

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

**Meccanica Quantistica: un approccio dal  
punto di vista della Teoria  
dell’Informazione**

**Relatori:**

Dott. Paolo Aniello

**Candidato:**

Mirko Arienzo

Matricola N85000895

A.A. 2016/2017

# Indice

<b>1</b>	<b>Teoria della Probabilità Classica e Teoria della Probabilità Quantistica</b>	<b>5</b>
1.1	Richiami di Teoria della Probabilità Classica . . . . .	6
1.2	Gli stati in Meccanica Quantistica . . . . .	8
1.3	Le osservabili in Meccanica Quantistica . . . . .	13
1.4	Gli strumenti quantistici . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Teorie operative probabilistiche</b>	<b>18</b>
2.1	Test, stati, effetti . . . . .	18
2.2	L'assioma di causalità . . . . .	25
2.3	Distinguibilità, compressione, composizione . . . . .	27
2.4	Il principio di purificazione . . . . .	32

# Introduzione

La Meccanica Quantistica è la teoria fondamentale per la descrizione del mondo microscopico e rappresenta uno dei più grandi successi della fisica data l'enorme concordanza fra i dati sperimentali e le previsioni teoriche. È tuttavia presente una lacuna dal punto di vista della sua fondazione, in quanto l'assiomatizzazione di Von Neumann non è in grado di fornire in modo trasparente dei motivi fisici per cui si debba descrivere la teoria quantistica tramite il formalismo degli spazi di Hilbert.

In tal senso la formulazione della Quantum Information ha portato in auge il concetto di informazione e ha consentito di riproporre il problema della fondazione della Meccanica Quantistica in modo innovativo. Nello specifico, è stato dimostrato che diversi fenomeni legati alla Quantum Information non sono unicamente attribuibili alla Meccanica Quantistica, bensì possono essere ricavati anche in diverse teorie "giocattolo". Questo ha posto le basi per una possibile rifondazione della Teoria Quantistica in cui il concetto di informazione gioca un ruolo centrale; ciò dunque significherebbe che la Meccanica Quantistica potrebbe essere considerata una particolare Teoria dell'Informazione, come suggerito ad esempio da Wheeler [12].

Nel seguente lavoro ci proponiamo pertanto di mostrare in che modo è possibile ottenere il formalismo della Meccanica Quantistica a partire da vincoli tipici della Teoria dell'Informazione, ripercorrendo le orme tracciate dagli influenti lavori [1] e [2]. Per farlo è tuttavia opportuno richiamare alcuni concetti fondamentali della teoria.

Il primo capitolo sarà pertanto incentrato sui fondamenti della Teoria della Probabilità Quantistica. In particolare, presenteremo innanzitutto una schematizzazione di esperimento fisico, a partire dalla quale richiameremo alcune nozioni fondamentali di Teoria della Probabilità Classica. Illustreremo quindi i concetti fondamentali per descrivere un esperimento quantistico. Tratteremo inoltre brevemente le principali analogie e differenze fra il caso classico e il caso quantistico.

Nel secondo capitolo introdurremo invece un ambiente di lavoro astratto per descrivere le Teorie Operative Probabilistiche. Si procederà quindi all'intro-

duzione di un insieme di assiomi allo scopo di caratterizzare la Meccanica Quantistica come una Teoria dell'Informazione.

In questa trattazione lavoreremo prevalentemente in spazi finito-dimensionali, limitandoci a studiare casi a dimensione arbitraria solo in pochi frangenti. Da un punto di vista concettuale, infatti, non si presenteranno sostanziali differenze dal caso infinito-dimensionale, che presenta invece numerose difficoltà da un punto di vista tecnico.

# Capitolo 1

## Teoria della Probabilità Classica e Teoria della Probabilità Quantistica

La formulazione che intendiamo qui presentare della Meccanica Quantistica è fondata sull'idea di descrivere quali sono i passi fondamentali per realizzare un esperimento fisico. Naturalmente la descrizione di tali step necessita di nozioni di calcolo delle probabilità essendo la teoria non deterministica; è pertanto opportuno evidenziare a tal proposito che, data la natura statistica degli esperimenti fisici, la probabilità sarà intesa in senso frequentistico per tutta la trattazione.

In questo capitolo richiameremo dunque alcuni aspetti fondamentali della Meccanica Quantistica tramite uno schema che possa descrivere un esperimento. In particolare seguiremo nella prima parte di questo capitolo un modello basilare in cui, dato un sistema preparato mediante un apparato di preparazione (stato), si estrarranno informazioni circa la natura di tale stato mediante un apparato di registrazione (osservabile) [8].

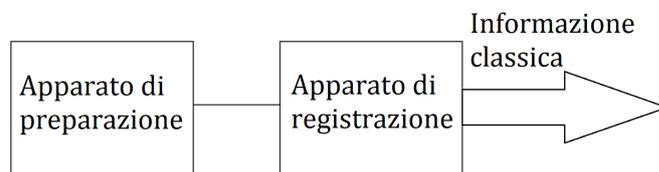


Figura 1.1: La schematizzazione essenziale di un esperimento. I due apparati sono rappresentati tramite due “scatole nere”.

Naturalmente questo tipo di schematizzazione non discrimina il caso di un esperimento classico da uno quantistico. Richiameremo pertanto inizialmente alcune nozioni di teoria della probabilità classica le quali saranno poi confrontate successivamente con le analoghe nozioni quantistiche.

Infine mostreremo brevemente un'estensione di questo modello nel caso quantistico richiamando il concetto di strumento quantistico.

Tutto ciò sarà da fondamento per poter introdurre nel prossimo capitolo uno schema generale in grado di collegare la Meccanica Quantistica alla Teoria dell'Informazione.

## 1.1 Richiami di Teoria della Probabilità Classica

Sia  $\Omega$  uno spazio di misura e  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -algebra di insiemi di  $\Omega$  (tipicamente  $\Omega$  è uno spazio topologico e  $\mathcal{F}$  la  $\sigma$ -algebra di Borel). Consideriamo un'applicazione

$$p : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \quad (1.1)$$

tale che

- $p(\emptyset) = 0$ .
- $p(\Omega) = 1$ .
- Data una collezione al più numerabile di insiemi disgiunti in  $\mathcal{F}$  allora vale  $p(\bigcup_i F_i) = \sum_i p(F_i)$ .

Chiameremo  $p$  *misura di probabilità* e gli elementi di  $\mathcal{F}$  saranno detti *eventi*. La terna  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  individua uno *spazio di probabilità*.

In questo contesto identificheremo l'insieme degli stati classici  $\mathcal{S}$  con le misure di probabilità. Ricordiamo che, dato uno spazio vettoriale  $V$ , un insieme  $C \in V$  è convesso se per ogni coppia di punti  $v_1, v_2 \in C$  il segmento che li congiunge è completamente contenuto in  $C$ , ossia dato  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in C$ . È quindi possibile osservare che l'insieme degli stati è un insieme convesso [11].

Identificheremo inoltre l'insieme delle osservabili classiche con l'insieme delle variabili aleatorie, ossia con l'insieme delle funzioni misurabili  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Con queste notazioni, indicando con  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  la  $\sigma$ -algebra di Borel di  $\mathbb{R}$ , possiamo esprimere qual è probabilità che il valore osservato di  $X$  di un sistema fisico che si trova nello stato  $p$  giaccia in  $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$p(X^{-1}(\mathcal{E})) = \int_{X^{-1}(\mathcal{E})} dp(\xi). \quad (1.2)$$

Si definisce quindi valore medio dell'osservabile  $X$  nello stato  $p$  la quantità

$$\langle X \rangle_p = \int_{\Omega} X(\xi) dp(\xi). \quad (1.3)$$

*Esempio:* consideriamo lo spazio delle fasi. La misura di probabilità è fornita da una densità di probabilità  $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , le osservabili sono date da funzioni  $X(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  e gli stati da funzioni di  $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  [11].

In questo caso la probabilità che un'osservabile  $X$  dato un sistema nello stato  $p$  assuma valori in  $\mathcal{E}$  diventa:

$$p(X^{-1}(\mathcal{E})) = \int_{X^{-1}(\mathcal{E})} d\mathbf{q}d\mathbf{p}\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

mentre il valore medio dell'osservabile  $X$  nello stato  $p$  si scrive come segue:

$$\langle X \rangle_p = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} d\mathbf{q}d\mathbf{p}X(\mathbf{q}, \mathbf{p})\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}).$$

È possibile inoltre dare un'altra espressione al valore medio di un'osservabile, che sarà utile successivamente per evidenziare un'analogia fra il caso quantistico e il caso classico. Definiamo una misura

$$\mu_p^X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow R^+ \quad (1.4)$$

tale che  $\mu_p^X(\mathcal{E}) := p(X^{-1}(\mathcal{E}))$ . Chiameremo  $\mu_p^X$  "funzione" di distribuzione di  $X$ .

È quindi possibile dimostrare che il valore medio di  $X$  nello stato  $p$  si può esprimere tramite la nuova misura come segue:

$$\langle X \rangle_p := \int_{\Omega} X(\xi) dp(\xi) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_p^X(x). \quad (1.5)$$

Richiamiamo infine le notazioni relative al caso discreto considerando un sistema a  $N$  livelli. In questo caso avremo che  $\Omega = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$  e la  $\sigma$ -algebra sarà identificata dall'insieme delle parti di  $\Omega$ :  $\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}(\Omega)$ . La misura di probabilità sarà dunque una funzione  $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , mentre le variabili aleatorie saranno funzioni del tipo  $X : \{\xi_1, \dots, \xi_N\} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Poniamo per comodità  $p_j \equiv p(\xi_j)$  e  $x_j \equiv X(\xi_j)$ . Possiamo dunque rappresentare un generico stato tramite un vettore in  $\mathbb{R}^N$ :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Naturalmente è possibile scomporre il vettore  $\mathbf{p}$  tramite i vettori della base canonica:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

(tali vettori sono gli *stati puri*, ossia gli stati estremali del nostro sistema discreto). Un generico stato può infatti essere scritto come sovrapposizione convessa di stati puri:  $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{e}_i$ .

Si definisce quindi l'insieme degli stati come segue:

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{p} \mid p_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N, \sum_{i=1}^N p_i = 1\}. \quad (1.8)$$

Analogamente, considerato un generico vettore

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad (1.9)$$

identificheremo l'insieme

$$\mathcal{B} := \{\mathbf{x} \mid x_i \in \mathbb{R}\} \quad (1.10)$$

come l'insieme delle osservabili.

Notiamo inoltre che in questo caso la funzione di distribuzione di  $X$  sarà una funzione del tipo  $\mu_p^X : \mathcal{P}(\{\xi_1, \dots, \xi_N\}) \rightarrow [0, 1]$ . Da ciò segue che il valore medio di un osservabile nello stato  $p$ , posto  $\mu_p^X(\{x_i\}) \equiv p_i$ , sarà dato dalla seguente espressione:

$$\langle \mathbf{x} \rangle_p = \sum_{i=1}^N x_i \mu_p^X(\{x_i\}) \equiv \sum_{i=1}^N x_i p_i \quad (1.11)$$

Concludiamo questa sezione osservando che, definendo la moltiplicazione punto per punto, gli osservabili commutano fra loro sotto tale operazione.

## 1.2 Gli stati in Meccanica Quantistica

In questa sezione identificheremo l'insieme delle osservabili con quello degli operatori limitati autoaggiunti sullo spazio di Hilbert, che indicheremo con

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , rimandando al prossimo paragrafo per una trattazione più dettagliata del concetto di osservabile in Meccanica Quantistica.

Una prima definizione di stato è data dal primo postulato della Meccanica Quantistica: “Un sistema fisico isolato è associato ad uno spazio di Hilbert complesso ed è completamente descritto da un vettore avente norma unitaria a meno di una fase globale” [9].

Il valore medio di un operatore autoaggiunto  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , dato un sistema fisico che si trova nello stato  $|\psi\rangle$ , è dato da

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle. \quad (1.12)$$

È tuttavia possibile dimostrare che queste espressioni non sono le più generali possibili. È infatti possibile considerare come stato del sistema fisico un operatore: dato un insieme di proiettori unidimensionali  $\{|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\}_{i \in \Gamma}$  e un insieme  $\{p_i\}_{i \in \Gamma}$  di distribuzioni di probabilità, definiamo *operatore densità* la quantità

$$\rho := \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (1.13)$$

È immediato verificare che gli operatori densità sono operatori positivi. Infatti, considerato un qualsiasi vettore di stato  $|\varphi\rangle$ , abbiamo che

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle = \sum_i p_i \langle \varphi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \varphi \rangle = \sum_i p_i |\langle \varphi | \psi_i \rangle|^2 \geq 0.$$

Dalla (1.12) è inoltre immediato mostrare che il valor medio di un osservabile è dato dalla regola di Born

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho A). \quad (1.14)$$

Ricordiamo ora brevemente la definizione di operatori di classe traccia, in modo da poter definire rigorosamente l'insieme degli stati in Meccanica Quantistica. Consideriamo un operatore limitato  $A$ ; il *modulo* di  $A$  è un operatore positivo ed è definito come segue:

$$|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}.$$

Data una qualunque base ortonormale  $\{|\psi_i\rangle\}_{i \in \Gamma}$  diremo allora che  $A$  è di *classe traccia* se  $\text{Tr}(|A|) = \sum_i \langle \psi_i | |A| | \psi_i \rangle < +\infty$ . È quindi possibile dimostrare che la traccia non dipende dalla scelta della base e che vale la seguente espressione:

$$\text{Tr}(A) = \sum_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle. \quad (1.15)$$

Denoteremo lo spazio vettoriale degli operatori di classe traccia con  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ .

Osserviamo ora che, per definizione, un operatore densità ha traccia unitaria, pertanto è possibile definire l'insieme degli stati in Meccanica Quantistica come segue:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}) \mid \text{Tr}(\rho) = 1, \rho \geq 0\}. \quad (1.16)$$

Chiameremo *puri* gli stati che sono punti estremali di  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  o, equivalentemente, che non possono essere scritti tramite combinazioni convesse non banali. Un tale stato si scriverà dunque come  $\rho = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  e pertanto sarà un proiettore unidimensionale. È inoltre possibile mostrare che uno stato puro è caratterizzato dalla condizione di purezza  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$  [9]. Uno stato che non è puro è invece detto *genuinamente misto o impuro*.

*Esempio:* consideriamo un sistema a 2 livelli e scegliamo come base di operatori autoaggiunti di  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$  le matrici di Pauli e l'identità:

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Segue pertanto che uno stato generico si potrà scrivere come

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad (1.18)$$

dove abbiamo indicato con  $\boldsymbol{\sigma}$  l'operatore vettoriale delle matrici di Pauli e con  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  una terna di coefficienti. Ci è utile tuttavia esplicitare ora l'espressione di  $\rho$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Affinchè  $\rho$  sia un operatore densità è innanzitutto necessario imporre che  $\text{Tr}(\rho) = 1$ . Inoltre  $\rho$  deve essere positivo, pertanto bisogna imporre  $\det(\rho) \geq 0$  e ciò ci conduce al seguente vincolo:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \quad (1.20)$$

Gli stati in un sistema a 2 livelli quantistico sono dunque confinati dentro una sfera (detta *sfera di Bloch*). Sulla superficie sferica troviamo gli stati puri mentre la parte interna è costituita da tutti gli stati impuri.

Possiamo ora mostrare brevemente l'analogia fra la teoria quantistica e la teoria classica. Consideriamo un'osservabile  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e uno stato  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ . Dalla teoria spettrale degli operatori è noto che è sempre possibile trovare una base in cui  $A$  è "diagonale", per cui si ha la decomposizione  $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_A(\lambda)$ .

Considerando che il valore medio di  $A$ , dato un sistema fisico nello stato  $\rho$ , si esprime come  $\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(A\rho)$ , si ha la seguente uguaglianza:

$$\langle A \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(\text{Tr}(E_A(\lambda)\rho)) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\mu_\rho^A(\lambda) \quad (1.21)$$

avendo posto  $d(\text{Tr}(E_A(\lambda)\rho)) \equiv d\mu_\rho^A(\lambda)$ .

Osserviamo che l'espressione del valore medio nel caso quantistico è formalmente analoga a quella classica solo quando quest'ultima è espressa mediante una misura del tipo (1.4). È infatti possibile mostrare che in Meccanica Quantistica calcolare i valori medi delle osservabili mediante una misura di probabilità formalmente analoga alla (1.1) è problematico. In effetti, in Meccanica Classica lo stato di un sistema fisico è completamente determinato dalla posizione e dall'impulso, pertanto la misura di probabilità sullo spazio delle fasi corrisponde alla scelta di un set di osservabili privilegiati ( $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{p}$  per l'appunto). In Meccanica Quantistica, invece, le osservabili sono operatori ed è ben noto che gli operatori posizione  $X$  e momento  $P$  non commutano. Pertanto non è possibile sceglierli come "insieme completo di osservabili".

Accenniamo infine a due importanti caratteristiche degli stati quantistici.

Ciò che ci si può innanzitutto chiedere è se sia possibile o meno distinguere sempre due stati arbitrari. Per fissare le idee consideriamo un esempio classico: il lancio di un dado (o di una moneta). In questo caso naturalmente è sempre possibile identificare il risultato del lancio.

In linea di principio si può vedere che, tramite un esperimento, è sempre possibile distinguere due stati classici.

Nel caso quantistico, invece, non è sempre ammessa questa possibilità: in particolare si dimostra che non è sempre possibile distinguere due stati arbitrari di un sistema fisico mediante una singola misura proiettiva [9].

*Esempio:* consideriamo i due seguenti stati non ortogonali associabili a un qubit

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle; \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle). \quad (1.22)$$

$|\psi_2\rangle$  è quindi un vettore avente una componente ortogonale e una componente parallela a  $|\psi_1\rangle$ . Se eseguiamo quindi una misura descritta dall'operatore  $|0\rangle\langle 0|$  non siamo in grado di ottenere informazioni circa lo stato del sistema, poichè sia  $|\psi_1\rangle$  che  $|\psi_2\rangle$  hanno una componente lungo  $|0\rangle$ .

La seconda proprietà peculiare degli stati in Meccanica Quantistica di cui vogliamo dare qualche cenno è la *purificazione*.

È necessario però ricordare in via preliminare la definizione di traccia parziale. Consideriamo un sistema composto AB descritto dallo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes$

$\mathcal{H}_B$  e dei vettori  $|a_1\rangle, |a_2\rangle \in \mathcal{H}_A, |b_1\rangle, |b_2\rangle \in \mathcal{H}_B$ . Si definisce traccia parziale l'applicazione lineare  $\text{Tr}_B : \mathcal{T}(\mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{T}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}_A)$  tale che:

$$\text{Tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) := |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|). \quad (1.23)$$

Supponiamo ora di avere un sistema quantistico A in uno stato  $\rho$  e consideriamo un secondo sistema B. È allora sempre possibile *purificare*  $\rho$  definendo uno stato puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tale che  $\rho = \text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$  [9]. Per vedere che una purificazione è ammessa per tutti gli stati consideriamo lo stato puro

$$|\Psi\rangle := \sum_i \sqrt{p_i} |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle \equiv \sum_i \sqrt{p_i} |i_A\rangle |i_B\rangle.$$

Applicando la traccia parziale otteniamo subito lo stato  $\rho$ :

$$\text{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |i_A\rangle\langle j_A| \text{Tr}(|i_B\rangle\langle j_B|) = \sum_{i,j} \sqrt{p_i p_j} |i_A\rangle\langle j_A| \delta_{ij} = \rho$$

Concludiamo questa sezione mostrando, in maniera estremamente intuitiva e limitata al caso discreto, che gli stati classici sono solo un caso particolare di stati quantistici.

È infatti possibile rappresentare il vettore di probabilità (1.6) sottoforma di matrice nel modo seguente:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & p_N \end{pmatrix}.$$

Con questa notazione l'insieme degli stati classici diventa  $\mathcal{S} = \{\mathbf{P} \mid p_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, N, \sum_{i=1}^N p_i = 1\}$ .

Analogamente, l'insieme delle osservabili sarà formato dalle matrici diagonali

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

tali che  $x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, N$ . Naturalmente moltiplicare fra loro due osservabili dà ancora un'osservabile per costruzione.

Con queste notazioni è quindi facile vedere che l'espressione per il valore medio di un'osservabile si riduce al caso classico discusso precedentemente [11].

### 1.3 Le osservabili in Meccanica Quantistica

Possiamo ora approfondire il concetto di osservabile in Meccanica Quantistica caratterizzando le procedure di registrazione.

Consideriamo innanzitutto una misurazione effettuata tramite un apparato in grado di fornire solamente una risposta di tipo sì/no. Dato uno stato iniziale  $\rho$ , identifichiamo questo evento elementare tramite un funzionale convesso-lineare

$$\mathbf{E} : \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mapsto \mathbf{E}(\rho) \in [0, 1], \quad (1.24)$$

ossia tale che

$$\mathbf{E}(\alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2) = \alpha\mathbf{E}(\rho_1) + (1 - \alpha)\mathbf{E}(\rho_2) \quad \alpha \in [0, 1].$$

Chiameremo *effetto* la mappa  $\mathbf{E}$ .

Si può quindi mostrare che tale funzionale è sempre identificabile con un operatore autoaggiunto positivo [11].

Questa identificazione avviene nel modo seguente: consideriamo un operatore autoaggiunto  $E \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . È possibile associare ad uno stato  $\rho$  il valor medio di  $E$  con la funzione

$$\rho \mapsto \text{Tr}(\rho E) \equiv E(\rho).$$

Si dimostra allora che  $0 \leq \text{Tr}(\rho E) \leq 1 \iff 0 \leq E \leq \mathbb{1}$  [11]. Pertanto è possibile definire il funzionale  $\mathbf{E}$  mediante l'usuale regola di Born:

$$\mathbf{E} : \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mapsto \text{Tr}(\rho E) \in [0, 1]. \quad (1.25)$$

Definiamo dunque l'insieme

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) := \{E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid 0 \leq E \leq \mathbb{1}\} \quad (1.26)$$

come l'insieme degli effetti associati a una procedura di registrazione.

Notiamo inoltre dalla definizione che qualsiasi proiettore può rappresentare un effetto (anche i proiettori di dimensione maggiore di 1. Banalmente infatti l'identità è ancora un effetto).

Avendo illustrato in che modo si caratterizzano le osservabili elementari, possiamo ora generalizzare tale concetto ad un qualunque procedimento di misurazione. Supponiamo che ogni possibile risultato di un esperimento sia rappresentato da un effetto  $E_\lambda$ . L'idea che ci guida è che un'osservabile generico è descritto da una collezione di effetti  $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$  tali che  $0 \leq \text{Tr}(\rho E_\lambda) \leq 1$ ,  $\sum_\lambda \text{Tr}(\rho E_\lambda) = 1$ .

Definiamo dunque una POVM (positive operator-valued measure) come una misura a valori operatoriali

$$E : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H}) \quad (1.27)$$

tale che

- $E(\emptyset) = 0$ .
- $E(\Omega) = 1$ .
- $E(\bigcup_i M_i) = \sum_i E(M_i)$ ,  $M_i \cap M_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

È possibile verificare con questa definizione che la misura di probabilità “classica” associata si esprime come segue:

$$\mu_\rho^E(M) = \text{Tr}(\rho E(M)) \quad (1.28)$$

e che la nozione di POVM è la più generale possibile per descrivere un osservabile in Meccanica Quantistica [11].

Illustriamo infine alcuni esempi elementari.

Il primo tipo di POVM che vogliamo presentare è la misura a valori negli operatori di proiezione (PVM), la quale è stata in passato la scelta tipica per la rappresentazione di un osservabile in Meccanica Quantistica. Indichiamo con  $\mathcal{P}(\mathcal{H})$  l'insieme dei proiettori ortogonali sullo spazio di Hilbert. Per PVM intendiamo una POVM

$$E : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{E}(\mathcal{H}) \quad (1.29)$$

tale che valga la proprietà di idempotenza

$$E(M)^2 = E(M) \quad \forall M \in \mathcal{F}.$$

Nel momento in cui avviene la misura la PVM trasforma lo stato del sistema come segue:

$$\rho \mapsto \frac{E(M)\rho E(M)}{\text{Tr}(E(M)\rho)}.$$

Più interessante è invece il caso di un qubit preparato in uno dei due stati dati in (1.22):

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle; \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Consideriamo la POVM costituita dai seguenti operatori [9]:

$$E_1 = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} |1\rangle \langle 1|,$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|),$$

$$E_3 = \mathbb{1} - E_1 - E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\langle 0| + \frac{\sqrt{2} - 1}{2 + \sqrt{2}}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}[|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|].$$

Si avrà allora che

$$E_1|\psi_1\rangle = 0, \quad E_2|\psi_1\rangle = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}[|0\rangle - |1\rangle],$$

$$E_3|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}|1\rangle.$$

$$E_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}|1\rangle, \quad E_2|\psi_2\rangle = 0,$$

$$E_3|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2 + \sqrt{2}}|1\rangle.$$

Avremo dunque che un'osservazione di  $E_2$  implica che lo stato del sistema è necessariamente  $|\psi_1\rangle$ , mentre un'osservazione di  $E_1$  si ha solo quando il sistema è nello stato  $|\psi_2\rangle$ . Se invece il risultato della misurazione fornisce  $E_3$  non si può concludere nulla circa la natura dello stato del sistema.

## 1.4 Gli strumenti quantistici

Finora abbiamo considerato un sistema fisico che, dopo essere stato sottoposto a una procedura di preparazione e a una di osservazione, produce un'informazione classica. È tuttavia possibile effettuare una misurazione in diversi step includendo un dispositivo che possa far evolvere lo stato del sistema o che possa eseguire una misura.

Consideriamo per fissare le idee un esperimento di Stern e Gerlach. Avremo dunque un fascio di particelle che passa attraverso un campo magnetico, il cui effetto è quello di splittare il fascio secondo le varie componenti dello spin. Si misura quindi la posizione su uno schermo.

In questo caso l'esperimento è quindi descritto da un apparato di preparazione, uno di registrazione, e da una terza "scatola nera" che può sia far evolvere lo stato del sistema, sia eseguire una misurazione (questo oggetto è quindi in grado di estrarre informazioni sul sistema). È pertanto possibile ricondursi in modo naturale allo schema 1.1. Basta infatti considerare l'azione del campo magnetico come parte integrante della procedura di preparazione (e quindi come elemento che trasforma lo stato), oppure come una componente della procedura di registrazione (e quindi come elemento della misurazione).

Per descrivere queste trasformazioni è quindi necessario introdurre degli oggetti, gli *strumenti quantistici*, che siano in grado di svolgere questo doppio compito di evoluzione/misurazione. È allora necessario in via preliminare richiamare come possono evolvere gli stati in Meccanica Quantistica.

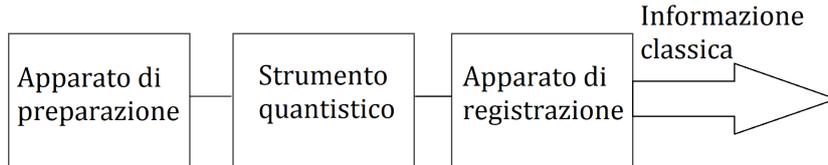


Figura 1.2: Rappresentazione dello schema esteso di un esperimento. È possibile ricondursi allo schema fondamentale 1.1 considerando l'apparato di preparazione (o di registrazione) e lo strumento quantistico come un'unica scatola nera.

Naturalmente il primo tipo di evoluzione possibile in Meccanica Quantistica è l'evoluzione non dissipativa. Una trasformazione di questo tipo è rappresentata da un operatore unitario  $U$  il quale, considerato un sistema nello stato  $\rho$ , fa evolvere tale sistema in

$$\rho' = U\rho U^\dagger \quad (1.30)$$

Il secondo tipo di evoluzione è quella che avviene in presenza di dissipazione. Tali evoluzioni sono descritte dai *canali quantistici*. Per definirli è tuttavia necessario introdurre prima la nozione di completa positività.

Ricordiamo in via preliminare che un'applicazione  $\varphi$  è positiva se mappa operatori positivi in operatori positivi, ossia  $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \mid \rho \geq 0, \varphi(\rho) \geq 0$ . Consideriamo ora un'applicazione lineare

$$\mathcal{C} : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H}) \quad (1.31)$$

e sia  $\mathcal{K}$  un altro spazio di Hilbert di dimensione  $k < +\infty$  arbitraria. È quindi possibile identificare  $\mathcal{K}$  con l'insieme delle matrici complesse  $k \times k$ . Possiamo allora considerare l'applicazione lineare

$$\mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_K : \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}). \quad (1.32)$$

Diremo allora che  $\mathcal{C}$  è *completamente positiva* se  $\mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_K$  è positiva per qualunque dimensione di  $\mathcal{K}$ .

L'applicazione lineare  $\mathcal{C}$  è quindi un *canale quantistico* se soddisfa le seguenti condizioni:

- è positiva e completamente positiva;
- conserva la traccia, ossia vale la condizione

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{C}(\rho)) = \mathrm{Tr}(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (1.33)$$

Notiamo che la condizione di completa positività assicura che lo stato globale del sistema fisico “in esame” e di un sistema fisico “ancillare” evolva in uno stato fisico, anche se l’interazione fra i due sistemi può essere considerata trascurabile.

Per introdurre gli strumenti quantistici è ora necessario generalizzare i canali considerando applicazioni che non conservano la traccia. In particolare diremo che un’applicazione lineare  $\mathcal{O} : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$  è un’*operazione quantistica* se è positiva, completamente positiva e non incrementa la traccia, ossia

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{O}(\rho)) \leq \mathrm{Tr}(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}). \quad (1.34)$$

Tramite questi nuovi oggetti è finalmente possibile introdurre la nozione di strumento quantistico.

Consideriamo quindi una collezione  $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$  una famiglia di operazioni quantistiche. Diremo che  $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$  è uno *strumento quantistico* se vale la seguente condizione:

$$\mathrm{Tr}\left(\sum_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{O}_\lambda(\rho)\right) = \mathrm{Tr}(\rho), \quad \rho \geq 0, \quad (1.35)$$

ossia se  $\sum_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{O}_\lambda$  è un canale quantistico. Con questi oggetti possiamo descrivere sia procedimenti di misura che evoluzioni fisiche.

Notiamo che, se in un esperimento osserviamo il valore  $\lambda$ , allora lo stato si trasforma come segue:

$$\rho \mapsto \frac{\mathcal{O}_\lambda(\rho)}{\mathrm{Tr}(\mathcal{O}_\lambda(\rho))}. \quad (1.36)$$

In questo caso si ha inoltre che  $\mathrm{Tr}(\mathcal{O}_\lambda(\rho)) = p(\lambda)$ .

Se invece “non osserviamo” il risultato della misura sul sistema e quindi non “non selezioniamo” uno stato dall’insieme dei risultati della misura, si otterrà una famiglia di stati non normalizzati  $\{\rho_\lambda\} \equiv \{\mathcal{O}_\lambda(\rho)\}$  che costituirà un campione statistico. Tale campione si scriverà allora come  $\tilde{\rho} = \sum_\lambda \rho_\lambda \equiv \sum_\lambda \mathcal{O}_\lambda(\rho)$  e, in questo caso,  $\mathrm{Tr}(\rho_\lambda)$  indica la frequenza relativa di avere nel campione statistico un dato stato  $\rho_\lambda$ .

## Capitolo 2

# Teorie operative probabilistiche

L'assiomatizzazione della Meccanica Quantistica di Von Neumann non è in grado di fornire in modo trasparente ed intuitivo delle motivazioni fisiche per le quali si debba descrivere la teoria mediante il formalismo degli spazi di Hilbert. L'oggetto di questo secondo capitolo sarà pertanto l'esposizione di uno schema generale da cui è possibile ricavare la Meccanica Quantistica in maniera più intuitiva, seguendo i lavori [2] e [1]. In particolare illustreremo uno schema *operativo*, ossia un modello con cui è possibile descrivere in termini generali i passi necessari per realizzare un esperimento, in analogia con quanto fatto nel capitolo 1.

Osserviamo che in tale schematizzazione non è possibile assumere come enti fondamentali gli stati e gli osservabili [8]; questi li potremo infatti introdurre solo dopo aver definito le teorie operative probabilistiche.

Successivamente sarà possibile presentare dei vincoli (sotto forma di assiomi) in modo da poter ritrovare le teorie fisiche come casi particolari dello schema generale; enunceremo in particolare cinque assiomi che vedremo essere soddisfatti sia dalle teorie classiche che dalle teorie quantistiche.

Infine ci concentreremo sull'assioma caratterizzante la Meccanica Quantistica, il postulato di purificazione, e illustreremo alcune proprietà caratteristiche della Teoria Quantistica che discendono direttamente da tale assioma.

### 2.1 Test, stati, effetti

Ciò che ci guiderà nel resto della trattazione è l'idea secondo cui le informazioni relative a un sistema fisico sono ottenute mediante misurazioni. In questa sezione presenteremo dunque un framework astratto per la descrizione di un esperimento, il quale ci consentirà di introdurre successivamente degli assiomi per restringere il campo di applicazione agli esperimenti ammessi in

Meccanica Quantistica.

La rappresentazione di un esperimento sarà simile a quella introdotta nel primo capitolo, pertanto includerà:

- Un apparato di preparazione, per predisporre lo stato del sistema.
- Un dispositivo che permette la trasformazione/misurazione dello stato iniziale.
- Un apparato di pura misurazione, che consente di estrapolare informazioni classiche sul sistema in esame.

Notiamo inoltre che, siccome la nostra conoscenza di un sistema è fornita da una misurazione, sarà naturale e necessario dare un'impostazione probabilistica alla nostra schematizzazione di esperimento [5].

Questa trattazione è fondata sull'utilizzo di due enti primitivi, evento e sistema, legati fra loro da oggetti analoghi agli strumenti quantistici che chiameremo *test*; questi rappresenteranno fisicamente o l'utilizzo di un dispositivo oppure di un apparato di misurazione, pertanto vedremo che gli apparati di preparazione e di pura misurazione saranno anch'essi dei test. Formalmente diremo che un test con sistema di input  $A$  e sistema di output  $B$  è una collezione di eventi  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X}$ . Chiameremo  $\mathcal{T}(A, B)$  l'insieme di tutti gli eventi con input  $A$  e output  $B$ . Nel caso in cui invece gli eventi avranno sistemi di input e output coincidenti, porremo per comodità  $\mathcal{T}(A, A) \equiv \mathcal{T}(A)$ . Un test il cui insieme di possibili risultati è un singoletto lo chiameremo invece *test deterministico*.

Un esempio di test è naturalmente dato da un apparato di Stern-Gerlach, dove abbiamo come sistema di input e output lo spazio di Hilbert in cui vive lo spin; in questo caso avremo due possibili eventi, corrispondenti allo splitting del fascio, e due possibili risultati (su e giù), a seconda di dove sia passata la particella.

Introduciamo a questo punto il sistema *banale*  $I$ , il cui significato è semplicemente "nulla". Un test avente sistema di input il sistema banale e sistema di output un qualunque altro sistema sarà dunque chiamato *test di preparazione*; analogamente, se è il sistema di output di un test ad essere il sistema banale, diremo che tale test è un *test d'osservazione*. Il significato di tali test è ovvio se ci si riferisce allo schema di esperimento proposto. Indicheremo gli insiemi di appartenenza di tali test rispettivamente con  $\mathcal{S}(\cdot)$  e  $\mathcal{E}(\cdot)$ .

Introduciamo ora una notazione *tipo-Dirac* per gli eventi di preparazione e osservazione: dato un sistema  $A$ , denoteremo un evento di preparazione come  $|\rho\rangle_A$  e un evento di osservazione come  $\langle a|_A$ .

Notiamo inoltre che è possibile visualizzare graficamente i test tramite una rappresentazione in forma circuitale descritta dalla seguente figura.



Figura 2.1: Una rappresentazione di un esperimento formato da un test di preparazione  $\{\rho_i\}$ , un test  $\{\mathcal{C}_j\} \subset \mathcal{T}(A, B)$  e un test di osservazione  $\{a_k\}$ . Figura tratta da [1].

Tale rappresentazione si basa su un insieme di “fili” e “scatole nere”; nello specifico, le scatole nere rappresentano i test che sono collegati fra loro tramite fili, i quali rappresentano i sistemi. La presenza del sistema triviale nei test di preparazione e osservazione è indicata dalla mancanza di un filo rispettivamente in ingresso e in uscita alla scatola nera.

Osserviamo che questi esperimenti possono essere condotti in maniera *sequenziale* quando due test sono eseguiti uno di seguito all’altro, o in modo *parallelo* quando i due test sono eseguiti simultaneamente.

Formalmente, è possibile comporre sequenzialmente due test quando il sistema di output del primo corrisponde al sistema di input del secondo. Dati quindi i test  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X} \subset \mathcal{T}(A, B)$  e  $\{\mathcal{D}_j\}_{j \in Y} \subset \mathcal{T}(B, C)$ , il test composto sequenzialmente è dato dalla collezione di eventi  $\{\mathcal{D}_j \circ \mathcal{C}_i\}_{(i,j) \in X \times Y}$ . È immediato in questo caso notare che è possibile definire un test che si comporta come l’identità. Con le notazioni già usate, il test identità per un sistema  $A$  è quel test  $\mathbb{1}$  tale che  $\{\mathbb{1} \circ \mathcal{C}_i\}_{i \in X} = \{\mathcal{C}_i\}_{i \in X} \forall \mathcal{C}_i \subset \mathcal{T}(A, B)$ .

Per esplicitare invece in che modo è possibile comporre parallelamente due test facciamo riferimento ad un esperimento di Meccanica Quantistica. In questo caso un test parallelo può essere ad esempio un test in cui eseguiamo una misura dello spin e del momento angolare orbitale di un elettrone. Il sistema di partenza (e di arrivo) è dunque dato da un prodotto tensore fra i due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_s$  e, analogamente, anche l’operatore che agisce sul sistema agirà separatamente sui due spazi di Hilbert. Se quindi indichiamo con  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X}$  e  $\{\mathcal{D}_j\}_{j \in Y}$  i due test appartenenti rispettivamente a  $\mathcal{T}(A, B)$  e  $\mathcal{T}(C, D)$ , ha senso scrivere, con le stesse notazioni usate nel caso quantistico, che il test parallelo è dato da  $\{\mathcal{C}_i \otimes \mathcal{D}_j\}_{(i,j) \in X \times Y}$ .

Una rappresentazione grafica delle due composizioni è data dalla figura 2.2.

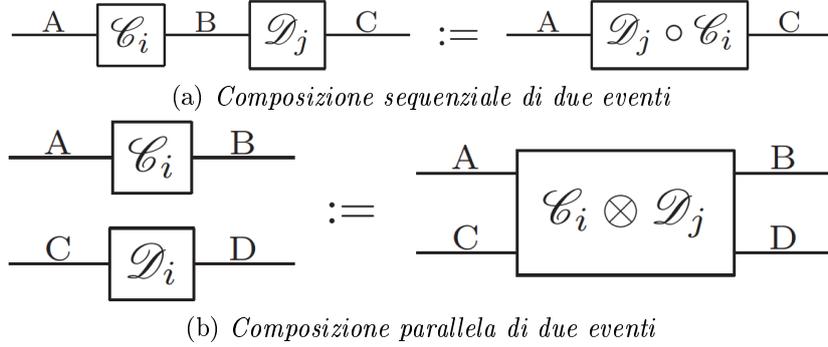


Figura 2.2: Esempi di composizioni di eventi. Figure tratte da [1]. La figura (b) è inoltre la rappresentazione grafica dell’esperimento in (2.1).

Come esempio di composizione parallela possiamo considerare un test che va da  $AC$  a  $BC$  tramite un test  $\{\mathcal{C}_i\}_i \subset \mathcal{T}(A, B)$ . In questo caso l’esperimento lo scriveremo come

$$(b_k|_{BC}(\mathcal{C}_i \otimes \mathbb{1}_C)|\rho_i)_{AC}. \quad (2.1)$$

Osserviamo inoltre che per poter comporre parallelamente due test abbiamo implicitamente introdotto un’operazione di composizione di sistemi. Ciò significa che, considerati due sistemi  $A$  e  $B$ , è possibile considerare la loro composizione come un unico sistema  $AB$ . Con le notazioni sopra introdotte un evento di preparazione di  $AB$  verrà scritto formalmente come  $|\rho\rangle_A \otimes |\sigma\rangle_B$ , tuttavia nel proseguo sottintenderemo il simbolo ‘ $\otimes$ ’ come avviene usualmente con la notazione bra-ket.

Diremo infine che una trasformazione  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(A, B)$  è *reversibile* se esiste una trasformazione  $\mathcal{U}^{-1} \in \mathcal{T}(B, A)$  tale che  $\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} = \mathbb{1}_B$  e  $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U} = \mathbb{1}_A$ . Diremo quindi che due sistemi  $A$  e  $B$  sono *operativamente equivalenti* se esiste una trasformazione reversibile  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(A, B)$ .

Abbiamo quindi delineato una *teoria operativa*  $\Theta$ , la quale è specificata da una coppia  $(\Lambda, \Omega)$  dove  $\Lambda$  è una collezione di sistemi chiusa sotto l’operazione di composizione e  $\Omega$  è una collezione di test chiusa sotto le operazioni di composizione sequenziale e parallela. Tuttavia, come abbiamo già sottolineato, la conoscenza del sistema da parte dell’osservatore è sempre da considerarsi come una conoscenza di carattere aleatorio, per cui è necessario introdurre una struttura probabilistica riguardo la possibilità di ottenere un certo risultato da un esperimento.

Per farlo è necessario prima fare un’osservazione: abbiamo visto che un esperimento è caratterizzato ai suoi estremi da un apparato di preparazione e da un apparato di misura. Nel linguaggio dei test questo significa che, com-

più semplicemente, un esperimento ha come sistema di input e output il sistema triviale. L'intera sequenza di eventi, di qualunque tipo essi siano, può pertanto essere vista come un unico evento avente come input e output il sistema banale. Se per esempio consideriamo l'esperimento

$$(a_k|_B \mathcal{C}_j | \rho_i)_A,$$

questo lo possiamo vedere come un singolo evento  $p_{k,j,i} := (a_k|_B \mathcal{C}_j | \rho_i)_A \in \mathcal{T}(I)$ .

Graficamente ciò significa che un evento del sistema banale “non ha fili in ingresso e in uscita” (una rappresentazione grafica è data dalla figura 2.1). L'idea per introdurre in questo framework un'interpretazione probabilista è dunque quella di rileggere i test in  $\mathcal{T}(I)$  come delle distribuzioni di probabilità.

Diremo pertanto che una teoria operativa è *probabilistica* se per ogni test  $\{p_i\}_{i \in X} \subset \mathcal{T}(I)$  si ha che  $p_i \in [0, 1]$  e  $\sum_i p_i = 1$  e se la composizione di due eventi di questo tipo, sia essa sequenziale o parallela, costituisce un evento rappresentato dal prodotto delle probabilità. In formule, dato un altro test  $\{q_i\}_{i \in X} \subset \mathcal{T}(I)$ , vale il prodotto delle probabilità  $p_i q_j = p_i \otimes q_j = p_i \circ q_j$ .

In maniera più informale, la struttura probabilistica così definita consente quindi di esprimere la composizione di test attraverso una distribuzione di probabilità congiunta.

Consideriamo ad esempio un test di preparazione  $\{\rho_i\}$  e un test di osservazione  $\{a_j\}$ . Componendo due eventi  $\rho_i$  e  $a_j$  abbiamo

$$(a_j | \rho_i) = p(i, j) \tag{2.2}$$

o anche, per due esperimenti eseguiti in parallelo assumeremo che la distribuzione di probabilità congiunta è data dal prodotto

$$(a_k |_A (b_l |_B | \rho_i)_A | \sigma_j)_B = p(i, k) q(j, l)$$

È importante a questo punto notare dalla (2.2) che gli eventi di preparazione e osservazione inducono delle distribuzioni di probabilità. In particolare, se fissiamo un evento di preparazione  $\rho_i$ , si può definire un'applicazione

$$\hat{\rho}_i : (a_j | \rho_i) \in \mathcal{E}(A) \mapsto (a_j | \rho_i) \in [0, 1]. \tag{2.3}$$

Analogamente, fissare un evento di osservazione  $a_j$  nella (2.2) corrisponde a definire un'applicazione

$$\hat{a}_j : |\rho_i) \in \mathcal{S}(A) \mapsto (a_j | \rho_i) \in [0, 1] \tag{2.4}$$

Notiamo ora che se ad esempio due eventi di preparazione  $\rho_i, \rho'_i \in \mathcal{S}(A)$  inducono la stessa applicazione, è allora impossibile distinguerli dalla statistica dell'esperimento. Ciò significa che i due eventi sono equivalenti.

È pertanto possibile introdurre delle classi di equivalenza. Per il resto della trattazione identificheremo in particolare un evento  $\rho_i \in \mathcal{S}(A)$  con la corrispondente applicazione  $\hat{\rho}_i$  e chiameremo tale classe di equivalenza *stato*.

Naturalmente analoghe considerazioni possono essere fatte per gli eventi di osservazione, per cui identificheremo l'evento  $a_j \in \mathcal{E}(A)$  con l'applicazione  $\hat{a}_j$  e chiameremo la corrispondente classe di equivalenza *effetto*.

Queste considerazioni ci consentono quindi di affermare che un test di preparazione (di osservazione) è una collezione di stati (effetti).

Con ulteriore abuso di notazione indicheremo inoltre le classi di equivalenza di stati ed effetti con  $\mathcal{S}(\cdot)$  e  $\mathcal{E}(\cdot)$ .

Consideriamo ora un esempio di Meccanica Quantistica per fissare le idee circa la natura di queste classi di equivalenza.

Consideriamo un sistema fisico descritto dagli operatori  $\mathbf{L}$  e  $L_z$ . È noto che per ogni valore di  $l \neq 0$  avremo una molteplicità di valori di  $m$ ; grazie alla componente del momento angolare lungo  $z$  siamo pertanto in grado di distinguere perfettamente gli stati assumibili dal sistema. Se però nella scelta del set di osservabili per la descrizione di questo sistema non consideriamo l'operatore  $L_z$ , non saremo più in grado di distinguere gli stati. Per ogni valore di  $l$  avremo molteplici stati indistinguibili, stati cioè a questo punto equivalenti poichè forniscono la stessa probabilità di misurare un certo valore del momento angolare  $l'$ .

Ciò accade in quanto cambiare set di osservabili cambia l'insieme degli stati assumibili del sistema. In questo caso quindi un sistema non completo di osservabili corrisponde ad avere degli stati che da un punto di vista della statistica dell'esperimento sono perfettamente indistinguibili. È quindi naturale assumere la presenza di una classe di equivalenza di stati.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per gli eventi in  $\mathcal{T}(A, B)$ ; chiamiamo pertanto le classi di equivalenza di eventi indistinguibili fra  $A$  e  $B$  *trasformazioni* da  $A$  a  $B$  [2]. Con il solito abuso di notazione denoteremo l'insieme delle trasformazioni sempre come  $\mathcal{T}(A, B)$ .

All'interno dell'insieme delle trasformazioni è tuttavia importante citare le trasformazioni deterministiche  $\mathcal{C} \in \mathcal{T}(\cdot, \cdot)$  che chiameremo *canali*. In questo caso è naturalmente possibile considerare canali *reversibili*  $\mathcal{C}$ , per i quali cioè  $\exists \mathcal{D} \mid \mathcal{D}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D} = \mathbf{1}$ ; ciò significa che esiste un gruppo di trasformazioni reversibili all'interno della teoria, il quale nel prosieguo consentirà di fare alcune considerazioni circa la natura della reversibilità in Meccanica Quantistica [1].

Esplicitati i concetti di stato, effetto e trasformazione, possiamo a questo

punto introdurre nel nostro ambiente di lavoro le nozioni di stati *puri* e *genuinamente misti*. Per farlo è necessario fare prima delle considerazioni sui test.

Consideriamo allora due test  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X}$  e  $\{\mathcal{D}_j\}_{j \in Y}$ . Diremo che  $\{\mathcal{C}_i\}$  è un *agglutinamento* (*coarse-graining*) di  $\{\mathcal{D}_j\}$  se esiste una partizione  $\{Y_i\}$  di  $Y$  tale che  $\mathcal{C}_i = \sum_{j \in Y_i} \mathcal{D}_j$ . Viceversa, con queste notazioni, il test  $\{\mathcal{D}_j\}$  è una *raffinazione* di  $\{\mathcal{C}_i\}$ . Informalmente una raffinazione consiste nel “dividere” un possibile output del test in due o più output, al contrario un agglutinamento “unisce” due (o più) output in un unico possibile risultato.

È dunque evidente che un agglutinamento è un test che non è in grado di fornire la massima quantità di informazione relativa al sistema in esame; ciò si ottiene infatti raffinando sempre di più il test. Un esempio che può fissare facilmente le idee è il lancio di un dado equo.

Consideriamo infatti l’evento “esce un numero pari” il cui risultato, dopo il lancio del dado, è un risultato di tipo sì/no. Tale asserzione naturalmente non ci consente di identificare univocamente qual è il numero che otteniamo dal lancio, in quanto è possibile identificare solamente la parità. Ovviamente una possibile raffinazione è data dagli eventi del tipo “esce il numero  $n$ ” con  $n = 1, \dots, 6$ . È doveroso a questo punto notare, tuttavia, che non è possibile raffinare ulteriormente la precedente asserzione. Parleremo allora di *eventi atomici* nel caso in le uniche raffinazioni ammesse siano quelle triviali (ossia le raffinazioni tali che, dati  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  si ha  $\mathcal{C} = \lambda \mathcal{D}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ).

Abbiamo tuttavia appena visto che i test di preparazione sono identificabili con la classe di equivalenza degli stati. Diremo allora che uno stato ammette solo raffinazioni banali è detto *stato puro*. Viceversa, se esiste una raffinazione non banale, tale stato sarà detto *genuinamente misto o impuro*.

Nello specifico parleremo di stato *completamente misto* nel caso in cui ogni evento di preparazione raffina lo stato in esame.

*Nota:* è doveroso osservare che è possibile parlare di stati completamente misti solo nel caso in cui il sistema sia finito-dimensionale.

Come semplice esempio possiamo riferirci come sempre al caso di un operatore densità, per il quale troviamo immediatamente che uno stato puro è una matrice di rango 1, mentre uno stato genuinamente misto  $\rho$  avrà rango maggiore o uguale a 2; una raffinazione di  $\rho$ , inoltre, sarà data dalle matrici  $\{\sigma_i\}$  tali che  $\sigma_i \leq \rho$  [1].

Infine possiamo mostriamo una caratterizzazione degli stati puri e misti tramite un esempio che abbiamo già incontrato, tenendo però presente che tale proprietà è del tutto generale (ciò si può dimostrare facendo uso della proprietà di convessità dell’insieme degli stati [1]).

Se infatti consideriamo un sistema quantistico a due livelli, sappiamo che una sua rappresentazione è data dalla sfera di Bloch. In questo caso inoltre gli

stati puri si trovano sulla superficie della sfera e all'interno troviamo tutti gli stati misti.

Questa caratteristica degli stati puri è del tutto generale e vale anche come caratterizzazione: uno stato  $\rho \in \mathcal{S}(A)$  è puro se e soltanto se è un punto estremale di  $\mathcal{S}(A)$ .

## 2.2 L'assioma di causalità

È ora possibile concentrarsi su teorie probabilistiche fondate su principi di natura fisica.

Per descrivere una teoria fisica è innanzitutto necessario cominciare a restringere il nostro interesse ad una situazione vincolata da un principio di causa-effetto, cioè a un caso in cui il risultato di un esperimento non è influenzato da eventi futuri.

Nell'ambito delle teorie probabilistiche possiamo formulare tale richiesta tramite il seguente

**Assioma 1.** (*Causalità*) Sia  $\{\rho_i\}_{i \in X} \subset \mathcal{S}(A)$  un test di preparazione. Per ogni test di osservazione  $\{a_j\}_{j \in Y}$  sul sistema  $A$  la distribuzione di probabilità

$$p_i := \sum_{j \in Y} (a_j | \rho_i)_A, \quad i \in X \quad (2.5)$$

è indipendente dal test  $\{a_j\}_{j \in Y}$ .

Equivalentemente, dati due qualunque test di osservazione  $\{a_j\}_{j \in Y}$  e  $\{b_k\}_{k \in Z}$  vale la seguente uguaglianza:

$$\sum_{j \in Y} (a_j | \rho_i)_A = \sum_{k \in Z} (b_k | \rho_i)_A. \quad (2.6)$$

Una teoria probabilistica che soddisfa tale assioma sarà detta *teoria causale*.

Osserviamo che, nonostante l'apparente banalità di tale richiesta, finora non era evidente che la sequenza di test fosse una sequenza causale di eventi. In questo modo è inoltre possibile esplicitare al meglio l'importanza della causalità nello sviluppo della teoria. Possiamo infatti ora illustrare alcune interessanti caratteristiche che discendono direttamente dal principio di causalità.

È innanzitutto possibile dimostrare che le teorie causali sono caratterizzate dall'aver un unico effetto deterministico, che sarà sempre denotato nel prosieguo come  $(e|$ ; ciò ci consente di calcolare la probabilità che un sistema si trovi in uno stato  $\rho_i \in \{\rho_i\}_{i \in X} \subset \mathcal{S}(A)$  tramite la seguente espressione [1]:

$$p(\rho_i) \equiv (e | \rho_i).$$

È quindi possibile mostrare facilmente che, per un sistema composto  $AB$ , l'unico effetto si scrive come  $(e|_{AB} = (e|_A(e|_B$ . Infatti, siccome la composizione parallela di due test deterministici è ancora un test deterministico, l'effetto  $(e|_A(e|_B$  è ancora un test deterministico; dall'unicità segue subito allora che  $(e|_{AB} = (e|_A(e|_B$ .

È per esempio immediato verificare che nel caso della Meccanica Quantistica l'effetto deterministico corrisponde all'identità. Se consideriamo infatti l'espressione  $\text{Tr}(P\rho) = 1$  per un qualunque  $\rho \in \mathcal{S}(\cdot)$  e per  $P$  operatore limitato fissato, deve necessariamente accadere che  $P = \mathbb{1}$ .

È inoltre possibile definire in modo univoco uno stato su un sistema marginale: dato  $\sigma \in \mathcal{S}(AB)$ , lo stato

$$|\rho\rangle_A := (e|_B|\sigma\rangle_{AB} \quad (2.7)$$

sarà detto *stato marginale* di  $\sigma$ .

*Nota:* l'espressione dello stato marginale è analoga alla definizione di uno stato su un sottosistema. Come richiamato nel capitolo 1, dato uno stato  $\sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$  è possibile definire uno stato  $\rho_A$ , detto *operatore densità ridotto*, tramite la traccia parziale:

$$\rho_A := \text{Tr}_B(\sigma).$$

È ora interessante notare che l'assioma di causalità consente di caratterizzare anche i canali. È infatti possibile dimostrare [1] che una trasformazione  $\mathcal{C} \in \mathcal{T}(A, B)$  è un canale se e soltanto se vale la condizione

$$(e|_A = (e|_B\mathcal{C}. \quad (2.8)$$

Tale caratterizzazione corrisponde naturalmente alla conservazione della traccia da parte dei canali quantistici.

Inoltre, dato un test  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X}$ , dalla (2.8) segue la seguente “condizione di normalizzazione”:

$$\sum_{i \in X} (e|_B\mathcal{C}_i = (e|_A \quad (2.9)$$

la quale non è altro che una riscrittura di una delle proprietà delle POVM.

L'unicità dell'effetto deterministico consente inoltre di definire una norma per  $\mathcal{S}(A)$  come segue

$$\|\rho\| = (e|\rho\rangle_A, \quad (2.10)$$

per cui è sempre possibile rinormalizzare uno stato  $\rho$ :

$$|\bar{\rho}\rangle_A := \frac{|\rho\rangle_A}{(e|\rho\rangle_A}.$$

*Nota:* la norma così introdotta corrisponde alla norma  $\|\cdot\|_1$ , che ricordiamo essere definita per un operatore di classe traccia  $A$  come  $\|A\| := \text{Tr}(|A|)$ .

È possibile infine ritrovare un primo vincolo caratteristico della Teoria dell'Informazione relativo alla trasmissione dell'informazione fra sistemi. In particolare, si può mostrare che due sistemi possono comunicare solo nel caso in cui interagiscano mediante azioni locali.

Consideriamo quindi uno stato  $\psi \in \mathcal{S}(AB)$  e definiamo la probabilità di osservare la coppia  $(i, j)$  come  $p_{ij} := (e|_{AB}(\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j)|\psi)_{AB}$ , dove  $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in X}$  è un test sul sistema  $A$  e  $\{\mathcal{B}_j\}_{j \in Y}$  è un test sul sistema  $B$ . Considerando che esiste un solo effetto deterministico in una teoria causale, si ottiene immediatamente la seguente catena di uguaglianze relativa alla probabilità marginale sul solo sistema  $A$ :

$$p_i^{(A)} := \sum_j p_{ij} = \sum_j (e|_A(e|_B(\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{B}_j)|\psi)_{AB}) = (e|_A \mathcal{A}_i \sum_j (e|_B \mathcal{B}_j|\psi)_{AB}).$$

Invocando a questo punto il risultato (2.9), otteniamo che  $\sum_{j \in Y} (e|_B \mathcal{B}_j = (e|_B$ . Abbiamo inoltre già visto che per l'unicità dell'effetto deterministico è possibile definire univocamente degli stati marginali sui sottosistemi. Chiamando dunque tali stati  $|\rho\rangle_A := (e|_B|\psi)_{AB}$  è possibile scrivere

$$p_i^{(A)} = (e|_A \mathcal{A}_i |\rho\rangle_A, \quad i \in X.$$

Ciò che abbiamo ora mostrato è che la distribuzione di probabilità marginale  $p_i^{(A)}$  non dipende dai test eseguiti sugli altri sottosistemi: in questa situazione non è ammessa la comunicazione fra i due sottosistemi. Più concretamente, questo rappresenta una versione più generale del teorema di no-signaling quantistico, per cui non è possibile sfruttare l'entanglement per trasmettere informazione.

## 2.3 Distinguibilità, compressione, composizione

Introdotta il principio di causalità, abbiamo ovviamente ancora bisogno di restringere il nostro campo di interesse per evidenziare in che modo le teorie fisiche sono incluse nello schema astratto introdotto. Proseguiremo dunque enunciando ulteriori assiomi della Teoria dell'Informazione che possano essere immediatamente ricondotti a casi fisici.

Consideriamo subito che, facendo agire diversi test su uno stesso sistema, è naturale richiedere che sia possibile distinguere i vari stati che il sistema può assumere. Tale possibilità è evidente sia nell'ambito di una teoria classica che nel caso di una teoria quantistica. Se infatti pensiamo ad un sistema binario classico, è banale osservare che i due valori che un bit può assumere, '0' e '1', sono perfettamente distinguibili, nel senso che è possibile identificare con certezza se il bit è acceso o spento.

Analogamente, per il caso quantistico, è evidente che i due stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  che un sistema a due livelli può assumere possono essere distinti tramite un procedimento di misura (in generale questa caratteristica risiede nelle proprietà di ortogonalità degli stati come già discusso nel primo capitolo). Questo caso particolare del sistema a due livelli è naturalmente generalizzabile a un sistema di dimensione finita arbitraria.

Per enunciare l'assioma consideriamo quindi preliminarmente uno spazio di Hilbert di dimensione  $d$ . Ricordiamo in questo che gli stati puri  $\rho$  sono caratterizzati dalla condizione  $\text{rank}(\rho) = 1$ , mentre gli stati genuinamente misti hanno rango maggiore di 1. Fra i vari stati misti è di interesse in questa trattazione citare il caso di uno stato  $\rho' \mid \text{rank}(\rho') = d$ . Tale stato lo chiameremo *completamente misto*.

In maniera del tutto analoga chiameremo dunque 'completamente misto' quello stato  $\sigma$  per cui ogni  $\rho \in \mathcal{S}(\cdot)$  è contenuto in una sua raffinazione.

Diremo inoltre che gli stati  $\{\rho_i\}_{i \in X}$  sono *perfettamente distinguibili* se esiste un effetto  $\{a_i\}_{i \in X}$ , che chiameremo effetto discriminante, tale che

$$(a_j \mid \rho_i) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in X. \quad (2.11)$$

Introduciamo dunque un assioma sulla distinguibilità come segue

**Assioma 2.** (*Perfetta distinguibilità*) *È sempre possibile distinguere perfettamente uno stato non completamente misto da almeno un altro stato.*

È possibile dimostrare che se vale l'assioma sulla perfetta distinguibilità allora ogni sistema fisico, ad eccezione del sistema banale, ha almeno due stati perfettamente distinguibili.

Vogliamo ora introdurre un ulteriore assioma che consente di distinguere due stati. A differenza del precedente, tuttavia, ciò di cui vogliamo discutere ora è la possibilità di discriminare due stati di un sistema composto attraverso misurazioni localizzate sui sottosistemi. Per fissare le idee basta pensare a una coppia di particelle con spin antiparallelo; è evidente in questo caso che una misurazione solo sulla parte di spin del sistema potrebbe essere sufficiente ad "etichettare" le due particelle.

Tale richiesta è dunque formulata come segue:

**Assioma 3.** (*Distinguibilità locale*) È possibile distinguere ogni coppia di stati appartenenti a un dato sistema composto effettuando unicamente misurazioni sui singoli sottosistemi.

Formalmente diremo dunque che per ogni coppia di stati  $\rho, \sigma \in \mathcal{S}(AB)$ ,  $\rho \neq \sigma$  esistono due effetti  $a \in \mathcal{E}(A)$  e  $b \in \mathcal{E}(B)$  per i quali si ha la seguente disuguaglianza

$$(a|_A(b|_B|\rho)_{AB} \neq (a|_A(b|_B|\sigma)_{AB}. \quad (2.12)$$

*Nota:* osserviamo che è possibile definire la dimensione di un sistema  $A$  a partire dal numero massimo di stati puri perfettamente distinguibili nel sistema stesso. Denotando con  $d_A$  tale numero, si dimostra infatti che la dimensione dello spazio degli stati di un sistema  $A$  è data da  $d_A^2$  [2].

Si può allora mostrare che una teoria gode della distinguibilità locale se e solo se, per ogni sistema composto  $AB$ , la dimensione dello spazio degli stati di  $AB$  è data dal prodotto dei singoli spazi degli stati, ossia

$$\dim(AB) = \dim(A) \dim(B).$$

Ciò implica che lo spazio degli stati di un sistema  $AB$  è dato dal prodotto tensoriale degli spazi degli stati che compongono il sistema (scriveremo  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  nella formulazione standard della Meccanica Quantistica) [4]. Inoltre è facile mostrare che le trasformazioni sono definite dalla loro azione locale se vale la distinguibilità locale. Ciò significa che, date due trasformazioni  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{T}(A, B)$ , vale la seguente implicazione:

$$\mathcal{C}\rho = \mathcal{D}\rho \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(A) \implies \mathcal{C} = \mathcal{D}. \quad (2.13)$$

Per illustrare perché vale questa seconda affermazione è sufficiente considerare uno stato  $\sigma \in \mathcal{S}(AC)$  e due trasformazioni  $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{T}(A, B)$ ,  $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$ . Essendo le due trasformazioni diverse, avremo banalmente che  $(\mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_C)|\sigma)_{AC} \neq (\mathcal{D} \otimes \mathbb{1}_C)|\sigma)_{AC}$ .

Dall'assioma sopra enunciato si può quindi affermare che esistono due effetti  $b$  e  $c$  tali che

$$(b|_B(c|_C(\mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_C)|\sigma)_{AC} \neq (b|_B(c|_C(\mathcal{D} \otimes \mathbb{1}_C)|\sigma)_{AC}. \quad (2.14)$$

Se ora chiamiamo  $|\rho)_A := (c|_C|\sigma)_{AC}$  la (2.14) diventa

$$(b|_B\mathcal{C}|\rho)_A \neq (b|_B\mathcal{D}|\rho)_A,$$

che ovviamente implica la disuguaglianza  $\mathcal{C}|\rho)_A \neq \mathcal{D}|\rho)_A$ .

Si ottiene dunque l'implicazione

$$\mathcal{C}|\rho)_A = \mathcal{D}|\rho)_A \quad \forall \rho \in \mathcal{S}(A) \implies \mathcal{C} = \mathcal{D}. \quad (2.15)$$

Non esamineremo ulteriori proprietà derivanti dalla discriminabilità locale (rimandiamo a [4] e [1] per questo), ma ci limiteremo a notare che la probabilità congiunta di tutti gli effetti locali definisce completamente lo stato in esame (ciò segue dal postulato di causalità).

Per introdurre il prossimo assioma osserviamo preliminarmente che ogni teoria fisica può essere vista come una Teoria dell'Informazione, poiché un procedimento di misura ha sempre lo scopo di ricavare informazioni sul sistema esaminato. In particolare, lo stato di un sistema non rappresenta altro che una sorgente di informazione per il sistema stesso, descrivendo quindi l'informazione disponibile sul sistema. Notiamo inoltre che è interessante parlare strettamente di Teoria dell'Informazione quando l'informazione su un sistema non dipende dal modo in cui è "immagazzinata". In questo caso infatti è ammessa l'esistenza di un protocollo di trasmissione fedele, ossia di un protocollo tale da non disperdere informazioni nel trasferimento. È quindi naturale chiedersi quale sia il modo più efficiente per trasmettere l'informazione senza perdita di dati e in quali casi ciò sia possibile (in generale infatti è possibile formulare teorie in cui non sia ammesso un protocollo di questo tipo).

Formalizziamo quest'idea considerando brevemente uno schema di comunicazione dell'informazione classica. Questo è composto da una sorgente di informazione che invia un messaggio a un destinatario mediante un canale di comunicazione [10]. In generale per trasmettere il messaggio attraverso il canale è necessario *adattarlo* in maniera opportuna. Per comprendere informalmente cosa si intende per adattamento, consideriamo la situazione che più ci interessa in cui sorgente e destinatario sono due sistemi con dimensioni diverse (in particolare la dimensione del sistema destinatario è minore di quella della sorgente); in questo caso è ovviamente necessario introdurre delle funzioni, dette di codifica e decodifica, per passare da un sistema all'altro e "comprimere/decomprimere" l'informazione. Solo in questo modo è possibile rendere accessibile l'informazione al destinatario.

Consideriamo quindi un test di preparazione  $\{\rho_i\}_{i \in X}$  di un sistema  $A$ , che chiameremo *sorgente di informazione*, tale che  $\sum_{i \in X} (e|\rho_i) = 1$  e chiamiamo un test deterministico  $\mathcal{E}$  *operazione di codifica*. Consideriamo quindi un sistema  $C$  tale che  $\dim(C) \leq \dim(A)$ . Diremo allora che  $\mathcal{E}$  è una codifica *senza perdite per la sorgente* se esiste una funzione di *decodifica*  $\mathcal{D}$  tale che

$$\mathcal{D}\mathcal{E}|\rho_i) = |\rho_i) \quad \forall i \in X.$$

Dato uno stato  $\rho \in \mathcal{S}(A)$ , si dice che l'operazione di compressione  $\mathcal{E}$  è *senza perdite per lo stato*  $\rho$  se è senza perdite per ogni sorgente  $\{\rho_i\}_{i \in X}$  tale che

$\rho = \sum_{i \in X} \rho_i$ . Diremo inoltre che la compressione è *efficiente* se ogni stato  $\alpha \in \mathcal{S}(C)$  si scrive come  $\alpha = \mathcal{E}\rho$ . Una compressione che sia senza perdite ed efficiente per un certo stato la chiameremo *ideale* per tale stato.

Avendo già accennato al fatto che un protocollo di compressione ideale è sempre ammesso, è ragionevole pertanto assumere il seguente assioma:

**Assioma 4.** (*Compressione ideale*) *Per ogni stato esiste sempre un protocollo di compressione ideale.*

Notiamo che in questo modo la codifica mantiene le caratteristiche degli stati: stati completamente misti vengono mappati in stati completamente misti del canale e stati puri vengono mappati in stati puri [4]. Inoltre, in questa situazione, se consideriamo due canali che consentono la compressione ideale per uno stesso stato, allora tali canali sono equivalenti da un punto di vista operativo [2].

L'ultimo assioma sarà invece legato alla composizione di eventi atomici. Abbiamo visto precedentemente che una raffinazione è un'operazione che aumenta la quantità di informazioni estraibili da un sistema; naturalmente esiste un limite superiore all'informazione ottenibile e questa è rappresentato dall'esistenza di eventi atomici. Si può dunque dire che un test composto da eventi atomici consente di accedere al massimo grado di conoscenza possibile di un sistema; in questo caso si ha pertanto il totale controllo di quanto succede in un esperimento. Il prossimo postulato afferma che comporre due operazioni atomiche non fa perdere controllo sulla sequenza di esperimenti:

**Assioma 5.** (*Atomicità della composizione*) *La composizione sequenziale di due operazioni atomiche è ancora un'operazione atomica.*

Per comprendere l'importanza di tale assioma all'interno di una teoria fisica consideriamo due eventi atomici  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{T}(A)$  componibili sequenzialmente. Se non valesse l'atomicità della composizione, allora in generale avremmo che  $\mathcal{B}\mathcal{A}$  è un agglutinamento; ciò significa che potremmo considerare un test  $\mathcal{C}_i \in \mathcal{T}(A)$  scrivere

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \sum_{i \in X} \mathcal{C}_i.$$

Non è però chiaro fisicamente come si possa raffinare l'evento  $\mathcal{B}\mathcal{A}$ , poichè sia  $\mathcal{A}$  che  $\mathcal{B}$  sono due eventi atomici e pertanto non "nascondono" alcuna informazione sul sistema.

Consideriamo inoltre un sistema  $A$  preparato in uno stato puro  $\rho$  e un sistema  $B$  preparato in uno stato puro  $\sigma$ . Se non valesse l'ultimo assioma lo stato

$\rho \otimes \sigma \in \mathcal{S}(AB)$  potrebbe essere in generale uno stato genuinamente misto e questo corrisponde a una perdita di informazione su un sistema composto avendo massima conoscenza sui singoli sottosistemi. Naturalmente ciò è falso sia in Meccanica Classica che in Meccanica Quantistica.

È pertanto ragionevole assumere l'atomicità della composizione come assioma per il nostro schema.

## 2.4 Il principio di purificazione

Osserviamo ora che tutti i cinque assiomi enunciati sono soddisfatti anche da teorie classiche della probabilità. Inoltre non è ancora possibile derivare alcune peculiarità della Meccanica Quantistica, come l'esistenza di stati entangled. Tuttavia, poichè è possibile trovare queste caratteristiche all'interno di teorie "giocattolo" (anche non causali [1]), è necessario trovare un postulato in grado di distinguere la Meccanica Quantistica non solo dalle teorie classiche, ma anche da tutte le possibili teorie "giocattolo" incluse nello schema generale.

Ci proponiamo dunque di discutere un ultimo principio in grado di caratterizzare i fenomeni quantistici, la purificazione, il quale consente di introdurre nello schema tutte le caratteristiche peculiari della Teoria Quantistica ancora non evidenti.

Consideriamo dunque uno stato puro  $\Psi \in \mathcal{S}(AB)$ . Diremo che  $\Psi$  è una *purificazione* di  $\rho \in \mathcal{S}(A)$  se vale

$$|\rho\rangle_A = (e|_B|\Psi)_{AB}. \quad (2.16)$$

In questa situazione diremo che il sistema  $B$  è un sistema *purificante* per  $\rho$ . Informalmente ciò significa che avere uno stato genuinamente misto di un sistema  $A$ , ossia uno stato del quale non abbiamo la massima conoscenza, coincide col fatto che  $A$  è parte di un macrosistema di cui invece abbiamo a disposizione la massima informazione (ossia uno stato puro). Evidenziamo subito che la controintuitività di tale assunzione corrisponde, euristicamente, alla peculiarità ricercata della Meccanica Quantistica; siamo infatti davanti a un principio che non trova alcuna giustificazione intuitiva, al contrario degli altri assiomi già enunciati.

Vedremo quindi in che modo emergono gli stati misti in una descrizione fondamentale della teoria grazie al principio di purificazione: tramite una procedura di purificazione uno stato misto è ottenuto considerando solo un sottosistema (ad esempio  $A$ ) di un sistema globale  $AB$  [4].

Successivamente faremo ulteriori considerazioni sul principio di purificazione;

per il momento preferiamo concentrarci su alcune implicazioni che tale postulato comporta sugli stati di una teoria probabilistica. Anticipiamo inoltre che gli altri assiomi non saranno fondamentali per le successive considerazioni, rimarcando quindi l'importanza della purificazione per la descrizione dei fenomeni quantistici.

Formuliamo dunque l'ultimo assioma come segue:

**Assioma 6.** (*Purificazione*) *Ogni stato ammette una purificazione.*

Notiamo immediatamente che la purificazione di uno stato è univocamente determinata a meno di trasformazioni reversibili sul sistema purificante. Ciò significa che se due stati  $\Psi, \Psi' \in \mathcal{S}(AB)$  sono entrambi purificazioni di uno stato  $\rho \in \mathcal{S}(A)$ , allora esiste una trasformazione reversibile  $\mathcal{U} \in \mathcal{T}(B)$  tale che

$$|\Psi'\rangle_{AB} = (\mathbb{1} \otimes \mathcal{U})|\Psi\rangle_{AB}. \quad (2.17)$$

Osserviamo inoltre che, data una purificazione  $\Psi \in \mathcal{S}(AB)$  di  $\rho \in \mathcal{S}(A)$ , è possibile definire uno stato  $\tilde{\rho} \in \mathcal{S}(B)$  tale che  $\Psi$  sia purificazione anche di  $\tilde{\rho}$ . Chiameremo tale stato il *complementare* di  $\rho$ .

La richiesta di esistenza di una purificazione è allora equivalente a richiedere l'unicità, a meno di trasformazioni reversibili, dello stato complementare [1].

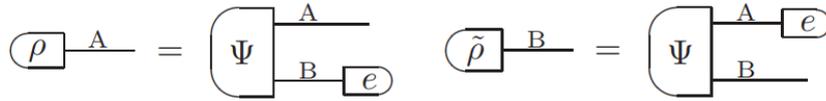


Figura 2.3: Rappresentazione grafica di una purificazione e di uno stato complementare. Figure tratte da [1].

Possiamo ora introdurre il concetto di stato entangled. Se infatti consideriamo uno stato  $\rho \in \mathcal{S}(A)$  genuinamente misto, la purificazione  $\Psi \in \mathcal{S}(AB)$  deve necessariamente essere uno stato entangled. Se  $\Psi$  fosse separabile, infatti, potrebbe essere scritto come prodotto di stati puri  $|\Psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A |\psi\rangle_B$ . Lo stato marginale  $|\rho\rangle_A := (e|_B |\Psi\rangle_{AB} = |\phi\rangle_A$  sarebbe dunque uno stato puro. Tuttavia ciò è in contraddizione con l'ipotesi su  $\rho$ , pertanto deve necessariamente accadere che  $\Psi$  sia uno stato entangled.

Si può anche mostrare il viceversa, osservando che lo stato marginale di uno stato puro entangled è uno stato misto [4].

A completamento di questa caratterizzazione sugli stati marginali di uno stato entangled osserviamo ora che, dato uno stato puro  $\rho \in \mathcal{S}(A)$ , allora la sua estensione a un macrosistema AB sarà uno stato separabile, ossia

$$|\Psi\rangle_{AB} = |\rho\rangle_A \otimes |\sigma\rangle_B, \quad \Psi \in \mathcal{S}(AB), \sigma \in \mathcal{S}(B),$$

avendo definito in questo caso  $|\rho\rangle_A = (e|_B|\Psi\rangle_{AB}$  (ricordiamo che si può definire uno stato marginale in modo univoco solo se la teoria è causale).

Concentriamoci a questo punto su un altro vincolo tipico della Teoria dell'Informazione: ciò di cui ora vogliamo discutere è della possibilità di ottenere informazioni sul sistema fisico solo nel caso in cui quest'ultimo sia *disturbato*.

Consideriamo due trasformazioni  $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{T}(A, B)$ . Diremo che  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  sono *uguali a meno dell'input*  $\rho$  se vale, per ogni stato  $\sigma$  contenuto in una raffinazione di  $\rho$ , la seguente uguaglianza:

$$\mathcal{C}|\sigma\rangle_A = \mathcal{C}'|\sigma\rangle_A \tag{2.18}$$

in tal caso useremo la notazione  $\mathcal{C} =_\rho \mathcal{C}'$ .

Ciò che si può dimostrare [1], e che citiamo in quanto utile per discutere del teorema in esame, è che, se consideriamo  $\Psi \in \mathcal{S}(AC)$  una purificazione di  $\rho \in \mathcal{S}(A)$  e due trasformazioni  $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \in \mathcal{T}(A, B)$ , vale la seguente caratterizzazione:

$$(\mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_C)|\Psi\rangle_{AC} = (\mathcal{C}' \otimes \mathbb{1}_C)|\Psi\rangle_{AC} \iff \mathcal{C} =_\rho \mathcal{C}'. \tag{2.19}$$

Consideriamo allora un qualsiasi test  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X} \in \mathcal{T}(A)$ ; diremo che tale test *non influenza* il sistema a meno dell'input  $\rho \in \mathcal{S}(A)$ , se, dato un qualunque stato  $\sigma$  contenuto in una raffinazione di  $\rho$ , vale

$$\sum_{i \in X} \mathcal{C}_i|\sigma\rangle_A = |\sigma\rangle_A \quad \left( \iff \sum_{i \in X} \mathcal{C}_i =_\rho \mathbb{1}_A \right). \tag{2.20}$$

Vogliamo dunque mostrare che, tramite la purificazione, è possibile dare una caratterizzazione ai test non rumorosi, nel senso che ogni evento deve necessariamente essere proporzionale all'identità per non disturbare il sistema. Sia dunque  $\Psi \in \mathcal{S}(AB)$  una purificazione di  $\rho \in \mathcal{S}(A)$ . Consideriamo il test non rumoroso  $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in X}$ . La condizione  $\sum_{i \in X} \mathcal{C}_i =_\rho \mathbb{1}_C$  vale, per il teorema precedente, se e soltanto se

$$\sum_{i \in X} (\mathcal{C}_i \otimes \mathbb{1}_C)|\Psi\rangle_{AB} = |\Psi\rangle_{AB}.$$

Essendo  $\Psi$  uno stato puro, abbiamo che

$$\mathcal{C}_i|\Psi\rangle_{AB} = p_i|\Psi\rangle_{AB} = p_i\mathbb{1}_A|\psi\rangle_{AB},$$

ma l'identità è ovviamente un elemento del gruppo delle trasformazioni reversibili e, invocando nuovamente il risultato citato precedente, ciò è equivalente a dire che  $\mathcal{C}_i =_{\rho} p_i\mathbb{1}_A$ .

Un test non interferisce dunque con il sistema solo nel caso in cui sia proporzionale all'identità, poichè in questo caso il test agisce semplicemente con un fattore moltiplicativo sul sistema  $A$ . Informalmente ciò significa che non è possibile l'estrazione di informazioni a meno che non si "lasci una traccia dietro di sé".

L'implicazione più importante di tale risultato, i cui dettagli si possono trovare in [1], è che la decomposizione convessa in stati puri non è univoca, un risultato che ci aspettiamo in una teoria che generalizza la Meccanica Quantistica.

Possiamo ora fare delle brevi considerazioni di carattere generale sulle teorie fondate sul postulato di purificazione. Per farlo è tuttavia necessario reintrodurre in via preliminare la nozione di completa positività di una trasformazione.

Diremo innanzitutto che una trasformazione  $\mathcal{C} \in \mathcal{T}(A, B)$  è *positiva* se  $\forall \rho \in \mathcal{S}(A)$ ,  $\mathcal{C}|\rho\rangle_A$  è un multiplo di uno stato di  $\mathcal{S}(B)$ .

Analogamente a quanto fatto nel primo capitolo, fissato un qualunque sistema ancillare  $S$ , chiameremo allora *completamente positive* le trasformazioni  $\mathcal{C} \in \mathcal{T}(A, B)$  tali che  $\mathcal{C} \otimes \mathbb{1}_S$  è una trasformazione positiva per ogni scelta del sistema  $S$ .

Date ora teorie  $\Theta$  e  $\Theta'$ , diremo che  $\Theta'$  è *più grande* di  $\Theta$  se per ogni coppia di sistemi  $A$  e  $B$  si ha che  $\mathcal{T}(A, B) \subseteq \mathcal{T}'(A, B)$ . Diremo inoltre che una teoria  $\Theta = (\Lambda, \Omega)$  è *convessa* se per ogni sistema  $A$  di  $\Lambda$  l'insieme degli stati  $\mathcal{S}(A)$  è un insieme convesso.

Consideriamo dunque due teorie convesse  $\Theta, \Theta'$  per cui valga l'assioma di purificazione. Si dimostra allora che, se  $\Theta$  e  $\Theta'$  sono dotate dello stesso insieme di stati normalizzati, ossia sono tali che  $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}'(A) \forall A$ , e se  $\Theta'$  è più grande di  $\Theta$ , allora  $\Theta' = \Theta$  [1].

Quest'ultimo risultato ci consente di mostrare facilmente un'interessante caratteristica delle teorie dotate di purificazione. È infatti ora facile illustrare che due teorie dotate dello stesso set di stati normalizzati sono equivalenti. Infatti, date due teorie  $\Theta, \Theta'$  con lo stesso insieme di stati normalizzati, è possibile considerare la teoria  $\Theta \cup \Theta'$  generata prendendo tutte le possibili composizioni sequenziali e parallele tali che le trasformazioni siano tutte

completamente positive. Ovviamente  $\Theta, \Theta' \subset \Theta \cup \Theta'$ , inoltre tutte possiedono lo stesso insieme di stati normalizzati. Grazie al risultato precedente segue immediatamente che

$$\Theta = \Theta' = \Theta \cup \Theta'.$$

Tale risultato ci consente di fare due osservazioni.

Prima di tutto abbiamo esposto in che modo tutte le teorie dotate degli stessi stati sono equivalenti fra loro (in accordo con le considerazioni in [7] relativamente alla Meccanica Quantistica).

In secondo luogo questo consente di semplificare sostanzialmente la derivazione della Meccanica Quantistica. Basta infatti solamente caratterizzare gli stati tramite un insieme di operatori di classe traccia positivi e normalizzati. Avendo dunque le due teorie lo stesso insieme di stati normalizzati, questa saranno automaticamente equivalenti, e in un colpo solo la dinamica e il procedimento di misurazione della Teoria Quantistica saranno validi anche per la nostra teoria generalizzata.

Concludiamo questo capitolo con un'ultima osservazione sul principio di purificazione. È infatti interessante notare come attraverso la purificazione di un sistema sia possibile *simulare* trasformazioni irreversibili in modo reversibile.

La simulazione di questi processi è analoga alla purificazione degli stati misti. Si può infatti affermare che l'irreversibilità di un processo è dovuta a una descrizione parziale della trasformazione di uno stato. In generale infatti andrebbe considerato un sistema globale composto dal sistema fisico e dall'ambiente che evolve in modo reversibile. Non tenere conto dell'interazione con l'ambiente nella descrizione del processo produce dunque una perdita di informazione che porta naturalmente all'impossibilità di invertire il processo.

È evidente dunque che si può simulare un processo altrimenti irreversibile considerando una descrizione globale della dinamica in modo da includere l'ambiente.

# Conclusioni

In questo lavoro abbiamo illustrato un modo possibile di introdurre un insieme di assiomi per la Meccanica Quantistica a partire da nozioni di Teoria dell'Informazione. Nonostante il mirabile lavoro compiuto da Von Neumann, infatti, le ultime scoperte nel campo della Meccanica Quantistica hanno spinto verso una “nuova” fondazione, in modo da includere una classe più ampia di misure effettuabili su un sistema fisico. I postulati qui proposti risultano inoltre più intuitivi fisicamente per una descrizione della Teoria Quantistica.

Per poter esporre tali assiomi abbiamo in particolare prima trattato i concetti fondamentali della Meccanica Quantistica (stati, osservabili e strumenti quantistici), grazie ai quali è stato possibile evidenziare gli step necessari per schematizzare un esperimento fisico. Su tale schema è stata quindi presentata l'assiomatizzazione proposta nell'influente lavoro [2].

È stato infatti possibile mostrare come si può costruire uno schema generale per poter enunciare in via del tutto generale gli assiomi formulati da D'Ariano et al. (2011).

Abbiamo inoltre osservato che i primi cinque postulati sono soddisfatti sia dalla Meccanica Classica che dalla Meccanica Quantistica, mentre l'ultimo assioma, il principio di purificazione, è ciò che caratterizza la Teoria Quantistica. In particolare, abbiamo visto come alcune caratteristiche della Meccanica Quantistica, fra le quali ricordiamo l'esistenza degli stati entangled, derivino unicamente dal postulato di purificazione.

È infine emerso da tale assioma che tutte le teorie dotate dello stesso insieme di stati normalizzati sono equivalenti alla Meccanica Quantistica. I sei postulati definiscono quindi una classe di teorie che, con l'ipotesi di equivalenza dell'insieme degli stati normalizzati, sono tutte equivalenti fra loro. Ciò significa che per riottenere la Teoria Quantistica (per sistemi finito-dimensionali) bisogna mostrare che ogni stato normalizzato di un sistema  $A$  può essere rappresentato da un operatore di classe traccia positivo e normalizzato [2].

Avendo in questo lavoro illustrato come alcune delle peculiarità della Meccanica Quantistica discendono direttamente dal postulato di purificazione, mostrare questa corrispondenza significherà aver ricostruito il formalismo

degli spazio di Hilbert a partire da uno schema generale operativo.

# Bibliografia

- [1] Chiribella G., D'Ariano G. M., Perinotti P., Probabilistic Theories with Purification, *Phys. Rev. A* 81, 062348 (2010).
- [2] Chiribella, G., D'Ariano, G. M., Perinotti, P. Informational Derivation of Quantum Theory, *Phys. Rev. A* 2011, 84, 012311.
- [3] Chiribella G., D'Ariano G. M., Perinotti P., Quantum Theory, Namely the Pure and Reversible Theory of Information, *Entropy* 141877, 2012
- [4] Chiribella G., D'Ariano G. M., Perinotti P., Quantum Theory from First Principles, an Informational Approach, Cambridge University Press, Cambridge, 2017
- [5] D'Ariano, G. M. How to derive the Hilbert-space formulation of quantum mechanics from purely operational axioms. In: Bassi, A., Duerr, D., Weber, T., and Zanghi, N. (eds), *Quantum Mechanics*, vol. 844. USA: American Institute of Physics, 2006
- [6] D'Ariano G. M., Probabilistic Theories: What is special about Quantum Mechanics, in *Philosophy of Quantum Information and Entanglement*, Eds. Bokulich A. and Jaeger G., Cambridge University Press, Cambridge UK.
- [7] Duwell A., Re-conceiving Quantum Theories in terms of Information-theoretic Constraints, *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, vol. 38, pages 181-201, 2007
- [8] Ludwig G., *Foundations of quantum mechanics*, vol. I and II, Springer-Verlag, New York, 1983 e 1985.
- [9] Nielsen M. A. e Chuang I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, II edizione

- [10] Shannon C. E., Weaver W., The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, Urbana and Chicago, 1963, 1 edition
- [11] Vacchini B., Advanced Quantum Mechanics,  
[http://www.mi.infn.it/~vacchini/mqa/lecture\\_notes.pdf](http://www.mi.infn.it/~vacchini/mqa/lecture_notes.pdf)
- [12] Wheeler J. A., in W. Zurek (ed.) Complexity, Entropy, and the Physics of Information, Addison-Wesley, Redwood