

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"



Laurea triennale in Fisica

Formulazione alla Feynman della meccanica quantistica

Relatori:

Prof. Gennaro Miele

Candidato:

Dario Lippi
Matricola N85000712

A.A. 2016/2017

*Se una notte d'inverno un viaggiatore, fuori dell'abitato di Malbork,
sporgendosi dalla costa scoscesa senza temere il vento e la vertigine,
guarda in basso dove l'ombra s'addensa in una rete di linee che s'allacciano,
in una rete di linee che s'intersecano sul tappeto di foglie illuminate dalla luna
intorno a una fossa vuota -
Quale storia laggiù attende la fine?*

Italo Calvino

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 3 |
| 1 L'integrale sui cammini: definizione e caratteristiche | 5 |
| 1.1 Il funzionale d'azione in meccanica classica e meccanica quantistica | 5 |
| 1.2 La costruzione dei cammini di Feynman | 8 |
| 1.2.1 Considerazioni fisiche ed analogie | 11 |
| 1.3 L'integrale sui cammini come propagatore del sistema | 13 |
| 1.4 Generalizzazione per molti eventi | 15 |
| 2 Alcune applicazioni in meccanica quantistica | 18 |
| 2.1 Hamiltoniane quadratiche e formula generale per il path integral | 18 |
| 2.2 Particella libera | 22 |
| 3 Il limite classico e l'oscillatore armonico | 24 |
| 3.1 L'approssimazione JWKB e il metodo di fase stazionaria | 24 |
| 3.2 Lagrangiane quadratiche | 27 |
| 3.2.1 Un caso particolare: l'oscillatore armonico | 30 |
| 4 Ampiezza di transizione in presenza di sorgenti | 33 |
| 4.1 Considerazioni introduttive | 33 |
| 4.2 L'oscillatore armonico forzato | 34 |
| Conclusioni | 38 |
| Bibliografia | 40 |

Introduzione

In meccanica classica la *traiettoria* è l'insieme delle posizioni occupate nello spazio da un oggetto in movimento al variare del tempo. Conoscere la traiettoria di un corpo significa risolvere il problema del moto, compito piuttosto arduo nella maggior parte dei casi. Al fine di ottenere il metodo più efficace alla risoluzione del problema, sono state diverse le riformulazioni della meccanica classica nel corso della storia.

Nel formalismo lagrangiano il problema del moto è risolvibile studiando un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine che portano il nome di *equazioni di Eulero-Lagrange* in cui compaiono le derivate parziali rispetto allo spazio e alla velocità della Lagrangiana L , funzione contenente tutte le informazioni sul sistema fisico. La soluzione del problema, se esiste, è unica e definisce proprio la traiettoria classica.

Nel corso del XVIII e del XIX secolo l'idea un po' metafisica che la natura seguisse nella sua evoluzione il percorso che offrisse minore spesa, spinse gli scienziati del tempo alla riformulazione di alcune leggi della fisica sulla base di *principi variazionali*. Un potente metodo risolutivo che sfrutta i principi variazionali è il *Principio di Hamilton*: la traiettoria classica del sistema fisico associato alla Lagrangiana L è un punto stazionario per il funzionale così definito

$$\mathcal{S}([\mathbf{q}]; t_0, t_1) := \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (1)$$

dove le q sono le coordinate lagrangiane del sistema e il funzionale di sopra prende il nome di **azione**.

Nonostante il successo e l'eleganza della meccanica lagrangiana, il problema della risoluzione effettiva del moto rimaneva spesso troppo complesso. All'inizio dell'800 Hamilton propose la sua riformulazione della meccanica che presto fu ritenuta essere molto più efficace. In questo nuovo formalismo l'evoluzione temporale si ottiene studiando un sistema di equazioni differenziali del *primo ordine* di $2n$ variabili nello spazio delle fasi (q, p) delle coordinate lagrangiane e dei momenti p .

Fin dagli albori della meccanica quantistica le formulazioni prevalenti privilegiavano quindi un approccio hamiltoniano. Ogni sistema quantistico è descritto da un vettore di stato nello spazio di Hilbert astratto che contiene tutte le informazioni sul sistema fisico, la cui evoluzione temporale è regolata dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2)$$

dove \hat{H} è l'operatore hamiltoniano autoaggiunto sullo spazio di Hilbert. Questa formulazione descrive bene un sistema quantistico in regime *non* relativistico. Anche la formulazione alternativa matriciale di Heisenberg si basa sul formalismo hamiltoniano. In questo caso però il vettore di stato è indipendente dal tempo e, contrariamente alla formulazione di Schrödinger, sono gli osservabili ad avere un'evoluzione temporale:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A} = [\hat{H}, \hat{A}]. \quad (3)$$

Il grande merito di Feynman è stato quello di sviluppare e portare a compimento una metodologia di calcolo basata non più su una formulazione hamiltoniana, ma su quella lagrangiana.

Come già precedentemente notato da Dirac, il formalismo lagrangiano consente di esprimere tutte le equazioni del moto come estremali per il funzionale d'azione, punto di partenza del lavoro di Feynman, ma soprattutto si presta molto bene alla scrittura di una meccanica quantistica relativistica, dal momento che l'azione è invariante per trasformazioni di Lorentz.

D'altro canto, quando nel 1948 Richard Feynman pubblicò l'articolo in cui viene presentata la formulazione dell'integrale sui cammini ([1]), la meccanica quantistica aveva già raggiunto un numero notevole di risultati soddisfacenti e la sua nuova formulazione non vi aggiunge nella sostanza nulla di nuovo.

Così lo stesso fisico statunitense affermava durante il suo discorso per il premio Nobel, conferitogli nel 1965:

"Le teorie note che sono descritte da idee fisiche differenti, possono essere equivalenti nelle loro previsioni e dunque scientificamente indistinguibili. Tuttavia, non sono psicologicamente identiche quando cerchiamo di muoverci da un punto di riferimento ad un altro ignoto. Sotto diversi punti di vista esse suggeriscono diversi tipi di modifiche che potrebbero essere apportate e, pertanto, non sono equivalenti nelle ipotesi che qualcuno può formulare a partire da esse, nell'intento di comprendere ciò che ancora non è stato compreso."

Sebbene dunque quella di Feynman sia una formulazione del tutto equivalente della meccanica quantistica, come però spesso accade nella storia della scienza, osservare e indagare i fenomeni sotto un diverso punto di vista e con mezzi differenti, permette di pervenire a risultati del tutto innovativi e spalancare le porte a nuovi campi del sapere. Tale nuovo approccio ha apportato infatti contributi enormi all'elettrodinamica quantistica e in generale alla teoria quantistica dei campi, ambienti in cui è nato e si è sviluppato, ma persino a discipline che paiono molto distanti da quelle in cui l'integrale di Feynman ha posto le sue radici, come la statistica o l'economia.

Tutte le nuove formulazioni e teorie fisiche, compresa quella di Feynman, che si sono susseguite nel corso della storia, seppure spesso equivalenti, hanno permesso alla fisica di dotarsi di nuovi strumenti, sempre più efficaci, finalizzati alla migliore comprensione possibile che siamo in grado di sviluppare sul comportamento della natura.

Capitolo 1

L'integrale sui cammini: definizione e caratteristiche

Chiaramente il concetto di traiettoria non è utilizzabile in meccanica quantistica; d'altronde, da come discusso prima, sebbene classicamente il moto sia sempre ben determinabile fissate le condizioni iniziali, al contrario la funzione d'onda può essere solo legata alla probabilità di osservazione di una particella. Sembrerebbe quindi ostico applicare con la stessa utilità il concetto di azione in tale nuovo ambiente. Dirac fu il primo a comprendere l'importanza del ruolo che avrebbe potuto svolgere l'azione in fisica moderna; il suo obiettivo era sviluppare una meccanica quantistica utilizzabile in ambito relativistico.

Allo scopo di dar senso allo studio dell'azione in meccanica quantistica e giungere poi alla definizione di integrale sui cammini, andremo prima a presentare alcuni concetti classici e li adatteremo opportunamente alla meccanica quantistica dell'approccio alla Dirac.

1.1 Il funzionale d'azione in meccanica classica e meccanica quantistica

Lo stato di una particella classica è definito dalla coppia (q, p) , rispettivamente coordinata e momento nello spazio delle fasi. L'evoluzione temporale si ottiene da un sistema di $2n$ equazioni del primo ordine, dette equazioni di Hamilton:

$$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} , \quad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \quad h = 1, \dots, n , \quad (1.1)$$

che nella notazione delle parentesi di Poisson assumono la seguente forma:

$$\frac{dq_h}{dt} = \{q_h, H\} , \quad \frac{dp_h}{dt} = \{p_h, H\} . \quad (1.2)$$

Si dice che una trasformazione del tipo

$$(q, p) \rightarrow (Q, P) , \quad (1.3)$$

è *canonica* se lascia invariata la forma delle equazioni di Hamilton.

Se la trasformazione di sopra è canonica, per quanto detto si può definire quindi

una nuova hamiltoniana \mathcal{H} tale che

$$\frac{dQ_h}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_h}, \quad \frac{dP_h}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_h}. \quad (1.4)$$

Una condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione sia canonica è che valgano le seguenti;

$$\{P_h, P_k\} = 0, \quad \{Q_h, Q_k\} = 0, \quad \{Q_h, P_k\} = \delta_{hk}. \quad (1.5)$$

Le relazioni (1.5) ci assicurano, nota a priori una trasformazione, solo se essa è canonica. Il seguente teorema ci porterà invece proprio a ottenere una trasformazione canonica a partire dalle coordinate (q, p) e (Q, P) sopra definite.

Teorema 1. *Si dice che una trasformazione di coordinate è canonica se esiste una funzione F tale che:*

$$p_h dq_h - H(q, p) dt = P_h dQ_h - \mathcal{H}(Q, P) dt + dF. \quad (1.6)$$

In cui F viene chiamata *funzione generatrice*. Dal risultato di sopra segue che i due membri differiscono nella forma per una derivata totale, infatti:

$$p_h \frac{dq_h}{dt} - H(q, p) = P_h \frac{dQ_h}{dt} - \mathcal{H}(Q, P) + \frac{dF}{dt}. \quad (1.7)$$

F può dipendere dalle coppie di variabili $(q, Q), (q, P), (p, P)$ o (p, Q) , oltre che dal tempo. Supponendo F dipendente da (q, Q, t) ed esplicitando la derivata totale, otteniamo:

$$\left(p_h - \frac{\partial F}{\partial q_h} \right) \frac{dq_h}{dt} - \left(P_h + \frac{\partial F}{\partial Q_h} \right) \frac{dQ_h}{dt} = H - \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Le derivate totali delle coordinate non possono essere nulle, segue la relazione della nuova hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (1.9)$$

e delle coordinate in dipendenza della funzione generatrice:

$$p_h = \frac{\partial F(q, Q)}{\partial q_h}, \quad P_h = -\frac{\partial F(q, Q)}{\partial Q_h}. \quad (1.10)$$

A questo punto si supponga di considerare questa particolarissima trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} q = q(Q, P, t) \\ p = p(Q, P, t) \end{cases} \quad (1.11)$$

in cui Q e P sono indipendenti dal tempo. Allora, poiché $\frac{dQ_h}{dt} = \frac{dP_h}{dt} = 0$, supponendo anche \mathcal{H} nullo, dalla (1.9) segue l'equazione di Hamilton-Jacobi,

$$H\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.12)$$

dove la funzione generatrice $S(q, Q = \text{const}, t)$ è in questo caso chiamata *funzione principale*. Sviluppando la derivata totale, si ottiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -H(q, p, t) + p \frac{dq}{dt}, \quad (1.13)$$

l'ultima espressione, ricordando la trasformata di Legendre, coincide proprio con la lagrangiana del sistema. Notiamo che integrare la relazione precedente conduce a

$$S = \int_{t_0}^t dt' \left[p \frac{dq}{dt} - H(q, p, t) \right] = \int_{t_0}^t dt' L. \quad (1.14)$$

Si comprende da questo importante risultato che la funzione generatrice di trasformazioni canoniche definite come fatto sopra non è nient'altro che il funzionale d'azione associato all'evoluzione del sistema ed è quindi legato alla particolare traiettoria tra i punti di coordinate $Q = q(t_0)$ e $q(t)$. D'altronde, minimizzando la (1.14) riotteniamo proprio le equazioni di Hamilton.

Non ci resta che trasporre tutto quanto detto in meccanica quantistica e valutare la possibilità di sfruttare il funzionale in questo nuovo ambiente. Un sistema quantistico è descritto dagli operatori \hat{q} e \hat{p} per cui valgono le seguenti relazioni:

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle, \quad (1.15)$$

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad (1.16)$$

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1. \quad (1.17)$$

con $x = \{\hat{q}, \hat{p}\}$. L'ultima relazione è la relazione di completezza.

Valgono inoltre le seguenti *Quantum-Poisson bracket*, in sostituzione delle (1.5),

$$[\hat{q}, \hat{q}] = 0, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (1.18)$$

dove \hbar è la costante ridotta di Planck. Come in meccanica classica, queste forniscono una condizione necessaria e sufficiente affinché la trasformazione tra operatori,

$$(\hat{q}, \hat{p}) \rightarrow (\hat{Q}, \hat{P}), \quad (1.19)$$

sia canonica. Per i nostri scopi consideriamo trasformazioni del tipo (1.11). Ricordando inoltre che nella rappresentazione delle coordinate vale che $\hat{p}|q\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} |q\rangle$, allora è facile verificare le seguenti relazioni tra elementi di matrice:

$$\langle q|\hat{p}|Q\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q|Q\rangle \quad (1.20)$$

$$\langle q|\hat{P}|Q\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q} \langle q|Q\rangle. \quad (1.21)$$

Passaggio cruciale per il proseguimento delle nostre considerazioni è porre, come fatto da Dirac:

$$\langle q|Q\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} S(q, Q)}, \quad (1.22)$$

da cui segue, considerando (1.20) e (1.21),¹

$$\langle q|\hat{p}|Q\rangle = \frac{\partial S}{\partial q} \langle q|Q\rangle \implies \hat{p} = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (1.23)$$

$$\langle q|\hat{P}|Q\rangle = -\frac{\partial S}{\partial Q} \langle q|Q\rangle \implies \hat{P} = -\frac{\partial S}{\partial Q}. \quad (1.24)$$

coppia di uguaglianze, si comprende come S sia a tutti gli effetti l'analogo della funzione generatrice introdotta precedentemente e, definita sotto opportune trasformazioni, essa possiede le stesse caratteristiche associate all'evoluzione del sistema discusse in precedenza, ma introdotta a partire dal formalismo della meccanica quantistica.

D'ora in poi per ragioni tipografiche scriveremo gli operatori senza "cappelletto", lasciandone però invariato il significato fisico.

1.2 La costruzione dei cammini di Feynman

Nella definizione dell'integrale che porta il suo nome, seguiremo inizialmente lo stesso percorso logico seguito da Feynman attraverso le ipotesi di cui egli stesso fece uso, per poi successivamente discostarcene e dimostrare la validità delle relazioni presentate in questo capitolo. E' stato mostrato, nelle ipotesi fatte, come la funzione generatrice del nuovo sistema di coordinate coincida a tutti gli effetti l'azione hamiltoniana. Da questa analogia e similmente a quanto fatto nella (1.22), posta q la coordinata al tempo t_0 e q' la coordinata al tempo successivo t , Dirac assunse:

$$\langle q'_t|q_{t_0}\rangle \sim e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt L}. \quad (1.25)$$

Dove gli autostati sono associati al formalismo di Heisenberg e quindi non evolvono nel tempo, seppure dipendano da un parametro temporale. E' evidente che il significato quantistico della relazione è quello di una ampiezza di transizione dallo stato contrassegnato dal ket $|q_{t_0}\rangle$ allo stato $|q'_t\rangle$. Si noti, inoltre, che tale relazione non è un'uguaglianza, in quanto è stata posta solo a seguito di alcune assunzioni ed analogie. Possiamo verificarlo facilmente esplicitando il membro di sinistra e poi quello di destra. Suddividiamo l'intervallo temporale qui considerato in n intervalli equispaziati infinitesimi di ampiezza δt , cosicchè $n\delta t = t - t_0$. In questo modo alla generica coordinata temporale $t_k = t_0 + k\delta t$ è associata la coordinata q_k , dove $k = 0, 1, \dots, n$. Usando infine la relazione di completezza (1.17) possiamo scrivere:

$$\langle q'_t|q_{t_0}\rangle = \int dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1} \langle q'_t|q_1\rangle \langle q_1|q_2\rangle \dots \langle q_{n-1}|q_{t_0}\rangle. \quad (1.26)$$

Si fa la stessa cosa al membro di destra, scrivendo l'integrale all'esponente come somma degli integrali per ogni intervallo:

$$\langle \hat{q}'_t|\hat{q}_{t_0}\rangle = \langle q_t|q_1\rangle \langle q_1|q_2\rangle \dots \langle q_{n-1}|q'_t\rangle, \quad (1.27)$$

¹Tali relazioni si ottengono supponendo che gli operatori \hat{Q} e \hat{q} non commutino e che S sia separabile in $S_1(q)S_2(Q)$ cosicchè $\langle q|S(\hat{q}, \hat{Q})|Q\rangle = S(\hat{q}, \hat{Q})\langle q|Q\rangle$.

si ottiene il prodotto di singoli integrali e non l'integrale sulla misura $dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1}$ come nel primo caso, quindi le due relazioni non coincidono.

E' possibile tuttavia comunque considerare lecita l'uguaglianza per la relazione (1.25) a meno di una costante C in un *intervallo infinitesimo* di tempo δt^2 ,

$$\langle q'_{t_0+\delta t} | q_{t_0} \rangle = C e^{\frac{i}{\hbar} \delta t L(q_{t_0}, q'_{t_0+\delta t})} . \quad (1.28)$$

Si noti qui la dipendenza della lagrangiana dalle coordinate.

Poiché questa rappresenta, conformemente a come abbiamo definito la (1.25), l'ampiezza di probabilità per la transizione dallo stato $|q_{t_0}\rangle$ allo stato $|q'_{t_0+\delta t}\rangle$, l'integrale complessivo per un tempo finito e quindi la transizione dall'autoket $|q_{t_0}\rangle$ al quello $|q'_t\rangle$ si può a questo punto ricavare facilmente sfruttando le relazioni (1.26) e (1.28) e mandando a limite n ,

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} C^n \int \left(\prod_{i=1}^{n-1} dq_i \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt L(q(t), \dot{q}(t))} \quad \text{per } n\delta t \text{ fissato} . \quad (1.29)$$

Questo integrale, che spesso viene riscritto nel seguente modo più conciso, ma totalmente equivalente,

$$K(q, q'; t_0, t) = \langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}([q]; t_0, t)} , \quad (1.30)$$

viene chiamato **integrale sui cammini** (o *path integral*) per l'ampiezza di transizione.

il termine $\mathcal{S}([q]; t_0, t) = \int_{t_0}^t dt L(q, \dot{q})$ è a tutti gli effetti il funzionale d'azione definito nella (1). Utilizzando la trasformata di Legendre $H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q})$ è possibile scrivere l'azione anche in funzione dell'hamiltoniana nelle variabili di integrazioni q e p

$$K(q, q'; t_0, t) = \langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \int \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt [p\dot{q} - H(q, p)]} , \quad (1.31)$$

Come mostreremo nei capitoli successivi, questa definizione è molto più generale di quella introdotta nel modo appena descritto.

Si noti inoltre che la simbologia usata per $\mathcal{D}q$ non è solo una riposizione più concisa, ma è un modo di sottintendere le difficoltà che vi sono nel definire la misura su cammini così costruiti (1.29).

Per lo stesso motivo è difficile in generale ottenere una espressione per la costante di normalizzazione C . Se però supponiamo che l'hamiltoniana del nostro sistema possa scriversi come $H = \frac{p^2}{2} + V(q)$ si può sempre stimare quali siano le condizioni affinché l'ipotesi (1.28) sia valida e dimostrare così la relazione. Consideriamo quindi le coordinate q e q' al tempo t con l'hamiltoniana detta:

$$\langle q'_t | H | q_t \rangle = \left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial q^2} + V(q) \right] \langle q'_t | q_t \rangle , \quad (1.32)$$

²In realtà la relazione seguente si può dimostrare per diversi sistemi fisici, si vedrà come fare tra qualche riga e negli esempi sviluppati nei capitoli successivi con una metodologia di calcolo basata sulla suddivisione in intervalli infinitesimi.

Utilizzando ora la (1.16) e ricordando la rappresentazione integrale della funzione delta

$$\delta(q' - q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(q' - q)}, \quad (1.33)$$

la (1.32) diviene,

$$\langle q'_t | H | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial q^2} + V(q) \right] e^{ik(q' - q)}. \quad (1.34)$$

Dall'equazione di evoluzione operatoriale dello schema di Heisenberg si ottiene:

$$\langle q'_{t+\delta t} | q_t \rangle = \langle q'_t | q_t \rangle - \frac{i}{\hbar} \langle q'_t | H | q_t \rangle \delta t + O(\delta t)^2. \quad (1.35)$$

A cui sostituiamo il termine matriciale della (1.34),

$$\langle q'_{t+\delta t} | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[1 - \frac{1}{\hbar} \delta t H(k, q) + O(\delta t)^2 \right] e^{ik(q' - q)}. \quad (1.36)$$

A questo punto riconosciamo che l'interno della parentesi quadra è lo sviluppo dell'esponenziale, si può riscrivere questo termine come tale con un errore pari a $O(\delta t)^2$ e ricordando la forma dell'hamiltoniana si ottiene dunque

$$\langle q'_{t+\delta t} | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp \left[i \frac{\delta t}{\hbar} \left(\hbar k \frac{dq}{dt} - \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 - V(q) \right) \right] + O(\delta t)^2, \quad (1.37)$$

nella quale è stato supposto $q' - q$ sia sufficientemente piccolo, così da poter scrivere, in prima approssimazione:

$$q' - q = \frac{dq}{dt} \delta t = \dot{q} \delta t. \quad (1.38)$$

L'ultimo integrale è oscillante, potremmo studiarlo sfruttando il metodo di fase stazionaria³ o mandando $t \rightarrow it$. A questo livello ci interessa solo valutare approssimativamente in che caso l'ipotesi di Feynman sia accettabile date le condizioni poste, quindi supponiamo semplicemente che $i\delta t$ sia una costante. Si nota che che il termine nella parentesi quadra in (1.37) diventa, aggiungendo e sottraendo $\frac{1}{2}\dot{q}^2$,

$$\begin{aligned} & \frac{i\delta t}{\hbar} \left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \hbar\dot{q}k - \frac{1}{2}\hbar^2 k^2 - V(q) - \frac{1}{2}\dot{q}^2 \right] \\ &= \frac{i\delta t}{\hbar} \left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right] - \frac{1}{2} \frac{i\delta t}{\hbar} \left[\hbar^2 k^2 - 2\hbar\dot{q}k + \dot{q}^2 \right] \\ &= \frac{i\delta t}{\hbar} \left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right] - \frac{1}{2} \frac{i\delta t}{\hbar} (\hbar k - \dot{q})^2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Quindi, effettuando la seguente sostituzione:

$$k' = \left(\frac{i\delta t}{\hbar} \right)^{1/2} (\hbar k - \dot{q}), \quad (1.40)$$

³Tale metodo sarà descritto successivamente quando discuteremo del limite classico.

l'integrale di partenza diviene,

$$\langle q'_{t+\delta t} | q_t \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} [\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{\sqrt{i\delta t\hbar}} e^{-\frac{1}{2}k'^2}, \quad (1.41)$$

il quale si presenta come un semplice integrale gaussiano del tipo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (1.42)$$

Posto dunque $\alpha = \frac{1}{2}$ è facile giungere alla seguente conclusione:

$$\langle q'_{t+\delta t} | q_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\delta t\hbar}} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} [\frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)]}. \quad (1.43)$$

Una volta osservato che il termine all'esponenziale, per come è stato definito, è proprio la lagrangiana del sistema, è facile comprendere che l'espressione per la transizione in un intervallo infinitesimo a cui siamo giunti è perfettamente compatibile con l'ipotesi di Feynman. Al limite $\delta t \rightarrow 0$ (o equivalentemente $n \rightarrow \infty$) si riottiene nuovamente la (1.29) a cui va sostituita quindi la costante di normalizzazione

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\delta t\hbar}}. \quad (1.44)$$

Si ribadisce che questo vale solo nel caso particolare in cui l'hamiltoniana abbia la forma che abbiamo ipotizzato; nel caso generale non si sa sempre trovare una costante di normalizzazione.

1.2.1 Considerazioni fisiche ed analogie

E' stato introdotto l'integrale di Feynman facendo notare come in meccanica classica esista una sola traiettoria possibile tra i due stati, quella certa curva $x_c(t)$ che, in accordo con il principio di Hamilton, rende minimo il funzionale S ; la traiettoria che ne deriva è unica.

In meccanica quantistica questo non è più possibile, tuttavia, con il formalismo di Feynman l'azione continua a giocare un ruolo di primo piano. Lo sviluppo dei precedenti calcoli si basa su due assunzioni su cui poggia la definizione di path integral:

- 1) Esiste un contributo di fase che pesa l'ampiezza di transizione per ogni cammino tra due stati separati da un tempo infinitesimo, come descritto dalla (1.28).
- 2) L'ampiezza totale della transizione tra due stati è data dalla somma di tutti i contributi dei singoli cammini, similmente alla (1.29).

Come detto, il significato assunto da un'equazione del tipo (1.30) è quello di *ampiezza di transizione* tra uno stato ed un altro, il significato di funzionale d'azione resta tuttavia completamente immutato. Allora la transizione tra due stati è definita dall' *integrale su tutti i cammini* che congiungono lo stato iniziale $|q_{t_0}\rangle$ e quello finale $|q'_t\rangle$ e non più dalla sola curva che rende stazionario il funzionale d'azione come avviene classicamente.

Importantissima conseguenza di questo è che tutti i cammini contribuiscono all'ampiezza dello stato finale. In altre parole, date le condizioni al bordo del problema, l'ampiezza totale della particella che parte dal punto q al tempo t_0 e

giunge in q' al tempo t è ottenuta come somma delle ampiezze di tutti i possibili cammini che iniziano da q e giungono in q' , ognuno dei quali ha uguale intensità, ma contribuisce con diversa fase $e^{i/\hbar \int dt L}$. Non stupisce dunque che la "storia" complessiva della particella sia semplicemente la somma di tutti i cammini che essa può avere tra i due punti.

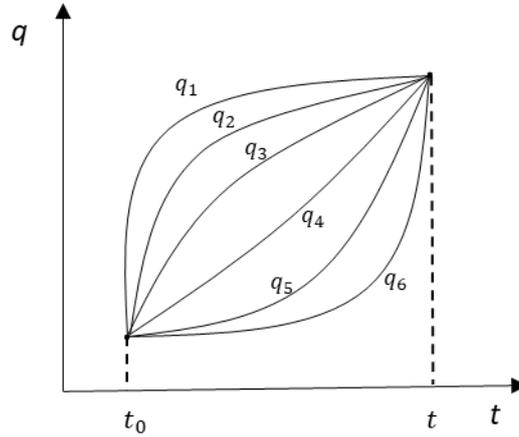


Figura 1.1: Tutti i cammini contribuiscono all'ampiezza di transizione tra uno stato e un altro

Inoltre, in accordo con i postulati della meccanica quantistica, sappiamo anche che la *probabilità* che tutto quanto detto sia osservato al tempo t è data dal modulo quadro della (1.30):

$$\mathcal{P}(q, q'; t_0, t) = |K(q, q'; t_0, t)|^2. \quad (1.45)$$

Per le conseguenze della meccanica quantistica, la funzione d'onda dell'equazione di Schrödinger non descrive la posizione di una particella, ma piuttosto è connessa alla probabilità che essa si trovi in una certa regione. Similmente, nella transizione tra uno stato ed un altro nell'approccio di Feynman, si può solo valutare la probabilità che la particella segua un percorso e la probabilità totale data dalla (1.45) sarà il modulo quadro dell'ampiezza complessiva.

Un altro punto su cui vale la pena ritornare è la definizione dell'integrale nella (1.29), come già anticipato, tale relazione crea non poche complicazioni per quanto riguarda la misura. Immaginiamo a titolo di esempio che la lagrangiana dipenda dall'accelerazione. Per come è definito l'integrale, poiché abbiamo considerato intervalli infinitesimi di tempo δt piccoli a piacere, la velocità è discontinua in un infinito numerabile di punti di coordinata (q_i, t_i) , segue quindi che l'accelerazione è infinita in questi punti. A partire da queste difficoltà si comprende come bisogna essere piuttosto cauti nella definizione della misura \mathcal{D} all'interno della (1.30).

1.3 L'integrale sui cammini come propagatore del sistema

Andiamo ora ad approfondire alcune caratteristiche dell'integrale di Feynman legate soprattutto all'evoluzione di un sistema fisico che riveleranno numerose analogie con quanto già noto.

La funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrödinger può essere scritta nella notazione di Dirac nella base delle coordinate:

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle . \quad (1.46)$$

Fissata inoltre la condizione iniziale $\psi(t_0)$, l'evoluzione temporale del sistema fisico dal tempo t_0 al tempo t può essere studiata ponendo:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle , \quad (1.47)$$

dove $\hat{U}(t, t_0)$ è un operatore unitario.

Sostituendo questa relazione all'interno dell'equazione di Schrödinger (2), otteniamo:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t, t_0)}{dt} = \hat{H}\hat{U}(t, t_0) , \quad (1.48)$$

la quale è a tutti gli effetti una equazione differenziale operatoriale, la cui soluzione esiste in forma esponenziale solo se sono verificati i requisiti richiesti dal seguente teorema, per la quale dimostrazione si rimanda a [7].

Teorema 2. (di Stone) *Se H è una trasformazione autoaggiunta in uno spazio di Hilbert astratto, allora $U(\tau) \equiv e^{i\tau H}$, dove $-\infty < \tau < +\infty$, è una famiglia di trasformazioni unitarie e, inoltre, se sono soddisfatte le seguenti proprietà*

$$U(\sigma + \tau) \equiv U(\sigma)U(\tau) , \quad (1.49)$$

$$U(\sigma) \rightarrow U(\tau) \quad \text{per } \sigma \rightarrow \tau ; \quad (1.50)$$

e se vale la proprietà di continuità:

$$|U(\sigma) - U(\tau)f|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\sigma\lambda} - e^{i\tau\lambda}|^2 d|E(\lambda)f|^2 \quad (1.51)$$

in cui $E(\lambda)$ è la risoluzione dell'unità corrispondente ad H , allora esiste ed è unica la trasformazione autoaggiunta H tale che $U(\tau) \equiv e^{i\tau H}$.

Supponendo di porci nelle condizioni del teorema, varrà che $U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$. Quindi l'evoluzione temporale del sistema, tenendo conto della (1.47), sarà data da:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle \quad (1.52)$$

Questa relazione è particolarmente importante, perché oltre a caratterizzare l'evoluzione del sistema, sostituendo la (1.46), fornisce una relazione tra le autofunzioni nel formalismo di Schrödinger e quello di Heisenberg.

Sappiamo ora che se $|\psi(t_0)\rangle$ è la condizione iniziale per l'equazione di Schrödinger, essa può essere espansa nel seguente modo:

$$|\psi(t_0)\rangle = \psi(q, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k |u_k(q)\rangle , \quad (1.53)$$

dove $|u_k\rangle$ sono autovettori per l'hamiltoniana del sistema, inoltre b_k sono i coefficienti di Fourier,

$$b_k = \langle u_k(q') | \psi(t_0) \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} dq' u_k^*(q') \psi(q', t_0). \quad (1.54)$$

Allora possiamo ottenere facilmente la soluzione al tempo t , nota la (1.52):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\frac{i}{\hbar} E_k(t-t_0)} |u_k(q)\rangle, \quad (1.55)$$

dove sono stati chiamati E_k gli autovalori associati all'hamiltoniana \hat{H} , basta a questo punto sostituire (1.54) nella (1.55) per ottenere:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_k(q') | \psi(t_0) \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_k(t-t_0)} |u_k(q)\rangle, \\ \langle q | \psi(t) \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^3} dq \psi(q, t_0) u_k^*(q') e^{-\frac{i}{\hbar} E_k(t-t_0)} u_k(q) \implies \\ \psi(q, t) &= \int_{\mathbf{R}^3} dq K(q, q'; t, t_0) \psi(q, t_0). \end{aligned} \quad (1.56)$$

E' stata definita la quantità

$$K(q, q'; t_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^*(q') u_k(q) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k(t-t_0)}, \quad (1.57)$$

detto *propagatore* del sistema o anche *Kernel di Green* dell'operatore $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)}$. Per definizione esso è una soluzione per l'equazione differenziale

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) K(q, q'; t_0, t) = 0, \quad (1.58)$$

al tempo $t \neq 0$.

Talvolta alcuni preferiscono porre anche

$$G(q, q'; t_0, t) = \vartheta(t) K(q, q'; t_0, t) = \vartheta(t) \sum_{k=0}^{\infty} u_k^*(q') u_k(q) e^{-\frac{i}{\hbar} E_k(t-t_0)}, \quad (1.59)$$

chiamata *funzione di Green*, con ϑ funzione di Heaviside definita da

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (1.60)$$

Per semplicità qui verrà usato sempre il simbolo di Kernel specificando quando utilizziamo la definizione di funzione di Green per t positivi.

Consideriamo ora il vettore $|q'_t\rangle$ cioè l'autostato al tempo t , sfruttando la (1.46) e tenendo conto della relazione di completezza (1.17), vale che:

$$\psi(q', t) = \langle q'_t | \psi \rangle = \int \langle q'_t | q_{t_0} \rangle \langle q_{t_0} | \psi \rangle dq_{t_0} \quad (1.61)$$

Ricordando che anche $\langle q_{t_0} | \psi \rangle = \psi(q, t_0)$, si ottiene,

$$\psi(q', t) = \langle q'_t | \psi \rangle = \int \langle q'_t | q_{t_0} \rangle \psi(q, t_0) dq_{t_0} \quad (1.62)$$

Si osservi che il termine $\langle q'_t | q_{t_0} \rangle$, per la definizione a cui siamo giunti nella (1.29), è proprio l'integrale di Feynman tra la coordinata q al tempo t_0 e la coordinata q' al tempo t . Inoltre basta confrontare questa relazione (1.62) con la (1.56), per giungere al seguente importante risultato,

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = K(q, q'; t_0, t). \quad (1.63)$$

L'integrale sui cammini di Feynman coincide a tutti gli effetti con il propagatore del sistema e quindi porta con sé tutte le caratteristiche ad esso legato. Risultato ancora più rimarchevole se si ricorda che esso può essere correlato alla probabilità di osservazione tramite la (1.45).

Con l'approccio ondulatorio si impone la condizione iniziale e si risolve l'equazione di Schrödinger, ottenendo così il kernel di Green. Nell'approccio di Feynman, sviluppare l'integrale sui cammini conduce al propagatore, e quindi all'ampiezza di transizione tra due stati, in modo diretto.

1.4 Generalizzazione per molti eventi

Nei paragrafi precedenti è stato sviluppato l'integrale sui cammini per transizioni da una posizione ad un'altra. Lo stesso ragionamento può essere estrapolato per derivare l'ampiezza di transizione totale tra due o più eventi in successione. Supponiamo infatti di considerare tra il tempo iniziale t_0 e quello finale t , un tempo intermedio t_1 , a cui viene associata una coordinata q_1 .

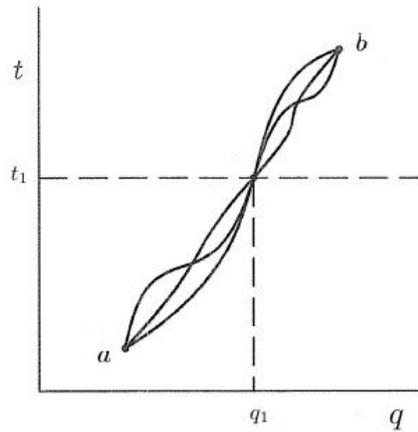


Figura 1.2: L'ampiezza di transizione totale si può ottenere considerando la somma su tutti i cammini che uniscono il punto a di coordinate (q_0, t_0) a quello di coordinate (q_1, t_1) e poi quelli che uniscono quest'ultimo al punto b di coordinate (q, t) .

Per definizione di propagatore, possiamo esprimere la funzione d'onda al tempo intermedio t_1 nel seguente modo:

$$\psi(q_1, t_1) = \int dq_0 K(q_0, q_1; t_0, t_1) \psi(q_0, t_0) . \quad (1.64)$$

Similmente possiamo fare con la funzione d'onda valutata tempo finale,

$$\psi(q, t) = \int dq_1 K(q_1, q; t_1, t) \psi(q_1, t_1) . \quad (1.65)$$

Basta ora sostituire la (1.64) nella (1.65) per ottenere:

$$\psi(q, t) = \int \int dq_0 dq_1 K(q_1, q; t_1, t) K(q_0, q_1; t_0, t_1) \psi(q_0, t_0) . \quad (1.66)$$

Da questa ultima equazione si evince una proprietà molto importante; il propagatore tra q_0 e q è la somma su tutti i possibili valori di q_1 dell'ampiezza (e quindi tutti i possibili cammini) affinché la particella vada da q_0 a q_1 e poi da q_1 a q . L'ampiezza totale tra due eventi è quindi semplicemente ottenibile attraverso il prodotto dei singoli propagatori:

$$K(q_0, q, t_0, t) = \int dq_1 K(q_0, q_1; t_0, t_1) K(q_1, q; t_1, t) \quad (1.67)$$

A questo punto il processo è facilmente generalizzabile dividendo l'intervallo tra i due estremi in n intervalli contigui e fissata la coordinata q ad ogni tempo $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$, si otterrà:

$$\begin{aligned} K(q_0, q, t_0, t) = \int \int \dots \int \left(\prod_{i=0}^{n-1} dq_i \right) & K(q_{n-1}, q; t_{n-1}, t) K(q_{n-2}, q_{n-1}; t_{n-2}, t_{n-1}) \\ & \dots \times \dots K(q_j, q_{j+1}; t_j, t_{j+1}) \dots K(q_0, q_1; t_0, t_1) . \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ma per quanto detto precedentemente e da quello che emerge dalla (1.63), si può ottenere nuovamente:

$$\langle q_t | q_{t_0} \rangle = \int \int \dots \int \left(\prod_{i=0}^{n-1} dq_i \right) \langle q_t | q_{t_{n-1}} \rangle \langle q_{t_{n-1}} | q_{t_{n-2}} \rangle \dots \langle q_{t_1} | q_{t_0} \rangle . \quad (1.69)$$

Si noti che questa espressione coincide a tutti gli effetti con la già nota (1.26) e quindi l'integrale di Feynman per la transizione tra il punto iniziale e finale. Avevamo già visto che l'ampiezza di transizione tra un evento e l'altro è legata alla somma su tutti i possibili cammini congiungenti quegli eventi. Ora, grazie al modello qui introdotto, si è dimostrato in più che, dato un insieme numerabile di eventi tra due punti iniziali e finali, l'ampiezza di transizione totale tra i due punti si può ottenere semplicemente dalla somma di tutti i cammini congiungenti i singoli eventi, moltiplicati tra di loro.

Un'ultima cosa che è possibile sottolineare è che per via della (1.69) e ricordando la definizione data di path integral (1.30) è possibile scrivere:

$$\langle q_t | q_{t_0} \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}} , \quad (1.70)$$

in cui è stato posto

$$\mathcal{S} = S([q, q_{n-1}]) + S([q_{n-1}, q_{n-2}]) + \dots + S([q_1, q_0]) . \quad (1.71)$$

Quest'ultima relazione rivela così anche la proprietà di additività del funzionale d'azione quando si considerino più eventi che si presentano in successione.

Abbiamo già discusso dei problemi relativi alla misura $\mathcal{D}q$. Nei prossimi capitoli, tra le altre cose, andremo a sviluppare il calcolo del path integral in alcuni casi specifici della hamiltoniana e apprezzeremo meglio la questione, rendendo anche più evidente la potenza del metodo qui sviluppato.

Capitolo 2

Alcune applicazioni in meccanica quantistica

Alla fine della sezione 1.3 si è discusso su come giungere alla formula finale del propagatore nell'approccio di Feynman senza ricorrere alla risoluzione dell'equazione differenziale soddisfatta dalla funzione di Green. Vediamo ora alcuni semplici esempi di sistemi fisici ai quali è possibile applicare in maniera diretta il path integral.

In questo capitolo verranno inoltre svolti gli esempi ricavando l'integrale dall'ampiezza di transizione e non supponendolo come ipotesi come nella (1.28).

2.1 Hamiltoniane quadratiche e formula generale per il path integral

Applichiamo ora il path integral ad un sistema caratterizzato dalla particolare hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) . \quad (2.1)$$

Ci proponiamo di studiare l'ampiezza di transizione $\langle q'_t | q_{t_0} \rangle$ tra t_0 e t . Si divide perciò l'insieme in intervalli temporali $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ognuno di ampiezza $\tau = \frac{t-t_0}{n}$. Valutiamo quindi la transizione di una particella di massa m soggetta a questo potenziale in un intervallo infinitesimo tra $q_{k+1} \equiv q(t_{k+1})$ e $q_k \equiv q(t_k)$ con $t_k = t_0 + \tau k$. Sappiamo che vale la seguente relazione tra le autofunzioni nel formalismo di Heisenberg e quello di Schrödinger:

$$\langle q_{t_{k+1}} | q_{t_k} \rangle = \langle q_{k+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} | q_k \rangle . \quad (2.2)$$

Ora, supponendo spettro discreto per l'operatore H , sviluppiamo in serie l'esponenziale

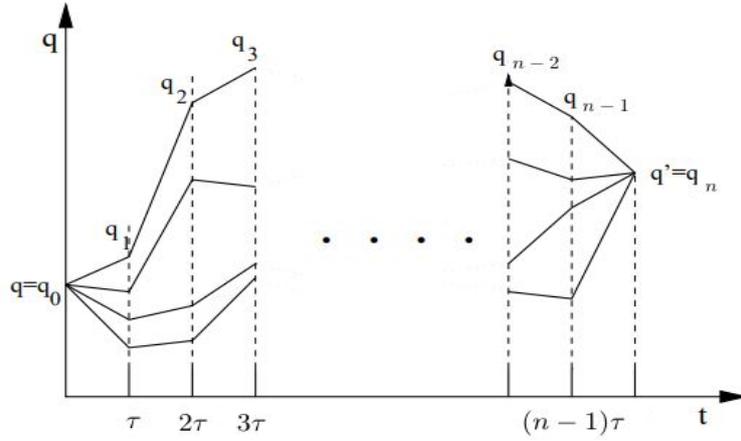


Figura 2.1: Suddivisione dell'insieme in intervalli infinitesimi. L'ampiezza di probabilità complessiva è data dalla somma su tutti i cammini al limite per τ che tende a zero.

$$\begin{aligned}
 \langle q_{t_{k+1}} | q_{t_k} \rangle &= \langle q_{k+1} | q_k \rangle - \langle q_{k+1} | \frac{i}{\hbar} H \tau | q_k \rangle + O(\tau^2) \\
 &\simeq \delta(q_{k+1} - q_k) - \frac{i}{\hbar} \tau \langle q_{k+1} | H | q_k \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} - \frac{i}{\hbar} \tau \langle q_{k+1} | H | q_k \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dove è stata usata la relazione (1.16) e la formulazione integrale della delta di Dirac. Non ci resta che analizzare il termine in cui è contenuta l'hamiltoniana

$$\langle q_{k+1} | H | q_k \rangle = \frac{1}{2m} \langle q_{k+1} | p^2 | q_k \rangle + \langle q_{k+1} | V(q) | q_k \rangle \tag{2.4}$$

Esplicitiamo innanzitutto il primo addendo, per la relazione di completezza si ottiene

$$\frac{1}{2m} \langle q_{k+1} | p^2 | q_k \rangle = \frac{1}{2m} \int dp' dp \langle q_{k+1} | p' \rangle \langle p' | p^2 | p \rangle \langle p | q_k \rangle \tag{2.5}$$

Si sostituisce ora l'autofunzione dell'impulso come onda piana del tipo $\langle q_{k+1} | p' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar} p' q_{k+1}}$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2m} \langle q_{k+1} | p^2 | q_k \rangle &= \frac{1}{2m} \int \frac{dp' dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} (p' q_{k+1} - p' q_k)} p^2 \delta(p - p') \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} \frac{p^2}{2m}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Passiamo ora al termine successivo della (2.4), in cui per comodità facciamo l'ipotesi che nell'intervallo infinitesimo qui considerato il potenziale non vari apprezzabilmente, così da poterlo considerare costante. Risulta allora utile definire

$\bar{q}_k = \frac{q_{k+1} + q_k}{2}$, cosicch 

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1} | V(q) | q_k \rangle &= V(\bar{q}_k) \langle q_{k+1} | q_k \rangle \\ &= V(\bar{q}_k) \delta(q_{k+1} - q_k) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} V(\bar{q}_k) \end{aligned} \quad (2.7)$$

La (2.4) diviene quindi,

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1} | H | q_k \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} \left(\frac{p^2}{2m} + V(\bar{q}_k) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} H(\bar{q}_k, p). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Non resta ora che sostituire nella formula generale (2.3) per la transizione considerata,

$$\begin{aligned} \langle q_{t_{k+1}} | q_{t_k} \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} dp - \frac{i}{\hbar} \tau \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} H(\bar{q}_k, p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} p(q_{k+1} - q_k)} \left[1 - \frac{i}{\hbar} \tau H(\bar{q}_k, p) \right] dp. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Come gi  fatto in precedenza, a meno di un errore dell'ordine di $O(\tau^2)$, si pu  approssimare il termine in parentesi quadra con l'esponenziale associato al suo sviluppo in modo tale che si giunga a

$$\langle q_{t_{k+1}} | q_{t_k} \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{i}{\hbar} [p_k(q_{k+1} - q_k) - \tau H(\bar{q}_k, p)]}, \quad (2.10)$$

in cui   stato chiamato p_k il momento nell'intervallo di tempo τ . Il tutto   facilmente generalizzabile nell'intervallo $q \equiv q(t_0)$ e $q' \equiv q(t)$ per il propagatore totale portando al limite,

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{n-1} (p_k(q_{k+1} - q_k) - \tau H(p_k, \bar{q}_k)) \right] \quad (2.11)$$

Esplicitiamo ora i termini all'esponenziale con lo scopo di integrare rispetto alla variabile momento,

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \int \prod_{k=0}^{n-1} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{n-1} \left(p_k(q_{k+1} - q_k) - \tau \frac{p_k^2}{2m} - V(\bar{q}_k) \tau \right) \right]. \quad (2.12)$$

Il secondo integrale si pu  risolvere utilizzando l'integrale gaussiano noto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma} = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.13)$$

che ci conduce infine a

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \tau} \right)^{\frac{n}{2}} \int \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \left[\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\tau} \right)^2 - V(\bar{q}_k) \right) \right]. \quad (2.14)$$

E' abbastanza immediato notare che il termine all'esponente coincide proprio con la lagrangiana del sistema, quindi si riottiene esattamente la (1.29) con la costante di normalizzazione giusta per questa hamiltoniana, si può allora scrivere

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t L(q, \dot{q})} . \quad (2.15)$$

Come però già anticipato, questa non è la forma più generale possibile dell'integrale. Nei passaggi precedenti si è ricavato direttamente il risultato finale; nel capitolo 1, invece, in accordo con quanto fatto da Feynman, si è posta come *ipotesi* la (1.28) e si è giunti infine all'espressione finale per l'integrale. Nel caso precedentemente mostrato ed anche in quelli successivi la posizione è perfettamente lecita, ma non vale in generale per qualunque sistema fisico. Come controesempio consideriamo un sistema caratterizzato dalla seguente lagrangiana

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2} v(q) , \quad (2.16)$$

con $v(q)$ funzione dipendente dalle coordinate, allora otteniamo

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} v(q) \quad (2.17)$$

e quindi

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 v(q) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{v(q)} . \quad (2.18)$$

Si possono ripetere tutti i calcoli precedenti per poi infine giungere alla (2.11), sostituendo qui la hamiltoniana considerata, si ha

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^{n-1} \left(p_k (q_{k+1} - q_k) - \tau \frac{p_k^2}{2v(q)} \right) \right] \quad (2.19)$$

Effettuando l'integrazione in p e portando al limite, si ottiene nell'integrale una quantità che differisce dall'azione a causa del termine $v(q)$.

In questo caso il termine integrando all'esponentiale *non* coincide con l'integrale della lagrangiana. Al più sarebbe possibile definire una azione efficace per cui

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = A \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} S_{eff}} , \quad (2.20)$$

che incorpora nell'integrale anche i termini non legati alla lagrangiana.

Si comprende quindi che la (2.15), così come la (1.30), sono espressioni particolari per l'hamiltoniana precedentemente trattata.

A partire da queste considerazioni, la (2.11) permette una definizione più generale dell'integrale sui cammini, che si può scrivere con la solita notazione:

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt [p\dot{q} - H(p, q)]} . \quad (2.21)$$

2.2 Particella libera

Ci proponiamo ora di ricavare il kernel per una particella libera, sfruttando i risultati ottenuti dalla precedente sezione. Dalla (2.1) e ponendo $V(q) = 0$ si ottiene la lagrangiana per la particella libera

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 . \quad (2.22)$$

In questo caso sarà possibile utilizzare la formulazione con la lagrangiana perché l'espressione a cui giungeremo sarà simile alla (2.14) a meno del potenziale. Si può quindi scrivere l'ampiezza di transizione tra uno stato al tempo t_0 ed un altro a tempo t ,

$$K(q, q'; t_0, t) = \langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \frac{1}{2}\dot{q}^2 dt} , \quad (2.23)$$

che ovviamente coincide con il propagatore in questo intervallo. Sviluppando il metodo già discusso, suddividiamolo ora in n intervalli più piccoli di ampiezza $\delta t = \frac{t-t_0}{n}$. Usando la normalizzazione calcolata nella (1.44), si ottiene

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi i \hbar \delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n (q_k - q_{k-1})^2} , \quad (2.24)$$

Come appreso precedentemente, il propagatore complessivo si può ottenere valutando i singoli propagatori per ogni intervallo contenuto tra t_0 e t (1.68), allora cominciamo con

$$K_1(q_0, q_2; t_0, t_2) = \left(\frac{1}{2\pi i \hbar \delta t} \right)^{\frac{2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 e^{\frac{i}{2\hbar\delta t} (q_2 - q_1)^2} e^{\frac{i}{2\hbar\delta t} (q_1 - q_0)^2} . \quad (2.25)$$

Questo integrale si calcola facilmente una volta che sia nota la seguente identità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{a(x-\tau)^2} e^{b(y-\tau)^2} = i \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{\frac{ab}{a+b} (x-y)^2} . \quad (2.26)$$

L'integrale di partenza allora diviene

$$K_1(q_0, q_2; t_0, t_2) = \left(\frac{1}{2\pi \hbar i (2\delta t)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2\hbar(2\delta t)} (q_2 - q_0)^2} . \quad (2.27)$$

Il ragionamento si può fare anche per l'intervallo successivo, varrà ovviamente che

$$K_2(q_2, q_3; t_2, t_3) = \left(\frac{1}{2\pi \hbar i \delta t} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2\hbar\delta t} (q_3 - q_2)^2} , \quad (2.28)$$

Dunque,

$$\begin{aligned} K_3(q_0, q_3; t_0, t_3) &= \int dq_2 K_1(q_0, q_2; t_0, t_2) K_2(q_2, q_3; t_2, t_3) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i \hbar \delta t} \right)^{\frac{2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2 e^{\frac{i}{2\hbar\delta t} (q_2 - q_0)^2} e^{\frac{i}{2\hbar\delta t} (q_3 - q_2)^2} , \end{aligned} \quad (2.29)$$

e similmente giungiamo a

$$K_3(q_0, q_3; t_0, t_3) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar i(3\delta t)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2\hbar(3\delta t)}(q_3 - q_0)^2}. \quad (2.30)$$

E' a questo punto abbastanza naturale iterare il procedimento per n passi fino a giungere all'espressione finale del Kernel di Green per la particella libera in questo intervallo,

$$K(q, q'; t_0, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi i n \delta t}} e^{\frac{i}{2\hbar n \delta t} (q' - q)^2}. \quad (2.31)$$

Dunque, per una particella libera di massa m , l'ampiezza di transizione tra i due stati sarà la seguente:

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(q' - q)^2}{t - t_0}}. \quad (2.32)$$

Risultati equivalenti si sarebbero potuti ottenere nella formulazione di Schrödinger risolvendo l'equazione differenziale per la funzione di Green associata all'operatore hamiltoniano. Notiamo infatti che la (2.31) soddisfa l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} K, \quad (2.33)$$

la cui condizione iniziale per $t_0 = 0$ è $K(q, q'; 0, t) = \delta(q' - q)$.

Capitolo 3

Il limite classico e l'oscillatore armonico

Il path integral è stato introdotto estendendo in qualche modo il concetto di traiettoria classica, per via dell'impossibilità di definire questa quantisticamente. Tuttavia la meccanica quantistica, essendo una teoria più generale, deve rendere conto del limite di validità della meccanica classica. Per tali ragioni, in questo capitolo vedremo come, sotto opportuni limiti dell'integrale di Feynman, esso conduca proprio alla traiettoria classica. Talvolta partire da un'approssimazione è anche il modo più semplice ed efficace per risolvere molti problemi della meccanica quantistica ed ottenere risultati predittivi altrimenti difficilmente raggiungibili, ne vedremo dunque alcuni esempi.

3.1 L'approssimazione JWKB e il metodo di fase stazionaria

La costante che caratterizza la meccanica quantistica rispetto alla meccanica classica è la costante di Planck. L'idea alla base del metodo JWKB è quindi quello di uno sviluppo asintotico in potenze di \hbar della funzione d'onda nel formalismo di Schrödinger. Chiaramente quello che ci si aspetta è che l'ordine più basso dello sviluppo deve coincidere con il limite classico. In questo approccio, imponendo una lenta variazione, si cercano funzioni d'onda del tipo

$$\psi_{JWKB}(q, t) = A(q, t)e^{i\frac{S(q, t)}{\hbar}}. \quad (3.1)$$

Si sostituisce questa espressione all'interno dell'equazione di Schrödinger e si suppone di poter sviluppare in serie di potenze di \hbar le funzioni A e S . Imponendo la stazionarietà, ovvero

$$\frac{\partial S}{\partial t} \rightarrow -E, \quad \frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

all'ordine più basso si ottiene la funzione d'onda con l'azione classica

$$\psi_{JWKB} = \frac{c}{\sqrt{|p(q)|}} e^{\frac{i}{\hbar} S_c([q_c], t)}, \quad (3.3)$$

dove c è costante e nel limite stazionario si ha $p(q) = \sqrt{2m(E - V)}$, che coincide con l'impulso classico. E' molto interessante a questo punto confrontare l'espressione qui ottenuta con l'integrale sui cammini di Feynman (1.30), si nota subito che mentre l'integrale di Feynman rappresenta la somma su tutti i cammini, il fattore di fase della funzione d'onda ψ_{JWB} è invece $\frac{1}{\hbar}$ volte l'azione valutata solo sulla traiettoria classica.

Possiamo cercare di capire quando sia possibile fare un discorso classico e quando invece sarà più utile ricorrere a quello quantistico, il che equivale a dire che vogliamo sapere quanto il nostro sistema quantistico "dista" dall'essere un sistema classico. L'idea sarà quella di sviluppare il path integral in serie intorno alla traiettoria classica e valutare caso per caso a che ordine troncare lo sviluppo. Tutto questo è possibile grazie al *metodo di fase stazionaria*, che ci permette di studiare integrali del tipo

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx a(x) e^{i\lambda F(x)} \quad (3.4)$$

dove $a(x)$ è una funzione a supporto compatto. Vale il seguente teorema

Teorema 3. *Se $a(x)$ ed F sono funzioni reali appartenenti a C_0^∞ e se esiste un punto x_0 appartenente al supporto di $a(x)$ per cui $F'(x_0) = 0$ e $F''(x_0) \neq 0$, allora si può ottenere uno sviluppo asintotico per $I(\lambda)$*

$$I(\lambda) \sim e^{i\lambda F(x_0)} \sum_{k=0}^n b_k(a, F) \lambda^{-k-\frac{1}{2}} + O(\lambda^{-n-\frac{3}{2}}) \quad (3.5)$$

L'importanza di questo teorema sta nel fatto che, in generale, per valori grandi dell'esponente in $e^{i\lambda F}$ esso è oscillante con alta frequenza quindi tutti i contributi dell'integrale si annullano. Al contrario, ad un punto stazionario per F è associata una lenta variazione e quindi una possibilità di sviluppare l'integrale attorno a quel punto.

Se ci poniamo in questa condizione allora $F'(x_0) = 0$ e possiamo sviluppare la funzione in serie attorno al punto stazionario per F , ottenendo

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[i\lambda F(x_0) + \frac{1}{2} i\lambda F''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \right] \\ &= e^{i\lambda F(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{1}{2} i\lambda F''(x_0)(x-x_0)^2} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sono stati trascurati termini di ordine superiore al secondo. Svolgendo l'integrale si ha

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi i}{\lambda F''(x_0)}} e^{i\lambda F(x_0)} . \quad (3.7)$$

Per una questione di normalizzazione spesso si omette il termine $\sqrt{\frac{2\pi i}{\lambda}}$ perché si suppone parte dell'integrale $I(\lambda)$, in questo modo, in accordo con la (3.5), ad ordini superiori

$$I(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi i}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\lambda F(x)} \sim \sqrt{\frac{1}{F''(x_0)}} e^{i\lambda F(x_0)} [1 + (\dots)\lambda^{-1} + (\dots)\lambda^{-2} + \dots] . \quad (3.8)$$

L'interesse di quanto detto per l'integrale sui cammini è abbastanza evidente quando si nota che esso si presenta proprio nella forma della (3.4), con $F(x) = S([q])$ e $\lambda = \hbar^{-1}$. Allora è possibile sviluppare l'integrale di Feynman in potenze di \hbar come preannunciato:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{\frac{i}{\hbar} S([q])} \sim N e^{\frac{i}{\hbar} S_c([x_c])} [1 + (\dots)\hbar + (\dots)\hbar^2 + \dots]. \quad (3.9)$$

In questo modo per $\hbar \rightarrow 0$ il comportamento dell'integrale è determinato dal punto x_c in cui l'azione si minimizza, così l'espressione della (3.9) coincide infatti in fase con la (3.3) ottenuta imponendo la stazionarietà e il comportamento del propagatore è dominato dall'esponenziale associato alla traiettoria classica.

Trovare uno sviluppo per l'integrale di Feynman passa quindi per cercare un punto stazionario per l'azione, a cui è associata la traiettoria classica, tuttavia ricordiamo che la definizione (1.30) è data dal contributo di tutti i cammini. Consideriamo due cammini vicini

$$q(t) = q'(t) + \delta q(t), \quad (3.10)$$

dove $q'(t)$ e $q(t)$ sono cammini che differiscono di δq tra loro. Sviluppiamo il funzionale d'azione intorno a q'

$$S([q]) = S([q']) + \int_{t_i}^{t_f} dt \left. \frac{\partial S}{\partial q(t)} \right|_{q'(t)} \delta q(t) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \left. \frac{\partial^2 S}{\partial q(t) \partial q(t')} \right|_{q'(t)} \delta q(t) \delta q(t') + \dots \quad (3.11)$$

Nel caso in cui q' coincida proprio con la traiettoria classica q_c , l'azione si minimizza in q_c e l'integrale di Feynman per questo cammino si può scrivere come la (3.7),

$$I_c \sim \frac{N}{\sqrt{\det \left(\frac{\delta^2 S}{\delta q(t) \delta q(t')} \right) \Big|_{q=q_c}}} e^{\frac{i}{\hbar} S_c([q_c])}. \quad (3.12)$$

E' possibile studiare la differenza tra le fasi considerando il loro contributo complessivo $e^{\frac{i}{\hbar} S_c([q_c])} + e^{\frac{i}{\hbar} S([q])}$, che, troncata al primo ordine, dà

$$e^{i \frac{S_c([q_c])}{\hbar}} \left[1 + \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int dt \frac{\partial S}{\partial q(t)} \delta q \right) \right]. \quad (3.13)$$

Da questa espressione è immediato interpretare il termine nell'integrale come interferenza di fase tra due cammini vicini $q(t)$ e $q'(t)$; si noti che il termine che determina l'interferenza tra i due cammini va come \hbar^{-1} .

In generale su scala nucleare o subnucleare \hbar e S sono dello stesso ordine di grandezza ed in questo caso *tutti* i cammini contribuiscono allo stesso modo. Al contrario, se \hbar è piccolo rispetto ad S siamo vicini al limite classico, l'integrale di Feynman oscilla con grande frequenza e la differenza di fase tra due cammini vicini (che hanno quindi azioni che differiscono poco) è grande, quindi c'è interferenza distruttiva e i contributi di fase si annullano l'un con l'altro. Invece, intorno alla traiettoria classica, se $q' = q_c$ e $S \gg \hbar$, sappiamo che $\frac{\partial S}{\partial q_c} = 0$ allora la differenza di fase tra due cammini vicini è minima: il funzionale d'azione è costante e per piccole variazioni dalla traiettoria classica i fattori di fase in media interferiscono costruttivamente. Su scala classica dunque il moto della

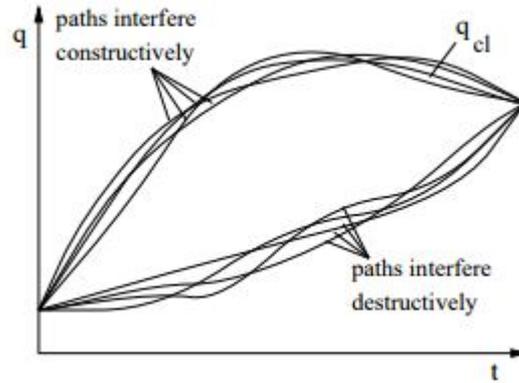


Figura 3.1: Interferenza di fase di cammini tra due punti

particella è dominato dal cammino che risolve le equazioni di Eulero-Lagrange, che diventa praticamente *l'unico* realmente apprezzabile e considerabile.

Storicamente furono proprio queste osservazione sul comportando di $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ nel limite classico a spingere Dirac a considerare, come posto nella (1.25), l'ampiezza di transizione proporzionale all'esponenziale dell'azione ([2]).

3.2 Lagrangiane quadratiche

Allo scopo di vedere applicato in un caso particolare quanto asserito nella sezione precedente, consideriamo la seguente lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + b(t)q\dot{q} - \frac{1}{2}c(t)q^2 - e(t)q. \quad (3.14)$$

Il sistema non è facilmente risolvibile con l'equazione di Schrödinger, tentiamo quindi un approccio path integral. Come già fatto, consideriamo la transizione tra due stati di coordinate $a = (q_i, t_i)$ e $b = (q_f, t_f)$

$$\langle q'_f | q_{t_i} \rangle = K(q_i, q_f; t_i, t_f) = \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L dt} \quad (3.15)$$

Per semplificare il problema, svilupperemo l'azione $S = \int L dt$ in serie attorno alla traiettoria classica, come precedentemente visto.

Definita $q_c(t)$ la traiettoria classica, poniamo

$$x(t) = q(t) - q_c(t), \quad (3.16)$$

il cui jacobiano della trasformazione è sicuramente uno. Possiamo ora sviluppare

$$\int L dt = S(q(t)) = S(x(t) + q_c(t)) = S(q_c(t)) + \left. \frac{\delta S}{\delta q} \right|_{q_c} x(t) + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} \right|_{q_c} x(t)^2, \quad (3.17)$$

abbiamo troncato al secondo ordine perché la lagrangiana è quadratica. A questo punto si osservi che la prima derivata deve essere necessariamente nulla perché lo sviluppo attorno alla traiettoria classica richiede che essa sia il minimo

dell'azione, dunque $\left. \frac{\delta S}{\delta q} \right|_{q_c} = 0$. Inoltre, S è quadratica e presenta la stessa espressione di $\frac{\delta^2 S}{\delta q^2}$ eccetto il termine lineare in q che non appare, essendo del primo ordine

$$S(q_c(t) + x(t)) = S(q_c(t)) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta q^2} x(t)^2. \quad (3.18)$$

Possiamo dunque mettere a fattore nell'integrale (3.15) l'esponentiale dell'azione classica, che tanto non subisce variazioni, ed otteniamo

$$K(q_i, q_f; t_i, t_f) = e^{\frac{i}{\hbar} S_c(q_i, q_f; t_i, t_f)} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + b(t) x \dot{x} - \frac{1}{2} c(t) x^2]}. \quad (3.19)$$

Fissate le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t_i) = 0 \\ x(t_f) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

si può scrivere

$$K(q_i, q_f; t_i, t_f) = e^{\frac{i}{\hbar} S_c(q_i, q_f; t_i, t_f)} \bar{K}(0, 0; t_i, t_f), \quad (3.21)$$

dove appunto S_c è l'azione lungo la traiettoria classica e \bar{K} è la funzione di Green della lagrangiana $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + b(t) x \dot{x} - \frac{1}{2} c(t) x^2$ con le condizioni al bordo considerate. Il termine $b(t) x \dot{x}$ assume significato fisico particolare solo in più dimensioni dove si ha il prodotto scalare $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}$, per cui nella nostra trattazione esclusivamente monodimensionale verrà trascurato.

Non resta che risolvere l'integrale \bar{K} . Applichiamo il metodo già usato di dividere il dominio considerato in intervallini infinitesimi di ampiezza $\varepsilon = \frac{t_f - t_i}{n}$ e mandare a limite

$$\bar{K}(0, 0; t_i, t_f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{n+1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{k=0}^n [\frac{m}{2\varepsilon} (x_{k+1} - x_k)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon c_k x_k^2]}, \quad (3.22)$$

in cui chiaramente vale che $t_k = t_i + k \frac{t_f - t_i}{n}$ e $c_k = c(t_k)$, inoltre è stata usata la costante di normalizzazione (1.44) con la massa m .

L'integrale non è semplice, occorre trovare un metodo agevole per svolgerlo. Per tenere conto di tutti gli n integrali, definiamo il vettore η

$$\eta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

e la seguente matrice

$$\sigma = \frac{m}{2\varepsilon \hbar i} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{i\varepsilon}{2\hbar} \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Si nota allora che l'esponentiale nella funzione di Green si può scrivere semplicemente

$$-\eta^T \sigma \eta, \quad (3.25)$$

in cui η^T è la matrice trasposta di η . Allora la (3.22) può essere riscritta

$$\bar{K}(0, 0; t_i, t_f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int d^n \eta e^{-\eta^T \sigma \eta}. \quad (3.26)$$

A questo punto per semplicità supponiamo che σ sia nella della forma $i\tilde{\sigma}$ con $\tilde{\sigma}$ reale ed hermitiana. In queste ipotesi ovviamente vale il teorema spettrale ed è sempre possibile trovare un operatore unitario U e una matrice diagonale, per cui vale

$$\sigma = U^\dagger \sigma_D U, \quad (3.27)$$

dove σ_D è la matrice diagonale di autovalori di σ , che indichiamo σ_α . Posto ora $\xi = U\eta$, lo jacobiano della trasformazione è uno poiché U è unitario e quindi $\det U = 1$, perciò

$$\int d^n \eta e^{-\eta^T \sigma \eta} = \int d^n \xi e^{-\xi^T \sigma \xi} = \prod_{\alpha=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_\alpha}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det \sigma}}. \quad (3.28)$$

Con questo risultato la nostra funzione di Green avrà la seguente espressione

$$\bar{K}(0, 0; t_i, t_f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{n+1} \frac{\pi^n}{\det \sigma} \right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{m}{2\pi i \hbar} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\left(\frac{2i\hbar\varepsilon}{m} \right)^n \det \sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

Osserviamo che la matrice σ contiene in particolare le informazioni della lagrangiana e quindi del sistema, definendo quindi

$$f(t_i, t_f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon \left(\frac{2i\hbar\varepsilon}{m} \right)^n \det \sigma, \quad (3.30)$$

la funzione di Green complessiva (3.21) può scriversi

$$K(q_i, q_f; t_i, t_f) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar f(t_i, t_f)}} e^{\frac{i}{\hbar} S_c(q_i, q_f; t_i, t_f)}. \quad (3.31)$$

L'espressione di sopra è valida per qualunque lagrangiana quadratica e la sua forma particolare dipenderà da $f(t_i, t_f)$. L'ultimo passo sarà appunto cercare un modo per esplicitare la funzione f , la cui definizione è data nella (3.30). Il tutto starà nel valutare il determinante della matrice σ definita nella (3.24). Poniamo

$$\left(\frac{2\pi i \varepsilon}{m} \right)^n \det \sigma \equiv \det \sigma'_n \equiv p_n \quad (3.32)$$

dove la matrice σ'_n è ottenuta moltiplicando il fattore $\left(\frac{2\pi i \varepsilon}{m} \right)^n$ nella definizione (3.24). Considerato il minore $j \times j$ con $j < n$ della matrice σ'_n , vale la seguente formula ricorsiva

$$p_{j+1} = \left(2 - \frac{\varepsilon^2}{m} c_{j+1} \right) p_j - p_{j-1} \implies \frac{p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}}{\varepsilon^2} = -\frac{c_{j+1} p_j}{m}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.33)$$

Posto ora $\varphi(t) = \varepsilon p_j$, e ricordando che $t_j = t_0 + \varepsilon j$, è abbastanza evidente che al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, otteniamo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{c(t)}{m}\varphi = 0, \quad (3.34)$$

che si può studiare supponendo le seguenti condizioni iniziali al limite per $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varepsilon\varphi_0 \rightarrow 0 \\ \dot{\varphi}(0) = \varepsilon \frac{p_1 - p_0}{\varepsilon} = 2 - \frac{\varepsilon^2}{m}c_1 - 1 \rightarrow 1 \end{cases} \quad (3.35)$$

Per costruzione allora varrà che $f(t_i, t_f) = \varphi(t_f)$ e anche f risolverà dunque l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 f(t_i, t)}{\partial t^2} + c(t)f(t_i, t) = 0, \quad (3.36)$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} f(t_i, t_i) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{\partial f(t_i, t)}{\partial t} = 1. \end{cases} \quad (3.37)$$

Risolvendo la (3.36) si può caso per caso valutare la funzione di Green complessiva (3.31) per questo tipo di problema.

Grazie alla conoscenza del propagatore possiamo ottenere alcune importanti informazioni sul sistema, come ad esempio i livelli energetici. Nel capitolo 1 si è vista la particolare relazione che sussiste tra il propagatore K e le autofunzioni del sistema, in particolare, posto nella relazione (1.57) $q = q'$ partendo da $t = 0$ e integrando rispetto a queste variabili si ottiene

$$\int dq K(q, q; t, 0) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \int dq |u_n(x)|^2 = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}, \quad (3.38)$$

dalla normalizzazione delle autofunzioni. Consideriamo questa equazione per t complessi, posto $\tau = \frac{it}{\hbar}$, per τ positivi sufficientemente grandi, la somma nell'ultimo passaggio è quasi completamente dominata dal contributo a più bassa energia E_0 . Per stati non degeneri vale allora che

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} e^{E_0\tau} \int dq K(q, q; -i\hbar\tau, 0) = 1. \quad (3.39)$$

Prima di portare a limite è però possibile esprimere tutto in funzione dello stato fondamentale, ricavando così la *Feynman-Kac formula*

$$E_0 = - \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \log \int dq K(q, q; -i\hbar\tau, 0) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\tau} \log \text{Tr} e^{-\tau H}, \quad (3.40)$$

che fornisce un modo agevole per calcolare in modo diretto lo stato fondamentale.

3.2.1 Un caso particolare: l'oscillatore armonico

Con la (3.31) siamo giunti alla funzione di Green per la lagrangiana quadratica (3.14). Notiamo però che ponendo $e(t) = 0$ e $c(t) = m\omega^2$ si ottiene

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (3.41)$$

ovvero la lagrangiana per l'oscillatore armonico semplice, che ci proponiamo di risolvere con il metodo sviluppato in questa sezione. Per trovare la funzione f da inserire all'interno del propagatore va risolta l'equazione differenziale (3.36) con le relative condizioni iniziali:

$$m \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + m\omega^2 f = 0. \quad (3.42)$$

Come noto, la semplice soluzione dell'oscillatore armonico è

$$f(t_i, t_f) = \frac{\sin[\omega(t_f - t_i)]}{\omega}. \quad (3.43)$$

allora dalla (3.31) si ottiene

$$K(q_f, q_i; t_f, t_i) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin[\omega(t_f - t_i)]}} e^{\frac{i}{\hbar} S_c(q_f, q_i; t_f, t_i)}. \quad (3.44)$$

L'azione lungo la traiettoria classica dell'oscillatore è ben nota e si calcola dal solito integrale

$$S_c(q_f, q_i; t_f, t_i) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_c^2(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 q_c^2(t) \right] dt = \frac{1}{2} m \omega \frac{(q_i^2 + q_f^2) \cos[\omega(t_f - t_i)] - 2q_f q_i}{\sin[\omega(t_f - t_i)]}, \quad (3.45)$$

una volta che si sia riconosciuta la traiettoria classica q_c

$$q_c(t) = q_i \frac{\sin[\omega(t_f - t)]}{\sin[\omega(t_f - t_i)]} + q_f \frac{\sin[\omega(t - t_i)]}{\sin[\omega(t_f - t_i)]}. \quad (3.46)$$

Se per semplicità di calcolo supponiamo $t_i = 0$ e $t_f = t$, la funzione di Green diviene

$$K(q_i, q_f; t) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega t}} \exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega t} [(q_f^2 + q_i^2) \cos \omega t - 2q_f q_i]\right). \quad (3.47)$$

Che quindi coincide con l'ampiezza di transizione $\langle q'_t | q_t \rangle$ per l'oscillatore armonico semplice.

Possiamo ora ritrovare i livelli energetici dell'oscillatore armonico. Ricordando la (3.38), vale

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} &= \int dq K(q, q; t) \quad (3.48) \\ \int dq K(q, q; t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega t}} \exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega t} [2q^2(\cos \omega t - 1)]\right) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq e^{\left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega t} 2(\cos \omega t - 1)\right] q^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Come al solito l'ultimo integrale si risolve sfruttando questo risultato noto:

$$\int_{-\infty}^{-\infty} d\tau e^{\alpha\tau} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (3.50)$$

da cui si ottiene

$$\frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2i^2}} \sqrt{\frac{1}{\cos \omega t - 1}} = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{1}{2(1 - \cos \omega t)}}, \quad (3.51)$$

e ricordando la formula trigonometrica $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ è possibile infine scrivere

$$\int dq K(q, q; t) = \frac{1}{2i} \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}}. \quad (3.52)$$

Questo risultato può essere rimaneggiato tramite le formule di Eulero e un'espansione in serie nel seguente modo:

$$\frac{1}{2i} \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}i\omega t}}{1 - e^{-i\omega t}} = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-in\omega t}. \quad (3.53)$$

Ora basta semplicemente confrontare questo risultato con la (3.48) per ottenere

$$\sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \sum_n e^{-in\omega t}, \quad (3.54)$$

da cui, immediatamente si arriva a

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.55)$$

Siamo finalmente giunti alla determinazione degli autovalori già noti associati all'oscillatore armonico avendo sfruttato i cammini di Feynman.

Capitolo 4

Ampiezza di transizione in presenza di sorgenti

4.1 Considerazioni introduttive

Fino ad ora sono state trattate applicazioni dell'integrale sui cammini a diversi tipi di lagrangiane. Vediamo ora cosa succede in presenza di una sorgente dipendente dal tempo che può essere considerata una perturbazione per il sistema:

$$L(q, \dot{q}) + \hbar F(t)q(t) . \quad (4.1)$$

L'ampiezza di transizione che si dovrà valutare sarà quindi

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle_F = \int dq dq' \langle q'_t | Q_{t'} \rangle \langle Q_{t'} | Q_T \rangle_F \langle Q_T | q_{t_0} \rangle . \quad (4.2)$$

Poiché

$$\begin{aligned} \langle q'_t | Q_{t'} \rangle &= \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t'} | Q' \rangle \\ &= \sum_m u_m(q') u_m^*(Q') e^{\frac{i}{\hbar} E_m (t' - t)} , \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_T | q_{t_0} \rangle &= \langle Q | e^{-\frac{i}{\hbar} H T} e^{\frac{i}{\hbar} H t_0} | q \rangle \\ &= \sum_n u_n(Q) u_n^*(q) e^{\frac{i}{\hbar} E_n (t_0 - T)} , \end{aligned} \quad (4.4)$$

si ha dunque

$$\begin{aligned} \langle q'_t | q_{t_0} \rangle_F &= \sum_{m,n} u_m(q') u_m^*(Q') u_n(Q) u_n^*(q) e^{\frac{i}{\hbar} (E_n t_0 - E_m t')} \\ &= \sum_{m,n} u_m(q') u_n^*(q) e^{\frac{i}{\hbar} (E_n t_0 - E_m t')} \langle E_m | E_n \rangle_F , \end{aligned} \quad (4.5)$$

in cui si è usata la relazione $u_i(q) = \langle q | E_i \rangle$.

Si osservi che l'ampiezza di probabilità è proporzionale alla transizione tra stati energetici iniziali e finali. Lo scopo di questo capitolo sarà studiarla tra infinito

passato e futuro, in questo caso ci aspettiamo che essa sia proporzionale alla transizione tra stati fondamentali. Sfortunatamente l'integrale

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle = \int \mathcal{D}q e^{\int_{t_0}^t dt [L(q, \dot{q}) + \hbar F(t)q(t)]} \quad (4.6)$$

è oscillante, vedremo nella prossima sezione come aggirare il problema nel caso di un esempio pratico e molto utile.

4.2 L'oscillatore armonico forzato

Nel capitolo precedente si è ottenuto un risultato per l'ampiezza di transizione dell'oscillatore armonico semplice. Supponiamo ora invece di studiare un oscillatore armonico in presenza di una forza esterna, la cui lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + F(t)q(t), \quad (4.7)$$

ovvero quella di oscillatore armonico forzato in presenza di una sorgente F dipendente dal tempo. Appliciamo quanto appreso sull'integrale di Feynman valutando l'ampiezza di probabilità tra il tempo t_0 e il tempo t .

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle_F = \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_0}^t dt [\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + F(t)q(t)]}. \quad (4.8)$$

Per semplicità è stato posto $\hbar = 1$. L'integrale è oscillante, possiamo tuttavia sviluppare una metodologia di calcolo per farlo convergere e valutare alcune caratteristiche fondamentali per il sistema. Aggiungiamo quindi all'integrale il termine

$$\frac{i}{2}\varepsilon \int_{t_0}^t dt q^2(t), \quad (4.9)$$

con $\varepsilon > 0$ che alla fine del calcolo verrà mandato a zero. Con queste osservazioni, si ottiene

$$\langle q'_t | q_{t_0} \rangle_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_0}^t dt [\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - i\varepsilon)q^2 + F(t)q(t)]}. \quad (4.10)$$

Al fine di generalizzare per stati ad infinito passato ed infinito futuro e studiare l'ampiezza di transizione $\langle q_{-\infty} | q_{+\infty} \rangle$, si utilizzeranno le trasformate e antitrasformate di Fourier, che ricordiamo essere definite:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \tilde{\mathcal{F}}(E) e^{iEt} \\ \tilde{\mathcal{F}}(E) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathcal{F}(t) e^{-iEt}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sostituendo $q(t)$ e $F(t)$ con le (4.11) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - i\varepsilon)q^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' e^{i(E+E')t} [-EE' - \omega^2 + i\varepsilon] \tilde{q}(E) \tilde{q}(E'); \\ F(t)q(t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' e^{i(E+E')t} [\tilde{q}(E) \tilde{F}(E') + \tilde{q}(E') \tilde{F}(E)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove è stata usata la trasformata di Fourier della derivata $\dot{F}(t) = iE F(t)$. Utilizziamo inoltre la rappresentazione integrale della delta di Dirac,

$$\delta(E + E') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E+E')t}, \quad (4.13)$$

dalla definizione della delta si ottiene infine che il termine complessivo dell'esponenziale $\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(\omega^2 - i\varepsilon)q^2 + F(t)q(t)$ della (4.10)

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \int_{-\infty}^{+\infty} dE' \delta(E + E') [(E^2 - \omega^2 + i\varepsilon)\tilde{q}(E)\tilde{q}(E') + \tilde{q}(E)\tilde{F}(E') + \tilde{q}(E')\tilde{F}(E)] \\ &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE (E^2 - \omega^2 + i\varepsilon)\tilde{q}(E)\tilde{q}(-E) + \tilde{q}(-E)\tilde{F}(E) + \tilde{q}(E)\tilde{F}(-E). \end{aligned} \quad (4.14)$$

E' utile adesso effettuare le seguenti posizioni sulle variabili definite dalle trasformate di Fourier. Si ponga, nello spazio delle energie e in quello temporale,

$$\tilde{q}'(E) = \tilde{q}(E) + \frac{\tilde{F}(E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}, \quad (4.15)$$

$$q'(t) = q(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\tilde{F}(E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} e^{iEt}. \quad (4.16)$$

Portando al limite e sostituendo le variabili è quindi possibile ottenere questa seguente equazione per l'integrale (4.8),

$$\langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\tilde{F}(E)\tilde{F}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}} \int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \tilde{q}'(E)(E^2 - \omega^2 + i\varepsilon)\tilde{q}'(-E)} \quad (4.17)$$

Si noti ora che la trasformazione (4.15) ha jacobiano unitario, da cui segue facilmente che le misure dei due integrali coincidono

$$\mathcal{D}q' = \mathcal{D}q. \quad (4.18)$$

Questo risultato mostra la grande potenza della definizione dell'integrale sui cammini, infatti notiamo che l'ultimo integrale della (4.17) coincide con l'integrale di Feynman del sistema in assenza di sorgente, quindi con $F = 0$, come si vede facilmente confrontandola con l'espressione (4.10). E' possibile dunque scrivere l'ampiezza di transizione totale come:

$$\langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle_{F=0} e^{-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\tilde{F}(E)\tilde{F}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}}. \quad (4.19)$$

Una forma più concisa ed intuitiva può essere ottenuta. Riordinamo nel seguente modo i termini

$$\frac{\tilde{F}(E)\tilde{F}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \int \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-iEt} F(t) \int \frac{dt'}{\sqrt{2\pi}} e^{iEt'} F(t'), \quad (4.20)$$

in cui sono state utilizzate nuovamente le (4.11). Definendo dunque la seguente funzione

$$P(t - t') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{e^{-i(t-t')E}}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon}, \quad (4.21)$$

è possibile riscrivere il termine esponenziale nella seguente forma

$$\exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{\tilde{F}(E)\tilde{F}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\varepsilon} \right] = \exp \left[-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t)P(t-t')F(t')dt' \right]. \quad (4.22)$$

Conseguenzialmente il termine di ampiezza di probabilità (4.19) diviene

$$\langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle_F = \langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle_{F=0} e^{-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t)P(t-t')F(t')dt'}. \quad (4.23)$$

Il passo successivo sarà ora approfondire il significato fisico dell'espressione di sopra. Innanzitutto supponiamo che il meno e il più infinito temporale siano caratterizzati dall'assenza di forze esterne (il che equivale a dire che la forza agisce sicuramente per un tempo finito), questo ha come conseguenza che gli stati di vuoto ¹ chiaramente non dipendono da essa. Chiamiamo $|\Gamma_{+\infty}\rangle$ e $|\Gamma_{-\infty}\rangle$ gli stati di vuoto rispettivamente a infinito e meno infinito. E' possibile calcolare l'ampiezza di transizione tra questi due stati in presenza della forza F

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{+\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle_F &= \int dqdq' \langle \Gamma_{+\infty} | q'_{+\infty} \rangle \langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle \langle q_{-\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle \\ &= \int dqdq' \langle \Gamma_{+\infty} | q'_{+\infty} \rangle \langle q'_{+\infty} | q_{-\infty} \rangle_{F=0} \langle q_{-\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle e^{-\frac{i}{2} \langle FPF \rangle}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

nella quale è stata usata la relazione di completezza già usata spesso (1.17) e nel secondo passaggio si è riespressa l'ampiezza di transizione in funzione di q sostituendola con la (4.23). Inoltre si è usata la notazione $\langle FPF \rangle$ con la quale si intende integrale su t e t' , segue quindi

$$\langle \Gamma_{+\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle_F = \langle \Gamma_{+\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle_{F=0} e^{-\frac{i}{2} \langle FPF \rangle}. \quad (4.25)$$

$\langle \Gamma_{+\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle_{F=0}$ è proprio l'ampiezza di transizione affinché una particella possa andare agli stati di punto zero dall'infinito passato all'infinito futuro, in assenza di sorgente. E' facile quindi concludere che l'esponenziale della (4.19) coincide proprio con l'ampiezza di transizione affinché dallo stato fondamentale all'infinito passato si transisca allo stato fondamentale all'infinito futuro in presenza di una forza esterna, se il termine $\langle \Gamma_{+\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle_{F=0}$ è normalizzato. Per semplicità ridefiniamo $W[F] = \langle \Gamma_{+\infty} | \Gamma_{-\infty} \rangle_F$, da cui

$$W[F] \equiv W[0] e^{iZ[F]} = e^{iZ[F]}, \quad (4.26)$$

con normalizzazione $W[0] = 1$, dove è stato anche posto

$$Z[F] = -\frac{1}{2} \langle F_1 P_{12} F_2 \rangle_{1,2}. \quad (4.27)$$

Ancora una volta la notazione $\langle \dots \rangle_{1,2}$ indica un'integrazione sulle variabili $t \rightarrow t_1$ e $t' \rightarrow t_2$. A partire dalla (4.21) è possibile notare che la funzione $P(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) P(t) = -\delta(t), \quad (4.28)$$

¹Ricordiamo che in meccanica quantistica si parla di *stato fondamentale* quando ci si riferisce al più basso livello energetico di un sistema; con *stati di vuoto* si intende in teoria quantistica dei campi gli stati caratterizzati da assenza di particelle e di campi che coincidono quindi anche con il più basso livello energetico.

δ è la funzione di Dirac.

Come è evidente confrontando questa con la definizione (1.58), si è ottenuto che la funzione $P(t)$ è proprio la funzione di Green dell'operatore differenziale $\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$. Integrando la (4.21) (ad esempio con il metodo dei residui), otteniamo la soluzione

$$P(t) = -\frac{i}{2\omega} [\vartheta(t)e^{-i\omega t} + \vartheta(-t)e^{i\omega t}], \quad (4.29)$$

dove $\vartheta(t)$ è la funzione di Heaviside (1.60).

Notiamo che la (4.29) è composta dalla somma di due funzioni che descrivono rispettivamente un segnale "avanzato" ed uno "ritardato", quindi la propagazione di due segnali provenienti da due sorgenti. Può dunque essere considerato a ragione un prototipo per il propagatore di Feynman, in cui una sorgente è associata alla propagazione di particelle ad energia positiva che si muovono avanti nel tempo, ed un'altra ad antiparticelle ad energia negativa si muovono indietro nel tempo.

Ora, nota la (4.26), è possibile ottenere una relazione tra $P(t)$ e $W[F]$. Svolgiamo la derivata funzionale rispetto a F nei due istanti t_1 e t_2

$$\frac{\delta W[F]}{\delta F(t_1)} = -ie^{iZ[F]} \left[\int F(t)P(t_1-t)dt \right], \quad (4.30)$$

$$\frac{\delta^2 W[F]}{\delta F(t_1)\delta F(t_2)} = (-i)^2 e^{iZ[F]} \int P(t_1-t)P(t_2-t')F(t)F(t')dt dt' - iP(t_1-t_2)e^{iZ[F]}. \quad (4.31)$$

Valutiamo ora questa derivata funzionale mista rispetto a $F=0$, si ottiene

$$\begin{aligned} G^{(2)}(t_1, t_2) &= \left. \frac{\delta^2 W[F]}{\delta F(t_1)\delta F(t_2)} \right|_{F=0} = -iP(t_1-t_2) \implies \\ &P(t_1-t_2) = (-i)^2 \left. \frac{\delta^2 W[F]}{\delta F(t_1)\delta F(t_2)} \right|_{F=0}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Grazie al metodo qui sviluppato per l'oscillatore armonico forzato si è ottenuta la funzione di Green nella transizione dallo stato di vuoto a infinito passato allo stato di vuoto a infinito futuro. Poiché è stata considerata l'ampiezza di transizione tra due punti a tempo t_1 e t_2 , questa coincide a tutti gli effetti con il propagatore a 2-punti nella transizione tra i due stati di vuoto in presenza della sorgente F . Proseguendo,

$$\begin{aligned} G^{(4)}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \left. \frac{\delta}{\delta F(t_1)} \frac{\delta}{\delta F(t_2)} \frac{\delta}{\delta F(t_3)} \frac{\delta}{\delta F(t_4)} W[F] \right|_{F=0} \\ &= - [P(t_1-t_2)P(t_3-t_4) + P(t_1-t_3)P(t_2-t_4) + P(t_1-t_4)P(t_2-t_3)]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Il vantaggio di tale rappresentazione è che non c'è alcuna dipendenza dalle configurazioni iniziali e finali. Svolgendo le derivate di ordine successivo rispetto alla sorgente per più intervalli temporali si nota che tutti i termini dispari sono nulli e iterando sarebbe possibile estrarre la funzione di Green a n -punti, che può essere studiata attraverso uno sviluppo in serie di $W[F]$. Quanto detto è alla base della teoria perturbativa che ha molta utilità in teoria quantistica dei campi per il propagatore di Feynman, rappresentato simbolicamente nei famosi diagrammi che portano il suo nome.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi si è voluta fornire una visione complessiva di quello che i cammini di Feynman rappresentano nell'ambito della meccanica quantistica, avendo però utilizzato un formalismo matematico adatto ad una laurea triennale.

Una prima definizione nel capitolo 1 è stata data a partire dalle considerazioni di Feynman; si sono inoltre evidenziate le caratteristiche ad esso legate con l'evoluzione di un sistema fisico.

Sono stati poi forniti esempi di applicazioni dirette del path integral, che, da un lato, hanno permesso di apprezzare così i vantaggi di tale metodo, dall'altro di ottenere una definizione più generale che non necessita delle assunzioni fatte nel primo capitolo, ma che le deriva direttamente.

Successivamente si è dato spazio nel capitolo 3 al confronto con la meccanica classica. Si è mostrato come gli integrali sui cammini generalizzino perfettamente il principio di Hamilton. Tutti i cammini contribuiscono all'ampiezza di transizione tra due stati, ma su ordini di grandezza tipicamente classici questi diventano totalmente trascurabili rispetto al cammino che minimizza l'azione: la traiettoria classica, l'unico che sopravvive. Già qui sfruttando uno sviluppo attorno all'azione associata alla traiettoria classica si è fornita un'importante applicazione dell'integrale sui cammini attraverso il calcolo della funzione di Green per l'oscillatore armonico e dei suoi livelli energetici. Questi ultimi coincidono esattamente con quelli ricavabili applicando l'equazione di Schrödinger, il che fornisce un esempio pratico della perfetta equivalenza predittiva tra le due formulazioni.

Nell'ultimo capitolo è stata presentata una ulteriore applicazione alla meccanica quantistica, molto utile per anticipare considerazioni più generali. Nell'esempio dell'oscillatore armonico forzato, infatti, oltre ad aver utilizzato una metodologia di calcolo per il path integral largamente adoperata, è stato anche possibile rendere manifesti alcuni vantaggi della formulazione di Feynman per l'ampiezza di transizione in presenza di una forza perturbatrice qualunque, motivo per cui essa è tanto utilizzata in teoria dei campi.

Infatti, ponendoci nello spazio di Minkowski, con il formalismo della teoria dei campi si può eseguire lo stesso calcolo fatto nella sezione precedente. Si ottiene il *propagatore di Feynman*, che formalmente è lo stesso della (4.21), ma in più dimensioni:

$$\Delta_F(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot (\bar{x} - \bar{y})}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (\text{C.1})$$

Inoltre, alcune delle grandezze matematiche ottenute nella sezione precedente, ammettono una corrispondenza grafica che si presta bene ad un'interpretazione intuitiva. Ad esempio, se generalizziamo il tutto nell'ambiente consono alla teoria quantistica dei campi, il propagatore a 2-punti di Feynman si può rappresentare graficamente con un segmento congiungente due punti nello spazio minkowskiano; la sorgente può essere invece legata a vertici di interazione. In questo modo è possibile costruire, a partire dallo studio dell'integrale sui cammini di diversi sistemi, una corrispondenza biunivoca tra le grandezze matematiche per diverse interazioni e i loro corrispettivi grafici.

Così ogni sistema può schematizzarsi a diversi ordini perturbativi attraverso i famosi *diagrammi di Feynman*, che tanto sono stati utili nel corso degli anni recenti poiché permettono una comprensione circa l'origine delle interazioni fondamentali abbastanza intuitiva.

Questi risultati, insieme alle ricerche sull'elettrodinamica quantistica, portarono Richard Feynman al conferimento del premio Nobel, al quale, in realtà, egli è sempre stato ben poco interessato, avendo per tutta la vita anteposto il piacere della scoperta alla cerimoniosità delle onorificenze.

Bibliografia

- [1] Richard P. Feynman, *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics, volume 20, pp.367-387 (1948).
- [2] Richard P. Feynman, *Feynman's Thesis - A New Approach to Quantum Theory* (editor Laurie M. Brown), World Scientific Singapore (2005).
- [3] Paul A. M. Dirac *The Lagrangian in Quantum Mechanics*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, volume 3, pp. 64-72 (1933).
- [4] Andrea Carati e Luigi Galgani, *Appunti di Meccanica Razionale 1*, pp. 167-237.
- [5] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, World Scientific, Physics Department University of Florida, Gainesville, Florida (1989).
- [6] Ashok Das, *Field Theory: A path integral approach*, World Scientific, University of Rochester USA, Vol. 75 (2006).
- [7] M. H. Stone, *On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space*, Annals Mathematics, volume 33 n. 3, pp. 643-648 (1932).
- [8] G. Esposito, G. Marmo, G. Miele, G. Sudardshan, *Advanced concept in quantum mechanics*, Cambridge University Press (2015).
- [9] L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Dover, New York (1981).
- [10] Antonio Romano, *Meccanica Analitica*, Apogeo, Milano (2007)
- [11] D.E. Soper, *Path integrals and the classical approximation*, University of Oregon (2011)
- [12] Richard MacKenzie, *Path Integral Methods and Applications*, Lectures given at Rencontres du Vietnam, University of Montréal, Canada (2000)

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professore Miele per i suoi consigli e per la prontezza con cui ha sempre risposto alle mie richieste.

Ringrazio tutti gli amici d'università che hanno condiviso con me questi anni di studio e di vita e che, con disponibilità ed umiltà, hanno partecipato significativamente al raggiungimento di questo obiettivo tra studio e discussioni, sempre presenti nella condivisione delle gioie e delle preoccupazioni.

Ringrazio anche gli altri colleghi e professori che in qualche modo, anche per breve tempo, hanno arricchito le mie conoscenze e la mia persona attraverso il dibattito e il dialogo, anima di questi anni.

Ringrazio mia madre; ringrazio mio padre, senza i quali questo risultato non sarebbe stato possibile, per avermi sempre supportato.

Grazie inoltre a tutti gli amici che, pur non sapendolo, sono sempre stati un punto di riferimento, prezioso incentivo a tenere duro nelle difficoltà e ad essere più appagato da me stesso nei successi, anche senza che proferissi troppe parole.

A tutti quelli che in qualunque modo mi hanno accompagnato nel cammino donando il loro tempo e contribuendo, anche con poco, affinché sia stato possibile giungere fin qui.

23.12.2017