerlach era quindi di deflettere il fascio di atomi di bismuto immergendolo in un campo magnetico fortemente disomogeneo. Per fare ciò, studiò quindi le configurazioni geometriche del magnete in modo da massimizzare il gradiente di campo; questi risultati verranno utilizzati poi nella preparazione dell'esperimento svolto con Stern.

Il primo punto fondamentale nell'organizzazione e, successivamente, nell'esecuzione dell'esperimento fu la scelta degli atomi costituenti il fascio. Essi scelsero l'argento per due principali motivi:

1. era necessario un “*one-quantum atom*”, cioè un atomo che presentasse un'unico elettrone sull'orbita più esterna, in modo da mettere in evidenza gli effetti quantistici;
2. Stern aveva precedentemente lavorato ad alcuni esperimenti sui fasci di argento in cui era riuscito a misurare, con un metodo ingegnoso esposto in [2], la velocità media degli atomi di argento, ottenendo circa 660m/s ad una temperatura di 1000°C. Ciò risulterà utile, come vedremo, per prevedere la deflessione attesa nell'esperimento.

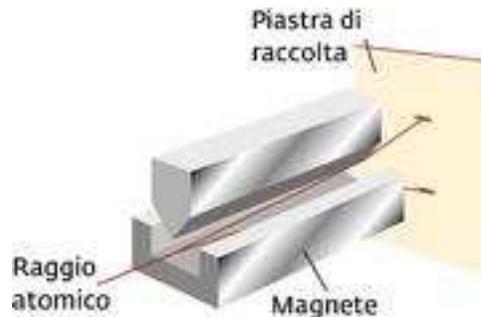


Figura 2.1: L'apparato sperimentale di Stern e Gerlach

Il fascio d'argento veniva quindi prodotto tramite effusione di vapore metallico da una fornace scaldata a 1000°C e collimato attraverso due fenditure ampie 0.03 mm verso il magnete. Come già detto in precedenza, il fascio di atomi deve essere sottoposto ad un gradiente di campo, con in più la condizione che il campo \mathbf{B} e il suo gradiente $\partial\mathbf{B}/\partial z$ abbiano la stessa direzione. Per ottenere ciò è necessario che il magnete che genera il campo sia modellato a lama di coltello. In questo modo, come mostreremo

più avanti, la condizione sarà soddisfatta in modo esatto nel piano di simmetria che attraversa la “lama” e con buona approssimazione nelle zone adiacenti.

2.2 La teoria alla base dell’esperimento

Per descrivere la formulazione teorica dell’esperimento, come presentata dallo stesso Stern¹, cominciamo con l’introdurre un sistema cartesiano destrorso, con l’origine nel centro di massa dell’atomo e l’asse z orientato nella direzione del campo \mathbf{B} .

L’elettrone che si muove su di un’orbita può essere schematizzato come una piccola spira di area vettoriale \mathbf{A} , con direzione \mathbf{t} normale alla superficie, percorsa da una corrente I . Sarà quindi generato un momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ pari a

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A}. \quad (2.1)$$

Se assumiamo che l’elettrone orbiti attorno al nucleo su una traiettoria circolare di raggio a e velocità v , dimodochè il periodo T sia pari a:

$$T = \frac{2\pi a}{v} \quad (2.2)$$

possiamo scrivere che

$$I = \frac{q_e}{T} = \frac{q_e v}{2\pi a}. \quad (2.3)$$

Utilizzando a questo punto $\mathbf{A} = \pi a^2 \mathbf{t}$ e moltiplicando e dividendo per la massa dell’elettrone avremo

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q_e a v m_e \mathbf{t}}{2m_e} = \frac{q_e}{2m_e} \mathbf{L}, \quad (2.4)$$

dove q_e è la carica dell’elettrone, m_e la sua massa e abbiamo ritrovato il momento angolare $\mathbf{L} = am_e v \mathbf{t}$.

Come sappiamo, l’energia dovuta all’interazione col campo magnetico sarà pari a

$$E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (2.5)$$

e la forza agente sull’atomo sarà quindi

$$\mathbf{F} = -\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.6)$$

e vi sarà inoltre un momento meccanico pari a

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (2.7)$$

¹Si noti che, nonostante parte dell’argomento sia presentata ispirandosi a [12], sono presenti influenze da [13] e [14] ed inoltre, per motivi di coerenza con la notazione precedente, i simboli non sono gli stessi utilizzati da Stern.

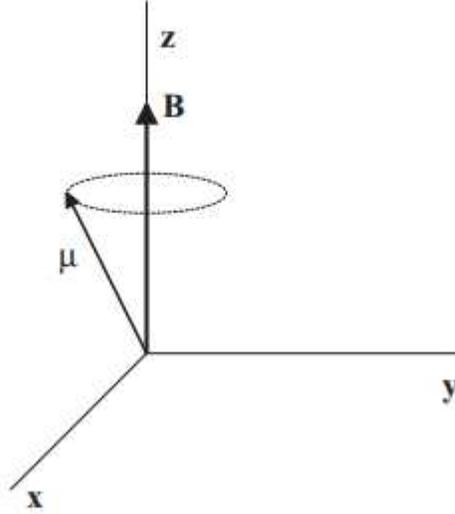


Figura 2.2: Sistema di riferimento che mostra la direzione del campo e quella del momento magnetico.

Utilizzando l'espressione (2.4) per ricavare \mathbf{L} e definendo una frequenza caratteristica $\omega = (q_e B / 2m_e)$ l'equazione precedente diventa

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (2.8)$$

Quindi il momento magnetico compie un moto di precessione attorno all'asse del campo, in questo caso z , in cui μ_z rimane costante, mentre il valore medio sull'intera rivoluzione di μ_x e μ_y è nullo. Quindi se, considerando $\partial \mathbf{B} / \partial x$, $\partial \mathbf{B} / \partial y$, $\partial \mathbf{B} / \partial z$ costanti ed utilizzando la condizione fornitaci dal particolare magnete (cioè che B e $\partial B_z / \partial z$ sono entrambi diretti lungo l'asse z), mediamo su di un tempo lungo rispetto alla durata della rivoluzione, avremo che la forza media esercitata sull'atomo è pari a:

$$\mathbf{F} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{z}, \quad (2.9)$$

dove con \mathbf{z} si è indicato il versore corrispondente alla direzione del campo magnetico. Quindi l'unica responsabile della forza esercitata sull'atomo è la componente z del momento magnetico, esattamente la quantità che, secondo la teoria quantistica, può assumere solo valori discreti.

Se mandiamo parallelamente e il più vicino possibile al bordo un fascio di atomi con la più piccola sezione circolare possibile, il cui asse si trova nel piano di simmetria, gli atomi saranno deflessi nella direzione di \mathbf{B} o in quella opposta. La zona circolare che si sarebbe formata sulla piastra di raccolta in assenza di campo magnetico deve

dunque espandersi in presenza di quest'ultimo. Se assumiamo che $\partial B_z/\partial z$ sia costante lungo la sezione trasversale e che la velocità sia la stessa per tutti gli atomi, allora la forza \mathbf{F} e la deflessione s saranno le stesse per tutti gli atomi con lo stesso μ_z .

Si può notare che Stern utilizza un sistema di riferimento solidale all'atomo in cui, se volessimo utilizzare le equazioni di Maxwell per analizzare a fondo il fenomeno, si creano delle complicazioni. Infatti, in questo sistema, il campo magnetico dipende dal tempo ed è inoltre presente un campo elettrico anch'esso variabile nel tempo (e quindi $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$). Diamo quindi una descrizione del fenomeno nel riferimento del laboratorio (in cui $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$).

L'espressione della forza agente sull'atomo sarà, in componenti:

$$\begin{aligned} F_x &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial x}, \\ F_y &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial y} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial y}, \\ F_z &= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Affinchè valga l'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ è necessario che almeno una tra le componenti B_x e B_y del campo magnetico sia diversa da zero. Inoltre dovremo anche avere che $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ tra le espansioni polari del magnete. Supponiamo che il campo sia simmetrico rispetto al piano yz e che $B_y = 0$ ovunque. Avremo a questo punto che B_z è una funzione pari di x , mentre B_x è una funzione dispari. Osservando che:

1. $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ implica che $\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z}$;
2. dato che B_z è una funzione pari di x , allora $\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$ per $x = 0$ e, dalla considerazione precedente, anche $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$ per $x = 0$;
3. $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica che, avendo supposto $B_y = 0$, $\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$;

avremo che le espressioni precedenti diventano:

$$\begin{aligned} F_x &= -\mu_x \frac{\partial B_z}{\partial z}, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Quindi si ha che sull'atomo agisce anche una forza diretta lungo l'asse x . Tuttavia, poichè μ_x assume, durante una rotazione di μ attorno all'asse z , sia valori positivi che negativi (ma di uguale modulo), la forza lungo x è in media nulla, come già

considerato in precedenza.

Fuori dal piano di simmetria $x = 0$, il campo magnetico non è più diretto lungo l'asse z , poichè $B_x \neq 0$. Questo comporta, essendo per ragioni di simmetria $B_x = 0$ per $x = 0$, che

$$B_x(x) \simeq B_x(0) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \right)_{x=0} x = - \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right)_{x=0} x \quad (2.12)$$

e quindi, in questo caso, il valore medio di F_x non è nullo². Ne segue che l'immagine del fascio dovrebbe essere deformata nella direzione di x . Tutto ciò ci fa capire come sia necessario considerare soltanto i dati sperimentali relativi a $x \simeq 0$.

Ritornando alla descrizione di Stern, consideriamo inizialmente un *atomo ad un quanto*, per il quale $|\mathbf{L}| = h/(2\pi)$ dimodochè

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{q_e h}{4m_e \pi}. \quad (2.13)$$

Secondo la vecchia teoria quantistica L_z può assumere solo i valori $\pm(h/2\pi)$ e di conseguenza μ_z può assumere solo i valori $\pm(q_e h/4m_e \pi)$. In questo caso l'immagine del fascio sulla piastra di raccolta sarà costituita da due macchie separate, e, poichè sono ammessi solo due valori per μ_z , l'intensità di ogni macchia sarà circa la metà di quella originale. Quindi, utilizzando la teoria di Sommerfeld, per un "atomo a n quanti" si produrranno $2n$ macchie distinte.

Dall'interpretazione classica segue esattamente il contrario, poichè μ_z può assumere tutti i valori tra $-(q_e h/4m_e \pi)$ e $(q_e h/4m_e \pi)$. Se chiamiamo θ l'angolo tra \mathbf{B} e $\boldsymbol{\mu}$ avremo che:

$$\mu_z = |\boldsymbol{\mu}| \cos \theta. \quad (2.14)$$

Poichè il momento magnetico ha un'orientazione casuale, tenendo conto della simmetria attorno a z , si avrà che la densità di probabilità che formi un angolo θ sarà:

$$dP = \frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta, \quad (2.15)$$

dove il riferimento è quello usuale sferico. La probabilità avrà quindi un massimo per $\theta = \pi/2$, cioè per $\mu_z = 0$ e deflessione nulla. Quindi secondo la teoria classica sono possibili tutte le deflessioni s , dove i valori $s \simeq 0$ sono più probabili rispetto agli altri. In presenza di un campo magnetico la macchia sulla piastra di raccolta si allargherà, ma senza presentare divisioni.

Si può dare una stima della deflessione in base alle condizioni ottenibili in laboratorio. Prima di tutto assumiamo che $\partial B_z/\partial z$ sia costante non solo lungo la sezione trasversale, ma su tutta a lunghezza del fascio. Successivamente poniamo

²La trattazione completa di ciò è presente in [15] ed è stata qui omessa per brevità.

$|\mu_z| = (q_e h / 4m_e \pi)$, cioè calcoliamo la massima deflessione nel caso classico che coincide con quella ottenibile nel caso quantistico. Ricordando che il modulo della forza che agisce sull'atomo è dato da

$$\mathbf{F} = |\mu_z| \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{z} \quad (2.16)$$

chiamando m_a la massa dell'atomo, si avrà un'accelerazione pari a

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_a} = \frac{|\mu_z|}{m_a} \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{z}. \quad (2.17)$$

Assumendo che il fascio si muova di moto uniforme lungo l'asse y e di moto uniformemente accelerato lungo l'asse z , se t è il tempo di volo e v la velocità degli atomi, la deflessione s sarà

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = \frac{1}{2} \mathbf{a} \frac{l^2}{v^2} = \frac{1}{2} \frac{|\mu_z|}{m_a} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{l^2}{v^2} \mathbf{z}. \quad (2.18)$$

Se chiamiamo il numero di moli in una molecola N , la massa atomica $M = m_a N$ e il magnetone di Bohr $\mu_B = |\mu_z| N$ otteniamo per la deflessione

$$\mathbf{s} = \frac{\mu_B}{2Mv^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} l^2 \mathbf{z}. \quad (2.19)$$

Infine, utilizzando per v^2 la velocità quadratica media dimodochè $Mv^2 = 3RT$ (Con R costante dei gas e T temperatura assoluta), si ottiene

$$\mathbf{s} = \frac{\mu_B}{6R} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{l^2}{T} \mathbf{z}. \quad (2.20)$$

La deflessione risultante sarà molto piccola; utilizzando per il calcolo $\partial B_z / \partial z = 10^4$ G/cm, $l = 3.3$ cm e $T = 1000^\circ\text{C}$ si ottiene infatti che lo spostamento massimo rispetto al caso di deflessione nulla ($\theta = \pi/2$) è uguale a $1.21 \cdot 10^{-3}$ cm, ovvero circa 1/100 mm.

2.3 Descrizione dell'esperimento, risultati ed interpretazione

Nonostante la dettagliata preparazione, fu necessario più di un anno per mettere in atto l'esperimento, e non senza problemi [2]. L'apparato presentava infatti delle difficoltà intrinseche:

1. era necessaria una grande precisione nella costruzione dell'apparato, poichè disallineamenti delle fenditure utilizzate per collimare il fascio o del magnete maggiori di 0.01 mm erano sufficienti ad inficiare l'esperimento:

2. l'apparato poteva funzionare solo per poche ore prima che si bloccasse, e lo strato di argento che si riusciva a depositare sulla piastra di raccolta in questo periodo era troppo sottile per essere visto ad occhio nudo.

La risoluzione di questo secondo problema si ottenne in modo del tutto casuale durante uno degli esperimenti. Dopo aver fatto trascorre del tempo in modo che gli atomi del fascio si depositassero sulla piastra di raccolta, Stern e Gerlach analizzarono quest'ultima, senza tuttavia trovare traccia del fascio. Guardando con più attenzione, però, cominciarono a comparire delle tracce color nero ebano: essi erano soliti fumare sigari in laboratorio e lo zolfo presente in questi ultimi aveva reagito con l'argento, dando solfuro di argento dal colore nero brillante e quindi molto visibile [2]. Dopo questo episodio, Stern e Gerlach iniziarono ad utilizzare un processo di sviluppo fotografico, ma i risultati degli esperimenti continuarono a rivelarsi inconclusivi. Non vi era inoltre supporto da parte dei loro colleghi, come testimoniato dal fatto che Debye, rivolgendosi a Gerlach, disse:

Non crederai di certo che l'orientazione spaziale dell'atomo sia qualcosa di fisico; è soltanto un modello di comportamento per l'elettrone [2].

Gli esperimenti continuarono, ma senza successo, e la convinzione dei due cominciò a vacillare. Proprio a causa di questi insuccessi, all'inizio del 1922, dopo essersi incontrati a Gottinga, decisero di rinunciare all'esperimento. Tuttavia il ritorno di Gerlach a Francoforte fu posticipato e la cosa gli diede il tempo di rivedere i dettagli dell'esperimento un'ultima volta. Egli decise di continuare, migliorando l'allineamento e dopo poco riuscì ad ottenere un chiaro splitting in due fasci.

Stern e Gerlach interpretarono questo risultato come una conferma della teoria quantistica di Bohr-Sommerfeld, come mostrato dal telegramma che Gerlach inviò a Stern in cui si leggeva: "Bohr ha ragione, dopo tutto" [2]. Stern e Gerlach avevano alle spalle l'impostazione teorica di Sommerfeld, e quindi si aspettavano $2n$ valori per L , dove con n si è indicato il numero quantico spaziale di Sommerfeld. Essi escludono espressamente il caso

$$n = 0 \rightarrow n_1 = 0, n_2 = 0 \tag{2.21}$$

poichè questo non era permesso dalla teoria. Questo caso particolare avrebbe dovuto restituire un fascio indeflesso se immerso in un campo magnetico, poichè il momento magnetico è pari a $(q_e \mathbf{L}/2m_e)$ con $2n$ valori per \mathbf{L} . Come invece sappiamo dalla teoria moderna, la presenza dello spin produce un momento magnetico e quindi il fascio avrebbe invece subito uno splitting in due ($J = L + S = 1/2$) che la teoria di Sommerfeld non sarebbe stata in grado di spiegare. Si può vedere quindi come rimase escluso un semplice caso che avrebbe fatto vacillare i fondamenti teorici dell'esperimento.

Essi credevano di avere a che fare con il caso $L = 1$, che come sappiamo dalla teoria moderna avrebbe prodotto tre fasci distinti, mentre invece avevano a che fare con il caso $L = 0$, quindi gli atomi d'argento si trovavano nello stato fondamentale.

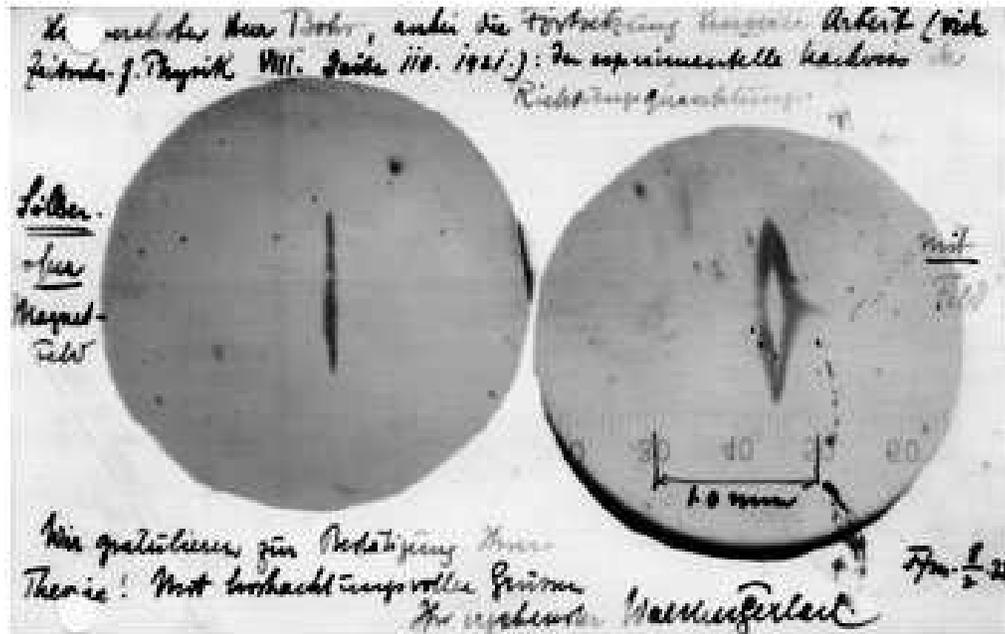


Figura 2.3: La cartolina di congratulazioni inviata da Gerlach a Bohr che mostra una foto dello splitting del fascio atomico [2].

Si può notare quindi, come essi ottennero dei risultati sperimentali corretti, basati però su di una teoria errata. Nonostante ciò, questi risultati furono accettati come la prova determinante a favore della teoria di Bohr-Sommerfeld.

Tuttavia, vi erano ancora dei problemi. La teoria di Bohr-Sommerfeld non riusciva comunque a spiegare l'effetto Zeeman anomalo e non vi era traccia sperimentale della birifrangenza magnetica. Inoltre c'era un'altra domanda che lasciava perplessi alcuni, come Einstein ed Ehrenfest che espressero i propri dubbi nell'articolo [16] del 1922 : come fa il momento magnetico ad allinearsi col campo?³

Bisogna ricordare che nella teoria di Bohr-Sommerfeld si assume valida la teoria classica per la determinazione degli stati, mentre le transizioni, quantistiche, sono dovute all'interazione con la radiazione elettromagnetica. Considerando l'apparato di Stern e Gerlach, si può stimare che il tempo di attraversamento del suddetto da parte degli atomi sia dell'ordine di 10^{-4} s. Poichè all'uscita del forno la direzione del momento magnetico atomico è certamente casuale, come fa questo ad allinearsi col campo? Sappiamo che classicamente il momento magnetico atomico precede attorno al campo con una velocità angolare pari a

$$\omega_L = \frac{q_e B}{2m_e}. \quad (2.22)$$

³L'esposizione del problema è ispirata a [17].

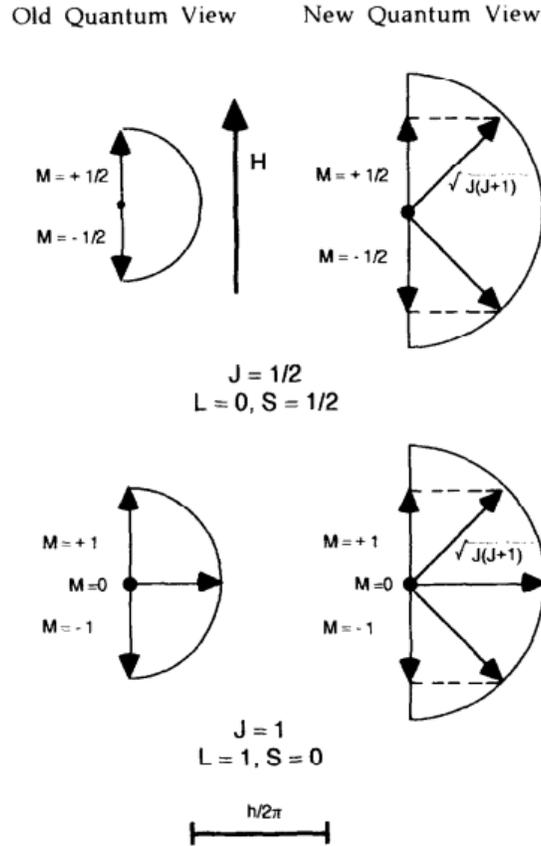


Figura 2.4: I valori di J e J_z secondo la vecchia e la nuova teoria quantistica. Si noti come la vecchia teoria quantistica identifica i valori di J_z con quelli di J [3].

La frequenza della precessione sarà quindi

$$\nu_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{q_e B}{4\pi m_e}. \quad (2.23)$$

Moltiplicando e dividendo per h e ricordando che $\hbar = (h/2\pi)$, otterremo quindi

$$\nu_L = \frac{\mu_B B}{h} \quad (2.24)$$

dove $\mu_B = (q_e \hbar / 2m_e)$ è il magnetone di Bohr.

Tuttavia per spiegare le macchie distinte non basta il moto di precessione, ma è necessario che il momento magnetico si allinei, cioè abbia proiezione ± 1 rispetto all'asse z .

Secondo la teoria pre-meccanica quantistica, la transizione tra uno stato allineato in una direzione qualunque ed uno allineato lungo l'asse z può avvenire solo per effetto

radiativo. Per un dipolo magnetico, si può calcolare il tempo caratteristico di questo allineamento. La potenza emessa da un dipolo magnetico oscillante, uguale ad un magnetone di Bohr, è:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}^2 = \frac{2}{3c^3} \omega^4 \mu, \quad |\mu| = \mu_B, \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{\mu_B B}{\hbar}. \quad (2.25)$$

Poichè l'energia sarà pari a

$$\hbar\omega = \mu_B B, \quad (2.26)$$

il tempo caratteristico τ per un campo di 10^4 gauss sarà

$$\tau = \frac{\mu_B B}{I} \simeq 10^{11} s \quad (2.27)$$

che è molto maggiore del tempo di attraversamento di 10^{-4} s. Quindi è escluso che la transizione avvenga per via radiativa.

Quindi come si può descrivere l'allineamento? La risposta è che questo fenomeno non può essere descritto in modo classico essendo intrinsecamente quantistico.

2.4 L'introduzione dello spin e la reinterpretazione dell'esperimento

Come già detto in precedenza, la presunta conferma della teoria di Bohr-Sommerfeld lasciava comunque problemi irrisolti, tra cui l'effetto Zeeman anomalo e la struttura fine delle righe spettrali. Gli sviluppi successivi vengono ben presentati in [18]. Cercando una soluzione a quest'ultimo problema, nel 1925, Goudsmit ed Uhlenbeck proposero che l'elettrone avesse a disposizione un momento angolare e un momento di dipolo magnetico intrinseci, le cui componenti z sono specificate da un quarto numero quantico, chiamato m_s , che può assumere solo valori $\pm 1/2$. Lo splitting dei livelli energetici atomici sarebbe così dovuto all'energia di orientazione del dipolo magnetico nel campo magnetico presente all'interno dell'atomo, il quale è dovuto al fatto che quest'ultimo contiene cariche in movimento. L'energia sarebbe quindi, essendo dipendente dal segno di m_s , positiva o negativa in base all'orientazione dello spin ("up" oppure "down") rispetto alla direzione del campo magnetico interno all'atomo. L'idea che l'elettrone fosse dotato di un momento angolare intrinseco non fu introdotta da Goudsmit e Uhlenbeck, ma compare per la prima volta nel lavoro [19] di Arthur Compton del 1921, in cui termina scrivendo:

Posso concludere quindi che l'elettrone stesso, ruotando come un piccolo giroscopio, è probabilmente la particella magnetica definitiva [19].

anche se egli, successivamente, non sviluppò questo concetto. L'idea nacque dal lavoro di Pauli sul principio di esclusione, in cui proponeva l'utilizzo di quattro numeri

quantici per l'elettrone. Tuttavia la descrizione era di tipo formale e sembrava non presentare collegamenti con un qualcosa di concreto. Poichè l'elettrone è considerato puntiforme, ed ogni numero quantico è associato ad un grado di libertà, è difficile immaginarne un quarto. L'idea di Goudsmit e Uhlenbeck fu che il quarto grado di libertà fosse legato alla rotazione dell'elettrone su se stesso. L'idea di un momento angolare intrinseco all'elettrone, che chiameremo spin, va però incontro a diversi problemi:

1. la velocità di rotazione sulla superficie dell'elettrone dovrebbe essere pari a molte volte quella della luce;
2. secondo i calcoli di Lorentz, a cui Goudsmit e Uhlenbeck si erano rivolti, l'energia magnetica sarebbe talmente grande che, utilizzando l'equivalenza tra massa ed energia, l'elettrone avrebbe una massa maggiore di quella del protone.

Si pone quindi il problema di cosa sia lo spin. Per una particella classica sappiamo che sono ammessi tre gradi di libertà; tuttavia non è possibile descrivere tutte le proprietà dell'elettrone utilizzando la meccanica classica. La meccanica quantistica basata sull'equazione di Schrödinger non prevede lo spin, ma questo è compatibile con la teoria (fu infatti successivamente aggiunto a mano da Pauli); invece, nella meccanica quantistica relativistica sviluppata da Dirac, lo spin è un prodotto della teoria.

Un altro aspetto del carattere non classico dello spin si può notare dal fatto che il numero quantico s , che specifica l'ampiezza del momento angolare di spin \mathbf{S} , può assumere solo i valori $\pm 1/2$ e non è quindi possibile portare \mathbf{S} al suo limite classico facendo in modo che $s \rightarrow \infty$ com'è possibile fare per l'ampiezza del momento angolare orbitale \mathbf{L} mandando $l \rightarrow \infty$.

Si potrebbe pensare che, a causa del clamore che l'esperimento di Stern e Gerlach suscitò nel 1922, l'introduzione dell'ipotesi sullo spin abbia immediatamente portato ad una reinterpretazione dell'esperimento in funzione di quest'ultimo. Questo non avvenne fino al 1927, anno in cui Fraser scoprì che il momento angolare orbitale nello stato fondamentale, e quindi il momento magnetico associato, per argento, idrogeno e sodio è pari a zero. Nello stesso anno, Phyypps e Taylor riprodussero l'esperimento di Stern e Gerlach con atomi di idrogeno nello stato fondamentale, ottenendo gli stessi risultati (confermando che questi non fossero dovuti all'utilizzo dell'argento in particolare). Possiamo quindi ora correggere la nostra trattazione dell'esperimento di Stern e Gerlach: gli atomi di argento si trovano nello stato fondamentale in cui hanno momento magnetico dovuto a \mathbf{L} nullo. È tuttavia presente un momento magnetico dovuto a \mathbf{S} pari a:

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \mu_B \mathbf{S} \quad (2.28)$$

dove con g_s si è indicato il fattore giromagnetico di spin. Ripetendo il ragionamento fatto precedentemente si può comprendere come il momento magnetico possa assu-

mere solo due valori e quindi la forza risultante sugli atomi porterà alla formazione di due macchie distinte. Si ottiene quindi che tali risultati non sono dovuti al momento angolare orbitale, come atteso da Stern e Gerlach, bensì al momento angolare di spin.

Conclusioni

Al termine di questa trattazione possiamo quindi capire perchè l'esperimento di Stern e Gerlach sia considerato come uno dei più importanti tra quelli che hanno contribuito alla nascita ed alla crescita della Meccanica Quantistica. Infatti, è solo inquadrando l'esperimento di Stern e Gerlach nel contesto storico in cui è stato ideato e realizzato che è possibile coglierne tutte le sfaccettature. All'epoca non venne considerato l'esperimento con cui era stato scoperto il momento angolare di spin e non lasciò perplessi i suoi ideatori, come molte esposizioni moderne lasciano intendere. Stern e Gerlach trovarono esattamente ciò che si aspettavano: un fascio di atomi di argento immerso in un campo magnetico disomogeneo si splitta in due. Un risultato corretto, basato su una teoria errata. È solo dopo aver compreso a fondo tutto questo che ci si può convincere dei pregi dell'esperimento: non solo i risultati permisero di mostrare l'incongruenza tra dati sperimentali e teoria classica applicata ai fenomeni microscopici, ma aprirono anche la strada ad idee innovative, che si riveleranno poi fondamentali in Meccanica Quantistica.

Bibliografia

- [1] Sangaletti, L. E., *Dall'atomo di Bohr alla costante di struttura fine*. In rete alla pagina <http://www.dmf.unicatt.it/~sangalet/PLS/costante%20di%20struttura%20fine.pdf>
- [2] Friedrich, B., Herschbach, D., *Stern and Gerlach: How a bad cigar helped reorient atomic physics*. *Physics Today*, **56** (2003) 53-59.
- [3] Weinert, F., *Wrong theory-Right experiment: The significance of the Stern-Gerlach experiments*. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **26** (1995) 75-86.
- [4] Fano, V., Stanzione, M., Tarozzi, G., *Prospettive della logica e della filosofia della scienza*, Catanzaro, Rubbettino Editore, 2001.
- [5] Sommerfeld, A., *Zur quantentheorie der spektrallinien*. *Annalen der Physik*, **356** (1916) 1-94.
- [6] Zeeman, P., Bôcher, M., *Zeeman effect*. *Nature*, **55** (1897) 3.
- [7] Innocenti, E. Landi, *Spettroscopia atomica e processi radiativi*. Milano, Springer-Verlag Mailand, 2009.
- [8] Tipler, P. A., Mosca, G., *Physics for scientists and engineers*. New York, W. H. Freeman, 2007.
- [9] Bartolini, C., *L'effetto Zeeman*. In rete alla pagina <http://campus.unibo.it/49540/>, 2011
- [10] Lorentz, H. A., *Über den Einfluss magnetischer Kräfte auf die Emission des Lichtes*. *Annalen der Physik*, **299** (1897) 278-284.
- [11] Mehra, J., Rechenberg, H., *The quantum theory of Planck, Einstein, Bohr, and Sommerfeld: its foundation and the rise of its difficulties, 1900-1925* (Vol. 1). New York, Springer-Verlag New York, 1982.

- [12] Stern, O., *A way towards the experimental examination of spatial quantisation in a magnetic field*. Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters, **10** (1988) 114-116.
- [13] Stenson, J. R., *Representations for understanding the Stern-Gerlach effect*. In rete alla pagina <https://www.physics.byu.edu/research/theory/Docs/JaredsThesis05.pdf>, 2005
- [14] *L'esperimento di Stern e Gerlach*. In rete alla pagina http://fisica.unipv.it/percorsi/pdf/stern_gerlach.pdf
- [15] Singh, S., Sharma, N. K., *Comment on "Paradox in the classical treatment of the Stern-Gerlach experiment"*. American Journal of Physics, **52** (1984), 274-275.
- [16] Einstein, A., Ehrenfest, P., *Quantentheoretische Bemerkungen zum Experiment von Stern und Gerlach*. Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, **11** (1922), 31-34.
- [17] Paffuti, G., *Note sulla nascita della meccanica quantistica*. Meccanica, **530** (2009), 21.
- [18] Eisberg, R. M., Resnick, R., *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles*. New York, John Wiley & Sons Inc, 1985.
- [19] Compton, A. H., *The magnetic electron*. Journal of the Franklin Institute, **192** (1921), 145-155.