

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

## **Deep Inelastic Scattering e Partoni**

**Relatori:**

Prof. Luigi Rosa

**Candidato:**

Sergio Balestrieri  
Matricola N85000721

A.A. 2016/2017

# Contents

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Interpretazione Feynman-Stückelberg</b>	<b>4</b>
1.1 Introduzione storica . . . . .	4
1.2 Scattering elastico elettrone-muone . . . . .	4
1.3 Scattering elettrone-positrone . . . . .	8
<b>2 Valutazione della struttura adronica</b>	<b>11</b>
2.1 Scattering elastico elettrone-protone . . . . .	11
2.2 scattering anelastico elettrone-protone . . . . .	13
2.3 scattering anelastico dell'elettrone come una sezione d'urto fotone-protone . . . . .	16
<b>3 Partoni</b>	<b>18</b>
3.1 Bjorken scaling . . . . .	18
<b>Conclusione</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>

## Introduzione

Il presente lavoro si propone di condurre un'analisi del “deep inelastic scattering”, questo consiste in un urto leptone-adrone (dove solitamente il leptone è l'elettrone mentre l'adrone è il protone), i cui risultati ci hanno permesso di considerare per la prima volta i quarks come enti reali, poichè inizialmente erano solo oggetti puramente matematici che permettevano di ottenere le proprietà delle particelle adroniche.

Analizziamo quindi ogni elemento della terminologia: “scattering” indica l'elettrone che dopo l'urto viene deflesso, “inelastic” indica che l'adrone riceve una quantità di energia cinetica quindi si tratterà di un urto di tipo anelastico e “deep” indica che si considerano piccole lunghezze d'onda ovvero siamo ad ampi valori di energia.

Il formalismo utilizzato per il nostro studio è quello di Feynman che permette un'analisi dell'interazione attraverso il calcolo diretto della sezione d'urto, senza l'utilizzo della seconda quantizzazione.

Nel primo capitolo inizieremo a familiarizzare con il formalismo di Feynman attraverso lo studio di due diagrammi fondamentali ovvero elettrone-muone ed elettrone-positrone che permetteranno di avvicinarci in maniera semplificata ai concetti sezione d'urto e matrice invariante.

Nel secondo capitolo analizzeremo l'urto protone-elettrone, partiremo dal caso più semplice ovvero il caso elastico grazie al quale familiarizzeremo con il concetto di fattore di forma, che lo rende totalmente differente dagli urti precedenti, e ricaveremo alcune proprietà del protone quali densità di carica e massa; successivamente analizzeremo l'urto anelastico a bassi valori d'energia, importante poichè nella sua forma basilare riprende alcune caratteristiche della diffusione profondamente anelastica, infine studieremo l'urto fotone-protone che ci permetterà di ricavare sezioni d'urto non considerando il tipo di particella incidente, e inoltre sarà fondamentale per un'analisi delle proprietà del fotone virtuale importante anche nel “ deep inelastic scattering”.

Nel terzo capitolo, sfruttando le conoscenze acquisite nei precedenti paragrafi, analizzeremo la diffusione profondamente anelastica, sfruttando l'ipotesi di invarianza di Bjorken che consiste nel considerare grandi valori di energia del fotone e dimostremo che l'urto anelastico fotone-protone si comporta come un urto elastico fotone-particella puntiforme di Dirac, poichè la funzione di struttura non sarà più legata al momento trasferito dal fotone ma solo da una frazione di esso, introducendo quindi il concetto di partone o quarks.

# 1 Interpretazione Feynman-Stückelberg

## 1.1 Introduzione storica

L'evoluzione di un sistema è governato dall'equazione di Schrödinger che è non relativistica. Se si considerano particelle a velocità prossime a quelle della luce bisogna quindi modificare l'equazione in modo tale da tenere conto delle correzioni relativistiche.

Un primo tentativo fu fatto da **Klein e Gordon** i quali modificarono l'equazione di Schrödinger; in generale se si considera la relazione energia-impulso per una particella libera, nel caso classico si ha che  $E = \frac{p^2}{2m}$  ed attraverso il principio di corrispondenza si ottiene l'equazione di Schrödinger, se invece la relazione energia-impulso è quella relativistica ovvero  $E^2 = p^2 + m^2$  applicando il principio di corrispondenza si ottiene l'equazione di Klein-Gordon[2]:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi \quad (1)$$

Questa equazione possedeva due problemi fondamentali: il primo era che aveva oltre alle classiche soluzioni ad energia  $E > 0$ , anche delle soluzioni ad  $E < 0$  che introducevano delle transizioni ad energie sempre negativamente più alte difficilmente interpretabili dal punto di vista fisico. Il secondo problema era legato alla relazione tra  $E$  e  $\rho$  (la densità di probabilità di trovare una determinata particella) ovvero che ad  $E < 0$  corrispondeva  $\rho < 0$ , quindi qualcosa di totalmente inaccettabile.

Successivamente **Dirac** provò a risolvere i problemi legati all'equazione di Klein-Gordon ipotizzando una equazione lineare in  $\partial/\partial t$  e in  $\nabla$ , questo tipo di equazione risolve la questione legata alla  $\rho < 0$  ma permangono le soluzioni ad energia negativa, che Dirac considerò come delle soluzioni di antiparticella. Per affrontare questo problema furono tentati numerosi approcci tra cui quello di Feynman-Stückelberg. Essi ipotizzarono che le soluzioni ad energia negativa descrivano particelle che si propagano indietro nel tempo o equivalentemente antiparticelle che si propagano avanti nel tempo.

In questo capitolo tratteremo la diffusione elastica elettrone-muone e elettrone-positrone (senza spin) per familiarizzare con il formalismo di Feynman-Stückelberg, e alcuni concetti fondamentali come quello di sezione d'urto e matrice invariante.

## 1.2 Scattering elastico elettrone-muone

Un esempio classico dell'interpretazione di Feynman è lo scattering elastico tra elettrone-muone (trascurando lo spin delle particelle) importante perchè è il modello fondamentale per le interazioni elastiche tra particelle diverse.

Per calcolare l'ampiezza di probabilità si considera che la funzione d'onda dell'elettrone, che segue l'equazione di Klein-Gordon, sia soggetta ad un potenziale di tipo elettromagnetico. Questo sarà associato all'equazione tramite il principio di accoppiamento minimale.

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A}$$

usando il principio di corrispondenza:

$$\begin{aligned} (i\partial^\mu + eA^\mu)^2 \phi + m^2 \phi &= 0 \\ \partial^\mu \partial_\mu + e^2 A^2 + ie\partial_\mu A^\mu + ieA^\mu \partial_\mu + m^2 \phi &= 0 \end{aligned}$$

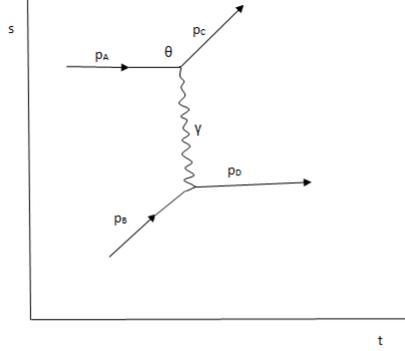


Figure 1: Scattering elastico elettrone muone, visto secondo l'approccio di Feynman

Il termine  $e^2 A^2$  essendo legato alla costante di struttura fine  $\alpha$  ( $e^2 A^2 = \alpha^2 4\pi A^2$ ), che è molto minore di 1, trascurabile rispetto agli altri quindi:

$$\partial^\mu \partial_\mu + ie \partial_\mu A^\mu + ie A^\mu \partial_\mu + m^2 \phi = 0 \quad (2)$$

Il termine di bassa intensità  $A^\mu$  si può considerare come una perturbazione quindi si può calcolare l'ampiezza attraverso le usuali formule della teoria delle perturbazioni[1]:

$$T_{fi} = \int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x$$

$$T_{fi} = i \int \phi_f^* ie (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \phi_i d^4x$$

Per il termine  $A^\mu \partial_\mu \phi_i$  si utilizza la formula dell'integrale per parti ottenendo:

$$\int \phi_f^* \partial_\mu A^\mu \phi_i d^4x = \phi_f^* \phi_i A^\mu \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int \partial_\mu (\phi_f^*) A^\mu \phi_i$$

Il termine non integrale è nullo poichè  $\phi$  è una funzione  $L_2$  di conseguenza calcolata all'infinito si annulla. Si può quindi sostituire il secondo termine nell'equazione ottenendo:

$$T_{fi} = i \int (ie \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i - ie \phi_i A^\mu \partial_\mu \phi_f^*) d^4x$$

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)} A^\mu d^4x$$

con  $j_\mu^{(1)} = -ie(\phi_i \partial_\mu \phi_f^* - \phi_f^* \partial_\mu \phi_i)$ , che ricorda un termine di corrente elettrica; si consideri che in questo caso le funzioni d'onda sono quelle dell'elettrone, se si definisce quindi  $p_A$  l'impulso iniziale dell'elettrone

e  $p_C$  l'impulso finale si ottiene che  $j$  diventa (in questo caso specifico si stanno considerando delle autofunzioni di onda piana ovvero  $\phi = Ne^{ip \cdot r}$ ) :

$$j_\mu^{(1)} = -eN_A N_C (p_A + p_C) e^{i(p_A - p_C)x}$$

Ora bisogna calcolare  $A^\mu$  per fare questo si utilizza l'equazione di Maxwell ovvero :

$$\square^2 A^\mu = j^{(2)\mu} \quad (3)$$

$j^{(2)\mu}$  è la corrente che genera il campo, in questo caso è legata alla funzione d'onda del muone; per risolvere l'equazione considero che  $j^{(2)\mu} = Ce^{iqx}$ , dove  $q = p_B - p_D$  con  $p_B$  l'impulso iniziale del muone mentre  $p_D$  l'impulso finale dello stesso, di conseguenza se applico il d'alambertiano su  $j^{(2)\mu}$  si ottiene che:

$$\square^2 j_\mu^{(2)fi} = -q^2 j^{(2)\mu}$$

Quindi una possibile soluzione di  $A^\mu$  è  $\frac{1}{q^2} j^{(2)\mu}$ , sostituendolo nell'equazione dell'ampiezza si ottiene che:

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^{(1)} \frac{1}{q^2} j^{(2)\mu} d^4x \quad (4)$$

da cui:

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D \int (p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)^\nu \frac{g_{\mu\nu}}{|p_B - p_D|^2} e^{i(p_A - p_C + p_B - p_D)x} d^4x$$

integrandolo:

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)^\nu \frac{g_{\mu\nu}}{|p_B - p_D|^2} \delta(p_A + p_B - p_C - p_D) \quad (5)$$

si nota facilmente che la delta ottenuta è una semplice conservazione dell'impulso delle due particelle; il termine  $M = (p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)^\nu \frac{g_{\mu\nu}}{|p_B - p_D|^2}$  è noto come ampiezza di matrice invariante, poiché se facessimo la considerazione opposta, ovvero considerassimo il muone che subiva il campo generato dall'elettrone questo termine rimarrebbe identico.

Invece il termine  $\frac{g_{\mu\nu}}{|p_B - p_D|^2}$  o in maniera più generica  $\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$  è detto termine di propagatore, esso compare ogni qual volta si studia un vertice del diagramma di Feynman.

Negli esperimenti di diffusione si misura la cosiddetta sezione d'urto definita come :

$$d\sigma = \frac{W_{fi} N_{sf}}{\Phi}$$

Con  $W_{fi}$  si intende il rate di transizione da uno stato iniziale ad uno finale ovvero la probabilità per unità di tempo e volume ( $W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV}$ ), mentre  $N_{sf}$  è il numero di stati finali della particella normalizzato sul numero di particelle e  $\Phi$  è il prodotto tra il flusso iniziale di particelle per unità di superficie e tempo per la densità di particelle bersaglio nell'unità di volume.

Se considerassimo i valori di  $W_{fi}$ ,  $N_{sf}$  e  $\Phi$  per soluzione di particella libera in un urto del tipo  $A + B \rightarrow C + D$  otterremmo che la sezione d'urto è:

$$d\sigma = \frac{|M|^2 dQ}{F} \quad (6)$$

Con  $|M|^2$  matrice invariante della reazione considerata,  $dQ$  è un fattore di fase invariante di Lorentz:

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

Dove oltre al termine di conservazione  $\delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B)$  compaiono due differenziali  $\frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C}$  e  $\frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$  che indicano il numero di stati finali, considerando il sistema chiuso in un dato volume  $V$ . Infine  $F$  è il flusso incidente. Nel sistema di laboratorio, considerando il caso di una collisione AB, si ha[1] :

$$F = |v_A - v_B| 2E_A 2E_B$$

Dato che  $v_A = \frac{|\mathbf{p}_A|}{E_A}$  e  $v_B = \frac{|\mathbf{p}_B|}{E_B}$  allora  $F$  diventa:

$$F = 4(|\mathbf{p}_A|E_A + |\mathbf{p}_B|E_B)$$

Nel sistema del centro di massa questi due termini si possono riscrivere[1] :

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{4\sqrt{s}} d\Omega$$

$$F = 4p_i \sqrt{s}$$

Dove  $|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| = p_i$  e  $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| = p_f$  mentre  $s = (E_A + E_B)^2$  risulta essere l'energia nel centro di massa.

Di conseguenza la sezione d'urto differenziale (rispetto a  $d\Omega$  angolo solido attorno a  $\mathbf{p}_C$ ) diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Cm} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_i s} |M|^2 \quad (7)$$

Si considera adesso lo scattering elettrone-muone, quindi bisogna sostituire al posto del termine  $|M|^2$  la matrice invariante della reazione che è:

$$M = ie(p_A + p_C)^\mu (p_B + p_D)^\nu \frac{g_{\mu\nu}}{|\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_D|^2}$$

Risolviendo la matrice si ottiene la somma di 4 prodotti scalari ( $p_A \cdot p_B + p_A \cdot p_D + p_C \cdot p_B + p_C \cdot p_D$ ); dalla relazione del quadrimpulso si ottiene che  $|p|^2 = -|\mathbf{p}|^2 + E^2$  da cui  $p_1 \cdot p_2 = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + E_1 E_2$ . Siccome si utilizza una approssimazione di alte energie la massa è trascurabile quindi  $p_1 \cdot p_2 = -(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) + |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|$ .

Se si valutano i prodotti scalari tra tri-impulsi si nota che  $\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_B = |\mathbf{p}_A| |\mathbf{p}_B| \cos(180 - \theta)$  (dove  $\theta$  è l'angolo compreso tra l'impulso iniziale e quello finale ( $\mathbf{p}_A$  e  $\mathbf{p}_C$ )), stessa cosa vale per il prodotto scalare tra  $\mathbf{p}_C$  e  $\mathbf{p}_D$ ; mentre  $\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{p}_D = |\mathbf{p}_A| |\mathbf{p}_D| \cos(180)$  poichè si trovano in opposizione, stesso discorso per il prodotto scalare tra  $\mathbf{p}_C$  e  $\mathbf{p}_B$  (vedi figura 1).

Si ottiene quindi:

$$|M| = \frac{e[p_i^2(1 + \cos\theta) + 4p_i p_f + p_f^2(1 + \cos\theta)]}{|p_B - p_D|^2}$$

utilizzando l'approssimazione delle alte energie anche sul termine al denominatore si può scrivere la matrice come:

$$|M| = \frac{e[p_i^2(1 + \cos\theta) + 4p_i p_f + p_f^2(1 + \cos\theta)]}{p_B \cdot p_D}$$

applicando le stesse considerazioni precedenti utilizzate per il termine al numeratore sul denominatore si ottiene che :

$$|M| = \frac{e[p_i^2(1 + \cos\theta) + 4p_i p_f + p_f^2(1 + \cos\theta)]}{p_i p_f (1 - \cos\theta)}$$

Dato che l'urto tra muone e elettrone è di tipo elastico, si ha la conservazione oltre che del quadrimpulso anche del tripulso quindi il tripulso finale coincide con quello iniziale ovvero  $p_i = p_f$ :

$$|M| = \frac{2e(3 + \cos\theta)}{1 - \cos\theta}$$

Sostituendo nell'equazione della sezione d'urto otteniamo infine:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Cm} = \frac{\alpha^2 (3 + \cos\theta)^2}{4s (1 - \cos\theta)^2} \quad (8)$$

### 1.3 Scattering elettrone-positrone

L'analisi dello scattering elettrone-positrone ci permette di familiarizzare con una situazione che si ritroverà in maniera analoga nel "deep inelastic scattering" ovvero la presenza di un diagramma di annichilazione oltre a quello di scambio (già analizzato nel caso di urto elastico elettrone-muone); anche in questa situazione si trascura il termine di spin in quanto interessati semplicemente ad una valutazione sulla tipologia di diagramma senza entrare nel dettaglio della risoluzione.

Lo scattering elastico elettrone-positrone (senza considerare lo spin delle particelle) ci permette di fare delle considerazioni importanti sul concetto di antiparticella ipotizzato da Feynman.

Si cerca di calcolare la matrice invariante della reazione. Quest'ultima si ottiene in maniera simile alla matrice invariante tra elettrone e muone con la differenza che:

1. Per quanto riguarda il quadrimpulso del positrone, è considerato uguale e opposto a quello dell'elettrone, essendo l'antiparticella di quest'ultimo ovvero una soluzione ad energia negativa dell'equazione di Klein-Gordon.
2. Esistono due diagrammi di Feynman che contribuiscono a questa reazione (quello di annichilazione e quello di scambio riportati nella figura 2), di conseguenza per il calcolo della matrice invariante bisogna considerare una combinazione dei due.

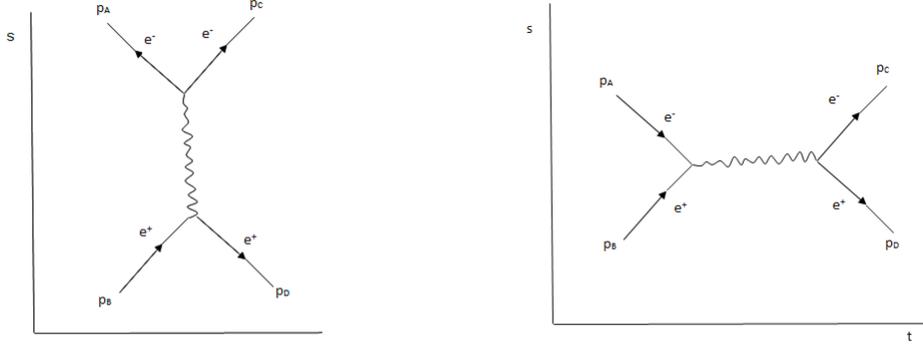


Figure 2: Scattering elettrone-positrone nelle due rappresentazioni possibili

Tenendo conto di questi elementi otteniamo che la matrice invariante diventa[1]:

$$-iM_{e^+e^-} = -i\left(-e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (-p_D - p_B)^\mu}{(p_D - p_B)^2} - e^2 \frac{(p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_C + p_D)^2}\right) \quad (9)$$

Nel calcolo della matrice invariante, sia nel caso precedente che in quest'ultimo, si è sempre considerato un termine del tipo  $\frac{1}{q^2}$  con  $q$  pari alla somma algebrica degli impulsi il cui risultato è l'impulso del fotone di reazione.

In una configurazione più generale il termine relativo al propagatore è  $\frac{1}{q^2 - m^2}$  dove  $m$  è la massa del propagatore ( nel caso di un fotone  $m = 0$ ; esistono casi però in cui la massa del propagatore è diversa da zero come ad esempio nell'interazione debole ).

Feynman diede una spiegazione alla formazione di questo termine considerando questo tipo di scattering, ovvero uno a due vertici, dimostrando che questo risultato è una generalizzazione relativistica al secondo ordine delle serie perturbativa[1]:

$$T_{fi}^{(2)} = -i \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_n - E_i} V_{ni} 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

Nel caso specifico dimostriamo come  $\frac{1}{E_n - E_i} \rightarrow \frac{1}{(p_A - p_B)^2}$ .

Nel diagramma di Feynman in esame si presentano due possibili rappresentazioni per la medesima reazione, per questo motivo bisogna sommare ambedue i termini quindi si ottiene che:

$$M \sim V_{fn} \frac{1}{E_i - E_\gamma} V_{ni} + V_{fn} \frac{1}{E_i - 2E_i - E_\gamma} V_{ni} = V_{fn} \frac{2E_\gamma}{E_i^2 - E_\gamma^2} V_{ni}$$

Questo perchè  $E_n$  è rappresentata dall'energia di transizione della reazione che varia da diagramma a diagramma; trascurando i termini al numeratore si ottiene che :

$$\begin{aligned} E_i^2 &= (p_A + p_B)^2 + (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2 \\ E_\gamma^2 &= m_\gamma^2 + \mathbf{p}^2 \end{aligned}$$

Ma  $\mathbf{p}^2 = (\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)^2$  per la teoria OFPT “old fashioned perturbation theory” ovvero sul vertice avviene la conservazione del tripulso ma non quella dell'energia quindi si sostituisce ottenendo :

$$\frac{1}{E_i^2 - E_\gamma^2} = \frac{1}{(p_A + p_B)^2 - m_\gamma^2} = \frac{1}{q^2 - m^2} \quad (10)$$

## 2 Valutazione della struttura adronica

### 2.1 Scattering elastico elettrone-protone

Fino ad ora abbiamo trattato solo scattering di tipo elastico tra particelle di Dirac però per l'analisi del "deep inelastic scattering" c'è bisogno di studiare urti tra adroni e leptoni, il caso più semplice che è possibile trattare è quello di urto elastico protone-elettrone; in questo caso specifico terremo conto dello spin delle particelle in modo tale da avere un calcolo più prossimo ai valori sperimentali e inoltre ci permetterà un utile confronto con i dati successivamente ricavati dal "deep inelastic scattering".

Si supponga ad esempio di voler conoscere le proprietà di un protone attraverso l'urto elastico con un elettrone; in questo caso si potrebbe considerare il protone come una densità di carica positiva sulla quale l'elettrone urta. Di conseguenza si ricaverebbe la densità di carica calcolando la sezione d'urto generica e quella puntuale tra le due particelle ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} |F(q)|^2$$

$|F(q)|$  è detto fattore di forma e  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$  è la sezione d'urto di due particelle puntuali (tenendo conto dello spin), detta anche sezione d'urto di Mott.

Si può dimostrare che la sezione di Mott è [1]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} (1 - \nu^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)) \quad (11)$$

con  $\nu = \frac{k}{E}$  e  $\theta$  angolo della particella con l'elettrone scatterato.

Si può dimostrare inoltre che  $F(q)$  è la trasformata di Fourier della distribuzione di carica ricavando quanto si richiedeva in precedenza.

Il caso del protone tuttavia non è adatto al nostro calcolo per due motivi fondamentali:

1. Non è coinvolta solo la carica nell'urto ma, anche il momento magnetico;
2. Il protone non è statico ma subisce un rinculo nel bombardamento di elettroni.

Per il calcolo della sezione d'urto puntuale, quindi si considera il protone come una particella di carica  $e$  e momento di spin  $\frac{e}{2M}$  e si utilizza lo stesso calcolo applicato per l'elettrone-muone (con la presenza dello spin), sostituendo le caratteristiche del muone con quelle del protone ottenendo [1]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{E'}{E} \left\{ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M} \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\}$$

Il fattore  $\frac{E'}{E}$  è legato al rinculo della particella.

Considerando questi elementi e andando a calcolare il più basso ordine di ampiezza per scattering elettrone-protone si vede che :

$$T_{fi} = -i \int j_\mu \left(-\frac{1}{q^2}\right) J^\mu d^4x$$

con  $j_\mu = -e\bar{u}(k')\gamma^\mu u(k)e^{i(k-k')\cdot x}$  flusso di corrente dell'elettrone;  $u(k)$  e  $u(k')$  sono funzioni di spin legate alla particella entrante ed uscente rispettivamente.

Il termine  $J^\mu$  è il flusso di corrente del protone che assume la seguente forma:

$$J^\mu = e\bar{u}(p)\mathcal{F}u(p')e^{i(p-p')\cdot x}$$

Dove  $\mathcal{F}$  è un termine incognito.

Per ricavarlo, siccome la corrente deve essere un quadrivettore di Lorentz, si costruisce un generico quadrivettore sfruttando le variabili  $p, p', q$  e le matrici di Dirac; il quadrivettore ottenuto sarà combinazione dei termini indipendenti  $\gamma^\mu$  e  $\sigma^{\mu\nu}q_\nu$  (con  $\sigma^{\mu\nu}$  uguale a  $\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ) [3] con i coefficienti in funzione di  $q^2$  ovvero :

$$\mathcal{F} = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu$$

con  $F_1$  e  $F_2$  due fattori di forma indipendenti e  $\kappa$  il momento magnetico .

Se  $q \rightarrow 0$  ovvero si considerano grandi lunghezze d'onda non si fanno valutazioni sulla struttura del protone che viene approssimata; di conseguenza i fattori di forma tendono a 1 riottenendo come risultato la sezione d'urto, nota.

Se invece  $q \neq 0$  allora la sezione d'urto tiene conto dei fattori di forma diventando[1]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{sen}^4(\frac{\theta}{2})} \frac{E'}{E} \left\{ (F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2) \text{cos}^2(\frac{\theta}{2}) - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \text{sen}^2(\frac{\theta}{2}) \right\} \quad (12)$$

Questa è nota come formula di Rosenbluth, in generale questi  $F_1$  e  $F_2$  parametrizzano la nostra mancanza di conoscenza sulla struttura del protone.

Per evitare la formazione di fattori di interferenza si utilizzano delle combinazioni di  $F_1$  e  $F_2$  ovvero:

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2$$

$$G_M = F_1 + \kappa F_2$$

In questo modo la sezione d'urto diventa[1]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{Lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \text{sen}^4(\frac{\theta}{2})} \frac{E'}{E} \left\{ \left( \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) \text{cos}^2(\frac{\theta}{2}) + 2\tau G_M^2 \text{sen}^2(\frac{\theta}{2}) \right\} \quad (13)$$

con  $\tau = \frac{-q^2}{4M^2}$ .

Eliminando i fattori di interferenza questa sezione d'urto ricorda quella puntuale con l'eccezione della presenza dei fattori di forma; tuttavia il rinculo del protone non ci permette di fare in modo che  $G_M$  e  $G_E$  coincidano rispettivamente alla trasformata di Fourier della distribuzione di momento di spin e di carica, si dimostra che questo avviene solo in un particolare sistema di riferimento detto sistema di Breit in cui  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$ . [1]

Ad un fissato  $\theta$  è possibile valutare sperimentalmente i fattori  $G_E$  e  $G_M$  in funzione di  $q^2$ , si può verificare che  $G_M$  ha un andamento decrescente  $\propto q^{-1}$ . Sapendo la sua relazione con la densità di carica, applicando l'antitrasformata di Fourier su questo parametro si ottiene che la densità di carica è di tipo esponenziale decrescente.

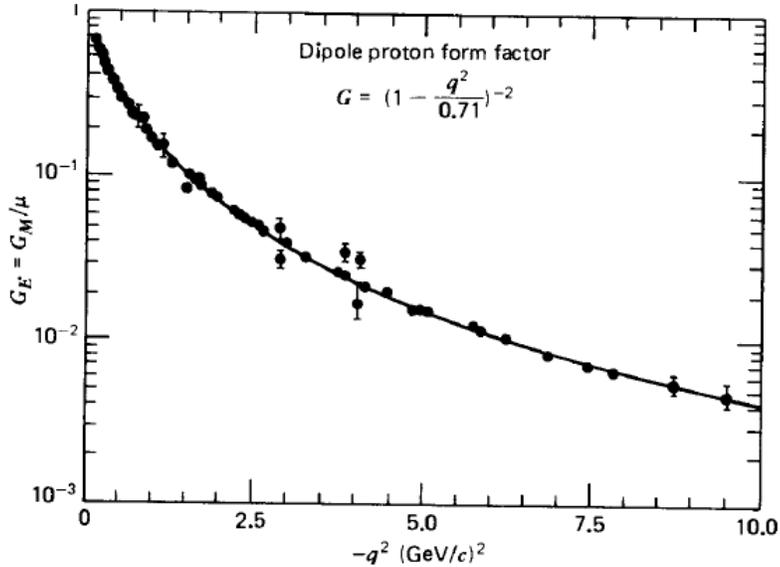


Figure 3: Fattore di forma del protone come funzione di  $q^2$  è possibile verificare sperimentalmente che la formula è del tipo  $G_E = (1 - \frac{q^2}{0.71})^{-2}$ ; Dati dello Stanford Linear Accelerator

## 2.2 scattering anelastico elettrone-protone

Abbiamo trattato in precedenza un urto elastico elettrone-protone ricavando anche alcune proprietà superficiali di quest'ultimo come ad esempio la densità di carica e di massa. Per valutare la struttura interna del protone bisogna utilizzare urti di natura anelastica, che comportano la scissione del protone in varie particelle; si inizierà da un caso più semplice ovvero considerando grandi lunghezze d'onda.

In generale per  $q^2$  modesti il protone si eccita in uno stato delta per poi formare un  $\pi^0$  ovvero avremo la reazione  $ep \rightarrow e\Delta \rightarrow ep\pi^0$ ; invece, se si considerano alti valori di  $q^2$  i risultati diventano più caotici (aumenta il numero di particelle formate) con il protone che perde la sua identità.

Nel calcolo dell'ampiezza nell'urto anelastico elettrone-protone si perdono la gran parte delle somiglianze con il muone in quanto quest'urto ha come risultato finale la formazione delle particelle, a differenza dell'urto tra particelle puntiformi (il muone può produrre altre particelle solo tramite decadimento); di conseguenza la corrente  $J^\mu = u\gamma^\mu\bar{u}$  viene sostituita con  $J^\mu = u\Gamma^\mu\bar{u}$  con  $\Gamma^\mu$  il più generale possibile; inoltre si deve tenere in considerazione che le particelle finali di questo processo sono più di una quindi la  $\bar{u}$  va sostituita con una funzione più complessa.

Tenendo sempre conto della sezione d'urto elettrone-muone, pur essendo a conoscenza delle nette differenze nel caso anelastico, scriveremo la matrice invariante come:

$$|M| = L_{\mu\nu}^e W^{\mu\nu} \quad (14)$$

Con  $W^{\mu\nu}$  che è il tensore adronico, che è la differenza rispetto al caso elettrone-muone (altrimenti avremmo avuto il prodotto  $L_{\mu\nu}^e L^{\mu\nu}$  con  $L^{\mu\nu}$  tensore muonico costruito in maniera simile a quello

elettronico).

Esaminiamo in dettaglio i seguenti tensori;  $L^{\mu\nu}$  è il tensore elettronico che scritto in termini funzionali diventa :

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{sp} \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \{ \sum_{s'} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) \}^\dagger$$

Si può scrivere  $\{ \sum_{s'} \bar{u}(k') \gamma^\nu u(k) \}^\dagger \rightarrow u(k)^\dagger (\gamma^\nu)^\dagger \bar{u}(k')^\dagger \rightarrow \bar{u}(k) \gamma^\nu u(k')$  ( la matrice gamma è hermitiana quindi non varia ), di conseguenza otteniamo che :

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s'} \bar{u}_\alpha^{(s')}(k) \gamma_{\alpha\beta}^\mu \{ \sum_s u_\beta^{(s)}(k) \bar{u}_\gamma^{(s)}(k) \gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta^{(s')}(k') \}$$

Possiamo applicare la relazione di completezza ovvero  $\sum u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = \not{p} + m$  ( $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ ) in questo modo diventa :

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\not{k}' + m)_{\delta\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{k} + m)_{\gamma\beta} \gamma_{\gamma\delta}^\nu$$

Dopodichè se contraggo gli indici bassi ottengo che :

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} Tr((\not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu)$$

si utilizza quindi il teorema della traccia ovvero :

$$Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)$$

da cui:

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} Tr(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) + \frac{1}{2} m^2 Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ L_e^{\mu\nu} &= 2[k'^\mu k^\nu - (k' \cdot k) g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu + 2m^2 g^{\mu\nu}] \\ L_e^{\mu\nu} &= 2[k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - (k \cdot k' - m^2) g^{\mu\nu}] \end{aligned}$$

Il termine  $W_{\mu\nu}$  è detto invece tensore adronico. Esso parametrizza le nostre incognite sull'effetto del propagatore sul protone e la sua struttura iniziale e finale; se si vuole definire questo tensore nel caso più generale possibile, lo si può definire come una combinazione degli elementi  $p, q, g^{\mu\nu}$ , non si parametrizza in funzione di  $\gamma^\mu$  poichè stiamo considerando la sezione d'urto sommando rispetto a tutti i possibili spin, otteniamo quindi che[1]:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu p^\nu + q^\mu q^\nu) \quad (15)$$

Tutti questi termini sono simmetrici essendo  $L_e^{\mu\nu}$  un tensore simmetrico quindi  $W_{\mu\nu}$  deve essere simmetrico inoltre si può notare che è stato ommesso il termine  $W_3$  essendo legato alla violazione della

parità durante uno scattering di tipo debole; quindi è nullo nel nostro caso specifico ( il fotone non viola la parità ).

Data la conservazione della corrente adronica si può definire la seguente proprietà del tensore: [1]

$$q^\mu W_{\mu\nu} = q^\nu W_{\mu\nu} = 0$$

Sapendo questo è possibile ridefinire i termini  $W_5$  e  $W_4$  come combinazione lineare dei termini  $W_1$  e  $W_2$ [1]:

$$W_5 = -\frac{p \cdot q}{q^2} W_2$$

$$W_4 = \left(\frac{p \cdot q}{q^2}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1$$

Di conseguenza è possibile riscrivere il tensore adronico come:

$$W_{\mu\nu} = W_1(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) + \frac{W_2}{M^2} (p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu)(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu) \quad (16)$$

tenendo conto che si sta considerando una approssimazione non relativistica quindi  $|p| \sim M$  e:

$$q^\mu L_e^{\mu\nu} = q^\nu L_e^{\nu\mu} = 0$$

Si ottiene quindi il seguente risultato:

$$|M| = 4W_1(k \cdot k') + \frac{2W_2}{M^2} [2(p \cdot k)(p \cdot k') - M^2 k \cdot k'] \quad (17)$$

Se si considera il sistema di riferimento di laboratorio si arriva alla seguente espressione[1]:

$$|M| = 4EE' \left\{ \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) W_2(\nu; q^2) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) 2W_1(\nu; q^2) \right\} \quad (18)$$

con  $\nu = \frac{p \cdot q}{M}$ .

Una volta nota la matrice invariante, considerando anche il flusso iniziale e la densità di particelle bersaglio si può ricavare la sezione d'urto differenziale della reazione:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'}|_{lab} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left\{ W_2(\nu; q^2) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(\nu; q^2) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (19)$$

Si possono comparare a questo punto le sezioni d'urto del muone, protone ed anelastica; si nota che hanno tutte la medesima forma funzionale che è del tipo :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2 E'}{q^4 E} (L_e^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) \quad (20)$$

Con  $L_e^{\mu\nu}$  tensore dell'elettrone mentre  $W_{\mu\nu}$  tensore relativo alla particella bersaglio.

Se ad esempio consideriamo lo scattering elettrone-muone la sua sezione d'urto è [1]:

$$d\sigma = \frac{1}{4ME} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{dp'}{(2\pi)^3 2p'_0} \left\{ \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{muon} \right\} (2\pi)^4 \delta(p+q-p')$$

Questo risultato può essere ridefinito considerando la forma precedentemente identificata; di conseguenza si individua  $W_{\mu\nu}$  dello scattering come:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \left( \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} \right) \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \langle p, s | \tilde{J}_\mu^\dagger | p', s' \rangle \times \langle p' s' | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p+q-p')$$

con  $\langle p' s' | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle = \bar{u}^{(s')}(p') \gamma_\nu u^{(s)}(p)$ .

Se si vuole considerare invece il tensore  $W_{\mu\nu}$  dello scattering elastico elettrone-protone, si verifica ([1]) che è lo stesso del muone sostituendo in  $\langle p' s' | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle$  al posto di  $\gamma_\nu$  il coefficiente  $\mathcal{F}$  (vedi capitolo 2.1).

Nel caso dello scattering anelastico si verifica ([1]) che  $W^{\mu\nu}$  è una generalizzazione del tensore del muone considerando come stato finale uno stato X che è la somma di tutte le N particelle che si formano dal protone una volta avvenuta la rottura; noto questo otteniamo che: [1]

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \sum_N \left( \frac{1}{2} \sum_s \right) \int \prod_{n=1}^N \left( \frac{d^3p'_n}{2E'_n (2\pi)^3} \right) \sum_{s_n} \langle p, s | \tilde{J}_\mu^\dagger | X \rangle \times \langle X | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle (2\pi)^4 \delta^4(p+q - \sum_n p'_n) \quad (21)$$

### 2.3 scattering anelastico dell'elettrone come una sezione d'urto fotone-protone

Nel "deep inelastic scattering" l'elettrone non ha un ruolo primario infatti ha il compito di generare il fotone virtuale che successivamente interagirà con il protone, quindi l'urto effettivo sarà tra fotone e protone; analizzeremo questo caso inizialmente a grandi lunghezze d'onda per valutarne le proprietà.

Per il calcolo della sezione d'urto si inizia considerando la sezione d'urto di un fotone reale di polarizzazione  $\epsilon$  e con impulso  $q^0 = \nu$  rispetto ad un protone non polarizzato ottenendo:

$$\sigma_{tot}(\gamma p \rightarrow X) = \frac{1}{(2\nu)(2M)} \sum_N \left( \frac{1}{2} \sum_s \right) \int \prod_{n=1}^N \left( \frac{d^3p'_n}{2E'_n (2\pi)^3} \right) \times \sum_{s_n} (2\pi)^4 \delta^4(p+q - \sum p'_n) \epsilon^{\mu*} \epsilon^\nu e^2 \langle p, s | \tilde{J}_\mu^\dagger | X \rangle \langle X | \tilde{J}_\nu | p, s \rangle \quad (22)$$

Anche in questo caso come nelle sezioni d'urto precedenti possiamo notare la medesima forma funzionale (vedi fomula 19) con la differenza che compaiono termini legati al fotone invece dei termini elettronici:

$$\sigma_{tot}(\gamma p \rightarrow X) = \frac{4\pi^2 \alpha}{\nu} \epsilon^{\mu*} \epsilon^\nu W_{\mu\nu}$$

Con  $W_{\mu\nu}$  che in questo caso possiede gli stessi termini del caso inelastico.

Per il passaggio al caso virtuale si considera che il fotone non è più limitato da due fattori di polarizzazione, inoltre la sezione d'urto di un fotone virtuale non è un concetto ben definito legato al fatto che

il suo flusso è arbitrario a differenza del caso reale che è ( in  $q = 0$  )  $4MK$ ; di conseguenza si utilizza la convenzione che il fotone virtuale segue la legge di conservazione della massa invariante quindi:

$$W^2 = (p + q)^2 = M^2 + 2MK$$

$$K = \frac{W^2 - M^2}{2M} = \nu + \frac{q^2}{2M}$$

Questa è nota come convenzione di Hand ( il calcolo è fatto considerando il sistema di laboratorio). Per completare il discorso sulla struttura specifichiamo i vettori di polarizzazioni del fotone virtuale, in funzione dell'elicità ( $\lambda$ ), consideriamo  $\mathbf{q}$  tutto lungo l'asse  $z$ , si ottiene quindi :

$$\lambda = \pm 1 \epsilon_{\pm} = \mp \sqrt{\frac{1}{2}} (0; 1; \pm i; 0)$$

$$\lambda = 0 \epsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{-q^2}} (\sqrt{\nu^2 - q^2}; 0; 0; \nu)$$

Adesso è possibile valutare la sezione d'urto dello scatterig anelastico fotone virtuale protone non polarizzato considerando la formula della sezione d'urto del fotone reale rispetto a tutte le possibili polarizzazioni; applicando questo calcolo si trovano due possibili sezioni d'urto[1]:

$$\sigma_T = \frac{1}{2} (\sigma_{tot}^+ + \sigma_{tot}^-) = \frac{4\pi^2 \alpha}{K} W_1(\nu; q^2) \quad (23)$$

$$\sigma_L = \sigma_{tot}^0 = \frac{4\pi^2 \alpha}{K} \left[ \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) W_2(\nu; q^2) - W_1(\nu; q^2) \right] \quad (24)$$

Si dimostra ([1]) che se  $q^2 \rightarrow 0$   $\sigma_T \rightarrow \sigma^{tot}(\gamma p)$  e  $\sigma_L \rightarrow 0$ , quindi per grandi lunghezze d'onda è possibile considerare la sezione d'urto del fotone reale alla stregua di quello virtuale.

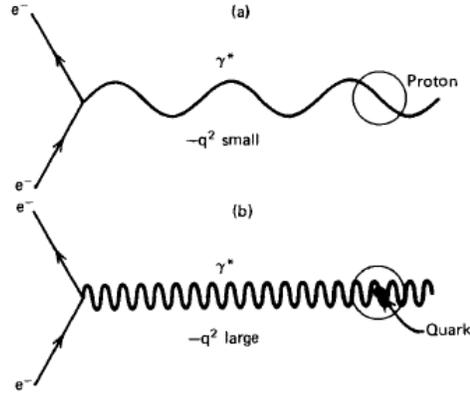


Figure 4: In figura **a** si può notare uno scattering anelastico a bassi valori di  $q^2$ , mentre nella figura **b** invece c'è uno scattering anelastico con alti valori di  $q^2$  e con l'interazione quindi con i partoni

### 3 Partoni

#### 3.1 Bjorken scaling

L'analisi sulla diffusione anelastica consiste in un calcolo della sezione d'urto ipotizzando di avere fotoni ad grandi lunghezze d'onda ( $q^2 \simeq 0$ ); nel caso del "deep inelastic scattering" si utilizzano fotoni con lunghezze d'onda molto piccole (quindi  $q^2 \gg 0$ ) e si nota, sperimentalmente, una invarianza delle funzioni di struttura rispetto al momento del protone ovvero quest'ultimo si comporta come se fosse costituito da particelle puntiformi non interagenti; per questo motivo **Bjorken** ipotizzò che l'urto anelastico elettrone-protone si potesse considerare come un insieme di urti elastici elettrone-particella puntiforme di Dirac, che furono definite **partoni**.

Analizzando i fattori di struttura del protone è possibile notare come andando a valori di  $q^2$  elevati, essi tendono a mutare diventando:

$$2W_1 = \frac{Q^2}{2m} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

$$W_2 = \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

Dove si è introdotta una variabile positiva  $Q^2 = -q^2$  e per  $m$  si intende la massa della particella puntiforme interna al protone mentre per  $\nu$  ha la stessa definizione dell'equazione [18].

Sfruttando la proprietà della delta ( $\delta(\frac{x}{a}) = a\delta(x)$ ) è possibile fare in modo che i fattori di struttura siano in funzione solamente di variabili adimensionali:

$$2mW_1(\nu; Q^2) = \frac{Q^2}{2m\nu} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right)$$

$$\nu W_2(\nu Q^2) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu}\right)$$

Di conseguenza queste due funzioni hanno una dipendenza solo da  $\frac{Q^2}{2m\nu}$  e non dipendono più da  $Q^2$  e  $\nu$  presi separatamente.

Questo risultato può essere confrontato con quello dello scattering elastico protone-elettrone che considerando  $\kappa = 0$  e  $G_E = G_M = G$  forniscono:

$$W_1^{el} = \frac{Q^2}{4M^2} G^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{4M^2}\right)$$

$$W_2^{el} = G^2(Q^2) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{4M^2}\right)$$

A causa del termine  $G(Q^2)$  non è possibile adimensionalizzare le variabili, questo perchè nel caso elastico il fattore  $G(Q^2)$  rappresenta un termine di scala della massa che, come si può vedere nella figura 3 nel capitolo 2, è il termine empirico  $0,71 GeV$  che rappresenta l'inverso della dimensione del protone; di conseguenza se  $Q^2$  è elevato allora diminuisce le possibilità di un urto elastico e il protone tende a rompersi.

Nel caso scattering anelastico ad alti valori di  $Q^2$  si ha l'assenza di questo termine e la dipendenza rimane unicamente da  $\frac{Q^2}{2m\nu}$ ; inoltre si può evidenziare che la massa risulta unicamente un fattore di adimensionalizzazione.

In figura 5 si può notare una verifica del risultato precedente ovvero a fissato  $\omega$  (con  $\omega = \frac{2m\nu}{Q^2}$ ) la funzione di struttura risulta indipendente da  $Q^2$ , si può dedurre quindi che a differenza del caso elastico non presenta fattori di forma che definirebbero una relazione di struttura (come quella in figura 3), generando una dipendenza da  $Q^2$ ; di conseguenza il protone si comporta come un insieme di particelle libere (i partoni ipotizzati da Bjorken).

Una volta considerato questo tipo di diffusione e le conseguenze da esso derivanti, soprattutto dal punto di vista sperimentale, è possibile valutarlo utilizzando un approccio più teorico quindi :

$$\sigma_E = \sum_i \int dx e_i^2 \sigma_{pi}|_{xE, xp} \quad (25)$$

Dove per  $\sigma_E$  si intende la sezione d'urto dello scattering anelastico mentre per  $\sigma_{pi}$  si intende la sezione d'urto dello scattering i-esimo partone-elettrone.

Da questa equazione è possibile notare la presenza di più partoni all'interno del protone, questo perchè si ha una somma su  $i$  dove  $i$  indica una somma su tutti i quark presenti nel protone che possono essere quelli di valenza, del mare, ed i gluoni; inoltre ognuno di questi presenta una frazione di momento del totale  $x$ .

Si introduce quindi la funzione di distribuzione dei partoni :

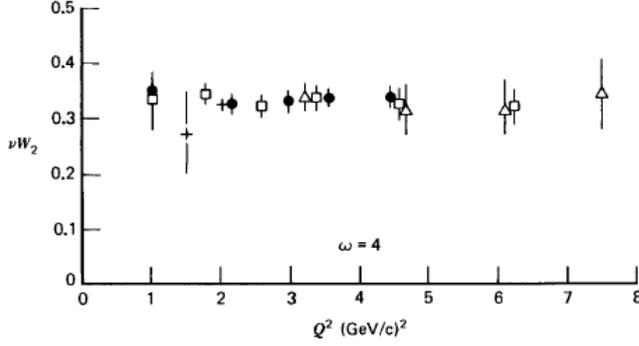


Figure 5: la funzione di struttura  $\nu W_2$  in funzione di  $Q^2$  quando  $\omega = 4$  ; Dati dello Stanford Linear Accelerator

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx} = \begin{matrix} xp & i \\ (1-x)p & \text{altro} \end{matrix}$$

Questa descrive la probabilità che il partone  $i$ -esimo trasporti un momento pari a  $xp$ , essendo questa una distribuzione di probabilità deve essere normalizzata a 1 quindi :

$$\sum_{i'} \int x f_{i'}(x) dx = 1 \quad (26)$$

Dove per  $i'$  si intende una somma su tutti i partoni all'interno del protone.

Una volta definiti i valori di momento ed energia (rispetto a quelli del protone) è possibile schematizzare la cinematica del partone nel seguente modo :

	Protone	Partone
Energia	$E$	$xE$
Momento Longitudinale	$p_L$	$xp_L$
Momento trasversale	$p_T = 0$	$p_T = 0$
Massa	$M$	$m = x^2 E^2 - x^2 p_L^2 = xM$

Quindi il partone interno ad un protone ed il protone stesso si muovono ambedue solo lungo il piano  $xy$  avendo momento lungo l'asse  $z$  nullo ( $p_T = 0$ ).

Per definire la variabile  $x$ , si considera uno scattering anelastico protone-partone con il momento del partone pari a  $xp$ , vengono quindi modificate le funzioni di struttura che diventano:

$$MW_1(\omega) = F_1(\omega) = \frac{Q^2}{4m\nu x} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu x}\right) = \frac{1}{2x^2\omega} \delta\left(1 - \frac{1}{x\omega}\right)$$

$$\nu W_2(\omega) = F_2(\omega) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2m\nu x}\right) = \delta\left(1 - \frac{1}{x\omega}\right)$$

sommando i risultati per tutti i partoni presenti sul protone si ottiene:

$$F_2(\omega) = \sum_i \int dx e_i^2 x f_i(x) \delta\left(x - \frac{1}{\omega}\right)$$

$$F_1(\omega) = \frac{\omega}{2} F_2(\omega)$$

Dalla funzione delta si ottiene che  $x = \frac{1}{\omega}$  quindi è possibile ridefinire le funzioni di struttura in funzione della variabile  $x$ :

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x)$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2x} F_2(x)$$
(27)

Essendo  $\omega = \frac{2m\nu}{Q^2}$  si è dimostrato che la variabile  $x$  coincide con la variabile adimensionale definita in precedenza ovvero  $\frac{Q^2}{2m\nu}$ , quindi la frazione di momento del partone è definita dal fotone virtuale incidente; inoltre è possibile notare che  $F_{1,2}$  sono funzioni di sola variabile  $x$  indipendenti dai valori di  $Q^2$  quindi soddisfacenti l'ipotesi di Bjorken.

Data la nostra variabile adimensionale  $x = \frac{Q^2}{2m\nu}$  questa, essendo una frazione di momento rispetto al protone, deve essere sempre compresa tra 0 ed 1; infatti  $x \geq 0$  perchè è una variabile positiva e il caso 0 indica una non interazione tra le particelle quindi un caso limite, invece sarà  $x \leq 1$  perchè il caso  $x = 1$  è l'urto elastico dove il quadri-impulso si conserva e non è ammissibile il caso  $x > 1$  poichè si ha maggiore energia allo stato finale rispetto a quello iniziale il che è assurdo.

Adesso si vuole dimostrare la validità dell'ipotesi di Bjorken (n.b. il calcolo completo si trova sia sull [1] che sul [4]) e per fare ciò si deve inizialmente identificare il sistema di riferimento adatto. Dato un partone di momento  $xp$  la sua energia sarà  $xE$  solo nel caso in cui la massa è nulla, inoltre un protone può emettere un partone con momento trasverso nullo (ovvero senza nessun angolo di deviazione) solo nel caso in cui la massa di quest'ultimo è nulla; di conseguenza il sistema di riferimento utilizzato è quello di Lorentz dove il quadri-impulso è molto maggiore delle masse prese in considerazione e quindi è possibile trascurarle entrambe.

In questo sistema di riferimento l'impulso del partone interagente rispetto a quello degli altri quarks risulta infinitamente più grande, di conseguenza quest'ultimo si muoverà a velocità prossime a quella della luce determinando la dilatazione del tempo di interazione tra i partoni; invece il tempo di interazione partone-fotone essendo nel medesimo sistema di riferimento sarà un tempo proprio quindi di grandezza infinitamente più piccola di quello partone-partone.

Il partone interagente si comporta come una particella libera priva di interazione e considerando che il calcolo della funzione di struttura, definito come somma di funzioni di particelle non interagenti tra loro, risulterà esatto.

Questa approssimazione è simile a quella impulsiva utilizzata in fisica nucleare, ad esempio nella teoria del modello a shell, in cui i nucleoni sono considerati particelle libere non interagenti tra loro. Esiste tra le due casistiche una differenza quando trattiamo urti di tipo anelastico poichè i nucleoni possono dopo un urto “fuggire” dal nucleo e diventare particelle libere, invece i partoni non possono fuoriuscire liberamente dal nucleo dell’adrone ma devono ricombinarsi con altri partoni “spettatori” e formare nuovi adroni con una probabilità pari a 1 a causa del principio di confinamento del colore.

Ogni particella che risente dell’interazione forte possiede una carica di colore (quindi anche i partoni) ed il principio di confinamento enuncia che cariche di colore isolate non sono osservabili sperimentalmente di conseguenza ogni particella con carica di colore deve obbligatoriamente ricombinarsi per formare un adrone con carica di colore netta nulla, per questo motivo un partone si ricombina formando o una particella mesonica (2 partoni) o una barionica (3 partoni).

Siccome il tempo di ricombinazione dei partoni in adroni è molto maggiore rispetto a quello di interazione allora nel calcolo della sezione d’urto si trascurerà l’effetto dell’adrone generato.

Come si è dimostrato in precedenza il nostro sistema è di tipo relativistico, di conseguenza può essere conveniente utilizzare delle variabili che siano Lorentz invarianti, queste sono le variabili di Mandelstam:

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 \simeq 2k \cdot p \\ t &= (k - k')^2 \simeq -Q^2 \\ u &= (p - k')^2 \simeq -2k' \cdot p \end{aligned}$$

Dove solitamente  $s$  indica la massa invariante della reazione mentre  $t$  è l’impulso trasferito; in questo caso specifico siccome è presente una relazione di massa invariante che lega  $p, k, k'$  allora la variabile  $u$  sarà funzione delle altre due.

Si utilizza la relazione di Bjorken rispetto alle sezioni d’urto che è del tipo:

$$\left. \frac{d\sigma}{dtdu} \right|_{ep \rightarrow eX} = \sum_i \int dx f_i(x) \left( \left. \frac{d\sigma}{d\tilde{t}d\tilde{u}} \right) \right|_{eq \rightarrow eq} \quad (28)$$

$\tilde{t}$  e  $\tilde{u}$  indicano che nell’interazione elettrone-partone si considera un momento del tipo  $xp$  sul partone interagente di conseguenza le variabili di Mandelstam vengono modificate e diventano del tipo:

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= xs \\ \tilde{u} &= xu \\ \tilde{t} &= t \end{aligned}$$

Per il calcolo delle sezione d’urto elettrone-partone si considera il caso elettrone-muone in variabili invarianti (essendo i partoni particelle di Dirac puntiformi) si ha:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\tilde{t}d\tilde{u}} \right|_{eq \rightarrow eq} = x \left. \frac{d\sigma}{dtdu} \right|_{eq \rightarrow eq} = x \frac{2\pi^2 \alpha e_i^2}{t^2} \left( \frac{s^2 + u^2}{s^2} \right) \delta(t + x(s + u)) \quad (29)$$

Per il calcolo della sezione d’urto anelastica  $ep \rightarrow eX$  si utilizza invece la formula dell’equazione 20 riscritta nelle variabili invarianti ottenendo quindi:

$$\frac{d\sigma}{dtdu} \Big|_{ep \rightarrow eX} = \frac{4\pi^2\alpha}{t^2s^2} \frac{1}{s+u} [(s+u)^2 xF_1 - usF_2] \quad (30)$$

In questo caso sono stati sostituiti i termini  $W_1$  e  $W_2$  con i loro corrispettivi adimensionali  $F_1$  e  $F_2$ . Utilizzando la relazione [28] sostituendo le sezioni d'urto calcolate [29] e [30] si ottiene la relazione di Callan-Gross:

$$2xF_1 = F_2 = \sum_i x e_i^2 f_i(x) \quad (31)$$

Questa è la relazione già trovata sperimentalmente ed è la base del modello a partoni di Bjorken.

Questa è una relazione importante poichè ci permette di dimostrare che i quark sono particelle di spin  $\frac{1}{2}$  infatti se si considera la sezione d'urto fotone virtuale-partone (equazioni 23 e 24) con  $Q^2 \rightarrow \infty$  e  $\nu \rightarrow \infty$  si dimostra che:

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_T} \rightarrow 0$$

Quindi se il quark avesse spin 0, considerando una collisione "head-on", potrebbe assorbire solo un fotone con elicità 0, quindi la  $\sigma_T$  sarà nulla; se invece il quark ha spin  $\frac{1}{2}$  allora può assorbire solo un fotone con elicità pari a  $\pm 1$  quindi  $\sigma_L$  è nulla di conseguenza siccome si dimostra che usando la relazione di Callan-Gross  $\frac{\sigma_L}{\sigma_T} \rightarrow 0$  vuol dire che i quark all'interno della struttura del protone sono di spin  $\frac{1}{2}$ .

## Conclusione

In conclusione, l'analisi dei dati del "deep inelastic scattering" dei leptoni sui nucleoni rivela la presenza di particelle puntuali, di Dirac, interne agli adroni attraverso l'invarianza di Bjorken. Uno studio dei numeri quantici di questi partoni permise di identificarli con i quarks precedentemente teorizzati da Gell-Mann.

Si noti che sommando tutti i momenti associati ai partoni non si ottiene il momento del protone questo effetto fu interpretato con l'esistenza di particelle che non erano identificabili nel "deep inelastic scattering" in quanto prive carica e perciò dette "partoni neutri"[1]; successivamente queste particelle furono identificate con i gluoni.

I risultati ottenuti attraverso l'analisi di questo fenomeno hanno comportato conseguenze rilevanti quali:

- I quarks che inizialmente erano un ausilio matematico costruito ad hoc per ottenere le proprietà degli adroni, attraverso l'analisi del "deep inelastic scattering" è stata loro conferita dignità di particelle elementari. (è bene precisare che tutt'oggi non si è riusciti a produrre stati asintotici )
- Il "deep inelastic scattering" è l'esperimento promotore della nascita di una nuova branca della fisica, ovvero la cromodinamica quantistica, che studia le interazioni forti tra i quark all'interno di una struttura adronica.

## Bibliografia

- [1]Halzen, Francis; Martin, Alan (1984). Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.ed. John Wiley & Sons
- [2]Sakurai, J. J. (1967). Advanced Quantum Mechanics ed.Addison Wesley
- [3]A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell (2003), ed.Princeton University Press
- [4]M. Peskin, D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory ed.Westview Press, 1995