

Università degli Studi di Napoli
“Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea Triennale in Fisica

Misura delle distanze in Cosmologia ed il problema della Dark Energy

Relatore:

Prof. Ester Piedipalumbo

Candidato:

Francesco Maria

Schiavone

N85000764

A.A. 2016/2017

Indice

Introduzione	iii
1 Le Equazioni di Friedmann	1
1.1 La metrica FLRW	1
1.1.1 La legge di Hubble	2
1.2 Il redshift	4
1.3 Osservabili cosmologici	6
1.3.1 La distanza di luminosità e la distanza di diametro angolare . . .	6
1.4 Dalle equazioni di campo di Einstein a quelle di Friedmann	7
1.4.1 Le equazioni di Friedmann	8
2 L'evoluzione dell'Universo e l'Energia Oscura	11
2.1 L'equazione di stato	12
2.1.1 L'equazione di stato per la materia	12
2.1.2 L'equazione di stato per la radiazione	13
2.1.3 L'equazione di stato per una generica componente e le equazioni di Friedmann	15
2.2 L'energia oscura	16
2.2.1 L'equazione di stato per l'energia oscura	17
3 Effetti locali di disomogeneità sulle distanze: la distanza di Dyer-Roeder	19
3.1 Le equazioni di Heun e Legendre	23
3.2 La distanza di Dyer-Roeder ed il modulo della distanza al variare del parametro di clumpiness	24

Introduzione

I fenomeni della fisica pre-relativistica avvengono nello spazio piatto della geometria euclidea, che si basa sui cinque postulati di Euclide. Nel corso del tempo si è dibattuto sull'indipendenza o meno del quinto di questi postulati rispetto agli altri quattro, fino all'Ottocento, quando Gauss (1824), Bolay (1832) e Lobachevski (1826), ciascuno indipendentemente dagli altri, formularono una geometria che soddisfaceva tutti i postulati di Euclide *eccetto l'ultimo*, ergo dimostrandone l'indipendenza logica. Gauss, in particolare, nel *Disquisitiones generales circa superficies curvas* del 1827, selezionò gli spazi metrici bidimensionali per i quali, data una regione di spazio sufficientemente piccola, fosse possibile la scelta di un sistema di coordinate (ξ^1, ξ^2) , dette *localmente euclidee*, tali che la distanza tra due punti infinitamente vicini, $P = (\xi^1, \xi^2)$ e $P' = (\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$, soddisfacesse il teorema di Pitagora $ds^2 = (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2$. Quest'ultima relazione, verificata *localmente*, a seguito del passaggio dal sistema di coordinate localmente euclidee ad uno generico, diviene $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$: $g_{\mu\nu}$ è detto **tensore metrico** e le sue componenti sono definite mediante le derivate $\frac{d\xi^i}{dx^j}$ per $i, j = 1, 2$; la sua importanza risiede, dunque, nel fatto che permette di esprimere la distanza tra due punti infinitamente vicini in qualsiasi sistema di coordinate e di determinare le proprietà intrinseche dello spazio.

Tutto ciò è estendibile a spazi di dimensione arbitraria e di particolare interesse per l'ambito fisico è il caso in cui le dimensioni siano quattro, ovvero il caso dello spaziotempo: tali risultati, che portarono alla nascita di geometrie non-euclidee, furono di rilevanza notevole per la formulazione matematica della Relatività Generale. Il **Principio di Equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale** fa sì che la forza gravitazionale assuma una proprietà esclusiva non verificata da altri tipi di forze: è possibile, infatti, nella stessa maniera per tutti i corpi, individuare un sistema di riferimento *locale* in cui essa si annulli. Tale caratteristica peculiare del campo gravitazionale permette di rendere il moto di un oggetto qualsiasi in interazione con esso indipendente dall'oggetto stesso e dipendente unicamente da come il campo modifica lo spazio in cui questo va a muoversi. L'analisi del moto di un corpo all'interno di un campo gravitazionale, dunque, può essere ricondotta a proprietà geometriche dello spazio. Il Principio di Equivalenza tra i due tipi di masse con le sue conseguenze, di rilevanza fondamentale nell'ambito della teoria della Relatività Generale, allora, è riespresso mediante quello che è detto semplicemente **Principio di Equivalenza**, che, nella *forma forte*, enuncia

In un campo gravitazionale arbitrario, in un qualsiasi punto dello spaziotempo si può scegliere un sistema di riferimento localmente inerziale tale che, in un intorno sufficientemente piccolo del punto, tutte le leggi della fisica assumano la stessa forma che hanno in assenza di gravità, cioè la forma prevista dalla Relatività Speciale.

Tale principio richiama l'assioma in base al quale si è detto che Gauss selezionasse geometrie non-euclidee, cosa che porta ad ipotizzare la rilevanza fondamentale del tensore metrico nell'ambito della Relatività Generale. Purtuttavia, qual è la relazione che lo lega al campo gravitazionale?

Se si considera una particella libera in un sistema di riferimento localmente inerziale, l'equazione del suo moto, se τ è il tempo proprio, corrisponde a

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0$$

che, passando ad un sistema di riferimento arbitrario, tenendo conto della forza di gravità e delle forze inerziali, diventa

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \left[\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \right] = 0$$

Dei due addendi, nel caso di assenza di forze inerziali, sopravvive solamente il secondo: esso corrisponde al campo gravitazionale, a sua volta derivata del potenziale gravitazionale. Dunque, essendo il secondo termine definito a partire da derivate seconde delle coordinate localmente euclidee rispetto a quelle arbitrarie e ricordando come sono definite le componenti di $g_{\mu\nu}$, si può affermare che il tensore metrico generalizza il potenziale newtoniano e, pertanto, assume un duplice ruolo: esso descrive la geometria dello spazio, permettendo di definire le distanze, ed acquista, inoltre, significato fisico alla luce della sua relazione con il potenziale gravitazionale.

Il presente elaborato tratta, nell'ambito del modello cosmologico di Friedmann, della visione dell'Universo come ambiente omogeneo, isotropo e dinamico e di alcuni dei maggiori problemi della cosmologia moderna, partendo da un'iniziale introduzione alle principali grandezze fisiche cosmologiche e procedendo con la derivazione delle equazioni e delle relazioni fondamentali necessarie all'analisi del cosmo e della sua evoluzione, arrivando in ultima istanza a confrontare, nel caso di presenza di disomogeneità locali nella distribuzione della materia dell'universo, previsioni teoriche e dati osservativi riguardanti importanti osservabili legate alla distanza di oggetti astronomici.

Nel primo capitolo viene delineata la metrica che descrive lo spaziotempo una volta assunto il principio cosmologico e, quindi, supposto che l'Universo sia omogeneo ed isotropo per opportune scale. Successivamente si definiscono alcune tra le grandezze fisiche primarie nell'indagine cosmologica, scrivendo relazioni che le leghino tra di loro e poi si procede con la determinazione delle Equazioni di Friedmann, riscrittura delle Equazioni di Campo di Einstein nel modello descritto.

Il secondo capitolo procede con la trattazione di alcuni dei più pressanti problemi per la cosmologia, quali quello dell'energia oscura e della materia oscura, per i quali si accenna brevemente ad alcuni dei possibili modelli che ne spieghino l'essenza, facendo particolare attenzione alla costante cosmologica nel caso del primo. Le due componenti "oscure" sono altresì inserite nell'ottica dell'influenza delle componenti dell'Universo sulla sua storia, la sua evoluzione ed il suo futuro, andando a delineare, per ciascuna di esse, un'equazione di stato rilevante nella modellizzazione matematica.

Nella parte finale si effettua un'analisi di carattere matematico e comparativo con i dati ottenuti dalle osservazioni per la determinazione della distanza di diametro angolare nel caso si considerino gli effetti dovuti alla disomogeneità locale

dell'universo a partire dall'equazione di Dyer-Roeder e ci si concentra, partendo sempre da discussioni di carattere generico, sul caso in cui l'universo sia piatto e l'energia oscura sia rappresentata dalla costante cosmologica.

Capitolo 1

Le Equazioni di Friedmann

La cosmologia, nel fare uso della modellizzazione dell'universo e degli strumenti derivanti dalla Teoria della Relatività Generale, si basa su un'importante assunzione, ovvero quella che l'universo sia omogeneo ed isotropo su una scala opportunamente grande. Pertanto, sebbene questo non appaia vero per piccole scale, a livello di superammassi di galassie l'aspetto generale del cosmo non dipende dalla posizione dell'osservatore e dalla direzione di osservazione. Tale enunciato è noto come *principio cosmologico*, ed è altresì considerabile come un'estensione a livello cosmico del *principio copernicano*, secondo cui l'uomo non occupa una posizione privilegiata nel cosmo e presuppone che le leggi della fisica rimangano le stesse nello spostarsi da un punto ad un altro qualsiasi nell'universo. Dunque, nonostante esistano validi modelli cosmologici rivolti ad un universo disomogeneo ed anisotropo (si consulti [1] per comprenderne le ragioni), emerge in maniera evidente l'importanza di modelli che prendano le mosse dal suddetto principio (forte di evidenze sperimentali, [1]).

1.1 La metrica FLRW

A partire dall'espressione generica per una metrica (si sottintende la sommatoria per indici ripetuti in alto ed in basso e gli indici greci variano tra 0 ed 1), $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, si può vedere [2] che la metrica che descrive uno spazio-tempo quadridimensionale omogeneo ed isotropo è

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 + kr^2/4}[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

la quale risulta determinata a meno di un fattore di scala $a(t)$. Quella appena individuata è detta **metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker** o, più semplicemente, **metrica FLRW**. In particolare, la costante k , anche detta *parametro di curvatura*, può assumere un qualsiasi valore reale; tuttavia, potendosi $|k|$ assorbire in una ridefinizione di r , si considereranno per essa unicamente i casi $k = 0, \pm 1$. Poiché k compare solo nella parte spaziale della metrica FLRW, influenza unicamente la geometria dello spazio tridimensionale: nella fattispecie, per $k = 0$ essa sarà euclidea e lo spazio *piatto*. Diversa è la situazione in cui $k = \pm 1$: in tali casi, infatti, lo spazio non è più piatto e risulta utile effettuare la trasformazione

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} \equiv d\chi^2 \tag{1.1}$$

che comporta $r = \sin \chi$ per $k = 1$ e $r = \sinh \chi$ per $k = -1$. Nel primo caso la parte spaziale della metrica assume la forma

$$d\sigma^2 = a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

e si può dimostrare [3] che uno spazio così descritto è finito: l'universo è detto *chiuso* o *sferico*. Se $k = -1$, invece, la metrica spaziale diviene

$$d\sigma^2 = a^2(t)[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

e si può verificare [3] che lo spazio in questo caso è infinito come per $k = 0$: l'universo, per questi due valori di k , è detto *aperto* o, specificamente nel caso $k = -1$, *iperbolico*. Partendo dalla 1.1, in realtà, si può riscrivere r come una funzione di χ al variare del parametro k e, dunque, indicandola come $r_k(\chi)$, si definisce

$$r_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & \text{se } k = 1 \\ \chi, & \text{se } k = 0 \\ \sinh \chi, & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

che, in forma più compatta, si può riscrivere come

$$r_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) \quad (1.2)$$

dove il caso di universo piatto è ottenibile effettuando il limite di quest'espressione per k che tende a 0^- .

1.1.1 La legge di Hubble

Risulta chiaro che se, a partire dalla metrica FLRW, si assegnano le coordinate r, θ, ϕ ad un tempo fissato t_0 , la funzione del tempo $a(t)$ funge da fattore che regola l'espansione o la contrazione delle distanze spaziali e, dunque, dell'universo. La distanza fisica misurata lungo una geodetica di tipo luce ($ds = 0$) è uguale, per piccole distanze di propagazione e per $d\theta = d\phi = 0$, a $d = cdt \approx a(t)dr$. In questo modo, derivando la precedente espressione rispetto al tempo, si ha che, ponendo $v \equiv \dot{d}$,

$$v = \dot{a}dr = Hd \quad (1.3)$$

dove si è definito

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

La relazione 1.3 prende il nome di **Legge di Hubble** e la quantità H è detta *costante* o *parametro di Hubble*, corrispondente al tasso di espansione dello spazio al tempo dell'osservazione. La legge di Hubble è valida per un qualsiasi sistema che si espanda o contragga in maniera omogenea ed isotropa ed è una delle leggi fondamentali riguardanti l'espansione dell'universo. Il moto degli oggetti astronomici dovuto unicamente alla dilatazione spaziale è detto *flusso di Hubble*. Se si considera, inoltre, il valore assunto dal parametro di Hubble all'epoca corrente e lo si indica con H_0 , si può stimare a partire da esso l'età dell'universo nell'ipotesi che la velocità di recessione v tra due

oggetti cosmologici (galassie, ad esempio) sia rimasta costante nel tempo (si richiede, cioè, che non sia intervenuta alcuna forza esterna a modificare la posizione tra i due):

$$t_H \equiv H_0^{-1} = \frac{d}{v}$$

dove t_H è altresì detto *tempo di Hubble*. Basandosi sul valore misurato di H_0 odierno, ovvero $H_0 = 100 \text{ h km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ con $h = 0.72 \pm 0.08$, si ottiene un t_H pari a $9.78 \times 10^9 \text{ h}^{-1} \text{ anni}$ [4], che costituisce una stima alquanto rozza dell'effettiva durata della vita dell'universo, in quanto si è utilizzato un parametro costante invece di una quantità variabile nel tempo quale è $H(t)$ e che dipende dall'andamento, nelle varie ere cosmologiche, dell'espansione dell'universo a seconda della componente dominante tra materia ed energia (tale argomento verrà affrontato nel prossimo capitolo). A partire da H_0 si può effettuare un'ulteriore tipo di valutazione: si può stimare, infatti, quanto sia ampio l'*orizzonte degli eventi*, ossia la massima distanza (anche detta *distanza di Hubble*) che un fotone ha potuto percorrere compatibilmente con la durata della vita dell'universo. Si ha, allora, che

$$d_H \equiv \frac{c}{H_0} = 2998 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$$

Anche in questo caso, chiaramente, quella appena ottenuta risulta meramente una stima per eccesso o per difetto di una quantità il cui vero valore dipende dal modo in cui si è evoluto l'universo.

Come si può notare, la distanza d considerata nella discussione precedente che ha portato alla formulazione della legge di Hubble, nell'ipotesi aggiuntiva che l'oggetto osservato non si muova di moto proprio (si richiede, ovvero, che l'oggetto si muova col flusso di Hubble), è una quantità che dipende dal tempo attraverso il fattore di scala $a(t)$: essa, dunque, è una distanza dinamica chiamata *distanza propria* ed indicata con d_p . Per poter eliminare tale tipo di dipendenza temporale e "fissare" le distanze di oggetti facenti parte del flusso di Hubble (la cui variazione, pertanto, è ascrivibile unicamente all'espansione dell'universo) rispetto ad un determinato sistema di riferimento, si presenta conveniente la scelta di opportuni sistemi di coordinate, detti *comoventi*, che si espandono con l'universo stesso. In tali tipi di sistemi, in cui la coordinata temporale coincide con il tempo proprio, le coordinate spaziali partecipano al moto di espansione e si muovono insieme agli oggetti astronomici, rimanendo così l'intervallo tra due oggetti qualsiasi dell'universo inalterato nel tempo in quanto l'espansione stessa dello spazio non è generata da una variazione della loro posizione ma dal cambiamento della metrica che descrive lo spazio-tempo. A questo punto si può definire un nuovo tipo di distanza, la *distanza comovente* o *assoluta*, nella seguente maniera:

$$d_c = \int_0^{\chi} d\chi' \quad (1.4)$$

dove χ è ottenuto a partire dalla relazione 1.1 (e, quindi, assume diverse espressioni in funzione di r al variare del parametro di curvatura k). La definizione 1.4, nel caso si consideri un fascio di luce emesso da una sorgente per $t = t_0$ che viaggia lungo la direzione χ e soddisfacente, perciò, l'equazione $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 = 0$, risulta equivalente a

$$d_c = \int_{t_0}^t \frac{c}{a(t')} dt'$$

dove t corrisponde al tempo in cui il fascio arriva all'osservatore posto nell'origine del sistema di coordinate comoventi. Alla luce di quanto appena detto, allora, d_p si può più rigorosamente definire mediante le coordinate comoventi nella seguente forma:

$$d_p = \int_0^x a(t) d\chi'$$

la quale porta ad una relazione in qualche modo intuitiva tra distanza propria e distanza comovente:

$$d_p(t) = a(t)d_c$$

Nella fattispecie, all'epoca presente, per la quale $t = 0$, si pone $a_0 \equiv a(t = 0) = 1$, da cui si ottiene che $d_p = d_c$: in questo modo le distanze astronomiche (ossia quelle proprie) misurate all'epoca presente sono anche distanze comoventi, ergo fissate per sempre. Per esempio, seguendo tale procedimento, la distanza comovente tra la Via Lattea e l'Ammasso della Vergine è di circa 15 Mpc ad ogni epoca [2].

1.2 Il redshift

In generale le distanze, così come le quantità d e v coinvolte nella legge di Hubble 1.3, non sono grandezze facilmente misurabili in maniera diretta; nella pratica, allora, si considera un osservabile che può essere misurato facilmente: la lunghezza d'onda della luce emessa da sorgenti astronomiche, a partire dalla quale si definisce una grandezza dal valore cruciale nell'analisi cosmologica, il **redshift** z .

Si consideri una sorgente di luce che sia a riposo. L'intervallo spaziale tra due creste dell'onda elettromagnetica emessa sia $\lambda_0 = cdt$, dove λ_0 è chiaramente la lunghezza d'onda e c la velocità della luce. Se, nello stesso tempo dt , la sorgente si allontana dall'osservatore ad una velocità pari, in modulo, a v , l'intervallo spaziale tra le creste dell'onda si dilata di una quantità pari alla distanza coperta dalla sorgente durante il moto di allontanamento, ovvero vdt . Pertanto, per velocità non relativistiche, l'osservatore misurerà una nuova λ , indicata con λ_e , tale che $\lambda_e = cdt + vdt$: vi è, dunque, un effetto Doppler che comporta

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

Se adesso si immagina che il segnale luminoso sia emesso da una sorgente che si allontana dall'osservatore perchè in moto con il flusso di Hubble, valendo che $v = Hd$ per la legge di Hubble, si ottiene una relazione tra la variazione di lunghezza d'onda ed il fattore di scala $a(t)$:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{Hd}{c} = -Hdt = \frac{-da}{a}$$

dove si è considerato l'intervallo negativo $dt = t_{emissione} - t_{osservazione}$. Integrando, poi, la relazione appena individuata

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-da}{a}$$

e, ricordando che all'epoca presente $a_0 = 1$, si ottiene che la lunghezza d'onda λ osservata è

$$\lambda_e = \frac{\lambda_0}{a_e} \tag{1.5}$$

dove a_e corrisponde al valore di $a(t)$ all'epoca dell'emissione del segnale.

A questo punto si definisce il **redshift** come

$$z = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_0}$$

e, tenendo in conto la 1.5, si giunge all'espressione

$$1 + z = \frac{1}{a} \quad (1.6)$$

Quella così individuata è una relazione di grande importanza, perchè collega tra loro una quantità facilmente misurabile quale il redshift z con l'importante fattore cosmologico di scala, associato all'espansione o contrazione dell'universo.

In realtà, l'interpretazione del redshift come un effetto Doppler è valida solo per distanze non troppo grandi, in quanto la relazione $d\lambda/\lambda = v/c$ andrebbe modificata per via degli effetti relativistici. Purtuttavia, si può dimostrare che la relazione 1.6 rimane valida: si considerino, a questo scopo, due impulsi luminosi emessi da una sorgente per $t = t_e$ e $t = t_e + dt_e$ lungo la direzione χ che giungono all'osservatore posto nell'origine, rispettivamente, a $t = t_0$ e $t = t_0 + dt_0$. Pertanto, considerando la distanza comovente d_c , è valida la seguente uguaglianza

$$d_c = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

da cui deve valere che

$$\int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)} = 0$$

Per intervalli di tempo sufficientemente piccoli, poi, nei due integrali si ha che, rispettivamente, $a(t) \approx a(t_0)$ e $a(t) \approx a(t_e)$, perciò si giunge a

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_e}{a(t_e)}$$

Da quest'ultima relazione, allora, si ottiene infine che

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$$

che corrisponde proprio alla 1.6.

Si mostra, in ultima istanza, come ottenere una relazione tra il redshift ed il tempo che verrà ripresa più volte in seguito. Alla luce dei risultati finora ottenuti e, nella fattispecie, della 1.6, si può scrivere che

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + z) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) = -\frac{\dot{a}}{a^2}$$

la quale, ricordando com'è definito il parametro di Hubble ed utilizzando ancora la 1.6 per l'ultimo membro, conduce a

$$\frac{dz}{dt} = -(1 + z)H \quad (1.7)$$

Quest'ultima equazione, infine, comporta naturalmente una relazione tra dz e dt del seguente tipo:

$$dt = -\frac{dz}{(1 + z)H} \quad (1.8)$$

1.3 Osservabili cosmologici

Si provvede, adesso, a mostrare come mettere le definizioni cosmologiche finora presentate in relazione con gli osservabili astrofisici. In primo luogo si definisce la *magnitudine* M , funzione della luminosità L_0 (energia emessa per unità di tempo) di una sorgente:

$$M = -2.5 \log L_0 + M_X$$

dove la costante M_X è scelta arbitrariamente e dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione considerata. Ad esempio, nel caso del Sole si ha che $M_B = 5.48$ (B sta ad indicare la lunghezza d'onda corrispondente al blu, ovvero circa 4400 Å) e $L_{Sole} \simeq 4 \times 10^{33} \text{erg s}^{-1}$ ([2]). La *magnitudine apparente* m , invece, è definita come

$$m = -2.5 \log f + m_{cost}$$

dove f è il flusso di energia ad una distanza comovente $d_c \equiv \chi$ dalla sorgente e, in una generica geometria, è uguale a

$$f = \frac{L_0}{4\pi r_k^2(\chi)(1+z)^2}$$

dove $r_k(\chi)$ è la funzione definita in 1.2. La costante m_{cost} , inoltre, è tale da fare in modo che m si annulli per una sorgente tale che $f = 2.5 \times 10^{-5} \text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Da ciò segue che $m = M + 25 + 5 \log d$, con $d \equiv r_k(\chi)$ misurato in Mpc. In particolare, quella che risulta interessante per le osservazioni è la quantità $m - M$ che è proporzionale al log d e che costituisce, di fatto, una misura della distanza; essa è detta *modulo di distanza*.

1.3.1 La distanza di luminosità e la distanza di diametro angolare

Un'ulteriore definizione di distanza (utilizzata, ad esempio, nelle osservazioni delle SN Ia per mettere in relazione la luminosità di questa tipologia di supernovae con il tasso di espansione dell'universo; si veda [4]) che si presenta utile in ambito cosmologico è la *distanza di luminosità*, definita mediante

$$d_L^2 \equiv \frac{L_S}{4\pi f}$$

dove L_S è la luminosità *assoluta* della sorgente (emessa alla distanza comovente d_c con il redshift z) ed f è il flusso definito in precedenza. Si osservi che, invece, la L_0 considerata poc'anzi è la luminosità *osservata*, ovvero rilevata in $d_c = 0$ e $z = 0$ dall'osservatore. Risulta facile comprendere, allora, che

$$d_L^2 = r_k^2(\chi) \frac{L_S}{L_0} \quad (1.9)$$

Ci si focalizza, adesso, sul rapporto L_S/L_0 . Considerando l'energia del fascio luminoso emesso nell'intervallo di tempo Δt_1 , ΔE_1 , la luminosità assoluta corrisponde a $L_S = \Delta E_1/\Delta t_1$; similmente si ha, per la luminosità osservata, che $L_0 = \Delta E_0/\Delta t_0$, dove ΔE_0 è l'energia misurata dall'osservatore nell'intervallo di tempo Δt_0 . Essendo l'energia di un fotone altresì inversamente proporzionale alla sua lunghezza d'onda λ , vale che

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 + z$$

In aggiunta, data la natura costante di $c = \lambda/\Delta t$, velocità della luce, è vero che $\lambda_1/\Delta t_1 = \lambda_0/\Delta t_0$, con λ_1 e λ_0 corrispondenti alla lunghezza d'onda della radiazione rispettivamente nei punti di emissione e di rilevazione. Da quest'ultima relazione, quindi, si arriva ad ottenere che

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 + z$$

Ciò permette di dire che il rapporto tra luminosità assoluta ed osservata corrisponde a

$$\frac{L_S}{L_0} = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = (1 + z)^2 \quad (1.10)$$

e, tenendo conto delle equazioni 1.9 e 1.10, la distanza di luminosità si riduce a

$$d_L = r_k(\chi)(1 + z)$$

È stata appena individuata, quindi, un'ulteriore relazione che collega tra loro importanti grandezze cosmologiche quali, in questo caso, distanza e redshift.

Si introduce, infine, un'ultima definizione di distanza: la *distanza di diametro angolare* d_A , definita come

$$d_A = \frac{\Delta x}{\Delta \theta}$$

dove $\Delta \theta$ è l'angolo che sottende un oggetto di dimensione Δx ortogonale alla linea di visuale. Questo tipo di distanza appena introdotta è spesso usata per le osservazioni delle anisotropie riscontrate nella *Cosmic Microwave Background (CMB)* [4]. Poiché la fonte di onde elettromagnetiche che si sta considerando giace sulla superficie di una sfera di raggio $r_k(\chi)$ avente nel suo centro l'osservatore, la lunghezza Δx al tempo t_1 nello spaziotempo descritto dalla metrica FLRW è data da

$$\Delta x = a(t_1)r_k(\chi)\Delta \theta$$

Detto ciò, allora, la distanza di diametro angolare diventa

$$d_A = a(t_1)r_k(\chi)$$

che, data la 1.6, si riscrive come

$$d_A = \frac{r_k(\chi)}{(1 + z)} \quad (1.11)$$

1.4 Dalle equazioni di campo di Einstein a quelle di Friedmann

Le *equazioni di campo di Einstein*, sviluppate (si consulti [5] per una dimostrazione) dal fisico tedesco in seno alla propria teoria della Relatività Generale nel 1915, sono dieci equazioni differenziali lineari del secondo ordine alle derivate parziali aventi come incognite le componenti del tensore metrico $g_{\alpha\beta}$: esse descrivono, di fatto, la geometria dello spaziotempo e la sua curvatura ponendole in relazione con la densità di materia-energia e la pressione mediante il *tensore energia-impulso*, indicato con $T_{\mu\nu}$.

Queste equazioni, nella versione teorizzata in prima istanza e dunque antecedentemente all'aggiunta della *costante cosmologica*, assumono la forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

dove $G_{\mu\nu}$ è detto *tensore di Einstein* e G è la costante di gravitazione universale. Nella fattispecie, $G_{\mu\nu}$ è definito come

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

con $R_{\mu\nu}$ il *tensore di Ricci* ed R la sua traccia, chiamata *curvatura scalare*. Le derivate fino al secondo ordine del tensore metrico, l'effettiva incognita delle equazioni, sono contenute nel tensore di Ricci o, più precisamente, nei *simboli di Christoffel* mediante i quali esso è definito:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\beta}$$

dove $\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} \equiv \partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} / \partial x^{\beta}$. Le equazioni di Einstein sono ricavate imponendo tre condizioni [5]:

1. esse devono soddisfare il *principio di covarianza generale*, vale a dire che devono essere invarianti per generiche trasformazioni di coordinate;
2. il tensore energia impulso $T_{\mu\nu}$ deve obbedire alla legge di conservazione

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$$

ossia deve annullarsi la sua derivata covariante, che corrisponde per esteso a $T_{;\mu}^{\mu\nu} = T_{,\mu}^{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} T^{\mu\alpha} = 0$;

3. le equazioni, in approssimazione di campo debole e a velocità molto minori di quella della luce, devono ricondursi a quella di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

la quale corrisponde alla relazione classica tra il potenziale gravitazionale Φ in un punto e la densità di massa ρ .

1.4.1 Le equazioni di Friedmann

Nel 1922 Alexander Friedmann ricavò, a partire dalle equazioni di Einstein 1.12 sopra discusse, una volta delineata una metrica (la metrica FLRW, appunto) nell'ipotesi di omogeneità ed isotropia dell'universo, le equazioni che da lui prendono il nome. Una delle peculiarità concettuali alla base del modello da lui portato avanti, era proprio l'idea che l'universo non fosse statico ma che fosse, invece, in contrazione od in espansione seguendo il fattore di scala $a(t)$, ancor prima che arrivassero conferme sperimentali (la legge di Hubble fu formulata solo nel 1929) ed in un periodo in cui era largamente diffusa ed accettata la convinzione di un universo statico che aveva portato Einstein all'aggiunta di un fattore correttivo¹ $\Lambda g_{\mu\nu}$ al primo membro delle 1.12, dove Λ è la

¹Secondo quanto riportato da George Gamow, A. Einstein stesso, una volta evidente il fatto che l'universo fosse in espansione, definì questa scelta come "Il mio più grande errore".

sopramenzionata costante cosmologica. Le equazioni di Friedmann consistono in due equazioni differenziali ordinarie (fino al secondo ordine) la cui funzione incognita è proprio il fattore di scala (e k assume funzione di parametro), unico grado di libertà che rimane alle 1.12 una volta che si sia introdotto il principio cosmologico e contenente le informazioni necessarie a conoscere la dinamica dell'universo. Assumendo il principio cosmologico e tenendo in conto che, per come sono state scritte le 1.12, $\Lambda = 0$, l'universo si suppone rappresentabile come un fluido uniforme in cui le galassie stesse possono essere considerate come delle particelle che lo compongono [6]: in tale modellizzazione il tensore energia-impulso acquista la forma

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (1.13)$$

dove ρ e p corrispondono rispettivamente ad una densità di energia e ad una pressione. A questo punto, data la metrica FLRW e ricordando la relazione tra simboli di Christoffel e tensore metrico, ossia

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

tutti i simboli di Christoffel sono nulli eccetto

$$\Gamma_{\mu 0}^{\alpha} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{\mu}^{\alpha}$$

$$\Gamma_{\alpha\mu}^0 = a\dot{a}\delta_{\alpha\mu}$$

Pertanto, la componente temporale del tensore di Ricci risulta essere

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = -3(H^2 + \dot{H})$$

mentre la traccia R diventa

$$R = -\frac{6}{a^2}(\dot{a}^2 + a\ddot{a} + k) = -6\dot{H} - 12H^2 - 6ka^{-2}$$

Da questi risultati, se si considerano la componente (0,0) e la traccia delle equazioni di Einstein, si arriva ad ottenere le due *equazioni di Friedmann*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t) - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) \quad (1.15)$$

a cui va ad aggiungersi l'equazione di conservazione $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ che, nella forma assunta da $T_{\mu\nu}$ in 1.13, equivale a

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (1.16)$$

Le equazioni di Friedmann 1.14 e 1.15 e la legge di conservazione 1.16, in realtà, non sono tra di loro indipendenti [2]: derivando la 1.14 rispetto al tempo e inserendo in essa la 1.16, infatti, si riesce ad ottenere la 1.15 (come bisognava d'altronde aspettarsi, avendo discusso in precedenza di come le equazioni di campo di Einstein fossero state definite tenendo conto della richiesta che fosse soddisfatta per $T^{\mu\nu}$, ergo per esse, una legge di conservazione). Le equazioni appena trattate, allora, mettono in stretta relazione

l'espansione (e la velocità della stessa) dell'universo, la sua densità di energia totale $\rho(t)$ e la sua curvatura k , dove la ρ è una funzione del tempo in quanto il cosmo ha visto la formazione nel tempo di strutture e la variazione delle percentuali delle diverse componenti che lo costituiscono (materia, radiazione, energia oscura). L'equazione 1.14, ricordando che $H = \dot{a}/a$, è altresì riscrivibile in termini di un *parametro di densità* $\Omega(t)$, il quale pesa i contributi alla densità di energia totale di ogni tipo di componente presente nell'universo con la *densità critica* ρ_c che esso avrebbe se fosse piatto (cioè per $k = 0$), da cui risulta ovvia, a partire dalla 1.14, la definizione

$$\rho_c(t) = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}$$

Quindi, definendo il parametro di densità Ω prima menzionato e la quantità Ω_k come, rispettivamente,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2 H^2}$$

l'equazione 1.14 è riscrivibile nella forma

$$\Omega + \Omega_k = 1 \tag{1.17}$$

da cui discende, chiaramente, che spazi a curvatura positiva ($k = 1$) corrispondono a valori di $\Omega > 1$, mentre spazi a curvatura negativa ($k = -1$) corrispondono a $\Omega < 1$; per $k = 0$, si ritorna a quanto si è già detto per la densità di energia totale dell'universo definendo ρ_c .

Partendo dal valore prima riportato per H_0 , la densità critica all'epoca presente equivale a circa [2]

$$\rho_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \approx 2 \times 10^{-29} h^2 g cm^{-3}.$$

Capitolo 2

L'evoluzione dell'Universo e l'Energia Oscura

Come si è più volte ribadito nel primo capitolo, l'universo è in espansione: tale tipo di evoluzione non ha avuto, nel corso del tempo, un andamento costante, ma è avvenuta ad un tasso variabile; questo processo, alla luce di quanto discusso in precedenza, in uno spazio omogeneo ed isotropo descritto dalla metrica FLRW, è associato alla dipendenza temporale del fattore di scala $a(t)$ e, pertanto, il tasso di espansione è rappresentato dal parametro di Hubble $H(t)$. L'andamento evolutivo dell'universo, in espansione o in contrazione, è influenzato dalle sue componenti (materia, radiazione, energia oscura) e dal loro contributo, epoca per epoca, alla densità di energia totale del cosmo: ad esempio quest'ultimo, se fosse unicamente composto dalla materia ordinaria, avente una pressione trascurabile e tendente a raggrupparsi sotto effetto della forza di gravità, presenterebbe un'espansione necessariamente decelerata [4]. Così, la storia dell'universo è divisibile in varie ere di durate diverse tra di loro, ognuna caratterizzata da un evento particolare, quale ad esempio l'*inflazione cosmica*, o da una particolare componente energetica dominante, come nel caso delle epoche dominate dalla materia o dalla radiazione. Per quanto si è detto, nello studio dell'evoluzione dell'universo, si presenta rilevante l'analisi di ciascuno dei contribuenti alla massa-energia totale dell'universo sopracitati; ciascuno di questi è caratterizzato, spesso a seconda del modello considerato, da diverse caratteristiche di pressione ed energia.

Due importanti componenti costitutive dell'universo, la cui esistenza è postulabile esclusivamente a partire dagli effetti che esse hanno sulla sua geometria e la sua dinamica e non da una loro osservabilità diretta, sono la *materia oscura* e l'*energia oscura* (in inglese *dark matter* e *dark energy* rispettivamente), la cui somiglianza nella denominazione non deve indurre ad immaginare erroneamente la presenza di una qualche particolare correlazione tra i due. La loro esistenza è stata teorizzata relativamente più recentemente per poter dare spiegazione a fenomeni che non sono completamente giustificabili mediante la sola esistenza della materia ordinaria e della radiazione elettromagnetica.

In cosmologia si è soliti raggruppare tutte le particelle relativistiche sotto il nome di *radiazione*, indipendentemente dalla loro massa, riservando, invece, il termine *materia* per tutte le particelle non relativistiche, comprendenti sia la materia barionica che quella oscura. Una suddivisione del genere è ascrivibile al diverso contributo dei due gruppi così individuati alla dinamica dell'universo.

2.1 L'equazione di stato

Nella parte conclusiva del Capitolo 1 sono state presentate le equazioni di Friedmann 1.14 e 1.15, a cui si è accostata l'equazione di conservazione 1.16; queste, si ricorda, vanno a comporre un sistema di tre equazioni non indipendenti: vi è, per questo motivo, bisogno di un'ulteriore equazione per p o per ρ , per ciascuna delle componenti dell'universo, che sia indipendente dalle restanti equazioni e dunque sufficiente a risolvere il sistema individuato poc'anzi. Allora, ricordando che l'universo è idealizzabile, nelle particolari ipotesi che sono state finora portate avanti, come un fluido perfetto, si prospetta utile introdurre una relazione che leghi la densità di energia e la pressione di ciascuna delle componenti dell'universo:

$$p = w\rho c^2 \quad (2.1)$$

La 2.1 (in cui, da ora in poi, si porrà $c = 1$) prende il nome di *equazione di stato*, dove w è una quantità costante adimensionale che varia a seconda del tipo di massa-energia preso in considerazione. Per quanto si è detto, allora, tenendo conto del contributo di ogni singola componente, l'equazione di stato si può riscrivere nella seguente maniera:

$$p = \sum_i w_i \rho_i$$

dove la sommatoria va a comprendere, per l'appunto, tutte le componenti.

2.1.1 L'equazione di stato per la materia

Il termine *materia* a livello cosmologico sta ad indicare sia la *materia ordinaria* o *luminosa*, capace di interagire con il campo gravitazionale e con quello elettromagnetico, che un'altro tipo di materia già precedentemente menzionato: la *materia oscura*. Quest'ultima, a differenza della prima, interagisce debolmente con il campo elettromagnetico e, perciò, non è osservabile direttamente; la sua esistenza, pertanto, è deducibile a partire dagli effetti di carattere gravitazionale che esercita sulla materia luminosa e nelle modifiche che induce nella geometria dell'universo.

La storia scientifica della materia oscura risale agli anni '20 e '30 del secolo scorso e, insieme a quello dell'energia oscura, è uno dei problemi più pressanti della cosmologia moderna: sono stati individuati, nel corso del tempo, diversi candidati associabili ad essa.

Le osservazioni e gli esperimenti degli ultimi anni permettono di suggerire che esistano diverse categorie di materia oscura [7], tra cui ad esempio quella *barionica*, detta in inglese *baryonic dark matter* (da cui l'acronimo BDM), e quella *fredda* (o *cold dark matter*, CDM); a queste, poi, si andrebbero eventualmente ad aggiungere i neutrini, qualora non facessero parte della *radiazione* intesa nel senso più generico prima introdotto (si consulti [7]).

Dunque, alla luce di quanto appena detto, il parametro di densità riguardante la materia Ω_m può essere visto come la somma di due ulteriori parametri, uno associato alla materia luminosa ed un altro alla generica materia oscura:

$$\Omega_m = \Omega_{Lum} + \Omega_{DM}$$

La componente dell'universo in esame, nella idealizzazione di fluido perfetto, è considerabile come un fluido a pressione nulla: poiché essa è composta, infatti, per

come è stata definita, da particelle aventi una velocità media $v \ll c$, si ha che

$$p = nmv^2 \ll nmc^2 = \rho$$

da cui risulta ragionevole l'approssimazione che porta la 2.1 a divenire

$$p = 0$$

In virtù di quanto appena ottenuto, allora, la legge di conservazione 1.16 si trasforma in

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}$$

che, una volta risolta e posto $a_0 = 1$, fornisce $\rho = \rho_0 a^{-3}$ che, riscritta in termini di redshift tenendo conto della relazione 1.6, equivale a $\rho = \rho_0(1+z)^3$. Infine, ricordando la definizione di Ω_m a partire dalla densità critica ρ_c , l'ultima equazione diviene

$$\rho = \rho_{c,0}\Omega_{m,0}(1+z)^3$$

dove le grandezze con pedice 0 rappresentano i valori da esse assunti all'epoca presente. Si consideri un universo piatto e costituito di sola materia. La densità di energia all'epoca presente, allora, è connessa al parametro di Hubble H_0 attraverso la relazione

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0$$

da cui la 1.14 corrisponde a

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 a^{-3} = H_0 a^{-3}$$

la quale, una volta integrata, permette ricavare l'evoluzione temporale del fattore di scala, che si vede essere pari a $a \sim t^{\frac{2}{3}}$.

2.1.2 L'equazione di stato per la radiazione

Si consideri una particella di momento \mathbf{q} e massa m : dalla Relatività Speciale la sua energia corrisponde a $E = \sqrt{q^2 c^2 + m^2 c^4}$. Dato μ , il potenziale chimico della specie a cui la particella appartiene, la densità di stati occupati in un intervallo di energie comprese tra E ed $E + dE$ all'equilibrio alla temperatura T è ottenibile a partire dalla seguente espressione:

$$n(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1}$$

dove il segno più rappresenta la distribuzione di Fermi-Dirac ed il meno quella di Bose-Einstein; $n(E)$, visto quanto si è detto sopra su E , può essere intesa come una funzione del momento \mathbf{q} , in particolare del suo modulo q . A questo punto, considerando che la densità di energia ρ e la pressione p sono quantità definite per unità di volume e g rappresenta i gradi di libertà, si ha che

$$\rho = g \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} E(q)n(q) = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty dE \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} E^2 \quad (2.2)$$

$$p = g \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \frac{qv}{3} n(q) = g \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \frac{q^2}{3E} n(q) = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^\infty dE \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} \quad (2.3)$$

dove per entrambe le equazioni si è posto $c = \hbar = 1$; nella prima uguaglianza della 2.3, inoltre, si è sfruttato il fatto che la densità di pressione delle particelle è data da $qv/3$, con v la loro velocità, mentre nella seconda si è utilizzata l'uguaglianza $v = q/E$.

Nel caso relativistico si ha che $E \gg m$, che corrisponde ad effettuare il limite per m che tende a zero nelle 2.2 e 2.3: per particelle non denegeri (ossia tali che $T \gg \mu$), si può dimostrare [4] che

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30}g(kT)^4, & \text{per i bosoni} \\ \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30}g(kT)^4, & \text{per i fermioni} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$p = \frac{\rho}{3}$$

La seconda di queste due relazioni, quindi, consiste proprio nell'equazione di stato per particelle relativistiche, da cui si deduce chiaramente che $w = \frac{1}{3}$: tenendo in conto quanto ricavato, allora, la 1.16 si può riscrivere come

$$\dot{\rho} = -4H\rho = -4\frac{\dot{a}}{a}\rho$$

che, risolta, conduce a

$$\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4}$$

Ora, ricordando che $\Omega_r \equiv \frac{\rho_r}{\rho_c}$ e che $a^{-1} = 1 + z$, quest'ultima equazione è equivalente a

$$\rho_r = \rho_{c,0}\Omega_{r,0}(1+z)^4$$

dove l'utilizzo del pedice 0 risulta già chiarito.

I fotoni sono una specie bosonica che soddisfa la richiesta $T \gg \mu$ ed avente $g = 2$, per cui, a partire dalla 2.4, si ha che

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15}T^4$$

In aggiunta, il valore misurato della temperatura dei fotoni del CMB è pari a $T = 2.725 \pm 0.002K$ e, facendo uso della conversione $1K^4 = 1.279 \times 10^{-35}g\text{ cm}^{-3}$, si stima che $\rho_{\gamma,0} = 4.641 \times 10^{-34}g\text{ cm}^{-3}$; ciò corrisponde altresì ad un contributo dei fotoni al parametro di densità Ω_r pari a [4]

$$\Omega_{\gamma,0} \equiv \frac{8\pi G\rho_{\gamma,0}}{3c^2H_0^2} = \frac{\rho_{\gamma,0}}{\rho_{c,0}} = 4.763 \times 10^{-5}$$

Anche i neutrini si comportano come particelle relativistiche, a patto che le loro masse siano sufficientemente piccole. Essi sono dei fermioni per i quali $\mu = 0$ e, nel modello standard, si contano tre tipi di neutrino (di cui esiste, per ognuno, la rispettiva antiparticella): quello elettronico ν_e , quello muonico ν_μ e quello tauonico ν_τ , aventi tutti e tre $g = 1$. In base alla 2.4 la densità di energia per i neutrini, tenendo in conto anche gli antineutrini, corrisponde a

$$\rho_\nu = N_{eff}\frac{7\pi^2}{120}T_\nu^4$$

dove N_{eff} sta ad indicare il numero effettivo di specie di neutrini, pari a 3 per il modello standard, ed è introdotto per permettere altri gradi di libertà di carattere

relativistico. Il valore corrente per N_{eff} è 3.04 e la relazione che lega tra loro T_ν e T_γ è $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$ [4]. Risulta allora facile verificare che

$$\rho_\nu = N_{eff} \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma$$

da cui, in ultima analisi, si stima

$$\Omega_{r,0} \equiv \frac{\rho_{\gamma,0} + \rho_{\nu,0}}{\rho_{c,0}} = \Omega_{\gamma,0}(1 + 0.2271N_{eff}) = 8.051 \times 10^{-5}$$

Per quanto si è discusso in questo paragrafo e nel precedente, si ha per ρ_m e ρ_r che, rispettivamente,

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}$$

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}$$

dalle quali si può definire l'*epoca di equivalenza* come l'epoca per cui $\rho_m = \rho_r$, per la quale il fattore di scala a_e risulta essere

$$a_e = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{m,0}} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}}$$

e, dato che $1 + z_e = a_e^{-1}$ e $\Omega_m \approx 0.3$, si ottiene che le densità di energia delle due componenti si sono equivate ad un redshift $z_e \approx 3450$.

2.1.3 L'equazione di stato per una generica componente e le equazioni di Friedmann

A questo punto della trattazione risulta semplice comprendere come un qualsiasi fluido descritto dall'equazione di stato 2.1 presenti una densità di energia ρ tale che

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$$

e, nel caso particolare in cui l'universo sia piatto e la componente considerata sia quella dominante, si ottiene che il fattore di scala evolve come una funzione del tempo in modo tale che

$$a \sim t^{\frac{2}{3}(1+w)^{-1}}$$

In virtù di quanto discusso nei due paragrafi precedenti, si può riscrivere l'equazione di Friedmann 1.14 in maniera più generale, tenendo conto delle componenti finora considerate, ovvero come

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{\rho_m}{a^3} + \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_k}{a^2} \right) \quad (2.5)$$

Ogni altra possibile componente, dunque, può essere aggiunta alla 2.5 una volta nota la relazione tra il fattore di scala a e la sua densità di energia, indicabile con ρ_i .

2.2 L'energia oscura

Attraverso i vari dati ricavati da diversi tipi di osservazione, nel 1998 si è avuta la conferma che l'espansione dell'universo sta avvenendo in maniera accelerata: il vero contribuente di questa recente accelerazione cosmica è soprannominato *energia oscura* e, benché siano stati fatti alcuni passi avanti, la sua origine si presenta ancora incerta. Una delle caratteristiche salienti, che fa sì che l'energia oscura sia la causa della suddetta accelerazione e che la distingue dalla materia e dalla radiazione, è il fatto che essa possiede una pressione negativa che si contrappone alla forza gravitazionale.

I dati raccolti dall'osservazione di Supernovae di tipo Ia hanno mostrato che, nel presente, circa il 70% dell'energia dell'universo è riconducibile al contributo della *dark energy*; il 30% restante, invece, vede la preponderanza della materia oscura (circa il 25%), seguita poi dal 4% di contributo barionico, mentre la radiazione, la quale dominava sulla materia nel passato, contribuisce solo allo 0.005% della densità di energia totale dell'universo [4].

Si ipotizza che la densità di energia dell'energia oscura nelle ere passate fosse notevolmente inferiore al valore assunto attualmente: nell'epoca dominata dalla materia la formazione delle strutture su larga scala (ad esempio galassie ed ammassi stellari) ne richiede, infatti, la trascurabilità rispetto al contributo della componente dominante in modo tale da non risultrne in alcun modo influenzata; in realtà, questo tipo di ipotesi non sarebbe necessaria nel caso in cui esistesse una qualche specie di accoppiamento tra l'energia e la materia oscura (principale contribuente alla formazione delle strutture poc'anzi menzionate), permettendo così alla prima di assumere un ruolo attivo nell'evoluzione dell'universo anche nelle epoche precedenti.

In particolare, è possibile individuare delle limitazioni per l'intensità dell'accoppiamento mediante osservazioni della CMB o degli ammassi di galassie, o comunque far luce sulla possibile esistenza di una relazione che leghi queste due misteriose entità. Inoltre, mentre la densità di energia della materia oscura, come si è visto, evolve come $\rho_m \sim a^{-3}$, la densità di energia oscura è pressoché costante nel tempo (più precisamente, $\rho_{de} \sim a^{-n}$ con n probabilmente prossimo allo zero).

Come si è detto, non si conosce ancora la natura dell'energia oscura, sulla quale si sa ben poco nonostante si sia in grado di individuarne l'abbondanza od altre caratteristiche principali. Ciò permette ed ha permesso, di fatto, la formulazione di numerosi modelli ed interpretazioni atti a spiegarne l'essenza: sono stati dunque presentati, nel corso del tempo, vari candidati per l'energia oscura, tra i quali il più semplice è la *costante cosmologica* Λ già menzionata in precedenza. Questa, rimossa da Einstein dalle 1.12 una volta che venne a sapere della scoperta da parte di Hubble dell'espansione dell'universo, è tornata in uso dopo il 1998 come candidato per l'energia oscura e per la spiegazione della recente accelerazione dell'espansione dell'universo.

Dal punto di vista della fisica delle particelle, la Λ appare come un'energia del vuoto: nella fattispecie, il valore teoricamente previsto per quest'ultima corrisponde a $\rho_{vuoto} \simeq 10^{74} GeV^4$, che però è largamente più grande del valore osservato per la dark energy rappresentata dalla costante cosmologica, ovvero $\rho_\Lambda \equiv \Lambda c^2 / 8\pi G \simeq 10^{-47} GeV^4$. Per di più, se nel passato fosse stata presente un'energia di vuoto pari al valore appena riportato per ρ_{vuoto} , l'universo sarebbe entrato in una fase di accelerazione cosmica eterna sin dai primi istanti iniziali, cosa che precluderebbe l'esistenza delle epoche della radiazione e della materia descritte dal modello cosmologico standard.

Pertanto, è importante trovare un meccanismo che permetta di ottenere un valore piccolo per Λ consistente con le osservazioni effettuate.

In generale, per poter distinguere la varietà di modelli per l'energia oscura, risulta rilevante l'individuazione di limiti entro cui operare mediante dati ricavati da osservazioni come quelle del tipo SN Ia, CMB e delle strutture di larga scala (in inglese *large-scale structure*, *LSS*) [4]. Solitamente l'equazione di stato dell'energia oscura, vale a dire

$$w_{de} = p_{de}/\rho_{de}$$

è una relazione utile da cui partire per descrivere e verificare le proprietà della dark energy portate avanti dai vari modelli e così scegliere quali siano effettivamente validi. Nel caso della costante cosmologica, in particolare, si ha $p_{de} = -\rho_{de}$, da cui $w_{de} = -1$; generalmente in altri modelli, invece, capita che w_{de} vari nel tempo. Perciò, si può affermare che un primo obiettivo per lo studio dell'energia oscura sia quello di individuare possibili discostamenti di w_{de} dal valore -1 per scoprire se essa sia identificabile con la costante cosmologica o meno: la combinazione di risultati di molti progetti effettuati in quest'ottica, infatti, ha portato all'ottenimento della restrizione dei valori di w_{de} ad un intervallo corrispondente a

$$-1.097 < w_{de} < -0.858$$

assumendo un'equazione di stato costante per l'energia oscura [4].

2.2.1 L'equazione di stato per l'energia oscura

Si consideri l'equazione di stato per l'energia oscura, soddisfacente tra l'altro l'equazione di conservazione 1.16:

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = \dot{\rho}_{de} + 3H\rho_{de}(1 + w_{de}) = 0$$

Concentrandosi sulla seconda uguaglianza ed integrandola utilizzando la relazione $dt = -dz/[H(1+z)]$, si arriva ad ottenere

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} e^{\int_0^z \frac{3(1+w_{de})}{1+z'} dz'}$$

dove si sta considerando w_{de} come una quantità che dipende dal tempo o, equivalentemente, dal redshift z ; quest'ultima equazione si può invero riscrivere introducendo \hat{w}_{de} , valore medio per w_{de} definito come

$$\hat{w}_{de}(z) = \frac{1}{\ln(1+z)} \int_0^z \frac{w_{de}(z')}{1+z'} dz'$$

ottenendo, quindi, che

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} a^{-3(1+\hat{w}_{de})}$$

A questo punto, considerando anche il contributo dell'energia oscura, è facile verificare come la 2.5 sia riscrivibile nella forma seguente:

$$H^2(z) = H_0[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0} e^{\int_0^z \frac{3(1+w_{de})}{1+z'} dz'} + \Omega_{k,0}(1+z)^2] \quad (2.6)$$

dove si ricordi che gli $\Omega_{i,0}$ sono tali da obbedire alla relazione

$$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{de,0} + \Omega_{k,0} = 1$$

Definendo $E(z) \equiv H(z)/H_0$ e derivando la 2.6 rispetto alla variabile z , si giunge ad ottenere un'espressione per l'equazione di stato dell'energia oscura pari a

$$w_{de}(z) = \frac{(1+z)(E^2(z))' - 3E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2}{3[E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{k,0}(1+z)^2]} \quad (2.7)$$

dove l'apice primo rappresenta una derivata rispetto a z ; in aggiunta si può dimostrare che, nel caso di un universo piatto (cioè $\Omega_{k,0} = 0$), la quantità $E(z)$ è scrivibile in termini della distanza di luminosità d_L [4] come

$$E(z) = \frac{c}{H_0} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1+z} \right) \right]^{-1}$$

Dunque, una volta misurata la $d_L(z)$, si può determinare l'evoluzione di $E(z)$ e da questa risolvere la 2.7 ottenendo, così, w_{de} . Le restrizioni sulla curvatura dell'universo dovute ai dati provenienti dalle osservazioni impongono che $-0.0175 < \Omega_{k,0} < 0.0085$ [4], indicando che l'universo è piuttosto vicino ad una geometria effettivamente piatta. Pertanto, in un universo piatto in cui sia trascurabile il contributo della densità di energia della radiazione (ovvero per $z \leq 1$, essendosi già detto che all'epoca presente $\Omega_r \simeq 0.005$), la 2.7 si riduce a

$$w_{de}(z) = \frac{(1+z)(E^2(z))' - 3E^2(z)}{3[E^2(z) - \Omega_{m,0}(1+z)^3]} \quad (2.8)$$

relazione che è spesso utilizzata per stabilire delle limitazioni all'equazione di stato dell'energia oscura, per la quale il contributo della curvatura cosmica è negligibile solo per $z \leq 1$, mentre per $z \geq 1$ esso può produrre modifiche significative in w_{de} .

Come già accennato prima, w_{de} è limitata dai dati sperimentali ad assumere valori compresi tra circa -0.8 e -1, da cui risulta possibile anche il caso

$$p_{de} + \rho_{de} < 0$$

che, alla luce dell'equazione di conservazione 1.16, implica una ρ_{de} crescente nel tempo e, per un universo piatto, comporta un'evoluzione temporale per il fattore di scala pari a

$$a \propto (t_{rip} - t)^{\frac{2}{3}(1+w_{de})^{-1}}$$

dove t è minore della costante t_{rip} . Allora, per t che si avvicina al valore assunto da t_{rip} , il fattore di scala tende all'infinito: l'universo, quindi, termina nel futuro in un tempo finito con una singolarità altresì detta *singolarità di grande strappo* o, in inglese, di *big rip*.

Capitolo 3

Effetti locali di disomogeneità sulle distanze: la distanza di Dyer-Roeder

Ci si concentrerà, a questo punto, su una caratteristica dell'universo finora esaminata solamente in maniera indiretta: la sua disomogeneità *locale*. Ricordando quanto si è detto nel primo capitolo ed è racchiuso sotto il nome di *principio cosmologico*, infatti, l'universo è omogeneo ed isotropo *per scale di grandezza sufficientemente grandi*, vale a dire a livello di *superammassi* di galassie; cionondimeno tale proprietà non risulta più valida riducendosi a scale inferiori (ammassi o semplici galassie, a circa $1Gpc$, che formano filamenti, muri e zone di vuoto sottodensità [8]): a motivo di ciò, dunque, si analizzeranno gli effetti di questa disomogeneità locale sulla misura delle distanze cosmologiche già trattate al capitolo iniziale.

Prima di procedere, però, si presenta utile ritornare a parlare brevemente della distanza di luminosità e quella di diametro angolare. In primis si richiama la relazione che intercorre tra redshift z e la prima delle due distanze appena menzionate, d_L , ovvero

$$d_L = r_k(\chi)(1+z)$$

che, esplicitando $r_k(\chi)$ nella forma 1.2 riportata in precedenza, diviene

$$d_L = \frac{1+z}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi) \quad (3.1)$$

Tenendo in mente la 1.8 ed il fatto che la χ presente nell'espressione di sopra è riscrivibile considerando la 1.4, la 3.1 assume la forma

$$d_L = \frac{1+z}{\sqrt{-k}} \sinh\left(\frac{c}{H_0} \sqrt{-k} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}\right)$$

con $E(z)$ già definito nel capitolo 2. Quest'ultima espressione, infine, riscritta in termini del parametro di densità $\Omega_{k,0} = -kc^2/H_0^2$, è equivalente a

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{\Omega_{k,0}}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_{k,0}} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}\right) \quad (3.2)$$

che, nel caso in cui si consideri un universo piatto, si osserva facilmente trasformarsi in

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (3.3)$$

20 3. Effetti locali di disomogeneità sulle distanze: la distanza di Dyer-Roeder

Allora, se si parte dalla 1.11 e si segue lo stesso procedimento appena mostrato arrivando alla fine a considerare un universo piatto, per la distanza di diametro angolare si ottiene l'uguaglianza

$$d_A = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}$$

che, messa a confronto con la 3.2, permette di trarre la seguente relazione tra distanza di luminosità e distanza di diametro angolare:

$$d_A = \frac{1}{(1+z)^2} d_L \quad (3.4)$$

La relazione 3.4 è detta *relazione di reciprocità* o *di dualità*, od anche *di Etherington*, e la sua potenza risiede nel fatto che la sua validità si estende ben oltre modelli descritti dalla metrica FLRW, essendo essa conservata per qualsiasi metrica [4].

Si consideri un fascio di luce emesso da una sorgente S in uno spaziotempo generico descritto dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$. A partire dalle equazioni di propagazione di Sachs (che qui non verranno riportate; si consulti [8]), si può dimostrare [8] come sia ottenibile un'equazione differenziale per l'area infinitesima A della sezione di taglio del fascio di luce e, precisamente, per la sua radice:

$$\ddot{\sqrt{A}} + \frac{1}{2} R_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \sqrt{A} = 0 \quad (3.5)$$

dove un punto indica una derivata rispetto al parametro affine v e dove, inoltre, $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci già incontrato e $k^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dv}$ è il vettore tangente alla geodetica nulla lungo la quale si propagano i raggi di luce.

A questo punto, si può trasformare la 3.5 sfruttando il fatto che la distanza di diametro angolare, che d'ora in poi si indicherà semplicemente con D se non dichiarato diversamente, è proporzionale alla quantità \sqrt{A} . Volendo tener conto, comunque, di come l'universo si presenta nella realtà e, dunque, della sua disomogeneità a livello locale, seguendo quanto fatto da Dyer e Roeder, si introduce il *parametro di disomogeneità* o *di clumpiness* α , definito come

$$\alpha = 1 - \frac{\rho_{\text{ammassi}}}{\langle \rho \rangle}$$

e collegato al rapporto tra la quantità di materia addensata e quella distribuita in maniera uniforme; esso può esser considerato costante o, in alcuni casi, variabile col tempo [8]. Allora, rimpiazzando il parametro affine v con il redshift z nella 3.5 e considerando D invece di \sqrt{A} , si arriva ad ottenere l'**equazione di Dyer-Roeder** per la distanza di diametro angolare nel caso di universo descritto dalla metrica FLRW:

$$\left(\frac{dz}{dv}\right)^2 \frac{d^2 D}{dz^2} + \left(\frac{d^2 z}{dv^2}\right) \frac{dD}{dz} + \frac{3}{2} \alpha \Omega_m (1+z)^5 D = 0 \quad (3.6)$$

a cui si aggiungono le condizioni iniziali

$$D(0) = 0$$

$$\frac{dD}{dz}(0) = \frac{c}{H_0}$$

Si noti, comunque, che la 3.6 non descrive appieno l'influenza sulla propagazione della luce delle disomogeneità nella distribuzione di materia, ma prende in esame più che

altro il fatto che un fascio di luce, nel viaggiare nel cosmo, incontra meno materia di quella del modello di FRW con una determinata densità media di materia [8]. Tra l'altro, in virtù di alcune delle ipotesi che portano ad ottenere la 3.5, la 3.6 trascurava gli effetti di distorsione del fascio di luce.

Solitamente si misurano le distanze cosmologiche in unità di c/H_0 e, pertanto, si introduce la quantità *diametro di distanza angolare adimensionale* r , scritta come

$$r \equiv \frac{DH_0}{c}$$

Allora, utilizzando r invece di D e considerando il tempo cosmico t come variabile indipendente invece del redshift z , la 3.6 assume la seguente forma:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - H(t)\frac{dr}{dt} + 4\pi G\alpha\rho_m(t)r = 0 \quad (3.7)$$

a cui vanno ad aggiungersi le due nuove condizioni iniziali

$$r(0) = 0$$

$$\frac{dr}{dz}(0) = 1$$

In aggiunta, partendo dall'equazione 3.6 e considerando ancora la distanza di diametro angolare adimensionale r , si può dimostrare che la 3.6 è scrivibile come

$$(1+z)^2 H^2 \frac{d^2r}{dz^2} + (1+z)H \left(2H + (1+z) \frac{dH}{dz} \right) \frac{dr}{dz} + \frac{3}{2}\alpha\Omega_m r = 0 \quad (3.8)$$

dove H assume la forma riportata nella 2.6 di seguito riscritta considerando, per l'energia oscura, la costante cosmologica Λ (per la quale, allora, $w_\Lambda = -1$):

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}$$

Se, ad esempio, si considera il parametro α costante e si prende in esame un universo piatto ($\Omega_{k,0} = 0$) e a costante cosmologica nulla ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$), integrando la 3.8 si ottiene

$$r(z) = \frac{(1+z)^\beta - (1+z)^{-\beta}}{2\beta(1+z)^{\frac{5}{4}}}$$

dove $\beta = \frac{1}{4}\sqrt{25 - 24\alpha}$.

Nel caso in cui si voglia considerare, comunque, all'epoca presente un universo piatto con una dark energy generica che sia anche capace di evolvere, ossia descritta da un'equazione di stato 2.1 per la quale $w(z, \boldsymbol{\theta})$ presenti una natura dinamica (in particolare, $\boldsymbol{\theta} \equiv (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ sono eventuali parametri per l'equazione di stato dell'energia oscura), allora ci si focalizza sulla 2.6, che può essere riscritta tenendo conto della relazione $\Omega_{m,0} + \Omega_{de,0} = 1$ e ponendo

$$g(z, \boldsymbol{\theta}) \equiv e^{3 \int_0^z \frac{1+w(z', \boldsymbol{\theta})}{z'+1} dz'}$$

ottenendo, così, che

$$H(z, \boldsymbol{\theta}) = H_0 \sqrt{(1 - \Omega_{m,0})g(z, \boldsymbol{\theta}) + \Omega_{m,0}(1+z)^3} \quad (3.9)$$

22 3. Effetti locali di disomogeneità sulle distanze: la distanza di Dyer-Roeder

Da quanto appena ricavato, allora, le formule per d_L e d_A vanno scriversi nella maniera di seguito riportata:

$$d_L(z, \boldsymbol{\theta}) = \frac{c}{H_0} (1+z) \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega_{m,0})g(z', \boldsymbol{\theta}) + \Omega_{m,0}(1+z')^3}} dz'$$

$$d_A(z, \boldsymbol{\theta}) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega_{m,0})g(z', \boldsymbol{\theta}) + \Omega_{m,0}(1+z')^3}} dz'$$

Nel seguito si considererà, orientandosi ad un'analisi più generica, allora, il **modello Chevalier-Polarski-Linder**, brevemente detto **CPL**, che utilizza per l'energia oscura una parametrizzazione così definita [9]:

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z} \quad (3.10)$$

dove w_0 e w_1 sono numeri reali che rappresentano, rispettivamente, il valore attuale di w per l'equazione di stato dell'energia oscura e la sua generica evoluzione temporale. È altresì importante notare come, per valori alti del redshift, si ha una relazione del tipo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w_{CPL} = w_0 + w_1 \equiv w_i$$

che permette di descrivere differenti modelli per la dark energy e, quindi, mostra come la parametrizzazione introdotta costituisca un buon compromesso per procedere ad un'analisi che sia indipendente dal modello adottato [9]. In ultima istanza, si può verificare come, alla luce di questa parametrizzazione, la 3.9 diviene

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0} e^{3\left(\frac{w_1 z}{1+z}\right)} (1+z)^{3(1+w_0+w_1)}} \quad (3.11)$$

In particolare, obiettivo importante di questo lavoro di tesi è quello di confrontare la soluzione teorica dell'equazione di Dyer-Roeder con i dati osservativi derivanti dall'analisi delle già menzionate Supernovae di tipo Ia. Nell'ultima decade, infatti, la sicurezza sulla considerazione delle SNIa come candele standard ha avuto una crescita notevole; invero, loro osservazioni hanno fornito il primo indizio rilevante riguardo l'espansione accelerata dell'universo, spiegabile, come si è discusso, introducendo l'esistenza di un qualche tipo di energia oscura.

A partire dal 1995 due team di astronomi, l'*High-Z Supernovae Search Team* ed il *Supernova Cosmology Project*, hanno scoperto e scoprono tuttora SNIa dai redshift elevati [9]. In questa trattazione si considera la raccolta *Union 2.1* (aggiornamento dell'iniziale *Union* del secondo team di cui sopra, che consiste di circa 580 SNIa che coprono valori di redshift compresi nell'intervallo $0.015 \leq z \leq 1.4$).

Nella fattispecie, si confronta il valore predetto teoricamente del *modulo della distanza* (già introdotto nel capitolo 1 ed indicato con $\mu(z)$) con quello effettivamente osservato, basandosi sulla definizione stessa di $\mu(z)$ (Figura 1):

$$\mu(z_j) = 5 \log d_L(z_j, \boldsymbol{\theta}) + \mu_0 \quad (3.12)$$

dove μ_0 dipende dalla costante di Hubble e dalla magnitudine assoluta M .

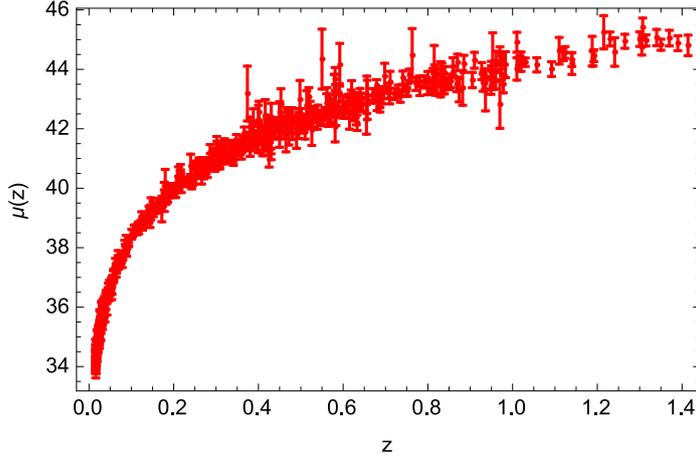


Figura 3.1: Modulo della distanza $\mu(z)$ per il dataset di SNIa utilizzato in questo lavoro.

3.1 Le equazioni di Heun e Legendre

Considerando più genericamente una $\Omega_{k,0}$ non necessariamente nulla e tornando all'espressione 3.11, quest'ultima, nel caso particolare in cui $w_1 = 0$, acquista la più semplice forma

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0}(1+z)^{3(1+w_0)} + \Omega_{k,0}(1+z)^2}$$

Allora la 3.8, esplicitando $H(z)$ mediante la relazione appena riportata, è riscrivibile nel modo seguente:

$$(1+z)[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{de,0}(1+z)^{3(1+w_0)}] \frac{d^2 r}{dz^2} +$$

$$\left[\frac{7}{2} \Omega_{m,0}(1+z)^3 + 3\Omega_{k,0}(1+z)^2 + \frac{1}{2}(5+3w_0)\Omega_{de,0}(1+z)^{3(1+w_0)} \right] \frac{dr}{dz} +$$

$$\frac{3}{2} \alpha \Omega_{m,0}(1+z)^2 r = 0$$

e, nel caso speciale in cui $w_0 = -1$ (cioè se l'energia oscura coincide con la costante cosmologica), si ha che

$$(1+z) [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}] \frac{d^2 r}{dz^2} +$$

$$\left[\frac{7}{2} \Omega_{m,0}(1+z)^3 + 3\Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right] \frac{dr}{dz} +$$

$$\frac{3}{2} \alpha \Omega_{m,0}(1+z)^2 r = 0 \quad (3.13)$$

In generale la 3.13 è un'equazione differenziale alquanto complicata. Essa, dal punto di vista matematico, consiste in un'equazione di tipo fuchsiano con quattro punti di singolarità regolare più un altro all'infinito [10]; si procederà, adesso, col trasformare

la 3.13 in una forma diversa ponendo $x \equiv 1 + z$ e riscrivendo $r(z)$ come $r(z) = \frac{h(z)}{1+z}$: si ottiene, così, che

$$(\Omega_{m,0}x^3 + \Omega_{k,0}x^2 + \Omega_\Lambda) \frac{d^2h}{dx^2} + \left(\frac{3}{2}\Omega_{m,0}x + \Omega_{k,0} \right) x \frac{dh}{dx} + \left(\frac{3}{2}(\alpha - 1)\Omega_{m,0}x + \Omega_{k,0} \right) h = 0$$

Quest'ultima equazione, se $\Omega_{k,0} \neq 0$, ponendo $x \equiv \frac{\Omega_{k,0}}{\Omega_{m,0}}y$, diventa

$$\left(y^3 + y^2 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}\Omega_{m,0}^2}{\Omega_{k,0}} \right) \frac{d^2h}{dy^2} + \left(\frac{3}{2}y + 1 \right) y \frac{dh}{dy} + \left[\frac{3}{2}(\alpha - 1)y - 1 \right] h = 0 \quad (3.14)$$

che è detta **equazione di Heun** (che generalizza l'equazione ipergeometrica di Gauss, [10]), avente condizioni iniziali

$$\begin{aligned} h\left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{k,0}}\right) &= 0 \\ h'\left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{k,0}}\right) &= \frac{\Omega_{k,0}}{\Omega_{m,0}} \end{aligned}$$

Dunque, la distanza di diametro angolare adimensionale r è esprimibile in termini di soluzioni dell'equazione di Heun 3.14 alla luce della relazione

$$r(z) = \frac{h\left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{k,0}}(1+z)\right)}{1+z}$$

Se, invece, $\Omega_{k,0} = 0$, dividendo la 3.14 per $\Omega_{m,0}$, si arriva a

$$\left(x^3 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \frac{d^2h}{dx^2} + \frac{3}{2}x^2 \frac{dh}{dx} + \frac{3}{2}(\alpha - 1)xh = 0$$

e, effettuando il cambio di variabile $\eta(x) = \sqrt{1 + \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}x^3}}$ e sostituendo $h(x)$ con $P(x) = x^{3/4}h(x)$, l'ultima equazione si trasforma nell'**equazione di Legendre**

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2P}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dP}{d\eta} - \frac{1}{36} \left(5 + \frac{25 - 24\alpha}{1 - \eta^2} \right) P = 0 \quad (3.15)$$

3.2 La distanza di Dyer-Roeder ed il modulo della distanza al variare del parametro di clumpiness

La distanza di diametro angolare D , soluzione della 3.6, è più precisamente detta **distanza di Dyer-Roeder**. Essa, nell'ambito del modello CPL e ricordando i parametri dell'equazione dalla quale è determinata, dipende parametricamente da $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{k,0}$ (in linea di principio anche da $\Omega_{de,0}$, ma, ricordando che $\Omega_{de,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{k,0}$, esso risulta dipendente dagli altri due), w_0 , w_1 e α ; tale dipendenza, quindi, è esplicitabile scrivendo la suddetta distanza come $D_{DR}(\Omega_{m,0}, \Omega_{m,0}, w_0, w_1, \alpha)$.

In questa trattazione si è interessati, in particolare, ad un universo piatto ed al caso in cui l'equazione di stato per l'energia oscura corrisponde a quella della costante cosmologica Λ : si ha, pertanto, che $\Omega_{k,0} = 0$, $w_0 = -1$ e $w_1 = 0$, da cui la distanza di

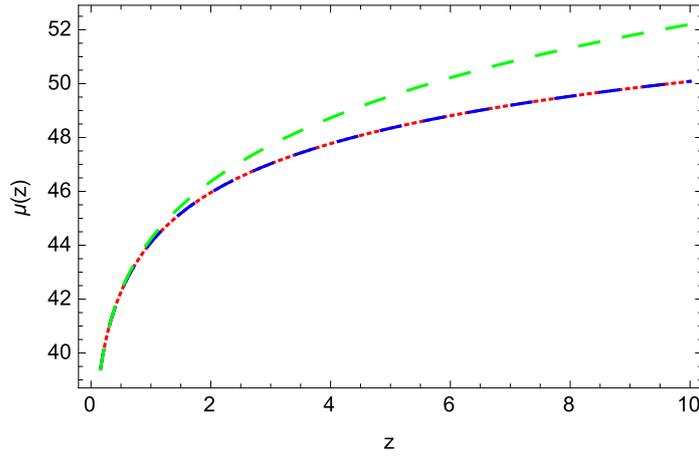


Figura 3.2: Confronto tra i grafici di $\mu(z)$ ottenuti per $\alpha = 1$ (linea tratteggiata blu) ed $\alpha = 0$ (linea tratteggiata verde). La linea rossa corrisponde a valori stimati per $\mu(z)$ nel caso la distanza di luminosità sia determinata dalla relazione 3.3. In tutti i calcoli si è posto $\Omega_{m,0} = 0.3$.

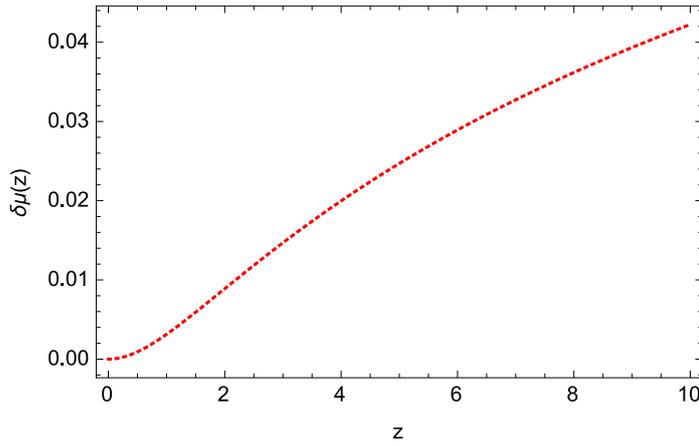


Figura 3.3: Errore relativo $\delta\mu(z)$ per $\mu(\alpha = 0)$ rispetto a $\mu(\alpha = 1)$. Anche per questo grafico, chiaramente, $\Omega_{m,0} = 0.3$.

Dyer-Roeder, nella sua dipendenza parametrica, diviene $D_{DR}(\Omega_{m,0}, -1, 0, \alpha)$. Ricordando la relazione di Etherington 3.4 e la natura della D_{DR} , allora, si ha che

$$D_L = (1 + z)^2 D_{DR}$$

Si analizzano, adesso, nell'intervallo di redshift $0 < z < 10$, al variare del parametro di disomogeneità α , due casi specifici e tra di loro opposti: il caso in cui l'universo è totalmente omogeneo, ovvero quando $\alpha = 1$, e quello in cui, invece, $\alpha=0$, ossia nel caso di totale disomogeneità. Nella fattispecie, l'analisi, tenendo conto della relazione tra la distanza di luminosità e quella di Dyer-Roeder e dell'espressione 3.12, viene condotta utilizzando il modulo della distanza $\mu(z)$.

Impiegando il software di calcolo *Mathematica*, sono stati posti a confronto su un unico grafico (come si vede in Figura 3.2) i risultati ottenuti nei due casi sopra descritti, prendendo anche in esame la $\mu(z)$ ottenuta a partire dalla 3.3. In ultima istanza, poi, è stato considerato l'andamento dell'errore relativo $\delta\mu$, riportato su un ulteriore grafico

26 3. Effetti locali di disomogeneità sulle distanze: la distanza di Dyer-Roeder

(Figura 3.3); esso, si noti, è definito nella seguente maniera:

$$\delta\mu = \frac{\mu(D_L^\alpha(\Omega_{m,0}, -1, 0, \alpha = 0)) - \mu(D_L^\alpha(\Omega_{m,0}, -1, 0, \alpha = 1))}{\mu(D_L^\alpha(\Omega_{m,0}, -1, 0, \alpha = 1))}$$

Conclusioni

Nel presente lavoro sono state introdotte ed analizzate le principali grandezze cosmologiche, con particolare attenzione al redshift z ed alle distanze di luminosità e di diametro angolare. Per la maggior parte del tempo ci si è mossi all'ombra del principio cosmologico, in un universo che fosse globalmente omogeneo ed isotropo e descritto dalla metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, arrivando così a derivare le equazioni fondamentali e le relazioni più importanti che le mettono in collegamento tra di loro. Si è cercato di trattare, quando possibile, in maniera generica le principali questioni e problematiche cosmologiche, prediligendo comunque modelli e soluzioni (spesso più semplici) che fossero più vicini ai risultati derivanti dai dati osservativi (da cui la particolare attenzione ad una dark energy rappresentata dalla costante cosmologica), ai quali ci si è cercati di ricondurre nella maggior parte dei casi. Una volta approcciati gli argomenti maggioritari e delineato un quadro di insieme, ci si è focalizzati su una particolare caratteristica dell'universo a livello locale, vale a dire la sua omogeneità; in virtù di ciò si è riportata, nella descrizione di Dyer-Roeder e richiamando la parametrizzazione CPL, la variazione nella complessità del problema riguardante la trattazione delle distanze in questa fattispecie. Sono state dunque prese in esame le principali equazioni differenziali che permettono di discutere e ricavare le distanze cosmologiche, in particolare la distanza di diametro angolare, in questo ambiente altresì detta *Distanza di Dyer-Roeder*, a partire dalla quale ci si può ricondurre alla distanza di luminosità e al modulo della distanza. Quest'ultimo tipo di analisi è stata condotta ponendo in risalto l'influenza del parametro di disomogeneità α , valutando, nello specifico, i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha = 0$. Da quanto si è ottenuto mediante stime numeriche per il modulo della distanza, come si può osservare dai grafici in chiusura, l'andamento di questo, nel caso di universo omogeneo ($\alpha = 1$), coincide ottimamente con le previsioni effettuabili a partire dalle relazioni derivate nella parte iniziale di questo lavoro, andandosene invece a discostare alquanto nettamente, all'aumentare del redshift, nel caso di universo totalmente *clumpy* ($\alpha = 0$). Infine, si è valutato l'errore relativo legato a quest'ultimo tipo di analisi, mostrando come esso fosse crescente, in accordo con quanto già detto, all'aumentare di z .

Bibliografia

- [1] d’Inverno, Ray, *Introducing Einstein’s Relativity*, Clarendon Press, 1990.
- [2] Amendola, Luca, *Introduction to Cosmology*, Lectures notes.
- [3] Hoynig, Peter, *Relativistic Astrophysics and Cosmology*, Springer Netherlands, 2006.
- [4] Amendola, Luca and Tsujikawa, Shinji, *Dark Energy: Theory and Observations*, Cambridge University Press, 2010.
- [5] Ferrari, Valeria and Gualtieri, Leonardo, *General Relativity*, Lectures notes.
- [6] Ohanian, Hans C. and Ruffini, Remo, *Gravitation and Spacetime*, Cambridge University Press, 1994.
- [7] Overduin, J. M. and Wesson, P. S., *Dark sky, dark matter*, CRC Press, 2002.
- [8] Demianski, M., de Ritis, R., Marino, A.A. and Piedipalumbo, E., 2003, *Astronomy and Astrophysics*, 411, pp. 33-40.
- [9] Piedipalumbo, E., Della Moglie, E., De Laurentis, M. and Scudellaro, P., 2014, *MNRAS*, 411, pp. 3643-3655.
- [10] Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, 1926.