

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

QUANTIZZAZIONE DI STATI GAUSSIANI

Relatore:

Prof. Fedele Lizzi

Handwritten signature of Prof. Fedele Lizzi in black ink.

Candidato:

Lorenzo Leone

Matricola N85000719

A.A. 2016/2017

Indice

1	Introduzione	3
2	Richiami di Meccanica Classica	6
2.1	Stati	6
2.2	Evoluzione temporale ed osservabili	7
2.3	Proprietà delle parentesi di Poisson	8
3	Richiami di Meccanica Quantistica	9
3.1	Stati ed osservabili	9
3.1.1	Proprietà del commutatore	12
3.2	Operatore densità	13
3.2.1	Proprietà dell'operatore densità	14
3.3	Evoluzione temporale	15
3.3.1	Descrizione di Schrödinger	15
3.3.2	Descrizione di Heisenberg	16
3.3.3	Evoluzione temporale degli operatori densità	16
4	Dalla meccanica classica alla meccanica quantistica	18
4.1	Mappe di quantizzazione	19
4.2	Mappa di Weyl	21
5	Confronto fra densità di probabilità: quantizzazione di stati gaussiani	23
6	Prodotto di Moyal	34

1 Introduzione

La meccanica classica e la meccanica quantistica sono teorie molto diverse tra loro, ma entrambe hanno il pregio di saper descrivere in maniera completa il mondo circostante. Di fondamentale importanza è cercare di capire come le due teorie non si escludano a vicenda: la quantistica non è una generalizzazione della meccanica classica, né *pretende* di esserlo. Entrambe le teorie hanno limiti di applicabilità, ma il confine che le separa non è netto. A pochi anni di distanza dall'avvento della meccanica di Heisenberg e di Schrödinger, la teoria della relatività di Einstein aveva già rivoluzionato la scienza. È noto come questa teoria nel limite in cui $c^{-1} \rightarrow 0$ si riduca alla meccanica newtoniana. Si può quindi concludere che essa sia a tutti gli effetti una sua generalizzazione. Di contro è noto che la formalizzazione della meccanica quantistica è profondamente differente da quella classica nella rappresentazione dello stato del sistema, nella rappresentazione degli osservabili, nell'evoluzione temporale. La frattura dal formalismo classico consiste nel modo di guardare alle grandezze osservabili, che classicamente sono funzioni definite sullo spazio delle fasi, quantisticamente operatori autoaggiunti sullo spazio di Hilbert degli stati. La profonda differenza la si coglie dal punto di vista matematico: basti pensare che il prodotto tra funzioni definite su varietà è commutativo e il prodotto di operatori è, in generale, non commutativo. Ed è proprio la non-commutatività di quest'algebra che traduce matematicamente le relazioni di indeterminazione e l'incompatibilità di misure contemporanee di certe coppie di osservabili. Nel mondo quantistico il protagonista assoluto è il *quanto d'azione* \hbar :

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{1}$$

Come attribuire a un sistema fisico una natura classica o quantistica? Dal momento che sarebbe assurdo rinunciare alla descrizione classica di sistemi macroscopici, in che modo etichettare un sistema come macroscopico oppure microscopico? Guardando la relazione di commutazione precedente può concludersi che è proprio la costante \hbar che assume il ruolo di discriminante fra queste due grandi teorie: sarà quantistico un sistema per il quale il valore assunto dalle grandezze osservabili (delle dimensioni di un azione) è confrontabile con il valore numerico di \hbar , classico uno per il quale il peso di \hbar possa essere trascurato; difatti nel limite in cui \hbar tenda a zero:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0$$

ritroviamo il limite classico e quindi la commutatività del prodotto fra posizione e momento di una particella.

Quanto detto però cela un intrigante interrogativo: in che modo il mondo classico costituisce un limite per quello quantistico? Una teoria più generale può essere formulata in modo logicamente chiuso, indipendentemente da una teoria meno generale che ne costituisce un caso limite. Così, la meccanica relativistica può essere eretta su assiomi e principi fondamentali senza fare alcun riferimento alla meccanica newtoniana. Quanto ai principi primi della meccanica quantistica, ne è impossibile la formulazione senza l'inclusione della meccanica classica. Le due teorie sono intrinsecamente legate. L'assenza di una *traiettoria* per una particella quantistica esclude la possibilità di costruire una dinamica logicamente chiusa per un sistema costituito esclusivamente da oggetti quantistici; infatti, se volessimo una descrizione quantitativa del movimento di un elettrone dovremmo disporre di uno strumento di misura, come una *camera a nebbia*. La teoria richiede, quindi, l'esistenza di oggetti fisici che obbediscano con precisione sufficiente alla meccanica classica. Se un elettrone entra in interazione con un oggetto classico, il suo stato, in generale, cambia.¹ Il carattere e la grandezza di questo cambiamento dipendono dallo stato dell'elettrone e possono quindi servirgli da caratteristica quantitativa. Pertanto è l'*oggetto classico* ad essere il nostro *strumento*, ed è la sua interazione con l'elettrone ad essere la *misura*. Si deve a Niels Bohr la precisazione del significato profondo che il concetto di misura ha in meccanica quantistica:

Per processo di misura si intende qualsiasi processo di interazione fra oggetto classico e oggetto quantistico che avvenga, a prescindere e indipendentemente da un osservatore qualsiasi.

In tal modo, la meccanica quantistica occupa una posizione assai particolare nell'ambito delle teorie fisiche: essa contiene la meccanica classica come caso limite, e al tempo stesso, ha bisogno di questo caso limite per la sua stessa fondazione.

Lo scopo di questa tesi è presentare una visione della meccanica quantistica che sia un ponte con la meccanica classica. Da qui nasce la *meccanica quantistica delle deformazioni*. Verrà presentato il formalismo di Weyl-Wigner-Moyal che fornisce una mappa di quantizzazione da funzioni classiche ad operatori quantistici e permette di descrivere entrambe le evoluzioni attraverso lo stesso formalismo e, al tempo stesso, fornisce una connessione fra distribuzioni di probabilità classiche e quantistiche. In questo modo il con-

¹Un esempio lampante è costituito dalla diffrazione degli elettroni.

fronto tra l'evoluzione classica e l'evoluzione quantistica risulterà immediato. Nel capitoli 2 e 3 si discuteranno brevemente i concetti alla base delle due teorie, ponendo maggiormente l'attenzione sulle possibili analogie e sulle inevitabili differenze. In particolare si introdurrà l'equazione di evoluzione di una distribuzione di probabilità classica, nel caso in cui lo stato iniziale sia specificato solo in senso probabilistico.

Nel capitolo 4 verranno presentate le mappe di quantizzazione, che si configureranno come un ponte che collega le due grandi teorie. Nello stesso daremo l'espressione della mappa di Weyl e l'inversa di Wigner.

Nel capitolo 5 si arriverà a un risultato originale, applicazione di quanto svolto in precedenza:scriveremo la matrice densità associata ad una distribuzione di probabilità classica di forma gaussiana.

Nel capitolo 6 si discuteranno brevemente le proprietà del prodotto di Moyal, introdotto sullo spazio delle fasi come *deformazione* del classico prodotto commutativo.

2 Richiami di Meccanica Classica

2.1 Stati

In meccanica classica lo stato di un sistema fisico è descritto da una funzione delle coordinate $\rho_t(q, p)$ positiva e normalizzata all'unità, definita sullo spazio delle fasi. Si immagini di disporre di un numero n di particelle, lo spazio delle fasi è $\mathbb{S} \equiv \mathbb{R}^{2n}$, con $x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ come variabili. Dove, con q_i viene indicata la posizione della i -esima particella e con p_i il suo momento.² La funzione $\rho_t(q, p)$, eventualmente dipendente dal tempo, è la *densità di probabilità* di trovare la particella in una regione dello spazio delle fasi. L'integrale:

$$\int_{\Delta q \Delta p} dq dp \rho_t(q, p) \quad (2.1)$$

misura la probabilità di trovare la particella nel volume $\Delta q \Delta p$ dello spazio delle configurazioni. Si noti che, per semplicità, ci si riferisce ad un sistema fisico unidimensionale. La condizione di normalizzazione impone:

$$\int dq dp \rho_t(q, p) = 1 \quad (2.2)$$

Da questo momento in poi con l'integrale privato dei suoi estremi si denota un'integrazione estesa a tutto lo spazio delle configurazioni.

Una peculiarità della teoria classica consiste nel fatto che l'esistenza di una densità di probabilità sia dovuta esclusivamente al limite tecnologico imposto dagli strumenti di misura. In linea di principio, infatti, disponendo di strumenti di misura ideali, i principi della teoria classica non vietano che la densità di probabilità dei valori delle coordinate e dei momenti diventi certa:

$$\rho(q, p) = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0) \quad (2.3)$$

non vieta di localizzare in un ben preciso punto dello spazio (q_0, p_0) la particella classica. Lo stato di un sistema fisico classico che non sia descritto da una densità di probabilità, ma da un punto (q_0, p_0) dello spazio delle fasi è chiamato *stato puro*. Questo costituirà, come vedremo anche in un esempio, una delle grandi differenze con la teoria quantistica.

²Si precisa che in generale lo spazio delle fasi è una varietà simplettica $2n$ -dimensionale; q^i è la variabile lagrangiana generalizzata associata all' i -esima particella e

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

il momento generalizzato coniugato a q^i . Una trattazione così dettagliata dello spazio delle fasi esula dagli scopi di questo scritto, dunque ci si limita a considerarlo, in coordinate cartesiane, un sottinsieme di \mathbb{R}^{2n} .

2.2 Evoluzione temporale ed osservabili

In meccanica classica si definisce *osservabile* o *variabile dinamica* una funzione reale $f(q, p)$:

$$f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.4)$$

A tal proposito esisterà, per ogni sistema dinamico, una funzione $H \in F(\mathbb{S})$, *funzione di Hamilton*, da cui si ottengono:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

dette *equazioni del moto*. Si è indicato con \dot{f} la derivata totale rispetto al tempo. La conoscenza ad un certo istante del valore $\mathbf{x}_0 = (q_0, p_0)$ permette di calcolare $\mathbf{x}(t) = (q(t), p(t))$, attraverso queste equazioni, in un qualsiasi istante, e quindi specifica in maniera completa il moto del sistema. Di contro, se lo stato del sistema ad un certo istante non è determinato con certezza, ma sia descritto da una densità di probabilità $\rho_{t_0}(q, p)$, l'evoluzione temporale è descritta dall'*equazione di Liouville*:

$$\frac{d}{dt}\rho_t(q, p) = 0 \quad (2.6)$$

essa determina la forma della densità di probabilità in ogni istante $t \geq t_0$.

Sia dato ora un osservabile $f(\mathbf{x}, t)$ e sia assegnato un moto per il sistema $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, soluzione delle equazioni di Hamilton (2.5) di dato iniziale $\mathbf{x}_0 = (q_0, p_0)$. Considerando i valori che la funzione f assume lungo le soluzioni del moto, $f(t) = f(\mathbf{x}(t), t)$ diremo che essa è una costante del moto, cioè è un integrale primo, se verifica:

$$\dot{f}(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad (2.7)$$

per ogni soluzione delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana H . Esplicitiamo la derivata temporale:

$$\dot{f}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.8)$$

A tal proposito, si definisce **parentesi di Poisson** la funzione:

$$\{f, g\} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (2.9)$$

con $f, g \in F(\mathbb{S})$.

Dall'equazione (2.8), otteniamo:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (2.10)$$

che descrive l'evoluzione temporale di una funzione definita sullo spazio delle fasi, tramite le parentesi di Poisson (2.9). In particolare, una variabile dinamica f , indipendente dal tempo, è un integrale del moto rispetto all'hamiltoniana H se e solo se si annulla la parentesi di Poisson di f con H :

$$\{f, H\} = 0 \quad (2.11)$$

Allora, possiamo esplicitare l'equazione di Liouville (2.6):

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\{\rho_t, H\} \quad (2.12)$$

2.3 Proprietà delle parentesi di Poisson

Le parentesi di Poisson costituiscono uno strumento molto potente per creare un'analogia tra il formalismo della meccanica classica e quello della meccanica quantistica. Esse soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{f, \alpha g_1 + \beta g_2\} = \alpha\{f, g_1\} + \beta\{f, g_2\}$
3. $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\}g_2 + g_1\{f, g_2\}$ *Regola di Leibniz*
4. $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ *Identità di Jacobi*

Se consideriamo come variabili dinamiche le funzioni q_i ed p_i , allora valgono le *relazioni di Poisson fondamentali*:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

Le equazioni di Hamilton (2.5) possono essere scritte in una forma particolarmente simmetrica:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (2.14)$$

Riassumendo: disponiamo di uno spazio vettoriale di funzioni $F(\mathbb{S})$ sul quale è stato definito un prodotto: le *parentesi di Poisson*, munite delle proprietà elencate; uno spazio vettoriale di questo tipo è chiamata *algebra di Lie*.

3 Richiami di Meccanica Quantistica

In questa sezione vengono toccati i punti essenziali del formalismo della meccanica quantistica e saranno messe in evidenza, dove possibile, analogie e differenze con il formalismo classico. Innanzitutto si è detto nei paragrafi precedenti che in meccanica classica, in linea di principio, disponendo di strumenti di misura ideali, è possibile individuare la particella in un punto dello spazio delle fasi e seguirla durante tutto il moto. È possibile conoscere ad ogni istante t posizione e velocità della particella a patto di aver fornito con precisione assoluta i dati iniziali. In meccanica classica basta aver determinato posizione e velocità in un istante, allora esse saranno note, attraverso le equazioni di Hamilton (2.5), in tutti gli istanti. Questo tipo di determinismo in meccanica quantistica viene completamente abbandonato. L'indeterminazione dei valori di certe grandezze è intrinseco, non è più legato ai limiti degli strumenti di misura. Vi sono delle limitazioni dovute alle relazioni di incertezza fra grandezze *coniugate*. Come si vedrà, si possono misurare contemporaneamente solo grandezze corrispondenti ad operatori che commutano. Ciò si traduce nell'impossibilità di misurare contemporaneamente le tre componenti del momento angolare orbitale, la posizione e la velocità di una particella. Una relazione quantitativa che fornisce la possibilità di una misura non precisa delle coordinate e della velocità allo stesso istante è:

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{Principio di indeterminazione di Heisenberg} \quad (3.1)$$

3.1 Stati ed osservabili

In meccanica quantistica uno stato *puro*³ di un sistema fisico è descritto da un opportuno vettore Ψ di uno spazio di Hilbert \mathbb{H} , chiamato vettore di stato oppure funzione d'onda del sistema, la cui norma è uguale ad 1. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale normato, dotato cioè di una norma indotta dal prodotto scalare.

D'ora in avanti verrà utilizzata la notazione introdotta da Dirac, *bra-ket*, per la descrizione di uno stato quantistico. Il nome deriva dal fatto che il prodotto scalare fra due vettori dello spazio di Hilbert \mathbb{H} è denotato con una *braket*:

$$\langle \phi | \psi \rangle \quad \phi, \psi \in \mathbb{H} \quad (3.2)$$

esso è costituito da due *parti*: un *bra* $\langle \phi |$ ed un *ket* $|\psi \rangle$. Lo spazio di Hilbert è costituito dai ket, vettori colonna ordinari; il *teorema di Ritz* assicura che

³Nel senso in cui sarà precisato nel 3.2.

ad ogni ket $|\psi\rangle$, vettore dello spazio di Hilbert, è un corrispondente bra $\langle\psi|$, chiamato usualmente covettore ed appartenente allo spazio *duale* \mathbb{H}^* , che nello spazio coordinato corrisponde all'operazione di coniugazione:

$$|\psi\rangle \equiv \psi(\mathbf{x}) \rightarrow \langle\psi| \equiv \psi^*(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

Quanto detto è coerente con l'usuale prodotto scalare dello spazio di Hilbert $L^2[\mathbb{R}]$, spazio delle funzioni a *quadrato sommabile*.

Conviene elencare le proprietà del prodotto scalare nella suddetta notazione:

1. $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$
2. $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = \mathbf{0}$
3. $\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^*$
4. $\langle\phi|\alpha\psi\rangle = \alpha \langle\phi|\psi\rangle$
5. $\langle\phi_1 + \phi_2|\psi\rangle = \langle\phi_1|\psi\rangle + \langle\phi_2|\psi\rangle$

$\forall\phi, \psi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{H}, \forall\alpha \in \mathbb{C}$.

In meccanica classica è stata definita grandezza osservabile una funzione sullo spazio delle fasi $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in F(\mathbb{S})$. In meccanica quantistica, ad ogni grandezza osservabile corrisponde un operatore lineare ed autoaggiunto \hat{A} che agisce sullo spazio di Hilbert degli stati. I valori che essa può assumere, quando misurata, sono i punti dello spettro dell'operatore ad essa associato.⁴ Nel caso in cui l'operatore \hat{A} abbia spettro discreto, indichiamo con a_n i suoi autovalori e con $|\phi_n\rangle$ le autofunzioni, cioè quelle funzioni $|\phi_n\rangle \in \mathbb{H}$ per le quali è verificata l'*equazione agli autovalori*:

$$\hat{A} |\phi_n\rangle = a_n |\phi_n\rangle \quad (3.4)$$

Allora il risultato di una misura, su di un sistema descritto dal vettore $|\Psi\rangle$, darà come risultato uno degli autovalori a_n . In virtù di ciò, può affermarsi che il vettore di stato $|\Psi\rangle$ deve essere una combinazione lineare delle autofunzioni dell'operatore:

$$|\Psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle \quad (3.5)$$

Nel caso in cui l'operatore presenti uno spettro continuo:

$$\hat{A} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (3.6)$$

⁴In tutta la trattazione non faremo considerazioni riguardo al dominio degli operatori, in quanto esula dagli scopi di questo testo.

allora la somma diventa un integrale:

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha |\alpha\rangle \lambda(\alpha) \quad (3.7)$$

Matematicamente ciò è assicurato, per operatori autoaggiunti, dal *teorema spettrale*, secondo il quale le autofunzioni di un operatore autoaggiunto costituiscono una base per lo spazio di Hilbert sul quale esso agisce. Dallo sviluppo (3.5) si può affermare che la probabilità che una misura dell'osservabile, corrispondente all'operatore \hat{A} , restituisca l'autovalore a_n sia:

$$P(a_n) = |\lambda_n|^2 \quad (3.8)$$

Siano $|\phi_n\rangle$ le autofunzioni di un operatore autoaggiunto. Esse, come precisato, costituiscono una base per lo spazio di Hilbert, dunque soddisfano la relazione di *risoluzione dell'identità*:

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \mathbb{1} \quad (3.9)$$

Allora, se $|\psi\rangle \in \mathbb{H}$, possiamo scrivere:

$$|\psi\rangle = \mathbb{1} |\psi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle \quad (3.10)$$

dove abbiamo posto $\langle \phi_n|\psi\rangle = \lambda_n$. Il suddetto rappresenta lo sviluppo (3.5) del ket $|\Psi\rangle$ secondo le autofunzioni di \hat{A} . Da (3.8):

$$P(a_n) = |\lambda_n|^2 = \left| \langle \phi_n|\Psi\rangle \right|^2 \quad (3.11)$$

indica che la probabilità che una misura restituisca il valore a_n è il modulo quadro del coefficiente che pesa quanto il vettore di stato a sia proiettato sull'autofunzione di \hat{A} relativa all'autovalore a_n .

Se l'operatore ha spettro continuo valgono tutte le precedenti considerazioni, a patto di sostituire le somme con gli integrali.

Una peculiarità della misura quantistica risiede nel fatto che lo stato del sistema viene *proiettato*, per effetto di essa, nel particolare autostato ϕ_n , relativo all'autovalore a_n trovato.

$$\text{Prima della misura: } |\Psi\rangle \rightarrow \text{In seguito alla misura: } |\phi_n\rangle \quad (3.12)$$

dunque, se si dovesse effettuare una nuova misura sullo stesso sistema, la probabilità che si trovi il valore a_n è 1! Questo aiuta a comprendere l'incompatibilità fra due misure successive di osservabili \hat{A} e \hat{B} . La prima misurazione prepara il sistema in un autostato di \hat{A} .

Quando si procede alla misurazione di \hat{B} , se $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, le due grandezze non hanno autostati comuni e perciò la seconda misurazione porterà il sistema in un autostato di \hat{B} , eliminando completamente informazione sulla prima misura. In generale, per due osservabili tali che $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, vale:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{\|\langle\hat{C}\rangle_\Psi\|}{2} \quad (3.13)$$

si è indicato con $\langle\hat{C}\rangle_\Psi$ il valor medio dell'operatore \hat{C} sullo stato $|\Psi\rangle$, definito come segue:

$$\langle\hat{A}\rangle_\Psi = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \quad (3.14)$$

mentre si definisce *commutatore* di due operatori \hat{A} ed \hat{B} il seguente:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (3.15)$$

se esso è identicamente nullo, diremo che i due operatori *commutano*. Infatti per gli operatori \hat{Q} e \hat{P} vale la *regola di commutazione canonica*:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar \quad (3.16)$$

dalla quale discende il principio di indeterminazione (3.1).

3.1.1 Proprietà del commutatore

A questo punto sembra opportuno elencare le proprietà di cui il commutatore gode:

1. $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$
2. $[\hat{A}, \alpha\hat{B}_1 + \beta\hat{B}_2] = \alpha[\hat{A}, \hat{B}_1] + \beta[\hat{A}, \hat{B}_2]$
3. $[\hat{A}\hat{C}, \hat{B}] = \hat{A}[\hat{C}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$
4. $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] = 0$

$\forall \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in O(\mathbb{H}) ; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$O(\mathbb{H})$ è l'*algebra* degli operatori definiti sullo spazio di Hilbert \mathbb{H} . Un'algebra è una struttura di spazio vettoriale, con l'usuale proprietà:

$$\hat{A}, \hat{B} \in O(\mathbb{H}) ; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \implies (\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}) \in O(\mathbb{H}) \quad (3.17)$$

che gode di un prodotto interno:

$$\cdot : \hat{A} \in O(\mathbb{H}), \hat{B} \in O(\mathbb{H}) \longrightarrow \hat{A}\hat{B} \in O(\mathbb{H}) \quad (3.18)$$

che abbiamo precedentemente utilizzato e implicitamente definito.

Si noti come le proprietà di cui gode il commutatore siano uguali alle proprietà delle parentesi di Poisson.

3.2 Operatore densità

Quanto detto fino ad adesso riguarda i casi in lo stato del sistema è definito assegnando una singola funzione d'onda, è uno stato *puro*. Questo corrisponde alla preparazione del sistema con la massima informazione possibile. Possiamo considerare, però, il caso in cui siano presenti componenti di incertezza non più dovute soltanto al processo di misura quantistica del sistema, ma estrinseche ad esso, legate alla nostra impossibilità di conoscere sufficientemente lo stato del sistema. Questi sono gli stati misti o stati *miscela*. Si può introdurre un formalismo che permette di trattare in maniera unificata sia il caso di stati puri sia il caso di stati miscela.

Uno stato puro è rappresentato da un singolo vettore di stato $|\Psi\rangle$; come detto precedentemente, esso può essere espresso come sovrapposizione di autostati $|\phi_n\rangle$ di un generico osservabile \hat{A} . Dalla (3.11), sappiamo che la probabilità che una misura dell'osservabile \hat{A} fornisca il valore a_n relativo all'autostato $|\phi_n\rangle$ è:

$$P(a_n) = \langle \phi_n | \Psi \rangle \langle \Psi | \phi_n \rangle \quad (3.19)$$

e il valor medio di un osservabile \hat{B} è:

$$\langle \hat{B} \rangle = \langle \Psi | \hat{B} | \Psi \rangle \quad (3.20)$$

Se definiamo l'operatore di proiezione $P_n = |\phi_n\rangle \langle \phi_n|$, possiamo riscrivere la probabilità $P(a_n)$ e il valore medio $\langle \hat{B} \rangle$ in termini di P_n :

$$P(a_n) = \text{tr}(P_n |\Psi\rangle \langle \Psi|) \quad (3.21)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = \text{tr}(\hat{B} |\Psi\rangle \langle \Psi|) \quad (3.22)$$

dove $\text{tr}(\hat{A})$ è la *traccia* dell'operatore \hat{A} , definita in (4.5). Entrambe le relazioni coinvolgono l'operatore $|\Psi\rangle \langle \Psi|$ chiamato *operatore densità*:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| \quad (3.23)$$

Le relazioni precedenti possono essere scritte nella forma:

$$P(a_n) = \text{tr}(P_n \hat{\rho}) \quad (3.24)$$

$$\langle \hat{B} \rangle = \text{tr}(\hat{B}\hat{\rho}) \quad (3.25)$$

Per gli stati miscela supponiamo che il sistema si trovi in uno degli stati rappresentati dai vettori:

$$|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, \dots, |\Psi_j\rangle, \dots \quad (3.26)$$

con rispettive probabilità:

$$p_1, p_2, \dots, p_j, \dots \quad (3.27)$$

dove $\sum_i p_i = 1$. Lo stato $|\Psi_i\rangle$ si scrive sempre come sovrapposizione degli autostati di \hat{A} :

$$|\Psi_i\rangle = \sum c_n^i |\phi_n\rangle \quad (3.28)$$

in questo caso la probabilità che un'osservazione di \hat{A} fornisca il valore a_n è:

$$P(a_n) = \sum_i p_i |c_n^i|^2 = \sum_i p_i \text{tr}(P_n |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|) \quad (3.29)$$

mentre il valor medio di un osservabile \hat{B} :

$$\langle \hat{B} \rangle = \sum_i p_i \langle \Psi_i | \hat{B} | \Psi_i \rangle = \sum_i p_i \text{tr}(\hat{B} |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|) \quad (3.30)$$

Si conclude che anche nel caso di stati miscela, sebbene non possiamo caratterizzare il sistema tramite un vettore $|\Psi\rangle$, possiamo introdurre un operatore densità in termini del quale caratterizzare completamente il sistema:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (3.31)$$

con questa definizione ritroviamo le equazioni (3.24) ed (3.25).

3.2.1 Proprietà dell'operatore densità

L'operatore densità gode di alcune proprietà generali:

- $\hat{\rho}$ è autoaggiunto;
- $\hat{\rho}$ ha tutti autovalori positivi;
- $\text{tr}(\hat{\rho}) = 1$
- $\hat{\rho}^2 \leq 1$

Nel prossimo paragrafo studieremo l'evoluzione temporale degli operatori densità, introducendo un analogo dell'equazione di Liouville classica (2.6).

3.3 Evoluzione temporale

Fino ad ora disponiamo di un vettore $|\Psi\rangle$ che descrive lo stato del sistema e di operatori autoaggiunti che agiscono sullo spazio di Hilbert \hat{A} , che rappresentano gli osservabili. Resta da studiare come ricavare l'evoluzione temporale del suddetto sistema: come la funzione d'onda evolva nel tempo e come evolvano nel tempo probabilità di misura di osservabili e relativi valori medi. Esistono diversi tipi di descrizione, tutti equivalenti. Qui verranno presi in esame i due formalismi più importanti: quello di *Schrödinger* e quello di *Heisenberg*.

3.3.1 Descrizione di Schrödinger

L'evoluzione temporale della funzione d'onda $|\Psi(t)\rangle$ è governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle \quad (3.32)$$

in cui abbiamo indicato con \hat{H} l'operatore corrispondente all'*hamiltoniana* che descrive il sistema, introdotta in (2.5). L'equazione è lineare, dunque se $|\Psi(t_0)\rangle$ è la funzione d'onda del sistema ad un istante generico t_0 , esisterà un operatore lineare agente su \mathbb{H} , tale che:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(t_0)\rangle \quad (3.33)$$

dove $\hat{U}(t)$ sarà chiamato *operatore d'evoluzione temporale*. Sostituendo (3.33) nella (3.32):

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) |\Psi(t_0)\rangle = \hat{H} \hat{U}(t) |\Psi(t_0)\rangle \quad (3.34)$$

e, per l'arbitrarietà del ket $|\Psi(t_0)\rangle$, otteniamo un'*equazione operatoriale*:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H} \hat{U}(t) \quad (3.35)$$

è un'equazione del primo ordine per l'operatore $\hat{U}(t)$, a cui associamo la condizione iniziale:

$$\hat{U}(t_0) = \mathbb{1} \quad (3.36)$$

se l'operatore \hat{H} è indipendente dal tempo:

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} \quad (3.37)$$

Ciò che interessa, come abbiamo sottolineato, è l'evoluzione temporale del valore medio dell'osservabile, che si può ottenere facendo dipendere dal tempo la funzione di stato e tenendo fisso l'osservabile:

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle \quad (3.38)$$

3.3.2 Descrizione di Heisenberg

Nella descrizione di Heisenberg si lavora al contrario: si mantiene fisso lo stato e si fa dipendere dal tempo l'operatore. Infatti, da (3.38):

$$\langle \hat{A} \rangle_t = \langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \langle \Psi(t_0) \hat{U}(t) | \hat{A} | \hat{U}(t) \Psi(t_0) \rangle = \langle \Psi(t_0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) | \Psi(t_0) \rangle \quad (3.39)$$

da qui concludiamo che è completamente equivalente calcolare l'evoluzione del valor medio dell'osservabile \hat{A} , utilizzando la funzione d'onda $|\Psi(t_0)\rangle$ e l'operatore:

$$\hat{A}_t = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \quad (3.40)$$

che non è altro che l'evoluzione temporale dell'operatore $\hat{A}_{t_0} = \hat{U}^\dagger(t_0) \hat{A} \hat{U}(t_0) = \hat{A}$. Calcoliamo la derivata dell'operatore \hat{A}_t , utilizzando l'equazione (3.35):

$$\frac{d}{dt} \hat{A}_t = \frac{d}{dt} (\hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t)) = -\frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger(t) \hat{H} \hat{A} \hat{U}(t) + \frac{1}{i\hbar} \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{H} \hat{U}(t) + \frac{\partial \hat{A}_t}{\partial t} \quad (3.41)$$

Dal momento che $\hat{U}(t)$ è una funzione di \hat{H} (3.37) commuta con esso e in accordo con la definizione (3.40), otteniamo:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_t = [\hat{A}_t, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}_t}{\partial t} \quad (3.42)$$

conosciuta come l'*equazione di Heisenberg*. Si noti la forte analogia fra questa e l'equazione d'evoluzione di un osservabile classico (2.9).

3.3.3 Evoluzione temporale degli operatori densità

Il formalismo dell'operatore densità ha molto in comune con il formalismo classico della funzione densità di probabilità definita nei paragrafi precedenti. Entrambi descrivono stati miscelati. Si è visto che l'evoluzione temporale di $\rho_t(q, p)$ in meccanica classica è descritta dall'equazione di Liouville (2.6). Per studiare l'evoluzione temporale dell'operatore densità, partiremo dall'equazione di Schrödinger (3.32) e deriveremo un'equazione di evoluzione molto simile alla (2.6).

Consideriamo il *bra* dell'equazione (3.32):

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \Psi(t) | = \langle \Psi(t) | \hat{H} \quad (3.43)$$

si tenga a mente l'autoaggiuntezza di \hat{H} . Moltiplicando entrambi i membri della (3.32) per il bra $\langle \Psi |$ ed entrambi i membri della (3.43) per il ket $|\Psi\rangle$ e

sommando le due equazioni risultanti, si ottiene:⁵

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = (\hat{H} |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| - |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \hat{H}) = -[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (3.44)$$

Quindi l'evoluzione temporale dell'operatore densità è:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = -[\hat{\rho}, \hat{H}] \quad (3.45)$$

Chiamata *equazione di Liouville quantistica*. Si noti che a patto di *sostituire* il commutatore con le parentesi Poisson è del tutto analoga alla (2.6). Quanto ricavato per stati puri, vale anche per stati miscela.

⁵L'operazione di prodotto alla quale si fa riferimento non è quella scalare, ma il prodotto tensore.

4 Dalla meccanica classica alla meccanica quantistica

L'obbiettivo del presente lavoro è quello di costruire un formalismo capace di destreggiarsi fra le due teorie, i cui elementi essenziali sono stati precedentemente affrontati. Si è vista la forte analogia che si instaura tra il formalismo di Liouville classico e l'operatore densità quantistico. A tal proposito sarebbe molto vantaggioso disporre di un metodo rigoroso per confrontare previsioni e risultati ottenuti utilizzando rispettivamente probabilità classica e probabilità quantistica, mettendo in luce analogie e differenze dovute all'indeterminazione quantistica. Nel presente capitolo, infatti, verrà affrontata nei dettagli la quantizzazione di una gaussiana, interpretata classicamente come una densità di probabilità e quantisticamente come un operatore densità. Si mostrerà in questo esempio quanto i due formalismi si assomiglino e quanto, al contrario, divergano. Matematicamente, è opportuno costruire un isomorfismo fra sottoinsiemi di $F(\mathbb{S})$ e di $O(\mathbb{H})$, in modo da poter lavorare su una struttura e riportare i risultati nell'altra. Si capisce bene che affinché l'isomorfismo sia ben posto, si necessita di un prodotto sullo spazio delle fasi che sia non commutativo, in analogia con il prodotto fra operatori.

Il primo passo da compiere in questa direzione è quello di ottenere un metodo rigoroso per associare ad una funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in F(\mathbb{S})$ un operatore $\hat{A} = \hat{A}(\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{P}})$.⁶

Quando ci si trova davanti alla quantizzazione di un sistema fisico il primo problema è sapere quali operatori autoaggiunti associare ad osservabili classici. Mediante il *principio di corrispondenza*, riusciamo ad associare:

$$q \rightarrow \hat{Q} \quad p \rightarrow \hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q} \quad (4.1)$$

mentre andiamo incontro a seri problemi di ordinamento non appena incontriamo combinazioni lineari di prodotti misti $q^m p^n$, come ad esempio:

$$pq \rightarrow \hat{Q}\hat{P} \quad \text{oppure} \quad pq \rightarrow \hat{P}\hat{Q} \quad (4.2)$$

Come anticipato, queste difficoltà derivano dall'incompatibilità di fondo fra un prodotto commutativo fra funzioni $F(\mathbb{S})$ e non commutativo fra operatori $O(\mathbb{H})$. Possiamo, però, aggirare il problema ricorrendo ad un ordinamento *simmetrico*:

$$pq \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}) \quad (4.3)$$

⁶Per semplicità, da questo momento in poi ci riferiremo a particelle *unidimensionali*.

Questo tipo di ordinamento, infatti, è molto vantaggioso. Di contro, però, si capisce che questa corrispondenza è non banale se generalizzata a funzioni più complicate. Necessitiamo perciò di un criterio non ambiguo che associ ad ogni $f(q, p)$ un operatore nel modo giusto.

4.1 Mappe di quantizzazione

Sia $F(\mathbb{S})$ lo spazio vettoriale delle funzioni definite sulla varietà \mathbb{S} dello spazio delle fasi ed $O(\mathbb{H})$ l'algebra degli operatori definiti sullo spazio di Hilbert \mathbb{H} ; sia Ω l'applicazione :

$$\Omega : F(\mathbb{S}) \longrightarrow O(\mathbb{H}) \quad (4.4)$$

che associ funzioni dello spazio delle fasi ad operatori su spazio di Hilbert. Richiediamo che questa abbia le seguenti proprietà:

1. sia invertibile;
2. sia lineare: $\Omega(\alpha f + \beta g) = \alpha \Omega(f) + \beta \Omega(g)$;
3. $\Omega(1) = \mathbb{1}$
4. che faccia corrispondere ad ogni funzione a valori reali un operatore simmetrico.

Per cominciare, dobbiamo essere capaci di poter trarre da un operatore un numero e di conseguenza ricostruire una funzione; per meglio dire, non risulta immediato associare ad un operatore una funzione sullo spazio delle fasi, ma questo passaggio è necessario.

Definiamo prima di tutto la *traccia di un operatore*, come la serie:

$$tr \hat{A} = \sum_n^{\infty} \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle \quad (4.5)$$

Dalla definizione è subito chiaro che non è un privilegio per tutti gli operatori avere una traccia ben definita, in quanto la serie deve convergere. Si dicono *operatori di classe traccia* quelli per cui:

$$\sum_n^{\infty} \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle \leq \infty \quad (4.6)$$

Di seguito enunciamo senza dimostrare alcune proprietà della traccia, precedentemente definita:

- è lineare:

$$tr(\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}) = \alpha tr(\hat{A}) + \beta tr(\hat{B}) \quad (4.7)$$

- soddisfa la proprietà di ciclicità:

$$tr(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = tr(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = tr(\hat{B}\hat{C}\hat{A}) \quad (4.8)$$

- soddisfa una proprietà relativa al calcolo della traccia dell'aggiunto:

$$tr(\hat{A}^*) = (tr\hat{A})^* \quad (4.9)$$

- se \hat{A} è di classe traccia e \hat{B} è un operatore limitato allora: $\hat{A}\hat{B}$ è di classe traccia.

Dalla definizione di traccia possiamo definire un prodotto scalare fra operatori, nel modo che segue:

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = tr(\hat{A}\hat{B}) \quad (4.10)$$

Infatti attraverso le proprietà di cui gode la traccia, riusciamo a ritrovare tutte le proprietà che caratterizzano un prodotto scalare. Come ogni prodotto scalare, questo si può utilizzare per esprimere una norma:

$$\|\hat{A}\|^2 = tr(\hat{A}^*\hat{A}) \quad (4.11)$$

naturalmente non tutti gli operatori godono di una norma ben definita; gli operatori di *Hilbert-Schmidt* sono quelli per cui:

$$\|\hat{A}\|^2 < \infty \quad (4.12)$$

Il risultato matematico decisivo è tuttavia il seguente: è noto dall'analisi funzionale che il prodotto di due operatori di Hilbert-Schmidt è un operatore di classe traccia. Dunque, introducendo un operatore ad un parametro $U(x)$, possiamo definire la funzione associata ad un operatore \hat{A} nel seguente modo:

$$f_{\hat{A}}(x) = tr(\hat{A}\hat{U}(x)) \quad (4.13)$$

dove l'operatore $\hat{U}(x)$ ha un ruolo centrale nella corrispondenza fra funzioni ed operatori ed è chiamato *dequantizer*. L'applicazione inversa, vale a dire quella che associa ad una funzione un operatore, è costruita a partire da un operatore (o meglio, gruppo di operatori) $\hat{D}(x)$ chiamato *quantizer*; in questo modo:

$$\hat{A} = \int dx f_{\hat{A}}(x)\hat{D}(x) \quad (4.14)$$

Affinché le due relazioni siano l'una l'inverso dell'altra:

$$\hat{A} = \int dx f_{\hat{A}}(x) \hat{D}(x) \implies \hat{A} \hat{U}(x') = \int dx f_{\hat{A}}(x) \hat{D}(x) \hat{U}(x') \implies \quad (4.15)$$

$$tr(\hat{A} \hat{U}(x')) = \int dx f_{\hat{A}}(x) tr(\hat{D}(x) \hat{U}(x')) \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

Dunque, deve risultare:

$$tr(\hat{D}(x) \hat{U}(x')) = \delta(x' - x) \quad (4.18)$$

Dunque abbiamo trovato le condizioni che devono soddisfare i due operatori protagonisti della quantizzazione, per ottenere una corretta applicazione fra spazio delle fasi e spazio di Hilbert.

4.2 Mappa di Weyl

Nel paragrafo precedente abbiamo ricavato le condizioni necessarie per costruire un'applicazione utile per i nostri scopi. Di contro, non seguiremo quanto sviluppato precedentemente, ma cercheremo di ricavare la *mappa di Weyl* in maniera euristica. Scriveremo cioè l'espressione in modo naturale e quasi spontaneo. La mappa di Weyl è quella che definisce in modo rigoroso il processo di *simmetrizzazione*. La geniale idea di Weyl è stata quella di utilizzare una sorta di decomposizione pesata della funzione per ricostruire la struttura dell'operatore associato.

Se l'ordinamento prescelto è quello simmetrico, si capisce subito che l'operatore da associare alla funzione $f(q, p) = (\alpha q + \beta p)^n$ è proprio:

$$\hat{A}_f = (\alpha \hat{Q} + \beta \hat{P})^n \quad (4.19)$$

Allora dal momento che:

$$e^{\alpha q + \beta p} = \sum_n \frac{(\alpha q + \beta p)^n}{n!} \quad (4.20)$$

è ovvio:

$$e^{\alpha q + \beta p} \rightarrow e^{\alpha \hat{Q} + \beta \hat{P}} \quad (4.21)$$

Con ciò si è ottenuta una semplice mappa tra esponenziali. Consideriamo adesso una funzione $f(q, p) \in F(\mathbb{S})$ ed espandiamola in serie di Fourier:

$$f(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi q + \eta p)} \quad (4.22)$$

applichiamo la mappa di Weyl Ω :

$$\Omega(f(q, p)) = \Omega\left(\frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi q + \eta p)}\right) \quad (4.23)$$

Imponendo che sia lineare:

$$\Omega(f(q, p)) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) \Omega\left(e^{-i(\xi q + \eta p)}\right) \quad (4.24)$$

Imponendo che operi in modo simmetrico da (4.21):

$$\Omega(f(q, p)) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi \hat{Q} + \eta \hat{P})}$$

la precedente è la forma finale della mappa di Weyl. L'inversa che si scrive per completezza e della quale non si fornirà una dimostrazione è la *mappa di Wigner*:

$$\Omega^{-1}(\hat{A}) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi \langle q + \frac{1}{2}\xi | \hat{A} | q - \frac{1}{2}\xi \rangle e^{-i\frac{\xi p}{\hbar}}$$

Dunque, per la mappa di Weyl, il *quantizer* $\hat{D}(\xi, \eta)$ e il *dequantizer* $\hat{U}(\xi, \eta)$:⁷

$$\hat{D}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp e^{-i[\xi(\hat{Q}-q) + \eta(\hat{P}-p)]} \quad (4.25)$$

$$\hat{U}(\xi, \eta) = \hat{D}(\xi, \eta) \quad (4.26)$$

In particolare, la mappa di Weyl soddisfa le seguenti:

1. se f è una funzione a valori reali, $\Omega(f)$ è autoaggiunto;
2. se f è schwartziana, $\Omega(f)$ è di classe traccia;
3. in generale $\Omega(f)$ sarà un operatore non limitato, densamente definito;

⁷La (4.26) e la (4.18) per \hat{D} e \hat{U} di Weyl non verranno dimostrate.

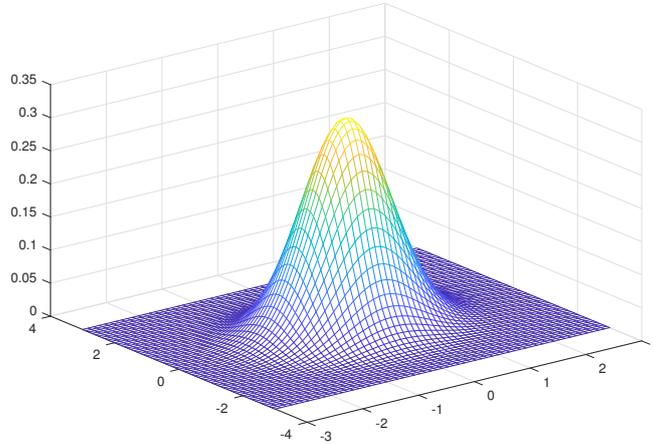


Figura 1: Gaussiana normalizzata: $\lambda = 1$

5 Confronto fra densità di probabilità: quantizzazione di stati gaussiani

Questo capitolo costituisce il centro del lavoro, in quanto si perviene sulla scorta dei punti affrontati in precedenza a un diretto confronto fra stati classici e quantistici. Si opererà tale confronto prendendo uno stato classico, una gaussiana centrata nell'origine dello spazio delle fasi, quantizzandolo e in questo modo rendendolo quantistico. Il processo di quantizzazione verrà attuato tramite la mappa di Weyl, i cui punti essenziali, utili al nostro scopo, sono stati trattati nel capitolo 4. Si vedrà che non è sempre possibile stabilire una corrispondenza fra stati classici e quantistici, ma solo in taluni casi esposti in conclusione. Questa operazione si scoprirà essere molto interessante ed originale.

Prendiamo la funzione nello spazio delle fasi:

$$f(q, p) = \frac{\lambda}{\pi} e^{-\lambda(q^2+p^2)} \quad (5.1)$$

una gaussiana normalizzata, la cui *compressione* è governata dal coefficiente λ . Classicamente tale funzione si può interpretare come la densità di probabilità di trovare la particella centrata nell'origine dello spazio delle fasi. Tutto il conto che segue si lavorerà in *coordinate naturali* in cui $\hbar = 1$. Possiamo chiederci quale relazione intercorre tra la densità di probabilità classica e quella quantistica, associandole un operatore densità. In altre parole,

trasformeremo la particella classica in una quantistica andandone a vedere il comportamento.

Possiamo eseguire quest'operazione tramite la mappa di Weyl:

$$\Omega(f) = \int d\xi d\eta \hat{D}(\xi, \eta) f(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\eta d\xi \int dq dp f(q, p) e^{-i[\xi(\hat{Q}-q) - \eta(\hat{P}-p)]} \quad (5.2)$$

Si comincia operando la trasformata di Fourier della funzione $f(q, p)$ nelle variabili (ξ, η) :

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int dq dp f(q, p) e^{i\xi q + i\eta p} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{4\lambda}} \quad (5.3)$$

Dove si è utilizzata la nota formula per il calcolo della trasformata di Fourier di una Gaussiana:

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{2a} e^{-\frac{k^2}{4a}} \quad (5.4)$$

A questo punto, si deve operare l'antitrasformata della $\tilde{f}(\xi, \eta)$, ma non in senso proprio, in quanto le nuove "variabili" sono due operatori: posizione \hat{Q} e momento \hat{P} ; dunque nel fare il conto non si deve assolutamente trascurare il fatto che il prodotto dei suddetti non è commutativo. A tal proposito si ha bisogno di due formule:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]} \quad \text{Formula di Baker-Campbell-Hausdorff} \quad (5.5)$$

Se \hat{A} e \hat{B} sono due operatori sullo spazio di Hilbert H , il cui commutatore è un numero:⁸

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \quad (5.6)$$

Se \hat{C} è un altro operatore agente sullo spazio.

Dunque, dal momento in cui non possiamo eseguire il conto in modo banale, dato che nell'integrale sono presenti matrici, quello che si potrebbe fare è diagonalizzarle e successivamente eseguire l'integrale. Avendo a che fare con matrici di dimensione infinita, quest'operazione non è immediata e si pensa di procedere come segue:

$$\Omega(f) = \int d\eta d\xi \tilde{f}(\xi, \eta) e^{-i\xi\hat{Q} - i\eta\hat{P}} \quad (5.7)$$

⁸In questo caso è verificato, si veda (3.16).

Scriviamo la matrice associata all'operatore $\Omega(f)$ nella base in cui $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ è diagonale:⁹

$$\langle m | \Omega(f) | n \rangle = \int d\xi d\eta \tilde{f} \langle m | e^{-i(\xi \hat{Q} + \eta \hat{P})} | n \rangle \quad (5.9)$$

Ora, concentriamoci sul prodotto scalare dentro l'integrale; sostituendo:

$$\hat{Q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^+}{\sqrt{2}} \quad \hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{\sqrt{2}i} \quad (5.10)$$

allora:

$$e^{-i(\xi \hat{Q} + \eta \hat{P})} = e^{-\frac{\hat{a}}{\sqrt{2}}(\eta + i\xi) - \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{2}}(-\eta + i\xi)} = e^{\hat{a}^+ z^* - \hat{a} z} \quad (5.11)$$

Dove si è definito: $z = \frac{\eta + i\xi}{\sqrt{2}}$. Ora, utilizzando la regola di Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^{\hat{a}^+ z^* - \hat{a} z} = e^{\hat{a}^+ z^*} e^{-\hat{a} z} e^{\frac{1}{2}[\hat{a}^+ z^*, \hat{a} z]} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{\hat{a}^+ z^*} e^{-\hat{a} z} \quad (5.12)$$

Ritornando al prodotto scalare, sotto il segno di integrale:

$$\langle m | e^{-i(\xi \hat{Q} + \eta \hat{P})} | n \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \langle m | e^{\hat{a}^+ z^*} e^{-\hat{a} z} | n \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \left[\langle m | \left(e^{\hat{a}^+ z^*} \right)^+ \right] \left[e^{-\hat{a} z} | n \rangle \right] \quad (5.13)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \left[\langle m | e^{\hat{a} z} \right] \left[e^{-\hat{a} z} | n \rangle \right] \quad (5.14)$$

Infatti:

$$\left(e^{\hat{a}^+ z^*} \right)^+ = \left(\sum_n \frac{(\hat{a}^+ z^*)^n}{n!} \right)^+ = \sum_n \frac{(\hat{a} z)^n}{n!} \quad (5.15)$$

Dal momento che abbiamo diviso il prodotto scalare, possiamo calcolare separatamente i due *ket*. Con un semplice conto, si perviene alle seguenti due espressioni:

$$e^{\hat{a} z} | m \rangle = \sum_{i=0}^m \frac{z^i}{i!} \sqrt{\frac{m!}{(m-i)!}} | m - i \rangle \quad (5.16)$$

$$e^{-\hat{a} z} | n \rangle = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{z^j}{j!} \sqrt{\frac{n!}{(n-j)!}} | n - j \rangle \quad (5.17)$$

⁹Dove \hat{a} e \hat{a}^+ sono, rispettivamente, gli operatori di distruzione e creazione, definiti come segue:

$$a = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad (5.8)$$

che soddisfano la regola di commutazione: $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, in coordinate adimensionali.

Operandone il prodotto scalare:

$$\langle m e^{\hat{a}z} | e^{-\hat{a}z} n \rangle = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{z^{*i}}{i!} \frac{z^j}{j!} (-1)^j \sqrt{\frac{n!m!}{(m-i)!(n-j)!}} \delta_{m-i}^{n-j} \quad (5.18)$$

Per semplificare l'espressione, poniamo $n = m + k$ con $k \in \mathbb{N}$ e $s = j - k$; così guardando la δ_{m-i}^{m-s} , sopravviveranno solo i termini con $s = i$:

$$\sqrt{m!(m+k)!} (-1)^k \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \cdot |z|^{2i} \cdot z^k \quad (5.19)$$

A questo punto possiamo pensare di calcolare gli elementi di matrice dell'operatore $\Omega(f)$ nella base *naturale*:

$$\langle m | \Omega(f) | m+k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\xi d\eta e^{-\frac{1}{2\lambda}|z|^2} e^{-\frac{1}{2}|z|^2} [\langle m | e^{\hat{a}z}] [e^{-\hat{a}z} | m+k \rangle] \quad (5.20)$$

Dunque:

$$\langle m | \Omega(f) | m+k \rangle = \frac{1}{2\pi} \sqrt{m!(m+k)!} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(m-i)!(i+k)!} \int d\xi d\eta e^{-\alpha|z|^2} |z|^{2i} \cdot z^k = \quad (5.21)$$

Dove si è definito $\alpha = \frac{1+\lambda}{2\lambda}$. Ricordando la definizione di $z = \frac{\eta+i\xi}{\sqrt{2}}$:

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{m!(m+k)!} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{2^{-i+\frac{k}{2}}}{(m-i)!(i+k)!} \int d\xi d\eta e^{-\alpha \frac{\xi^2+\eta^2}{2}} (\xi^2+\eta^2)^i (\eta+i\xi)^k \quad (5.22)$$

per risolvere in un colpo l'integrale, operiamo il passaggio alle coordinate polari:

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{m!(m+k)!} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{2^{-i+\frac{k}{2}}}{(m-i)!(i+k)!} \int_0^\infty d\rho e^{-\alpha \frac{\rho^2}{2}} \rho^{2(i+\frac{k}{2})+1} \int_0^{2\pi} d\theta (\cos(\theta)+i \sin(\theta))^k \quad (5.23)$$

Eseguendo l'integrale in θ :

$$\int_0^{2\pi} d\theta (\cos(\theta)+i \sin(\theta))^k = \frac{2 \sin(\pi k)}{k} = 2\pi \delta_0^k \quad (5.24)$$

Da qui si deduce che tutti gli elementi *off diagonal* sono nulli, e di conseguenza l'operatore associato ad f , in questa base, è diagonale!¹⁰

$$\langle m|\Omega(f)|n\rangle = 0 \quad \forall n \neq m \quad (5.26)$$

Adesso non resta che calcolare i termini diagonali, ponendo $k = 0$:

$$\langle m|\Omega(f)|m\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \binom{m}{i} 2^{-i} \cdot 2\pi \int_0^\infty d\rho e^{-\alpha \frac{\rho^2}{2}} \rho^{2i+1} \quad (5.27)$$

A questo punto il gioco è fatto e con un semplice ragionamento per induzione si riconosce il risultato dell'integrale:

$$\int_0^\infty d\rho e^{-\alpha \frac{\rho^2}{2}} \rho^{2i+1} = \frac{(2i)!!}{\alpha^{i+1}} \quad (5.28)$$

Utilizzando la nota identità per il doppio fattoriale $(2i)!! = 2^i \cdot i!$:

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} 2^{-i} \cdot 2\pi \cdot 2^i \cdot i! \cdot \frac{1}{\alpha^{i+1}} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{\alpha^i} \quad (5.29)$$

Arrivati a questo risultato, bisogna eseguire la somma, ma nel farlo per semplicità si discriminano due casi differenti per il valore di λ :

1. $\lambda = 1$

$$\langle n|\Omega(f)|_{\lambda=1}|n\rangle = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \quad (5.30)$$

Per eseguirla, bisogna ricorrere ad una nota *relazione di chiusura* del coefficiente binomiale:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \delta_0^n \quad (5.31)$$

Siamo giunti ad un importante risultato. I conti fatti ci stanno dicendo che l'operatore corrispondente ad $f|_{\lambda=1}$ è il proiettore sullo stato di vuoto:

$$\Omega(f)|_{\lambda=1} = |0\rangle \langle 0| \quad (5.32)$$

¹⁰Naturalmente vale che:

$$\langle m|\Omega(f)|m+k\rangle = \langle m+k|\Omega(f)|m\rangle \quad (5.25)$$

in quanto la mappa di Weyl associa funzioni a valori reali in operatori autoaggiunti, come visto nei capitoli precedenti.

in quanto la matrice rappresentativa nella base *naturale* è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

2. $\lambda \neq 1$

$$\langle n | \Omega(f|_{\lambda \neq 1}) | n \rangle = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{\alpha^i} = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^n \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^i \binom{n}{i} \quad (5.34)$$

Nella somma possiamo riconoscere lo sviluppo di Newton per un binomio; dunque, gli elementi di matrice:

$$\langle n | \Omega(f|_{\lambda \neq 1}) | n \rangle = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n \quad (5.35)$$

La matrice, quindi, che rappresenta l'operatore nella base naturale:

$$\begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{1+\lambda} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Sulla diagonale, naturalmente, sono presenti i suoi autovalori. Senza operare alcuna manipolazione riusciamo subito a dare una rappresentazione astratta all'operatore:¹¹

$$\Omega(f|_{\lambda \neq 1}) = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{\hat{a}^+ \hat{a}} \quad (5.38)$$

Si noti che nel limite in cui $\lambda \rightarrow 1$ ritroviamo il risultato precedentemente ottenuto. Se vogliamo, invece, dare una rappresentazione in termini dell'operatore *hamiltoniano* dell'oscillatore armonico:

$$\hat{H} = \frac{\hat{x}^2 + \hat{p}^2}{2} \quad (5.39)$$

¹¹Basta infatti ricordare che:

$$\hat{N} |n\rangle = n |n\rangle \quad \hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a} \quad (5.37)$$

basta ricordarsi che $\hat{H} = \hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{1}$. Aggiungendo e sottraendo all'esponente $\frac{1}{2}$, otteniamo:

$$\Omega(f|_{\lambda \neq 1}) = \sqrt{\frac{4\lambda^2}{1-\lambda^2}} \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^{\hat{H}} \quad (5.40)$$

In definitiva, riassumendo i risultati:

$$\Omega(f) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\lambda^2}{1-\lambda^2}} e^{-\log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \cdot \hat{H}} & 0 < \lambda < 1 \\ |0\rangle \langle 0| & \lambda = 1 \\ \sqrt{\frac{4\lambda^2}{1-\lambda^2}} (-1)^{\hat{H}-\frac{1}{2}} e^{-\log\left(\frac{1+\lambda}{\lambda-1}\right) \cdot \hat{H}} & \lambda > 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

Si distinguono i casi $\lambda > 1$ e $\lambda < 1$ per sottolineare come nel passaggio per $\lambda = 1$ gli autovalori dell'operatore da positivi, divengono a segni alterni. Il risultato ottenuto è in perfetto accordo con il lavoro di Dereziński e Karczmarczyk dove viene ottenuto con un metodo differente.

L'operatore $\Omega(f)$ deve corrispondere ad un operatore densità; nel paragrafo 3.2 sono elencate le proprietà che deve soddisfare. Prima di tutto dobbiamo dimostrare che:

$$\text{tr}[\Omega(f)] = 1 \quad (5.42)$$

Per $\lambda = 1$ è banalmente verificato; per $\lambda \neq 1$:

$$\text{tr}[\Omega(f)] = \sum_n \langle n|\Omega(f)|n\rangle = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \sum_n \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^n \quad (5.43)$$

$\forall \lambda$ il fattore elevato alla n è sempre minore di 1; dunque si riconosce la serie geometrica:

$$\text{tr}[\Omega(f)] = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)} \quad (5.44)$$

Da qui può verificarsi effettivamente che il risultato sia proprio 1!

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per commentare lo stato quantistico che abbiamo ottenuto e metterlo a confronto con quello classico (5.1).

Discriminiamo i valori di λ :

- $\lambda < 1$

Dal valore $\lambda = 1$ avvicinandoci verso lo zero la densità di probabilità classica si *schiaccia* sempre di più. Naturalmente corrisponde ad una

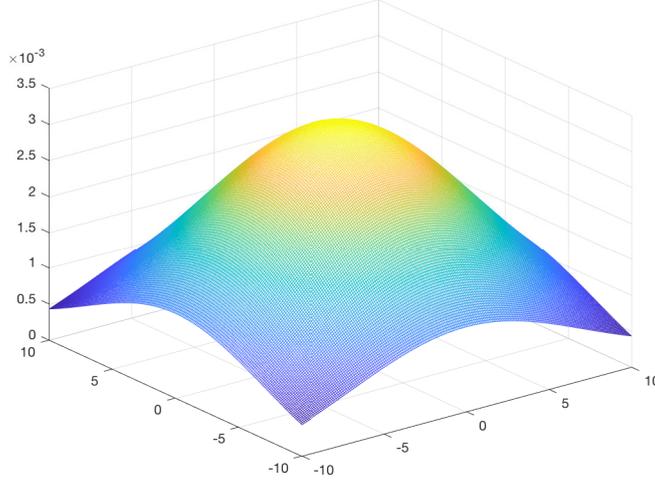


Figura 2: Gaussiana normalizzata: $\lambda = \frac{1}{100}$

particella meno localizzata nell'origine, come può vedersi anche dalla figura. Da (5.36) la densità di probabilità quantistica corrispondente è:

$$\langle \mathbf{x} | \Omega_{\lambda < 1}(f) | \mathbf{x} \rangle = \frac{2\lambda}{1 + \lambda} \sum_n \left(\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^n |\phi_n(x)|^2 \quad (5.45)$$

dove si è indicato con $\phi_n(x)$ le rappresentazioni coordinate degli stati $|n\rangle$ dell'oscillatore armonico quantistico:

$$\phi_n(x) = \langle \mathbf{x} | n \rangle = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{4}}} \mathcal{H}_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.46)$$

e con $\mathcal{H}_n(x)$ il *polinomio di Hermite* di ordine n . Si fa notare che la (5.45) rappresenta la densità di probabilità quantistica di trovare la particella nello spazio delle posizioni x . Per calcolare la densità di probabilità nello spazio dei momenti p :

$$\langle \mathbf{p} | \Omega_{\lambda < 1}(f) | \mathbf{p} \rangle \quad (5.47)$$

Dunque per questo dominio di valori di λ l'interpretazione è perfettamente funzionale.

- $\lambda = 1$

la densità di probabilità associata all'elettrone, ormai quantistico, è:

$$\langle \mathbf{x} | \Omega(f) | \mathbf{x} \rangle = |\phi_0(x)|^2 \quad (5.48)$$

coincide perfettamente con il modulo quadro $|\phi_0(x)|^2$ dell'autofunzione corrispondente allo stato di vuoto $|0\rangle$ espressa nello spazio coordinato; come è ben noto questa situazione corrisponde a quella di *minima indeterminazione*.

- $\lambda > 1$

In questo caso, come mostrato in (5.41) gli autovalori dell'operatore divengono negativi. Per la proprietà del paragrafo 3.2 l'operatore non può essere più interpretato come operatore densità. Non siamo in presenza di uno stato fisico. Possiamo avanzare delle ipotesi riguardo il motivo del comportamento singolare calcolando per la funzione $f(q, p)$ le deviazioni standard (classiche) Δq e Δp . Prima di procedere si ricordi che:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad x = q, p \quad (5.49)$$

Allora:

$$\Delta q \Delta p |_{\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \quad (5.50)$$

si vede subito che il prodotto $\Delta q \Delta p < \frac{1}{2}$ per $\lambda > 1$; sarebbe, dunque, violato il principio di indeterminazione di Heisenberg (3.1). L'operatore associato ad una gaussiana così compressa non potrà mai essere interpretato come operatore densità. Come già fatto presente $\lambda = 1$ corrisponde alla situazione di minima indeterminazione oltre la quale la meccanica quantistica è violata.

In ogni caso, malgrado manchi un'interpretazione probabilistica, possiamo studiare a quale operatore corrisponda il caso limite per cui la compressione è massima:

$$\lambda \rightarrow \infty \quad (5.51)$$

Otteniamo una $\delta(q, p)$.

Classicamente la probabilità di trovare la particella in un intorno dell'origine è diventata una certezza.¹² La particella si trova nell'origine. Andiamo a vedere, tramite Weyl, a quale operatore corrisponde questa *certezza classica*:

$$\mathcal{F}(\delta(q, p)) = \frac{1}{2\pi} \quad (5.52)$$

¹²Si veda paragrafo 2.1.

in trasformata otteniamo la funzione costante. Risolviamo, adesso, il famoso integrale:¹³

$$\langle n | \Omega(\delta(q, p)) | n \rangle = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} 2^{-i} \int_0^\infty d\rho e^{\frac{1}{4}\rho^2} \rho^{2i+1} \quad (5.53)$$

Calcolando l'integrale, si ottiene:

$$\langle n | \Omega(\delta(q, p)) | n \rangle = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} 2^{-i} \cdot 2^{2i+1} \cdot i! = \sum_{i=0}^n (-2)^i \binom{n}{i} = 2(-1)^n \quad (5.54)$$

Ottenuti gli elementi, la matrice rappresentativa:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

Abbiamo ottenuto l'operatore *l'operatore parità*:

$$\Omega(\delta(q, p)) = \frac{1}{\pi} (-1)^{\hat{a}^+ \hat{a}} \quad (5.56)$$

Malgrado la mancata interpretazione come operatore densità, tramite una regolarizzazione riusciamo a calcolarne la traccia:

$$tr[\Omega(\delta)] = 2 \sum_n (-1)^n \quad (5.57)$$

Poniamo $s = \sum_n (-1)^n$, abbiamo che:

$$s = 1 - s \implies s = \frac{1}{2} \quad (5.58)$$

Quindi:

$$tr[\Omega(\delta)] = 1 \quad (5.59)$$

Naturalmente questo risultato poteva ottenersi facendo il limite:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Omega_\lambda(f) \quad (5.60)$$

nonostante ciò ho ritenuto opportuno svolgerlo esplicitamente.

¹³Dal momento che la funzione identità è pari ed è espressa come il prodotto di due funzioni uguali nelle variabili ξ ed η , ci aspettiamo che l'operatore corrispondente sia diagonale nella base naturale.

Concludendo, la corrispondenza fra stato classico e quantistico non risulta possibile se la compressione della gaussiana è eccessiva; pertanto non siamo in presenza di alcuno stato quantistico. Si è cercato di rendere ragione di tale anomalia osservando il grado di localizzazione della particella descritta dallo stato gaussiano. Abbiamo concluso che tale grado è troppo alto: se corrispondesse ad uno stato quantistico sarebbe violato il principio di indeterminazione di Heisenberg.

6 Prodotto di Moyal

Una volta introdotta la mappa di Weyl, siamo autorizzati a lavorare esclusivamente con funzioni sullo spazio delle fasi. L'ultimo passo da compiere è quello di introdurre un prodotto che richiami tutte le proprietà del prodotto fra operatori. Questo nuovo prodotto fra funzioni deve risultare non commutativo, ma deve essere tale che:

$$\forall f, g \in F(S) \quad f \star g \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} fg \quad (6.1)$$

in modo da ritrovare completamente una dinamica classica per valori trascurabili di \hbar . Ora, è chiaro che:

$$f \star g = \Omega_W^{-1} \left(\Omega_W(f) \Omega_W(g) \right) \quad (6.2)$$

In questo modo si verrà a creare un isomorfismo tra due algebre non commutative $F_\star(S)$ (l'algebra delle funzioni su S dotata del prodotto \star) e $O(\mathbb{H})$. L'importanza di questo risultato è fondamentale, poiché un isomorfismo permette di trasferire i risultati della meccanica quantistica operatoriale sul nostro spazio delle fasi e viceversa, facendo in modo che alla fine non avremo bisogno più di $O(\mathbb{H})$ per trattare sistemi quantistici. La costruzione di questo si farà per *deformazione* del prodotto puntuale, in termini del parametro $i\hbar$, nel modo seguente:

$$f \star g = \sum_n (i\hbar)^n C_n(f, g) \quad (6.3)$$

Le proprietà che deve soddisfare sono:

- associatività, in quanto essa è rispettata nell'algebra $O(\mathbb{H})$
- $(f \star g)^* = g^* \star f^*$ in completa analogia con $(AB)^+ = B^+ A^+$
- $C_0 = fg$ in quanto $\sum_n (i\hbar)^n C_n(f, g) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} C_0$.

Inoltre, dal momento che il prodotto che stiamo costruendo *deve* essere non commutativo, possiamo definire in analogia con l'algebra $O(\mathbb{H})$:

$$[f, g]_\star = f \star g - g \star f \quad (6.4)$$

in questo modo, se tramite l'equazione di Heisenberg:¹⁴

$$\frac{d\hat{A}_t}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_t, \hat{H}_t] + \frac{\partial \hat{A}_t}{\partial t} \quad \forall \hat{A}_t \in O(\mathbb{H}) \quad (6.6)$$

riusciamo a ricavare l'evoluzione temporale di un osservabile \hat{A}_t sullo spazio $O(\mathbb{H})$, possiamo lavorare sullo spazio delle fasi dotato del prodotto \star con l'analoga equazione:

$$\frac{df_{\hat{A}}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[f_{\hat{A}}, H]_{\star} + \frac{\partial f_{\hat{A}}}{\partial t} \quad (6.7)$$

A tal proposito dall'equazione d'evoluzione di un osservabile classico (2.10):

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.8)$$

affinché l'algebra $F_{\star}(\mathbb{S})$ risulti una deformazione dell'usuale $F(\mathbb{S})$, dobbiamo imporre:

$$[f, g]_{\star} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} i\hbar \{f, g\} \quad (6.9)$$

Da questa banale considerazione ricaviamo:

$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\} \quad (6.10)$$

e quindi l'espressione di C_1 :

$$C_1(f, g) = \frac{1}{2}\{f, g\} \quad (6.11)$$

Gli altri coefficienti possono essere ricavati prendendo l'esponenziale di C_1 ed imponendo associatività e simmetria. In questo modo otteniamo il prodotto \star di Moyal, che possiamo riscrivere nella sua forma notevole:

$$f \star g = f e^{\frac{i\hbar}{2}\alpha^{ij}\overleftarrow{\partial}_i\overrightarrow{\partial}_j} g \quad (6.12)$$

Dove:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

¹⁴In quest'equazione è presente un pedice t sotto ogni operatore per ricordare la relazione fra operatori scritti nelle due rappresentazioni:

$$\hat{A}_t = \hat{U}^+(t)\hat{A}\hat{U}(t) \quad \text{dove} \quad \hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \quad (6.5)$$

Il prodotto così definito presenta tutte le proprietà che abbiamo richiesto; è importante riconoscere una proprietà di *non località* al prodotto \star , che lo rende adatto alla descrizione di una dinamica quantistica. Infatti nella formulazione (6.12) il prodotto coinvolge tutte le derivate successive delle funzioni f e g nel punto, specificandole completamente in tutto lo spazio. In altre parole, coinvolge la forma delle funzioni su tutto lo spazio contrariamente a quanto accade nel prodotto *puntuale* fg .

Riferimenti bibliografici

- [1] Dereziński Jan, Karczmarczyk Maciej, *Quantization of Gaussians* arXiv:1701.07297 (2017).
- [2] Esposito Giampiero, Marmo Giuseppe, Miele Gennaro, Sudarshan George, *Advanced concepts in quantum Mechanics* (Univ Press 2014).
- [3] Hörmander Lars, *Linear partial differential operators* (Springer-Verlag, 1963).
- [4] Landau Lev D., Lifshits Evgenij M., *Fisica teorica 3 - Meccanica quantistica: teoria non relativistica* (Univ. Press 2010).
- [5] Landau Lev D., Lifshits Evgenij M., *Fisica teorica 1 - Meccanica* (Univ. Press 2010).
- [6] Lizzi Fedele, Vitale Patrizia, *Matrix Bases for Star Products: a Review* arXiv:1403.0808v2 (2014).
- [7] Weyl Hermann , *The theory of groups and quantum mechanics* (Dover 1930).
- [8] Wigner Eugene P., .Phys. Rev. 40 (1932)749.