

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

**Modellizzazione di deformazioni
geometricamente non lineari con modelli di
evoluzione collettiva**

Relatori:

Prof. Rosa Luigi
Prof. Dell'Isola Francesco

Candidato:

Paolo D'Avanzo
Matricola N85/507

A.A. 2016/2017

Indice

Introduzione	2
1 Teoria dell'elasticità non lineare	5
1.1 Equazioni classiche del moto	5
1.1.1 Cinematica della deformazione	6
1.1.2 Meccanica	8
1.1.3 Equazioni costitutive	10
1.1.4 Il Principio dei Lavori Virtuali	12
1.2 Teoria dei continui generalizzata	15
1.2.1 Azioni di contatto generalizzate	15
1.2.2 Equazione di Eulero - Lagrange	16
2 Algoritmo di controllo dello swarm	20
2.1 Teoria dei grafi	20
2.2 Il modello degli swarm	21
2.2.1 Algoritmo basato sul calcolo del baricentro	22
2.2.2 Algoritmo basato sulla computazione dell'asse di un segmento (I)	26
2.2.3 Algoritmo basato sulla computazione dell'asse di un segmento (II)	30
3 Conclusioni	36
Ringraziamenti	36
Bibliografia	37

Introduzione

Negli ultimi anni la comunità scientifica si è molto adoperata per sviluppare una teoria soddisfacente, insieme alle conseguenti applicazioni tecnologiche, dei sistemi complessi, in particolare di quei sistemi detti *multi-agent system*, concentrandosi nel campo degli swarm di robot e nella loro descrizione matematica ([1]). Un importante esempio, ampiamente studiato, è dato dalle colonie di formiche le quali, attraverso i segnali di feromoni lasciati da ogni individuo della colonia lungo il percorso verso una fonte di cibo, riescono ad ottimizzare la traiettoria e quindi il tempo per raggiungere il cibo ([2]). In natura si possono trovare tanti altri esempi del genere come api, stormi di uccelli o banchi di pesci ([3]). Basandosi su questi modelli di comportamento di alcuni animali, è stata sviluppata una nuova branca della robotica con l'obiettivo di eseguire compiti complessi seguendo i modelli prima menzionati. In questo lavoro si pone l'attenzione sul controllo del moto di un insieme di particelle materiali di seguito detto "*swarm*". Gli algoritmi attualmente diffusi in letteratura possono essere classificati in tre categorie ([4]):

- algoritmi basati sulla posizione, in cui ogni elemento dello swarm conosce la propria posizione in un sistema di coordinate assoluto e globale;
- algoritmi basati sugli spostamenti, in cui ogni elemento si muove secondo lo spostamento degli elementi vicini;

- algoritmi basati sulla distanza, in cui ogni elemento conosce la distanza tra esso e gli elementi vicini.

È da notare che dietro questi diversi approcci non c'è solo un modello matematico diverso, ma è insita una diversa complessità nella realizzazione del sistema.

L'algoritmo che verrà proposto in seguito si basa sulla posizione per controllare il moto dello swarm nel suo complesso. In realtà, lo scopo ultimo di questo elaborato è quello di mostrare come uno swarm di robot sia capace di modellizzare le deformazioni di un sistema continuo la cui descrizione mediante strumenti classici della fisica matematica porta ad equazioni molto complesse, le cui risoluzioni numeriche risultano essere molto costose dal punto di vista computazionale.

Verrà presa in considerazione la Teoria dei Continui generalizzati, utilizzata per descrivere alcuni corpi continui che non possono essere descritti in modo soddisfacente dalle ipotesi che caratterizzano i continui di Cauchy. Questi modelli nascono spesso dall'omogeneizzazione matematica di solidi con microstruttura e che porta in maniera naturale ai *continui di ordine superiore* ([5], [6], [7]). La principale differenza tra i continui di Cauchy e i *continui di ordine superiore* è data dal fatto che l'energia di deformazione di quest'ultimi dipende non solo dal campo degli spostamenti e dal suo gradiente primo ma anche dai gradienti di ordine superiore.

Questa tesi è organizzata in tre capitoli. Nel primo verranno presentati gli aspetti teorici di sistemi continui unidimensionali (corde) e alcuni aspetti salienti della Teoria dei Continui generalizzata; nel secondo verrà descritto l'algoritmo e i risultati numerici da esso ricavati. Infine, nell'ultimo capitolo si conclude spiegando brevemente i principali punti di forza di questo approccio e le difficoltà in cui ci si può imbattere.

Capitolo 1

Teoria dell'elasticità non lineare

In questo capitolo verranno presentati gli aspetti della teoria della meccanica del continuo che è alla base di questo elaborato. Si farà particolare riferimento al testo "Nonlinear problems of elasticity" di Stuart S. Antman ([8]). Lo scopo di questo capitolo è quello di dare una derivazione del sistema quasi-lineare di equazioni alle derivate parziali che governano il moto di corde perfettamente flessibili, che sia matematicamente precisa e concettualmente semplice.

1.1 Equazioni classiche del moto

Ora saranno derivate le equazioni che governano la gran parte dei moti che interessano le corde. Nel seguito per soluzione classica intenderemo una soluzione di classe C^m dove m è l'ordine massimo di derivazione che compare nelle equazioni differenziali.

1.1.1 Cinematica della deformazione

Sia $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ una base ortonormale per lo spazio Euclideo \mathbb{E}^3 . Una configurazione di una corda è definita come una curva in \mathbb{E}^3 . Una corda, invece, è definita come un insieme di elementi, chiamati *punti materiali*, che occupano i punti della curva in \mathbb{E}^3 e ha la proprietà meccanica di essere perfettamente flessibile. Sia $s \rightarrow s\mathbf{k}$, $s \in [0, L]$ la *configurazione di riferimento*, ovvero la corda di lunghezza L è posizionata lungo un segmento rettilineo nella direzione individuata dal versore \mathbf{k} . Ogni punto materiale della corda sarà individuato dalla sua coordinata s in questa configurazione di riferimento. Se il dominio di definizione della configurazione di riferimento è un intervallo chiuso, senza perdita di generalità, si può assumere che la coordinata s appartenga all'intervallo $[0, 1]$. Sia $\boldsymbol{\chi}(s, t)$ il vettore che individua la posizione del punto materiale s al tempo t il cui dominio è $[0, 1] \times [0, \infty)$. La funzione $\boldsymbol{\chi}(\cdot, t)$ definisce la configurazione della corda al tempo t . Inoltre si assumerà che tutte le funzioni di s e t , come $\boldsymbol{\chi}$, siano continue all'interno del loro dominio. Se indichiamo con $\boldsymbol{\chi}_s(s, t)$ il vettore tangente alla curva $\boldsymbol{\chi}(s, t)$, la lunghezza del tratto di curva compreso tra (s_1, s_2) , nella configurazione al tempo t è data dall'integrale:

$$\int_{s_1}^{s_2} |\boldsymbol{\chi}_s(s, t)| ds$$

Lo *stretch* $\nu(s, t)$ della corda in (s, t) è definito dalla relazione

$$\nu(s, t) := |\boldsymbol{\chi}_s(s, t)| \tag{1.1}$$

é il rapporto locale in s della deformata rispetto alla lunghezza di riferimento,

cioè il limite dell'integrale

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{|\boldsymbol{\chi}_s(s, t)|}{(s_1 - s_2)} ds$$

quando il segmento (s_1, s_2) si restringe intorno ad s .

Affinché il moto sia 'regolare' la funzione $\nu(s, t)$ deve essere tale che

$$\nu(s, t) > 0 \quad \forall (s, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$$

in particolare la corda risulterà *allungata* per $\nu(s, t) > 1$, e *compressa* per $\nu(s, t) < 1$.

Si consideri una situazione nella quale gli estremi della corda, $s = 0$ e $s = 1$, siano fissati nei punti $\mathbf{0}$ e $L\mathbf{k}$, le condizioni al bordo sono espresse dai seguenti limiti:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \boldsymbol{\chi}(s, t) = \mathbf{0} \quad \lim_{s \rightarrow 1} \boldsymbol{\chi}(s, t) = L\mathbf{k} \quad \text{per } t > 0 \quad (1.2)$$

il che implica che la funzione $\boldsymbol{\chi}(\cdot, t)$ è continua agli estremi del suo intervallo di definizione. Queste condizioni sono convenzionalmente riscritte nella forma

$$\boldsymbol{\chi}(0, t) = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\chi}(1, t) = L\mathbf{k}.$$

Si assuma ora che la corda sia rilasciata da una configurazione $\mathbf{r}(s)$ con un campo di velocità $\mathbf{v}(s)$ al tempo $t = 0$. Sia $\boldsymbol{\chi}_t(s, t)$ la derivata temporale del vettore $\boldsymbol{\chi}(s, t)$. Se si assume che $\boldsymbol{\chi}_t(s, \cdot)$ sia continua nell'intervallo $[0, \infty) \forall s \in [0, 1]$, le condizioni iniziali saranno date da

$$\boldsymbol{\chi}(s, 0) = \mathbf{r}(s) \quad \boldsymbol{\chi}_t(s, 0) = \mathbf{v}(s). \quad (1.3)$$

1.1.2 Meccanica

Si consideri il tratto di corda (a, b) con $0 < a < b < 1$. Le forze che agiscono su tale tratto (a, b) sono:

- una *forza di contatto* $\mathbf{n}^+(b, t)$ esercitata su (a, b) dal segmento $[b, 1]$;
- una *forza di contatto* $\mathbf{n}^-(a, t)$ esercitata su (a, b) dal segmento $[0, a]$;
- una *forza di linea* esterna esercitata su (a, b) che ha la forma:

$$\int_a^b \mathbf{f}(s, t) ds.$$

L'integrando $\mathbf{f}(s, t)$ è la *forza di linea per unità di lunghezza di riferimento* in s e t . Ad esempio può rappresentare la forza peso del segmento (a, b) considerato. In tal caso assume la forma:

$$\mathbf{f}(s, t) = -\rho(s)g\mathbf{e}$$

dove $\rho(s)$ è la densità di massa per unità di lunghezza in s nella configurazione di riferimento, g è l'accelerazione di gravità e \mathbf{e} è il versore diretto secondo la verticale. Ora, richiedendo che la risultante delle forze agenti sul segmento (a, s) al tempo t sia uguale alla derivata temporale del *momento lineare* del segmento considerato, si ottiene la forma integrale dell'*equazione del moto*

$$\mathbf{n}^+(s, t) - \mathbf{n}^-(a, t) + \int_a^s \mathbf{f}(\xi, t) d\xi = \frac{d}{dt} \int_a^s \rho(s)\boldsymbol{\chi}_t(\xi, t) d\xi = \int_a^s \rho(s)\boldsymbol{\chi}_{tt}(\xi, t) d\xi \quad (1.4)$$

La continuità di \mathbf{n}^+ implica che

$$\mathbf{n}^+(a, t) = \lim_{s \rightarrow a} \mathbf{n}^+(s, t)$$

Inoltre, essendo \mathbf{f} e χ_{tt} continue, nel limite $s \rightarrow a$ si ottiene

$$\mathbf{n}^+(a, t) = \mathbf{n}^-(a, t) \quad \forall a \in (0, 1)$$

e differenziando la (1.4) rispetto ad s si ottiene infine la *la forma classica delle equazioni del moto*:

$$\mathbf{n}_s(s, t) + \mathbf{f}(s, t) = \rho(s)\chi_{tt}(s, t) \quad s \in (0, 1), t > 0. \quad (1.5)$$

Passiamo ora dal bilancio del momento lineare al bilancio del momento angolare. La condizione di perfetta flessibilità garantisce che il principio del momento angolare sia ugualmente soddisfatto ed è matematicamente espressa dalla richiesta che la forza di contatto $\mathbf{n}(s, t)$ sia tangente alla curva $\chi(\cdot, t)$ in $\chi(s, t)$ per ogni s e t :

$$\chi_s(s, t) \times \mathbf{n}(s, t) = \mathbf{0} \quad \forall s, t. \quad (1.6)$$

Questa relazione deriva dalle equazioni che esprimono l'uguaglianza tra la coppia risultante applicata a un segmento (a, b) della corda e la derivata temporale del momento angolare dello stesso segmento (a, b) . Nel caso particolare in cui la corda non offre resistenza alla coppia applicata, non ha momento angolare e le suddette equazioni si riducono alla (1.6).

Integrando la (1.4) rispetto al tempo t in un intervallo $[0, \tau]$ e tenendo conto delle condizioni al bordo (1.3) si ottiene la relazione:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [\mathbf{n}^+(s, t) - \mathbf{n}^-(a, t)] dt + \int_0^\tau \int_a^s \mathbf{f}(\xi, t) d\xi dt = \\ = \int_a^s \rho(\xi) [\boldsymbol{\chi}_t(\xi, t) - v(\xi)] d\xi \quad (1.7) \end{aligned}$$

Il membro sinistro della (1.7) è l'impulso lineare delle forze \mathbf{n}^\pm e f , e il membro destro, invece, è la variazione del momento lineare del segmento materiale (a, b) nell'intervallo di tempo $(0, \tau)$ (Teorema dell'Impulso).

1.1.3 Equazioni costitutive

Ora è necessario descrivere come la forza di contatto \mathbf{n} è correlata al cambiamento di forma subita dalla corda in qualsiasi moto. A tal proposito, si introducono le cosiddette *equazioni costitutive* le quali descrivono come la corda reagisce alla forza di contatto \mathbf{n} . Dalla relazione (1.6) si deduce che i vettori $\boldsymbol{\chi}_s$ e \mathbf{n} sono paralleli, dunque esiste una funzione scalare $T(s, t)$ tale che:

$$\mathbf{n}(s, t) = T(s, t) \frac{\boldsymbol{\chi}_s(s, t)}{|\boldsymbol{\chi}_s(s, t)|}. \quad (1.8)$$

La funzione $T(s, t)$ è la *tensione* in (s, t) e la sua forma dipende dal materiale di cui è costituita la corda e dagli effetti di cui si vuole tenere conto. Dai primi esperimenti sul moto di un elastico si giunse alla conclusione che la tensione $T(s, t)$ dipende solo dallo stretch $\nu(s, t)$ in (s, t) e dal punto materiale s . In tal caso la corda si dice *elastica* ed esiste una funzione costitutiva $[0, \infty) \times [0, 1] \ni (\nu, s) \rightarrow \widehat{T}(\nu, s) \in \mathbb{R}$ tale che

$$T(s, t) = \widehat{T}(\nu(s, t), s). \quad (1.9)$$

Il moto di un elastico fissato agli estremi e che non sia soggetto ad una forza di linea tende ad arrestarsi in breve tempo anche se il moto avviene nel vuoto. La principale causa di questo effetto è data dagli attriti interni. Per tener conto di ciò bisogna assumere che la tensione $T(s, t)$ dipende dallo stretch $\nu(s, t)$, dalla derivata temporale dello stretch $\nu_t(s, t)$ e dal punto materiale s . In tal caso la corda si dice *viscoelastica* ed esiste una funzione costitutiva $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times [0, 1] \ni (\nu, \nu_t, s) \rightarrow \widehat{T}_1(\nu, \nu_t, s) \in \mathbb{R}$ tale che

$$T(s, t) = \widehat{T}_1(\nu(s, t), \nu_t(s, t), s). \quad (1.10)$$

Come è facilmente intuibile, non tutte le scelte delle funzioni costitutive sono fisicamente accettabili: ci si aspetta che una corda si allunga quando viene tirata e che l'attrito interno ne rallenti il moto. Per una corda elastica, affinché un incremento di tensione sia accompagnato da un incremento dello stretch, bisogna richiedere che la funzione $T(\nu, s)$ sia strettamente crescente, cioè:

$$[\widehat{T}(\nu_2, s) - \widehat{T}(\nu_1, s)][\nu_2 - \nu_1] > 0 \quad \text{se e solo se} \quad \nu_1 \neq \nu_2. \quad (1.11)$$

Invece, per una corda viscoelastica, affinché la funzione costitutiva $\widehat{T}_1(\nu(s, t), \nu_t(s, t), s)$ descriva il comportamento di un materiale con attriti interni, bisogna richiedere che sia strettamente crescente, cioè:

$$[\widehat{T}_1(\nu(s, t), \nu_t(s, t), s) - \widehat{T}_1(\nu(s, t), 0, s)]\nu_t > 0 \quad \text{per} \quad \nu_t \neq 0. \quad (1.12)$$

Una volta determinata la funzione costitutiva la si sostituisce nella (1.8) e l'espressione risultante va a sua volta sostituita nella (1.5). Si ottiene così un sistema quasi-lineare di equazioni alle derivate parziali per le componenti di χ .

1.1.4 Il Principio dei Lavori Virtuali

Il problema discusso nei paragrafi precedenti può essere affrontato con un approccio completamente differente chiamato Principio dei Lavori Virtuali. Si introduce una nuova classe di funzioni $\mathbf{y} \in C^1([0, 1] \times [0, \infty))$ tali che:

$$\mathbf{y}(0, t) = \mathbf{y}(1, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0, \quad \mathbf{y}(s, t) = \mathbf{0} \quad \text{per } t \text{ sufficientemente grande.} \quad (1.13)$$

Queste funzioni sono dette *spostamenti virtuali* (o *funzioni test*).

Moltiplicando scalarmente la (1.5) con queste funzioni test \mathbf{y} e integrando per parti l'espressione risultante si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^1 [\mathbf{n}_s(s, t) \cdot \mathbf{y}_s(s, t) + \mathbf{f}(s, t) \cdot \mathbf{y}(s, t)] ds dt = \\ = \int_0^\infty \int_0^1 \rho(s) [\chi_t(s, t) - \mathbf{v}(s)] \cdot \mathbf{y}_t(s, t) ds dt \end{aligned} \quad (1.14)$$

Questa equazione esprime il Principio dei Lavori Virtuali per ogni materiale

e, sotto le ipotesi di regolarità, si è mostrato che la (1.4) e le condizioni (1.3) implicano la (1.14).

Si può dimostrare che il Teorema dell'Impulso è equivalente alla versione generalizzata del Principio dei Lavori Virtuali definito nella relazione (1.14). È da notare che, affinché la (1.14) abbia senso, non è necessario richiedere che le ipotesi fatte su χ e \mathbf{n} di continuità e derivabilità siano soddisfatte, è sufficiente richiedere che χ_s e χ_t siano localmente integrabili nell'intervallo $[0, 1] \times [0, \infty)$, e che \mathbf{r} e \mathbf{v} siano integrabili in $[0, 1]$. Le condizioni al bordo (1.2) devono essere sostituite dalle seguenti:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \chi(s, t) dt = \mathbf{0}, \quad \lim_{s \rightarrow 1} \int_{t_1}^{t_2} [\chi(s, t) - L\mathbf{k}] dt = \mathbf{0} \quad \forall (t_1, t_2) \subset [0, \infty) \quad (1.15)$$

e le condizioni (1.3) devono essere sostituite dalle seguenti

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \rho(s) [\chi(s, t) - r(s)] ds = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^s \rho(s) [\chi_t(\xi, t) - v(\xi)] d\xi = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

Per maggiori dettagli si veda [8].

Sia ϕ una funzione poligonale di s con supporto $(a, b) \subset [0, 1]$, ψ una funzione poligonale di t con supporto in $[0, \tau)$, e sia \mathbf{e} un fissato ma arbitrario versore. La (1.7) implica che:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_a^b \phi_s(s) \psi_t(t) \left\{ \int_0^t \mathbf{e} \cdot [\mathbf{n}(s, \bar{t}) - \mathbf{n}(a, \bar{t})] d\bar{t} + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^t \int_a^s \mathbf{e} \cdot \mathbf{f}(\bar{s}, \bar{t}) d\bar{s} d\bar{t} \right\} ds dt = \\
& = \int_0^\tau \int_a^b \phi(s) \psi_t(t) \int_a^s \rho(\bar{s}) \mathbf{e} \cdot [\boldsymbol{\chi}_t(s, t) - \mathbf{v}(s)] d\bar{s} ds dt \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Essendo ϕ e ψ continue, si può integrare per parti rispetto la variabile t il membro sinistro della (1.17), mentre il membro di destra può essere integrato per parti rispetto a t e ad s . Inoltre, essendo $\psi(\tau) = 0$ e $\phi(a) = \phi(b) = 0$, si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \int_a^b \mathbf{y}(s, t) \cdot \mathbf{n}(s, t) dt - \int_0^\tau \int_a^s \mathbf{y}(s, t) \cdot \mathbf{f}(s, t) ds dt = \\
& = \int_0^\tau \int_a^b \mathbf{y}(s, t) \int_a^s \rho(s) \cdot [\boldsymbol{\chi}_t(s, t) - \mathbf{v}(s)] ds dt \quad (1.18)
\end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\mathbf{y}(s, t) = \phi(s) \psi(t) \mathbf{e}. \quad (1.19)$$

Poichè \mathbf{y} ha supporto in $(a, b) \times [0, \tau)$, si può scrivere la (1.18) nella forma (1.14) per tutte le funzioni \mathbf{y} che hanno la forma (1.19). L'equazione (1.14) per questa classe di funzioni \mathbf{y} esprime il *Principio dei Lavori Virtuali generalizzato*.

Senza assumere ipotesi di regolarità ingiustificate si è giunti alla prova che il Teorema dell'Impulso implica il Principio dei Lavori Virtuali.

1.2 Teoria dei continui generalizzata

La teoria dei continui di Cauchy (o Cauchy-Navier) descrive efficacemente il comportamento di sistemi meccanici a livello macroscopico. Questa descrizione, però, non considera le inomogeneità e limita il proprio studio ai casi in cui tali inomogeneità hanno una scala di lunghezza caratteristica molto più piccola della scala macroscopica con cui si osservano i fenomeni. Tuttavia, ci si è resi conto che è necessario generalizzare tale teoria per tener conto a livello macroscopico di alcuni aspetti del comportamento di quei materiali che hanno una struttura microscopica complessa([9]).

Una prima importante generalizzazione del modello dei continui di Cauchy fu concepita da François e Eugène Cosserat i quali, per ottenere una completa descrizione cinematica di un mezzo continuo, aggiunsero un campo di micro-rotazione. Nel modello dei fratelli Cosserat le forze di contatto sono date non solo da una forza di superficie ma anche da una *coppia di superficie*. In questo contesto, il Principio dei Lavori Virtuali, come mostrato da P. Germain ([10], [11]), è uno strumento matematico di fondamentale importanza. Dal punto di vista macroscopico, la necessità di considerare tali interazioni è stato dimostrato da P. Germain in cui l'energia di deformazione dipende anche dal gradiente secondo degli spostamenti.

1.2.1 Azioni di contatto generalizzate

Come già anticipato, la necessità di descrivere un corpo deformabile mediante un modello di continui generalizzati si presenta quando si ha a che fare con corpi che hanno una microstruttura inomogenea e si vuole comunque un efficiente modello omogeneo macroscopico. Queste microstrutture sono costituite da elementi che possono subire alcune azioni di contatto esterne che,

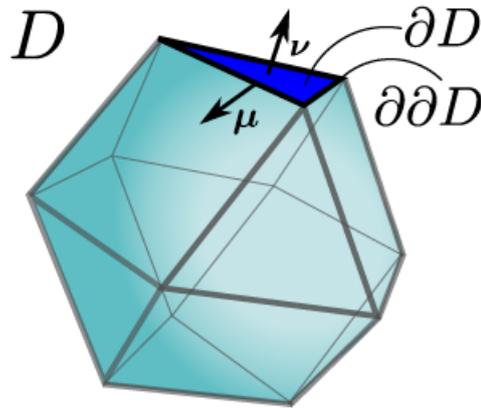


Figura 1.1: Corpo solido \mathcal{D} con il bordo $\partial\mathcal{D}$ e bordo del bordo $\partial\partial\mathcal{D}$, ν e μ rappresentano rispettivamente le normali uscenti dei bordi $\partial\mathcal{D}$ e $\partial\partial\mathcal{D}$

nel limite continuo, non si identificano con le usuali azioni che caratterizzano il modello di Cauchy. Lo stato di deformazione di continui generalizzati può essere fortemente influenzato da azioni esterne non convenzionali le quali non sono nemmeno previste dal modello di Cauchy. Il limite continuo di questo sistema di forze esterne fu già considerato da G. Piola, e fu chiamato "doppia forza" da P. Germain. È da notare che se si descrive il modello omogeneo con la teoria standard di Cauchy si arriva alla conclusione che tale sistema di forze non ha alcun effetto. Il teorema di Cauchy può essere generalizzato e gli "sforzi di ordine superiore" consentono una descrizione completa delle possibili azioni di contatto esterne.

1.2.2 Equazione di Eulero - Lagrange

Si consideri un corpo \mathcal{D} come mostrato in figura 1.1 e sia W la densità di energia di deformazione la quale dipende dagli spostamenti \mathbf{u} e dai gradienti primo e secondo di tali spostamenti. L'energia di deformazione assume la forma:

$$E = \int_{\mathcal{D}} W(u_i, \partial_j u_i, \partial_k \partial_j u_i) \quad (1.20)$$

dove si è posto $\partial_i := \partial \backslash \partial x_i$.

Applicando il Principio Variazionale, si ottiene la variazione prima dell'energia di deformazione:

$$\delta E = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial W}{\partial (\partial_j u_i)} \partial_j (\delta u_i) + \frac{\partial W}{\partial (\partial_k \partial_j u_i)} \partial_k \partial_j u_i \right\} \quad (1.21)$$

dove $\delta \mathbf{u}$ rappresenta una variazione arbitraria dello spostamento.

Integrando per parti il secondo termine del membro di destra dell'equazione (1.21), si ottiene:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial (\partial_j) u_i} \partial_j (\delta u_i) = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial (\partial_j) u_i} \nu_j (\delta u_i) - \int_{\mathcal{D}} \partial_j \left(\frac{\partial W}{\partial (\partial_j) u_i} \right) \delta u_i \quad (1.22)$$

dove $\boldsymbol{\nu}$ rappresenta il vettore normale del bordo $\partial \mathcal{D}$ di \mathcal{D} .

Il terzo termine del membro di destra dell'equazione (1.21), tramite integrazione per parti, diviene:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial (\partial_k \partial_j) u_i} \partial_k \partial_j (\delta u_i) = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial (\partial_k \partial_j) u_i} \partial_j (\delta u_i) \nu_k - \int_{\mathcal{D}} \partial_k \left(\frac{\partial W}{\partial (\partial_k \partial_j) u_i} \right) \partial_j (\delta u_i) \quad (1.23)$$

Il primo termine del membro di destra dell'equazione (1.23) può essere sviluppato come segue:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \partial_j(\delta u_i)\nu_k &= \int_{\partial\partial\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \nu_k\mu_j\delta u_i - \\ &- \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_j\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\nu_k\delta u_i - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \partial_j(\nu_k)\delta u_i \end{aligned} \quad (1.24)$$

dove $\boldsymbol{\mu}$ rappresenta il vettore normale del bordo $\partial\partial\mathcal{D}$ di $\partial\mathcal{D}$.

Il secondo termine del membro di destra dell'equazione (1.23) può essere sviluppato come segue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \partial_k\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\partial_j(\delta u_i) &= \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_k\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \text{Bigr}\right)\nu_j\delta u_i - \\ &- \int_{\mathcal{D}} \partial_j\partial_k\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\delta u_i \end{aligned} \quad (1.25)$$

Raggruppando tutti i termini si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_{\mathcal{D}} \partial_j\partial_k\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\delta u_i - \int_{\mathcal{D}} \partial_j\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\delta u_i + \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \nu_j\delta u_i - \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_j\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\nu_k\delta u_i - \\ &- \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \partial_j(\nu_k)\delta u_i - \int_{\partial\mathcal{D}} \partial_k\left(\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\right)\nu_j\delta u_i + \\ &+ \int_{\partial\partial\mathcal{D}} \frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i} \nu_k\mu_j\delta u_i \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ora si vede chiaramente che sul bordo $\partial\mathcal{D}$ compaiono le usuali azione di contatto σ (sforzi di Cauchy) le quali forniscono la trazione \mathbf{t} agente sulla superficie con la normale esterna ν :

$$t_i = \sigma_{ij}\nu_j = \frac{\partial W}{\partial(\partial_j)u_i}\nu_j$$

e altre quantità tensoriali non previste dalla teoria classica.

In particolare, il termine

$$\frac{\partial W}{\partial(\partial_k\partial_j)u_i}\partial_j(\nu_k)$$

mostra che le azioni di contatto non solo dipendono dal versore normale uscente del bordo $\partial\mathcal{D}$ ma anche dalla sua curvatura $(\partial_j(\nu_k))$.

Nell'elasticità classica di Cauchy non si considerano forze concentrate su linee mentre nel modello generalizzato tali forze di linea emergono naturalmente dall'integrazione per parti.

Se nella densità di energia W si prende in considerazione la dipendenza del gradiente terzo degli spostamenti, dall'integrazione per parti viene fuori un termine il quale è un'integrazione sul bordo $\partial\partial\partial\mathcal{D}$ di $\partial\partial\mathcal{D}$, cioè una somma finita di contributi all'energia totale dovute alla possibile presenza di forze concentrate ai vertici del corpo \mathcal{D} . Ciò è compatibile con i risultati sperimentali secondo i quali, in presenza di microstrutture complesse e fortemente inomogenee, una piccola variazione del punto di applicazione della forza può causare notevoli differenze nei risultati. Ciò significa che sistemi microstrutturati sono molto sensibili alle perturbazioni locali.

Capitolo 2

Algoritmo di controllo dello swarm

In questo capitolo verranno presentate alcune definizioni basilari della teoria dei grafi le quali saranno utili quando verrà introdotto il nostro modello di swarm. In seguito sarà preso in considerazione l'algoritmo presentato in [12] come punto di partenza per la realizzazione di un algoritmo di controllo di swarm di robot unidimensionali.

2.1 Teoria dei grafi

Gli swarm di robot si basano essenzialmente sulla teoria dei grafi. I grafi sono oggetti discreti che permettono di schematizzare una grande varietà di processi e spesso di consentirne delle analisi in termini quantitativi e algoritmici. Un grafo è un insieme di elementi detti vertici che possono essere collegati fra loro da linee chiamate bordi. Più formalmente, si dice grafo una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, con V insieme dei vertici ed E insieme dei bordi e si prenderanno in considerazione solo i grafi indiretti, cioè senza una

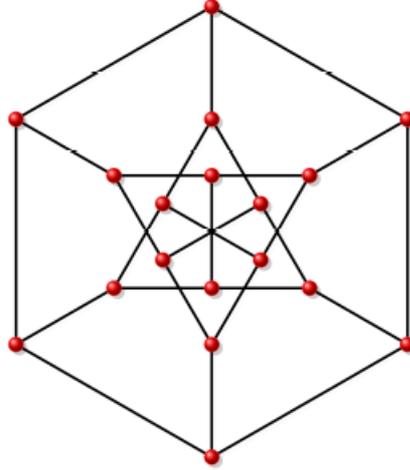


Figura 2.1: Esempio di grafo $G = (V, E)$, i punti rossi rappresentano i vertici (V), le linee nere rappresentano i bordi (E).

direzione associata ai bordi. Due vertici si diranno adiacenti se appartengono allo stesso elemento di E (cioè con un bordo che li connette). Si considerino n vertici V_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, si definisce la *matrice di adiacenza* come una matrice A di dimensione $n^2 \times n^2$ i cui elementi sono dati da:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } V_i \text{ è connesso a } V_j \\ 0 & \text{se } V_i \text{ non è connesso a } V_j \end{cases}$$

2.2 Il modello degli swarm

In questo paragrafo verrà descritto l'algoritmo che governa l'interazione, supposta di tipo elastico, e la sua propagazione lungo una "corda discretizzata" e ciò che si vuole mostrare è che questo modello è capace di simulare il comportamento di una corda perfettamente flessibile. Il tutto è ambientato in uno spazio Euclideo \mathbb{E}^2 . Come già anticipato, il punto di partenza è l'algoritmo presentato in [12], il quale sarà brevemente descritto. Prima di cominciare

bisogna precisare che il suddetto modello è stato ideato per sistemi bidimensionali. Ora, invece si è interessati a studiare sistemi monodimensionali per cui il modello che verrà descritto è un analogo monodimensionale.

2.2.1 Algoritmo basato sul calcolo del baricentro

Si consideri uno swarm \mathcal{S} costituito da un numero finito di elementi e sia \mathcal{C}^0 la configurazione di riferimento di \mathcal{S} . In \mathcal{C}^0 gli elementi di \mathcal{S} occupano tutti i nodi di una catena lineare rettilinea di lunghezza L e passo unitario $p = 1$ unità di lunghezza (UL) (lunghezza di riposo). Si consideri un insieme ordinato (time steps (TS)) di valori discreti per la variabile temporale t , $T_m = \{0, t_1, t_2, \dots, t_m\}$, e un sistema di riferimento ortonormale che abbia l'ascissa parallela alla catena la cui origine coincide con il vertice estremo sinistro. Il generico elemento dello swarm \mathcal{S} lungo la catena è contraddistinto da un indice (i), e le sue coordinate cartesiane in una generica configurazione al tempo t_m sono date da $(x_{i_1}, x_{i_2})(t_m)$. Per ogni elemento dello swarm \mathcal{S} viene definito un insieme $N_n(i^*)$ di vicini di ordine n :

$$N_n(i^*) := \{i \in \mathcal{C}^0 : \rho[i^*, i] = n\}$$

dove ρ indica la distanza di Chebyshev in \mathbb{R}^2 . Per $n = 1$ si ha la definizione dei vicini del primo ordine (primi vicini), per $n = 2$ dei vicini di secondo ordine (secondi vicini) e così via. Ora si seleziona un leader \mathcal{L} , cioè un elemento dello swarm \mathcal{S} situato nel vertice i^* in \mathcal{C}^0 al quale si impone un moto \mathcal{M} . Dunque, la funzione

$$\mathcal{M} : t_m \in T_m \rightarrow (x_{i^*}^1, x_{i^*}^2)(t_m) \in \mathbb{R}^2$$

descrive la traiettoria del leader \mathcal{L} . Per definire l'interazione tra gli elementi dello swarm è necessario introdurre delle "configurazioni virtuali". Sia $V_0(t_1)$ la configurazione virtuale in cui il leader \mathcal{L} si trova in $\mathcal{M}(t_1)$ e tutti gli altri elementi occupano la stessa posizione che occupavano in \mathcal{C}^0 . Si definisce ora un'altra configurazione virtuale $V_1^{t_1}$ in cui:

1. il leader \mathcal{L} occupa la stessa posizione che occupava in $V_0^{(t_1)}$;
2. i vicini del primo ordine del leader \mathcal{L} , cioè gli elementi appartenenti all'insieme $N_1(i^*)$, si spostano nel baricentro dei loro primi vicini;
3. tutti gli altri elementi occupano la stessa posizione che occupavano in $V_0^{(t_1)}$.

Iterando questa legge di evoluzione si ottiene la configurazione virtuale $V_n(t_1)$ in cui:

- 1a. il leader \mathcal{L} e tutti i suoi vicini di ordine $(n - 1)$ occupano la stessa posizione che occupavano in $V_{(n-1)}^{(t_1)}$;
- 2a. i vicini di ordine n del leader \mathcal{L} , cioè gli elementi appartenenti all'insieme $N_n(i^*)$, si spostano nel baricentro dei loro primi vicini in $V_{(n-1)}^{(t_1)}$;
- 3a. tutti gli altri elementi occupano la stessa posizione che occupavano in $V_{n-1}^{(t_1)}$.

Quando lo step virtuale n assume il valore della massima distanza $n = n^*$ dal leader \mathcal{L} dall'elemento estremo dello swarm in \mathcal{C}^0 , la configurazione virtuale $V_{n^*}^{(t_1)}$ coinciderà con la configurazione reale \mathcal{C}^{t_1} . Iterando questo processo si ottengono le configurazioni reali $\mathcal{C}^{t_1}, \mathcal{C}^{t_2}, \dots, \mathcal{C}^{t_m}$. A questo punto è

necessario fare delle precisazioni. Affinché l'algoritmo sia ben definito è indispensabile che ogni elemento dello swarm abbia due vicini del primo ordine, ciò non accade per gli elementi estremi dello swarm. Per aggirare questo problema si introducono due "elementi fittizi" agli estremi dello swarm \mathcal{S} i quali hanno coordinate $(-1, 0)$ e $(L + 1, 0)$ in C^0 . Inoltre si introduce una configurazione virtuale finale $V_{f_1}^{t_m}$ nella quale gli elementi "reali" restano fermi e gli elementi fittizi si muovono secondo le seguenti leggi:

1. l'elemento fittizio posto all'estremo sinistro dello swarm \mathcal{S} sarà posizionato sulla retta congiungente gli elementi di indice $(i = 1)$ e $(i = 2)$ ad una distanza pari alla lunghezza di riposo dall'elemento di indice $(i = 1)$;
2. l'elemento fittizio posto all'estremo destro dello swarm \mathcal{S} sarà posizionato sulla retta congiungente gli elementi di indice $(i = L)$ e $(i = L - 1)$ ad una distanza pari alla lunghezza di riposo dall'elemento di indice $(i = L)$.

In questo modo ogni elemento "reale" ha sempre due primi vicini e l'algoritmo è sempre ben definito. Inoltre questa condizione garantisce che i tre elementi agli estremi dello swarm \mathcal{S} , sia da un lato che dall'altro, siano sempre allineati.

Nelle figure 2.2 e 2.3 sono mostrati alcuni risultati numerici: in entrambi i casi si hanno $n = 21$ elementi (compresi i fittizi) e si è scelto l'elemento estremo sinistro (0) come leader a cui è stato imposto un moto rettilineo uniforme con velocità $v = 0.05 \text{ UL} \setminus \text{TS}$ e, orientata lungo la direzione $(0, 1)$ nel primo caso, e orientata lungo la direzione $(1, 1)$ nel secondo caso.

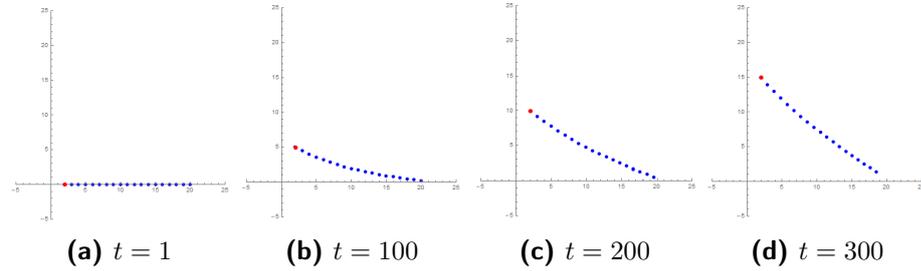


Figura 2.2: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 100, 200, 300$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05 \text{ UL} \setminus \text{TS}$ nella direzione $(0, 1)$.

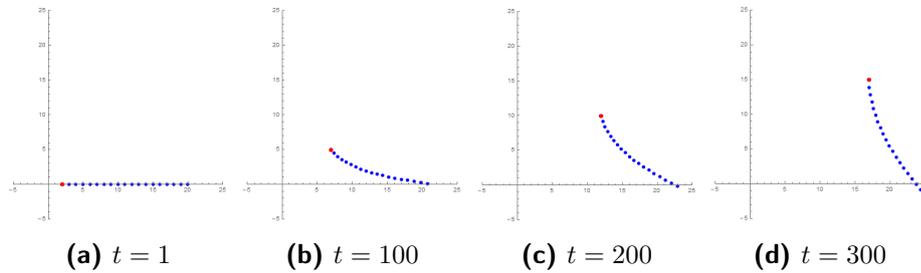


Figura 2.3: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 100, 200, 300$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05 \text{ UL} \setminus \text{TS}$ nella direzione $(1, 1)$.

Nel seguito considereremo evoluzioni spontanee del sistema nel senso che verrà precisato. Fissato un istante di tempo $t^* \in T_M$, allora per t tale che $t^* \leq t \leq t_m$ il leader si ferma mentre tutti gli altri elementi continuano a muoversi secondo l'algoritmo.

I risultati che così si ottengono sono mostrati nella figura 2.4 in cui si hanno $n = 21$ elementi (compresi i fittizi) e si è scelto l'elemento estremo sinistro (0) come leader a cui è stato imposto un moto rettilineo uniforme con velocità $v = 0.05 \text{ UL} \setminus \text{TS}$ per $t < t^*$, orientata lungo la direzione $(0, 1)$. Il leader si arresta per $t^* = 400$.

Ciò che si osserva è che, per tempi sufficientemente lunghi, tutto lo swarm assume una configurazione stabile che può essere identificata con la *configurazione di equilibrio secondo l'algoritmo*. Tale configurazione è tale che tutti gli

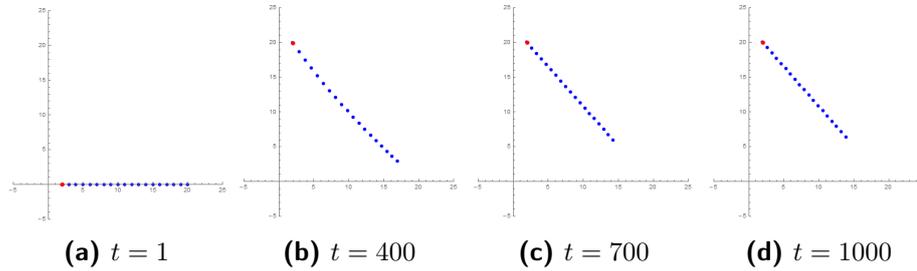


Figura 2.4: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 400, 700, 1000$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05 \text{ UL/TS}$ nella direzione $(0, 1)$ fino a $t = 400$, poi il moto imposto è arrestato.

elementi sono equidistanti e tale distanza è pari alla distanza che essi hanno nella configurazione iniziale (lunghezza di riposo) e, inoltre, tutti gli elementi giacciono sulla stessa retta. Ciò accade qualsiasi sia il moto $\mathcal{M}(t)$ imposto al leader \mathcal{L} . come è intuitivo quindi, l'algoritmo ammette come configurazione di equilibrio una qualsiasi configurazione in cui tutti gli elementi dello swarm \mathcal{S} sono allineati e distanziati di 1 UL come in \mathcal{C}^0 .

2.2.2 Algoritmo basato sulla computazione dell'asse di un segmento (I)

Dalle osservazioni fatte in precedenza, come è facilmente intuibile, si deduce che questo algoritmo non è adatto a descrivere il moto di una corda perfettamente flessibile. Il nostro scopo è ora quello di realizzare un algoritmo che consideri come configurazione di equilibrio una qualsiasi configurazione nella quale tutti gli elementi siano equidistanti dai loro primi vicini e che non necessariamente debbano allinearsi nel raggiungere la configurazione di equilibrio.

Si consideri una curva $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe $C^1([0, L])$. É sempre pos-

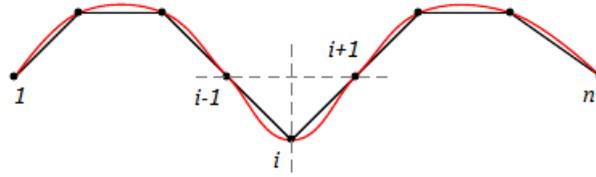


Figura 2.5: esempio di spezzata (nero) che approssima una curva (rosso)

sibile approssimare la curva φ con una spezzata i cui nodi siano equidistanti nella configurazione di riferimento. Facendo riferimento alla figura 2.5, i tre nodi consecutivi $(i-1)$, (i) e $(i+1)$ formano un triangolo isoscele i cui lati uguali coincidono con i lati $\overline{(i)(i+1)}$ e $\overline{(i)(i-1)}$ della spezzata e la base coincide con il segmento $\overline{(i-1)(i-1)}$. Sia a l'asse del segmento $\overline{(i-1)(i+1)}$, allora da semplici considerazioni geometriche si evince che $(i) \in a$. Ciò vale per qualsiasi tripletta di nodi consecutivi che si considerano. Se la spezzata è abbastanza fitta, le configurazioni di equilibrio sono tutte e solo quelle in cui ogni nodo è sull'asse a dei vicini. Questo concetto sta alla base dell'algoritmo che verrà presentato a breve e fa sì che le configurazioni ad energia nulla del sistema discreto corrispondono in modo biunivoco (a meno di approssimazioni) alle configurazioni di equilibrio del sistema continuo.

Sulla base di queste osservazioni si è ritenuto opportuno modificare il punto 2 della legge di evoluzione dell'algoritmo: si vuole richiedere ora che l' i -esimo elemento dello swarm \mathcal{S} subisca uno spostamento $\mathbf{u}'(i)$ ortogonale all'asse a del segmento congiungente i due primi vicini e che abbia modulo $|\mathbf{u}'(i)| = \text{dist}(a, (s_i)(t))$ (si veda ad esempio la figura 2.6). In questo modo, tutti gli elementi dello swarm nelle configurazioni reali $C^{t_1}, C^{t_2}, \dots, C^{t_m}$ saranno sempre equidistanti dai loro primi vicini.

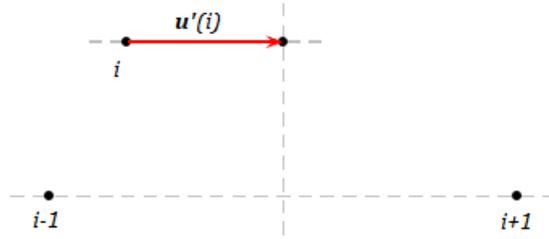


Figura 2.6: in rosso lo spostamento $\mathbf{u}'(i)$ sull'asse

Le nuove leggi di evoluzioni, quindi, saranno le seguenti:

- 1b. il leader \mathcal{L} e tutti i suoi vicini di ordine $(n - 1)$ occupano la stessa posizione che occupavano in $V_{(n-1)}^{(t_1)}$;
- 2b. i vicini di ordine n del leader \mathcal{L} , cioè gli elementi appartenenti all'insieme $N_n(i^*)$, si spostano, tramite uno spostamento ortogonale, sull'asse del segmento congiungente i loro primi vicini in $V_{(n-1)}^{(t_1)}$;
- 3b. tutti gli altri elementi occupano la stessa posizione che occupavano in $V_{n-1}^{(t_1)}$.

I risultati numerici ottenuti sono mostrati graficamente nelle figure 2.7 e 2.8. In entrambi i casi si hanno $n = 21$ elementi (compresi i fittizi) e si è scelto l'elemento estremo sinistro (0) come leader a cui è stato imposto un moto rettilineo uniforme con velocità $v = 0.05 \text{ UL} \setminus \text{TS}$ e, orientata lungo la direzione $(0, 1)$ nel primo caso, e orientata lungo la direzione $(1, 1)$ nel secondo caso. Il leader si arresta per $t^* = 400$.

Si osservano due fatti importanti. Il primo è che si ottiene il comportamento desiderato: nella configurazione di equilibrio raggiunta tutti gli elementi sono equidistanti e tale distanza è pari alla lunghezza di riposo p e si

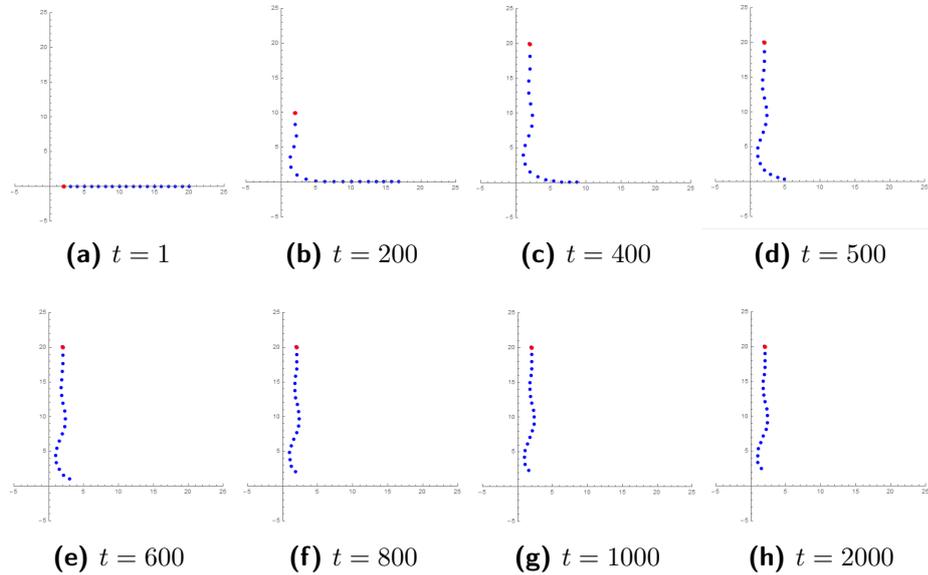


Figura 2.7: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 200, 400, 500, 600, 800, 1000, 2000$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05$ UL\TS nella direzione $(0, 1)$ fino a $t = 400$, poi il moto imposto è arrestato.

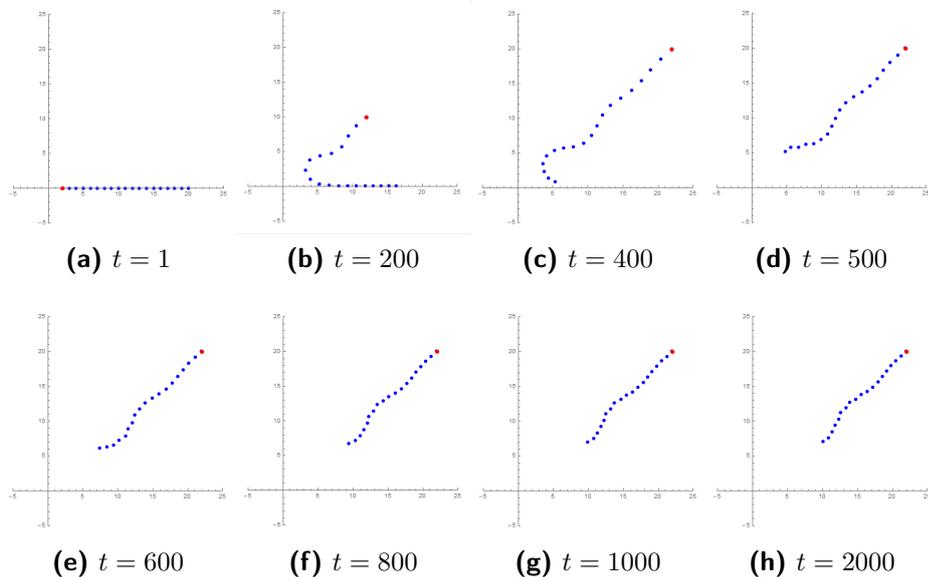


Figura 2.8: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 200, 400, 500, 600, 800, 1000, 2000$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05$ UL\TS nella direzione $(1, 1)$ fino a $t = 400$, poi il moto imposto è arrestato.

dispongono lungo una curva la cui forma e orientazione dipendono dal particolare moto imposto al leader \mathcal{L} . Il secondo riguarda i particolari moti degli elementi dello swarm (fatta eccezione per il leader) durante l'evoluzione del sistema i quali risultano essere poco naturali (dalle figure si vede chiaramente una sorta di moto ondeggiante). Quest'effetto, anche se indesiderato, è molto interessante in quanto ci dice qualcosa riguardo le possibili "forze" a cui è soggetto ogni elemento durante il suo moto. Facendo ancora una volta riferimento alla figura 2.5, se si considerano delle discretizzazioni sempre più fitte, si ha che la retta passante per i punti $(i - 1)$ e $(i + 1)$ tende alla tangente della curva nel punto (i) e, essendo lo spostamento $\mathbf{u}'(i)$ parallelo a tale retta si può dunque concludere ragionevolmente che tali spostamenti siano tangenti alla curva.

In seguito si cercherà di smorzare quest'effetto aggiungendo un secondo contributo allo spostamento totale che ogni elemento dello swarm \mathcal{S} subisce.

2.2.3 Algoritmo basato sulla computazione dell'asse di un segmento (II)

Si consideri uno swarm \mathcal{S} i cui elementi nella configurazione iniziale C^0 sono disposti lungo l'asse x . Si scelga come leader l'estremo destro e sia (i^*) la sua coordinata a cui si impone un moto rettilineo uniforme nella direzione $(1, 0)$. Le leggi di evoluzioni che governano il moto di tale swarm sono quelle descritte precedentemente. In questo caso particolare il punto appartenente all'asse a del segmento congiungente i due vicini in cui ogni elemento va a posizionarsi coincide proprio con il baricentro dei due vicini. Si ponga l'attenzione su ciò che avviene dopo il primo step. Il leader subirà uno spostamento $\mathbf{u}'(i^*)$ nella direzione $(1, 0)$, l'elemento $(i^* - 1)$ subirà uno spostamento $\mathbf{u}'(i^* - 1)$ nella direzione $(1, 0)$, e così via. Gli spostamenti che ogni elemento dello swarm

subisce hanno la stessa orientazione ma modulo diverso. In particolare, più ci si allontana dal leader e tanto più piccoli saranno i moduli degli spostamenti $\mathbf{u}'(i)$. Cioè:

$$|\mathbf{u}(i^*)| > |\mathbf{u}(i^* - 1)| > |\mathbf{u}(i^* - 2)| > |\mathbf{u}(i^* - 3)| > \dots$$

Quindi ogni elemento, nello stesso arco di tempo, subisce uno spostamento il cui modulo varia con la distanza dal leader. Si può quindi affermare che ogni elemento ha una velocità media diversa. In particolare, quanto più è lontano un certo elemento dal leader, tanto più piccola sarà la sua velocità media. A questo punto è facile intuire che è necessario aggiungere un secondo contributo locale che dipenda in qualche modo dalla velocità media, e quindi anche dalla distanza dal leader, che possa essere connesso agli effetti dovuti dell'attrito viscoso che, come è ben noto, dipende dalla velocità. Questo secondo contributo dovrà sempre garantire che, nelle configurazioni reali, ogni elemento occupi un punto dell'asse a del segmento congiungente i due vicini in modo tale che ogni elemento dello swarm sia sempre equidistante dai suoi primi vicini.

Sulla base di queste osservazioni si è ritenuto opportuno modificare ancora una volta il punto 2 della legge di evoluzione dell'algoritmo aggiungendo un secondo contributo locale allo spostamento totale che dipende dalla distanza del leader dall' i -esimo elemento, e quindi anche dalla velocità media.

Si richiede ora che tutti gli elementi dello swarm subiscano uno spostamento totale $\mathbf{u}(i)$ dato dalla media pesata di due contributi:

- uno spostamento $\mathbf{u}'(i)$ sull'asse a del segmento congiungente i primi vicini la cui direzione è ortogonale all'asse stesso;

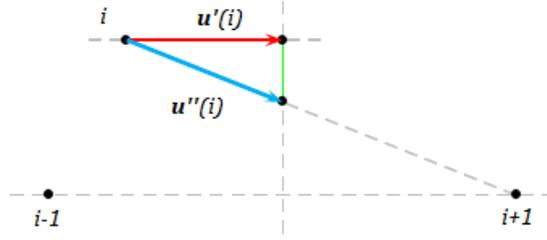


Figura 2.9: in rosso lo spostamento $\mathbf{u}'(i)$, in ciano lo spostamento $\mathbf{u}''(i)$, in verde il segmento appartenente all'asse individuato dai due spostamenti $\mathbf{u}'(i)$ e $\mathbf{u}''(i)$. Il leader ha coordinata $(i^*) > (i + 1)$

- uno spostamento $\mathbf{u}''(i)$ sull'asse a del segmento congiungente i primi vicini la cui direzione è parallela al segmento congiungente l' i -esimo elemento e il primo vicino meno distante dal leader il cui modulo è dato dalla distanza tra l' i -esimo elemento e il punto d'intersezione dell'asse a con il segmento congiungente l' i -esimo elemento e il primo vicino meno distante.

In parole povere, con i due spostamenti $\mathbf{u}'(i)$ e $\mathbf{u}''(i)$ si individua sull'asse un segmento all'interno del quale l'elemento dello swarm si dispone (si veda ad esempio la figura 2.9). Per quanto riguarda i pesi $\alpha(i)$ e $\beta(i)$, rispettivamente associati a $\mathbf{u}'(i)$ e $\mathbf{u}''(i)$, sono diversi per ogni elemento, dipendono dalla distanza dell' i -esimo elemento dal leader e pertanto vengono calcolati di volta in volta. In definitiva lo spostamento totale $\mathbf{u}(i)$ è dato da:

$$\mathbf{u}(i) = \alpha(i)\mathbf{u}'(i) + \beta(i)\mathbf{u}''(i) \quad \text{con} \quad \alpha(i) = \frac{|i - i^*|}{n}, \quad \beta(i) = 1 - \alpha(i). \quad (2.1)$$

Le nuove leggi di evoluzione saranno quindi:

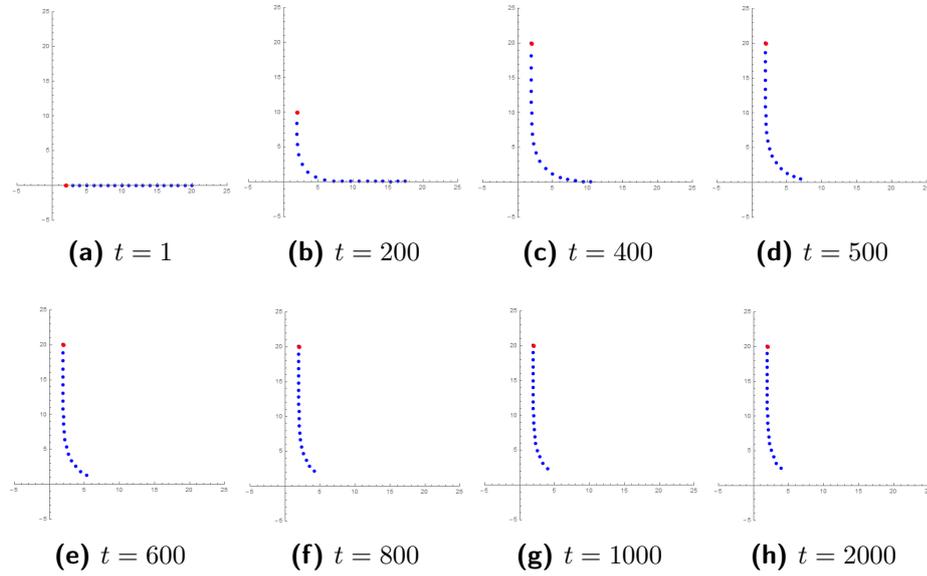


Figura 2.10: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 200, 400, 500, 600, 800, 1000, 2000$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05$ UL\TS nella direzione $(0, 1)$ fino a $t = 400$, poi il moto imposto è arrestato.

- 1c. il leader \mathcal{L} e tutti i suoi vicini di ordine $(n - 1)$ occupano la stessa posizione che occupavano in $V_{(n-1)}^{(t_1)}$;
- 2c. i vicini di ordine n del leader \mathcal{L} , cioè gli elementi appartenenti all'insieme $N_n(i^*)$, subiscono lo spostamento definito dalla (2.1);
- 3c. tutti gli altri elementi occupano la stessa posizione che occupavano in $V_{n-1}^{(t_1)}$.

Implementando quest'algoritmo si ottengono le simulazioni numeriche mostrate nelle figure 2.10 e 2.11. In entrambi i casi si hanno $n = 21$ elementi (compresi i fittizi) e si è scelto l'elemento estremo sinistro (0) come leader a cui è stato imposto un moto rettilineo uniforme con velocità $v = 0.05$ UL\TS e, orientata lungo la direzione $(0, 1)$ nel primo caso, e orientata lungo la direzione $(1, 1)$ nel secondo caso. Il leader si arresta per $t^* = 400$.

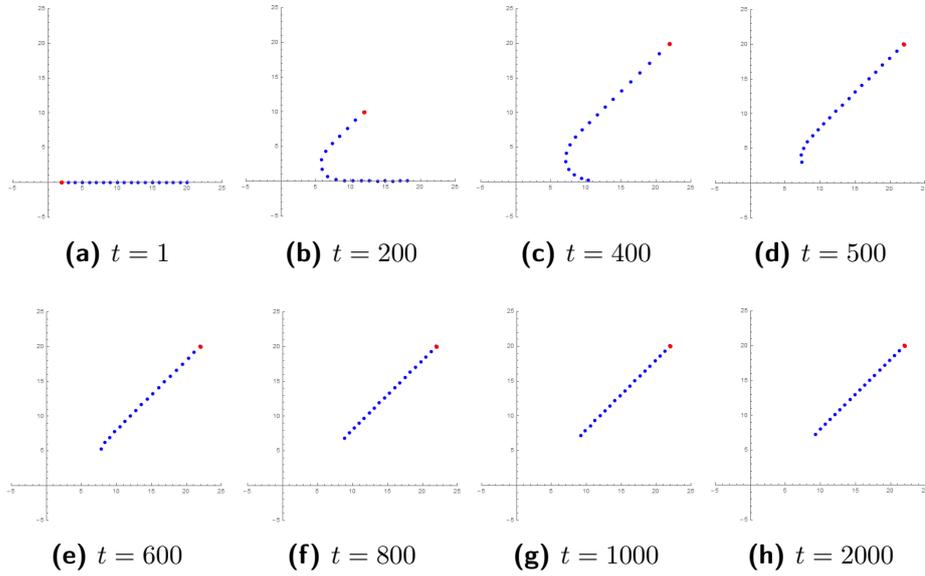


Figura 2.11: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 200, 400, 500, 600, 800, 1000, 2000$ con il leader che si muove con velocità $v = 0.05$ UL\TS nella direzione $(1, 1)$ fino a $t = 400$, poi il moto imposto è arrestato.

Come si può notare l'effetto indesiderato fatto notare in precedenza visto nel paragrafo precedente viene smorzato come desiderato ottenendo così un risultato decisamente più realistico.

Molto interessante è il caso in cui s'impone al leader un moto oscillatorio. Nella figura 2.12 sono mostrati graficamente i risultati numerici dove si hanno $n = 21$ elementi (compresi i fittizi) e si è scelto come leader l'elemento centrale a cui è imposto un moto oscillatorio di ampiezza $A_0 = 4$ UL e velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{1000}$ rad\TS.

Come si può notare, quando il leader si avvicina all'asse x si formano delle increspature che possono essere associate alla propagazione ondosa lungo la corda della deformazione.

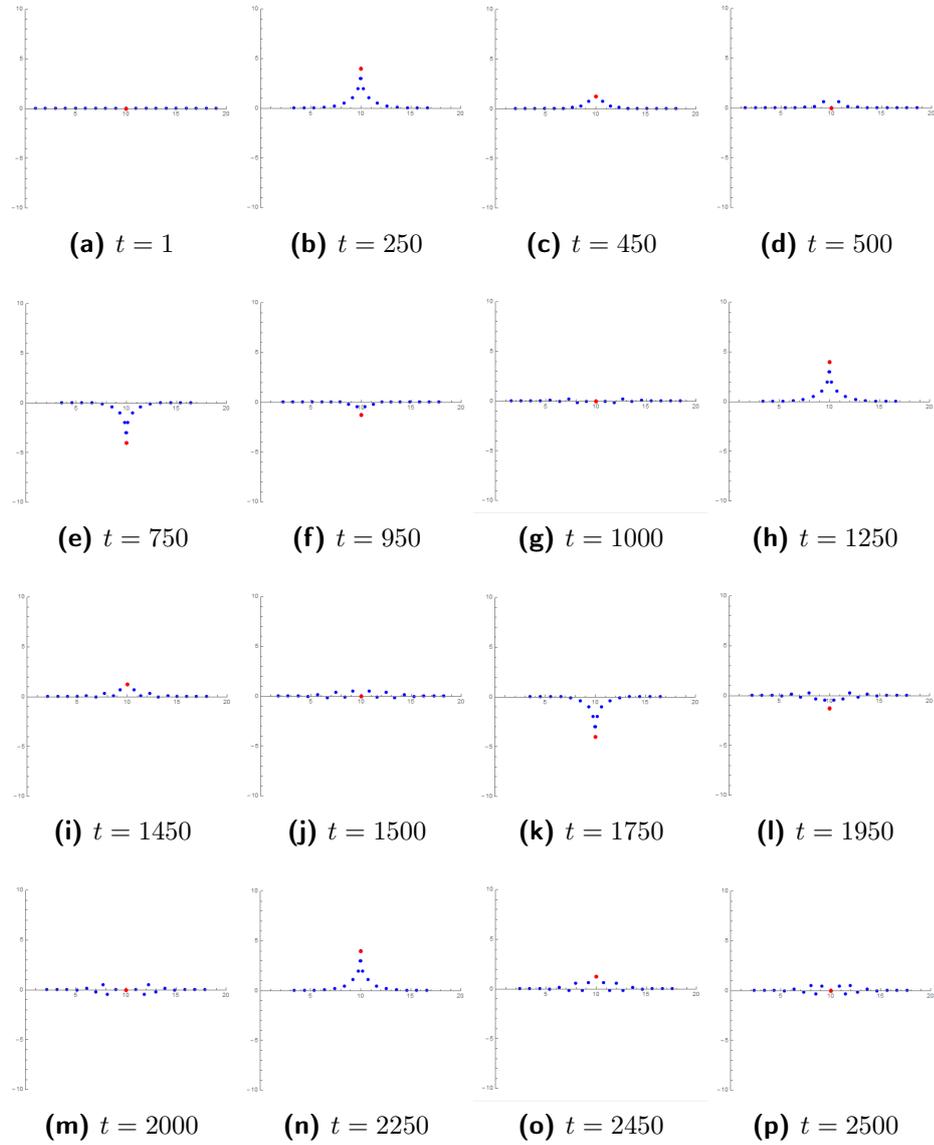


Figura 2.12: Instantanee dello swarm al time step $t = 1, 250, 450, 500, 750, 950, 1000, 1250, 1450, 1500, 1750, 1950, 2000, 2250, 2450, 2500$ con il leader che si muove di moto oscillatorio nella direzione $(0, 1)$ con velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{1000}$ rad\TS.

Capitolo 3

Conclusioni

In questo elaborato sono state mostrate le potenzialità del modello degli swarm per analizzare le deformazioni dei corpi continui. I vantaggi di questo approccio sono legati principalmente alla semplicità del modello - infatti, con semplici considerazioni geometriche, si riescono ad ottenere dei risultati qualitativi molto soddisfacenti - e con un costo computazionale notevolmente basso. Inoltre, le teorie dei continui generalizzate possono essere studiate con piccole e opportune modifiche dell'algoritmo. Si può dimostrare infatti che un algoritmo all' n -esimo vicino può essere ricondotto ad una discretizzazione di una teoria di n -esimo gradiente. La Teoria dei Continui generalizzata è un'area della Meccanica molto promettente e, in questo contesto, il modello degli swarm è particolarmente interessante. Naturalmente, tale modello ha delle grosse lacune. In primo luogo rende molto difficile una formulazione variazionale su cui si basa la Teoria dei Continui generalizzata. In secondo luogo, se da un lato sono possibili analisi basate sull'energia nel contesto discreto, dall'altro lato l'identificazione di un Lagrangiana esplicita la cui minimizzazione conduca al comportamento del sistema discreto sono tutt'altro che banali.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che hanno contribuito nella stesura di questa tesi.

In particolare ringrazio i miei relatori, il Prof. Francesco Dell'Isola, le cui idee costituiscono il nucleo centrale di questo lavoro, ed il Prof. Luigi Rosa che ha reso possibile tutto ciò.

Desidero inoltre ringraziare Alessandro Della Corte e Antonio Battista i cui consigli e supporto scientifico sono stati di fondamentale importanza per la realizzazione di questo lavoro.

Infine, ma non per importanza, desidero ringraziare la mia famiglia e Michela Napolitano il cui supporto morale è stato determinante.

Bibliografia

- [1] MATARIC, Maja J. *Designing emergent behaviors: From local interactions to collective intelligence*. In: Proceedings of the Second International Conference on Simulation of Adaptive Behavior, 1993.
- [2] DENEUBOURG, J.-L., et al. *The self-organizing exploratory pattern of the argentine ant*. Journal of insect behavior, 1990.
- [3] SUMPTER, David JT. *Collective animal behavior*. Princeton University Press, 2010.
- [4] OH, Kwang-Kyo; PARK, Myoung-Chul; AHN, Hyo-Sung. *A survey of multi-agent formation control*. Automatica, 2014.
- [5] ALIBERT, Jean-Jacques; DELLA CORTE, Alessandro. *Second-gradient continua as homogenized limit of pantographic microstructured plates: a rigorous proof*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.
- [6] DELL'ISOLA, Francesco; SCIARRA, Giulio; VIDOLI, Stefano. *Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials*. In: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 2009.
- [7] DELL'ISOLA, Francesco; SEPPECHER, Pierre; MADEO, Angela. *How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in Nth gra-*

dient continua: approach "à la D'Alembert. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2012.

- [8] ANTMAN, Stuart S.; MARDSEN, Jerrold Eldon; SIROVICH, Lawrence. *Nonlinear problems of elasticity*. Springer, 1995.
- [9] DELL'ISOLA, Francesco; SEPPECHER, Pierre; DELLA CORTE, Alessandro. *The postulations á la D'Alembert and á la Cauchy for higher gradient continuum theories are equivalent: a review of existing results*. Proceedings of The Royal Society, 2015.
- [10] GERMAIN, Paul. *The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure*. Appl. Math, 1973.
- [11] GERMAIN, Paul. *La methode des puissances virtuelles en mecanique des milieux continus. Premire partie. Theorie du second gradient*. J. Mecanique, 1973.
- [12] DELLA CORTE, Alessandro; BATTISTA, Antonio, DELL'ISOLA, Francesco. *Referential description of the evolution of a 2D swarm of robots interacting with the closer neighbors: Perspectives of continuum modeling via higher gradient continua*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016.