Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016/2017

Tesi di Laurea Magistrale

Soluzioni esatte di Wormhole in Teorie Estese della Gravitazione

Relatori:
Prof. Salvatore Capozziello

Candidato: Lorenza Mauro
Matricola: N94/275

Prof. Francesco Tafuri

Indice

Introduzione

Nel suo *Annus Mirabilis*, Albert Einstein, con la pubblicazione di quattro articoli [25] [26] [27] [28] sulla rivista scientifica *Annalen der Physik*, diede inizio a quella che sarebbe stata una delle più grandi rivoluzioni della fisica del XX secolo.
Fino ad allora, a prevalere fu il punto di vista di Newton, secondo cui spazio e tempo erano concetti *assoluti* ed indipendenti dalla materia. Nella sua opera più famosa, i *Philosophiae naturalis Principia mathematica* [55], egli infatti sosteneva che "*lo spazio assoluto, per sua propria natura e senza riferimento ad alcunché di esterno, rimane sempre costante ed immobile. Lo spazio relativo è una specie di dimensione mobile o misura di spazio assoluto, che i nostri sensi determinano tramite la sua posizione rispetto ad altri corpi, e che viene comunemente preso per lo spazio assoluto*" e ancora "*il tempo assoluto, vero e matematico, in sé e per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, fluisce equalmente*". Ma, nonostante Newton avesse parlato di uno spazio assoluto, la sua teoria del moto non permetteva in realtà di distinguere un sistema di riferimento in quiete nello spazio assoluto da uno che si fosse trovato in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. Il primo ad essersi reso conto del fatto che il moto uniforme non fosse distinguibile dalla quiete fu Galileo Galilei, come è testimoniato nei suoi *Dialoghi sopra i massimi sistemi del mondo* [38]. Il Principio di Relatività di Galilei, infatti, afferma che le leggi della meccanica hanno sempre la stessa forma nei sistemi di riferimento inerziali, da cui consegue che non è possibile distinguere un sistema di riferimento da un altro in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. L'equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali rispetto ai fenomeni meccanici non sembrava però estendersi, almeno apparentemente, ai fenomeni elettromagnetici. In effetti, la teoria dell'Elettrodinamica, presentata nel 1865 da Maxwell [49], non soddisfaceva il Principio

di Relatività di Galileo. Le equazioni di Maxwell, cioè, non erano invarianti sotto le trasformazioni del gruppo di Galileo, poiché prevedevano che la velocità della luce nel vuoto fosse una costante universale c. Maxwell stesso pensò dunque che le onde elettromagnetiche fossero trasportate da un mezzo, l'*etere luminifero*, per cui le sue equazioni risultavano verificate soltanto in una classe limitata di sistemi inerziali galileani, ovvero in quelli a riposo rispetto all'etere. Ma tutti i tentativi di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere fallirono. In particolare, il famoso esperimento di Michelson e Morley [50] dimostrò, nel 1887, che la velocità della luce è la stessa, entro 5 km/s, sia che essa si muova lungo la direzione del moto orbitale della Terra, sia trasversalmente.
Una soluzione al problema della Relatività in Elettrodinamica e Meccanica fu avanzata da Einstein nel suo articolo del 1905 *"Zur Elektrodynamik bewegter körper"* (*Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*) [25]. Egli intuì che per estendere il principio di Relatività di Galilei ai fenomeni luminosi era necessario abbandonare una o entrambe le ipotesi che stavano alla base della teoria classica newtoniana. Infatti, l'assolutezza del tempo e degli intervalli spaziali portava necessariamente alla conclusione che la velocità della luce non potesse essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Einstein si affidò, così, al principio di *costanza della velocità della luce* e propose di sostituire le trasformazioni di Galileo con un altro gruppo di trasformazioni, le *trasformazioni di Lorentz*. Postulò, dunque, un nuovo Principio di Relatività, il *Principio di Relatività Ristretta*, secondo cui le leggi fisiche devono essere invarianti sotto tali trasformazioni. Da ciò si deduce che spazio e tempo erano considerati non più come assoluti ma come relativi all'osservatore e la loro intima connessione portò Minkowski alla concezione dello *spazio-tempo*, una nuova struttura cinematica e geometrica in cui gli unici invarianti erano la velocità della luce e l'intervallo spazio-temporale, definito come:

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Citando lo stesso Einstein:

> *Questi due postulati sono sufficienti per ottenere una teoria semplice e consistente dell'Elettrodinamica dei corpi in movimento, basata sulla*

> *teoria di Maxwell per corpi stazionari. L'introduzione di un "etere luminifero" si rivelerà superflua in quanto la visione qui sviluppata non richiederà uno "spazio assolutamente stazionario" dotato di proprietà speciali, né assegnerà un vettore velocità in un punto dello spazio vuoto in cui si verificano processi elettromagnetici.*

Osserviamo che il termine *speciale* serve a sottolineare che una legge fisica è valida allo stesso modo in due sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Ciò implica, quindi, che l'equivalenza tra i due sistemi di riferimento non si estende al caso di moto non uniforme.
La teoria della Relatività Ristretta, sebbene avesse risolto le contraddizioni tra l'elettromagnetismo di Maxwell e la Relatività galileana, non risultava però in accordo con la teoria della gravitazione di Newton. La nozione di azione istantanea a distanza, caratteristica principale della teoria newtoniana, risultava infatti incompatibile con una delle conseguenze più importanti della teoria einsteiniana, ovvero l'assenza della simultaneità assoluta nello spazio-tempo. Necessitava dunque formulare una teoria relativistica della gravitazione. Il passo cruciale ci fu nel 1907 quando Einstein introdusse il *Principio di Equivalenza* [29] [30] [10], che può essere formulato come segue:

- il Principio di Equivalenza in forma debole è valido;
- il risultato di un qualsiasi esperimento localmente non-gravitazionale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera;
- il risultato di un qualsiasi esperimento localmente non-gravitazionale è indipendente da dove e quando viene effettuato.

Dal Principio di Equivalenza di Einstein segue che l'interazione gravitazionale dipende dalla curvatura dello spazio-tempo, cioè i postulati di qualsiasi teoria metrica della gravità devono essere soddisfatti:

- lo spazio-tempo è caratterizzato da una metrica $g_{\mu\nu}$;
- le linee di mondo seguite dai corpi di prova sono le geodetiche della metrica;

- nei sistemi localmente in caduta libera, detti sistemi locali di Lorentz, le leggi non gravitazionali della fisica sono quelle della Relatività Ristretta.

Questo Principio determina gli effetti della gravitazione su sistemi fisici arbitrari ma non determina le equazioni di campo per la gravitazione stessa. Soltanto nel 1913, grazie alla collaborazione con il matematico Grossman, Einstein giunse all'idea che il campo gravitazionale dovesse essere identificato con le 10 componenti del tensore metrico della geometria Riemanniana. Nei due anni successivi, presentò alla *Prussian Academy of Science* una serie di articoli [31] [32] in cui scrisse le famose equazioni di campo per il tensore metrico che ricordiamo essere, nel vuoto:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{1}$$

e in presenza di materia:

$$G_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{2}$$

dove $R_{\alpha\beta}$ è il *tensore di Ricci*, $G_{\alpha\beta}$ il *tensore di Einstein* e $T_{\alpha\beta}$ il tensore impulso-energia. Notiamo che tali equazioni sono:

- scritte in forma tensoriale per obbedire al principio di covarianza;
- del secondo ordine;
- tali da fornire la soluzione newtoniana per campi deboli

La costante di accoppiamento χ si determina confrontando la componente tempo-tempo dell'equazione di campo nel limite newtoniano con l'equazione di Poisson, ottenendo $\chi = \frac{8\pi G_N}{c^4}$, dove G_N è la costante gravitazionale di Newton.
La non linearità delle equazioni comporta un'elevata difficoltà nella loro risoluzione. Soluzioni esatte sono state trovate imponendo, infatti, condizioni di simmetria per semplificarne il calcolo. E' il caso, ad esempio, del campo (statico) a simmetria sferica prodotto da un corpo a simmetria sferica in quiete o che si muove di moto radiale (*soluzione di Schwarzschild* [63]):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} - r^2 d\Omega^2 \tag{3}$$

dove $R_S = \frac{2G_N M}{c^2}$ è il *raggio di Schwarzschild* o *raggio gravitazionale* del corpo di massa M che ha generato il campo e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Questa soluzione diventa singolare per $r = R_S$, in quanto $g_{tt} = 0$ e $g_{rr} = -\infty$. Sembrerebbe quindi che $r = R_S$ fornisca il raggio minimo per un corpo di massa M. In realtà, tramite un'opportuna trasformazione di coordinate, si riesce ad estendere la soluzione di Schwarzschild anche per $r < R_S$ e si osserva che la singolarità "reale" della soluzione si ha per $r = 0$. Purtroppo, però, questa regione dello spazio-tempo non può comunicare con quella per cui $r > R_S$: qualsiasi segnale, anche di tipo luminoso, impiegherebbe un tempo infinito per attraversare la sfera di Schwarzschild ($r = R_S$). Per questo motivo, tale regione è chiamata *buco nero*.

La metrica di Schwarzschild fu oggetto di studio da parte del fisico L. Flamm [35], il quale realizzò che le equazioni di Einstein, in realtà, ammettevano anche un'altra soluzione: il *buco bianco*. Le due soluzioni, che descrivono due differenti regioni dello spazio-tempo (piatto), risultavano, secondo Flamm, (matematicamente) connesse da un "condotto" spazio-temporale. Questo concetto fu ripreso, nel 1935, da Einstein e Rosen con lo scopo di trovare un modello geometrico che descrivesse le particelle elementari [34], ovvero la possibilità di una teoria atomica della materia che, escludendo le singolarità dei campi, facesse uso soltanto del tensore $g_{\mu\nu}$ della Relatività Generale e del vettore ϕ_μ della teoria di Maxwell. Partendo dal problema a simmetria sferica, essi giunsero alla conclusione che le soluzioni delle equazioni di campo implicassero una particolare rappresentazione matematica dello spazio fisico, ossia uno spazio costituito da due "fogli" identici, collegati da un "ponte". Einstein e Rosen interpretarono questo ponte come particella elementare. Soltanto successivamente, Wheeler rinominò il ponte di Einstein-Rosen *wormhole* [51]. Dunque i wormhole non sono altro che soluzioni delle equazioni di campo di Einstein.

Tra il 1987 e il 1988, poi, Morris e Thorne indicarono le condizioni affinché un wormhole fosse traversabile [52] [53]. La loro analisi rivelò che un wormhole di questo tipo richiede materia con densità di energia e pressione negative e, per questo motivo, detta *materia esotica*. Questo, però, è vero nell'ambito della Relatività Generale. Studi recenti [46] [18] [37] [3], infatti, hanno mostrato che, se si considerano soluzioni di wormhole in *Teorie Estese della Gravitazione* (TEG), a rendere stabili tali strutture non è la materia esotica, ma particolari geometrie, ottenute, quindi, da termini di ordine superiore nello scalare di curvatura. Esistono diverse soluzioni delle equazioni di campo di tipo wormhole anche in TEG. In questo lavoro di tesi, in particolare, sono state trovate ed analizzate due soluzioni esatte per una teoria $f(R)$ di tipo *power law*, nel caso di simmetria sferica e staticità. Il risvolto estremamente interessante di tutto questo lavoro è, in realtà, il fatto che questi modelli puramente teorici, studiati fino ad ora nel contesto di teorie descriventi la realtà fisica a grandi scale, possono essere applicati anche alle piccole scale. E' possibile, cioè, trovare delle strutture *analoghe* in cui generare cambi di topologia come nello spazio-tempo. E, allora, se è vero, come disse Heisenberg, che strutture analoghe possono essere descritte dalla stessa fisica, si può ancora parlare di wormhole quando si risolvono le equazioni di campo di Einstein, ad esempio, per il *grafene* [64] [21].

Capitolo 1

Il problema delle singolarità in Relatività Generale

Un aspetto peculiare della teoria cosmologica e di alcune soluzioni delle equazioni di campo di Einstein è la presenza di *singolarità* dello spazio tempo, ovvero di punti in cui la metrica ha dei "comportamenti patologici". Dalla Cosmologia, ad esempio, sappiamo che l'Universo, attualmente in espansione, ha avuto origine da uno stato singolare caratterizzato da valori infiniti della densità e della curvatura dello spazio-tempo. Ma valori infiniti di invarianti spazio-temporali sono stati trovati anche nella metrica di Schwarzschild per $r = 0$. Queste ed altre situazioni simili farebbero pensare, quindi, che le singolarità siano quei punti in cui gli invarianti geometrici sono illimitati. In realtà, da uno studio più approfondito [68], è emerso che esistono metriche singolari ma con valori finiti degli scalari costruiti con R. Per cui, matematicamente, una definizione di singolarità in termini del valore assunto dalla curvatura in quel punto è inadeguata.

Ma, allora, che cosa sono le singolarità dello spazio-tempo?

Nella prima parte di questo capitolo, risponderemo a tale domanda fornendo delle definizioni formali di singolarità e spazio-tempo singolare. Nella seconda parte, invece, analizzeremo un'altra caratteristica geometrica tipica di alcune soluzioni delle equazioni di campo di Einstein, ovvero gli *orizzonti degli eventi*. Quest'ultimi ci permetteranno di definire un altro tipo di singolarità, la *singolarità nuda*.

1.1 Le singolarità

In generale, se consideriamo una metrica definita su una varietà immersa in $\mathbb{R}^4$, le singolarità sono punti di $\mathbb{R}^4$ in cui una delle componenti della metrica, $g_{\mu\nu}$ o $g^{\mu\nu}$, non può essere definita in maniera continua. E' il caso, ad esempio, della metrica di Schwarzschild (3) che presenta, come abbiamo già accennato, una singolarità sulla 3-superficie $r = R_S$ e una sulla 2-superficie $r = 0$.
Tuttavia, questa definizione di singolarità non è completa, né del tutto esatta, perché dipende dal particolare sistema di coordinate scelto. Di conseguenza, affermare che la metrica sia singolare, in base a quanto detto, non corrisponde a niente di fisicamente misurabile e dunque significativo.
In un suo articolo del 1918 sulla metrica di De Sitter [33], Einstein ha sottolineato quali debbano essere le condizioni affinché una singolarità sia reale:

1. la metrica non può essere resa regolare tramite un cambiamento di coordinate;

2. la singolarità deve essere *accessibile*, nel senso che deve esistere una curva di tipo tempo che parte da un punto regolare dello spazio-tempo e raggiunge la singolarità in un intervallo finito di tempo proprio.

Capiamo, quindi, che la singolarità $r = R_S$ della metrica di Schwarzschild non è reale perché, tramite una scelta opportuna del sistema di coordinate, è possibile rendere la (3) regolare.
Osserviamo che, per utilizzare il criterio di Einstein, possiamo semplicemente richiedere, relativamente alla condizione 2, che debba esistere una *geodetica* di tipo tempo che raggiunga la singolarità in un intervallo finito di tempo proprio. Tale geodetica avrà un estremo sulla singolarità ma non avrà nessun estremo nella parte regolare dello spazio-tempo. Uno spazio tempo contenente una geodetica di questo tipo è detto *geodeticamente incompleto*[1].
Diamo adesso una serie di definizioni che risulteranno necessarie per la definizione formale di singolarità. Indichiamo con M la varietà dello spazio-tempo, con g la sua metrica (vista come funzione bilineare che, ad ogni coppia di vettori valutati in

[1] Questa proprietà è indipendente dal sistema di coordinate scelto per descrivere la varietà.

uno stesso punto, associa un numero reale) e supponiamo che tutte le curve siano descritte da mappe differenziabili e rettificabili.

Definizione 1.1. Si definisce *lunghezza affinemente parametrizzata* di una curva $\gamma : [0, a) \to M$ rispetto al campo $\mathbf{X} = (X_\mu : \mu = 0, ..., 3)$ in $\gamma(0)$:

$$l_{\mathbf{E}}(\gamma) = \int_0^a \left(\sum_{\mu=0}^{3} g\Big(\dot{\gamma}, X_\mu(s)\Big)^2 \right)^{1/2} ds$$

dove $\dot{\gamma}$ è il vettore tangente $d\gamma/ds$ e $\mathbf{X}(s)$ è definito dal trasporto parallelo lungo la curva con valore iniziale $\mathbf{X}(0)$, ossia:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{X}(s) = 0$$

$$X_\mu(0) = X_\mu$$

abbreviamo questo con *lunghezza di g.a.p.*.

Definizione 1.2. Una curva $\gamma : [0, a) \to M$ è *incompleta* se ha un valore finito della lunghezza di g.a.p. rispetto ad un campo $\mathbf{X}$ in $\gamma(0)$. Se $l_{\mathbf{E}}(\gamma) < \infty$, allora, preso un altro campo $\mathbf{X}'$ in $\gamma(0)$, si ha che $l_{\mathbf{E}'}(\gamma) < \infty$.

Definizione 1.3. Una curva $\gamma : [0, a) \to M$ è detta *inestensibile* se non esiste nessuna curva $\gamma' : [0, b) \to M$, con $b > a$, tale che $\gamma' \mid_{[0,a)} = \gamma$. Ciò equivale a dire che non esiste nessun punto $p \in M$ tale che $\gamma(s) \to p$ per $s \to a$, ovvero γ non ha estremi in M.

Definizione 1.4. Uno spazio-tempo è *incompleto* se contiene una curva incompleta ed inestensibile.

La definizione (1.4) può essere formulata in maniera opportuna a seconda del tipo di curva scelto. Ad esempio, uno spazio-tempo è detto incompleto di tipo tempo se contiene una curva incompleta, inestensibile e di tipo tempo.

Nel 1924 Eddington [24] mostrò che esiste un'isometria tra lo spazio-tempo M, definito dalla regione $r > R_S$ nella metrica di Schwarzschild, e parte di uno spazio-tempo più ampio M'. Quest'isometria mappa curve incomplete di M sulle quali $r \to R_S$ in curve estensibili di M': la singolarità in $r = R_S$ non è più presente. E' possibile quindi dedurre che la singolarità $r = R_S$ è una conseguenza del fatto che la procedura usata per risolvere le equazioni di campo ha prodotto soltanto una parte dello spazio completo. Per questo motivo è anche detta "singolarità di coordinata".

Definizione 1.5. L'estensione di uno spazio-tempo $(M, g_{\mu\nu})$ è un'isometria $\theta : M \to M'$, dove $(M', g'_{\mu\nu})$ è uno spazio-tempo e θ ha valori su un sottoinsieme proprio di M'.

Uno spazio tempo è detto *estensibile* se ha un'estensione.
La relazione tra estensibilità e incompletezza è espressa dalla seguente:

Proposizione 1.1.1. *Se M ha un'estensione $\theta : M \to M'$, allora esiste una geodetica incompleta di tipo tempo γ in M tale che $\theta \circ \gamma$ è estensibile.*

Si può dimostrare che uno spazio-tempo è estensibile fino a quando nessun'altra estensione è possibile. In quest'ultimo caso, allora, lo spazio-tempo è detto *massimale.*
A questo punto, possiamo finalmente dare la seguente:

Definizione 1.6. Uno spazio-tempo è *singolare* se contiene una curva incompleta $\gamma : [0, a) \to M$ tale che non esiste alcuna estensione $\theta : M \to M'$ per cui $\theta \circ \gamma$ è estensibile.

Quindi, dire che uno spazio-tempo contiene una singolarità significa che esiste qualche ostacolo che fa sì che la curva incompleta non possa andare oltre. Ogni spazio-tempo singolare contiene una singolarità e, in uno spazio-tempo massimale, tutte le curve inestensibili e incomplete terminano sulla singolarità.
Geroch, Hawking e Penrose [39] [41] [42] [43] [59] dimostrarono che qualsiasi spazio-tempo deve essere causalmente e geodeticamente incompleto se soddisfa le seguenti condizioni:

- le geodetiche nulle di una 2-superficie chiusa sono tutte convergenti;
- M contiene curve aperte di tipo tempo (*condizione di causalità*);
- per ogni vettore K che non sia di tipo spazio, si ha: $R_{\mu\nu}K^\mu K^\nu > 0$;
- ogni geodetica che non sia di tipo spazio e che abbia K come vettore tangente contiene un punto in cui: $K_{[\alpha}R_{\beta]\mu\nu[\lambda}K_{\sigma]}K^\mu K^\nu \neq 0$

1.2 Gli orizzonti degli eventi

Gli orizzonti sono costrutti teorici che esibiscono due caratteristiche principali:

1. gli orizzonti sono membrane a "senso unico", ossia permettono il passaggio di luce e materia in una direzione soltanto;

2. il tempo scorre fino a fermarsi in corrispondenza dell'orizzonte.

In genere, essi sono associati a campi gravitazionali forti ma, invero, è possibile avere campi gravitazionali forti senza la formazione di orizzonti. E, ancora, è possibile anche ottenere particolari tipi di orizzonti senza che sia presente alcun campo gravitazionale.
Esistono almeno cinque tipi di orizzonti interessanti in Relatività Generale, che riportiamo di seguito.

L'orizzonte degli eventi (orizzonte assoluto)

L'orizzonte degli eventi, anche noto come orizzonte assoluto, si può definire soltanto per spazi-tempi contenenti una o più regioni asintoticamente piatte.

Definizione 1.7. Per ogni regione asintoticamente piatta, il corrispondente orizzonte degli eventi futuro/passato è definito come il bordo della regione da cui curve causali (di tipo tempo o nullo) possono raggiungere l'infinito futuro/passato.

L'orizzonte degli eventi *futuro* è quindi il bordo della regione dalla quale geodetiche di tipo nullo (fononi) non possono fuggire. Invece, l'orizzonte degli eventi *passato* è il bordo della regione che non può essere raggiunta da fononi in arrivo.
In altre parole, l'orizzonte degli eventi è una superficie di tipo nullo, i cui generatori sono geodetiche di tipo nullo.

L'orizzonte apparente

Per definire l'orizzonte apparente, iniziamo col considerare una superficie bidimensionale chiusa e di tipo spazio. In ogni punto di questa superficie ci sono due geodetiche nulle ortogonali alla stessa. Queste curve possono essere utilizzate per definire fronti d'onda che si propagano verso l'interno e verso l'esterno. Se l'area di entrambi i fronti d'onda decresce come funzione del tempo, allora la superficie bidimensionale di partenza è una superficie "intrappolata". L'orizzonte apparente è definito allora come il bordo della regione contenente la superficie intrappolata. Qualsiasi cosa si trovi oltre l'orizzonte apparente è forzata, almeno inizialmente, a viaggiare verso l'interno dell'orizzonte. Tuttavia, questo non implica che ciò che si trova all'interno dell'orizzonte apparente resti intrappolato per sempre.

L'orizzonte di Cauchy

Consideriamo un'ipersuperficie di tipo spazio Σ, con condizioni iniziali[2] specificate sulla stessa. E' possibile risolvere appropriate equazioni del moto che diano informazioni relativamente ad una regione, $D(\Sigma)$, nota come dominio di dipendenza di Σ. Si definisce orizzonte di Cauchy dell'ipersuperficie Σ il bordo di $D(\Sigma)$.

Definizione 1.8. Per una superficie di tipo spazio Σ, il corrispondente orizzonte di Cauchy futuro è definito come il bordo della regione da cui tutte le curve causali (di tipo nullo o di tipo tempo) dirette verso il passato intersecano Σ.

L'orizzonte di particelle

L'orizzonte di particelle è un concetto dipendente dall'osservatore. Tale orizzonte si ha ogni volta che un osservatore non riesce a vedere l'intero spazio-tempo o ad esserne influenzato.

Definizione 1.9. Per una curva causale γ, il corrispondente orizzonte di particelle futuro è definito come il bordo della regione da cui curve causali (di tipo tempo o di tipo nullo) riescono a raggiungere qualche punto di γ.

L'orizzonte presunto

Per definire l'orizzonte presunto, ricordiamo la *decomposizione di Arnowitt-Deser-Misner* (ADM)[3] che permette di utilizzare la coordinata temporale per decomporre

[2] Queste condizioni iniziali possono riguardare velocità e posizione di particelle, configurazioni di campo o anche la geometria.

[3] Il formalismo ADM è una formulazione hamiltoniana della Relatività Generale. Gioca un ruolo importante nella Gravità Quantistica.

la metrica Lorentziana (3+1)-dimensionale, ottenendo così uno spazio-tempo foliato in una famiglia di superfici di tipo spazio. La decomposizione ADM dunque porta a:

$$g_{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \begin{bmatrix} -(N^2 - g^{ij}\beta_i\beta_j) & \vdots & \beta_j \\ .... & . & .... \\ \beta_i & \vdots & g_{ij} \end{bmatrix}$$

dove $N(t,\vec{x})$ è la *lapse function* e $\vec{\beta}(t,\mathbf{x})$ è la *shape function.* La metrica g_{ij} descrive la geometria dello spazio mentre N e β ci dicono come debbano assemblarsi le sezioni spaziali per formare lo spazio-tempo.

In ogni regione asintoticamente piatta, $N \to 1$, $\beta \to 0$ e $g_{ij} \to \delta_{ij}$ quando si approccia l'infinito spaziale. In corrispondenza ad ogni regione asintoticamente piatta, è possibile definire un orizzonte presunto semplicemente con l'annullamento della funzione N. In altre parole, quando $N = 0$ il tempo ha rallentato fino a fermarsi.

Abbiamo elencato le tipologie più note di orizzonti dello spazio-tempo. Possiamo, quindi, dare la definizione di un altro tipo di singolarità: la *singolarità nuda.*

Definizione 1.10. Una singolarità di curvatura non circondata da un orizzonte degli eventi è detta singolarità nuda.

Capitolo 2

Dalla soluzione di Schwarzschild ai wormhole

Il *buco nero* è, per definizione, una regione dello spazio-tempo in cui il campo gravitazionale è così forte da precludere anche alla luce di scappare verso l'infinito. Esso si forma quando un corpo di massa M si contrae fino ad una dimensione minore del raggio di Schwarzschild, $R_S = 2GM/c^2$. La velocità richiesta per sfuggire al buco nero e andare verso l'infinito (*velocità di fuga*) è pari alla velocità della luce. E' facile dedurre, quindi, che né particelle, né segnali possono fuoriuscire da un buco nero, essendo quella della luce una velocità limite. A sua volta, questa caratteristica, unitamente al fatto che oggetti fisici e radiazione possono però cadere in un buco nero, implica che la superficie che lo circonda, ovvero l'orizzonte degli eventi, sia di tipo nullo. La nascita di un buco nero significa, dunque, la formazione di una struttura causale non banale nello spazio-tempo.

Il termine buco nero fu coniato per la prima volta da Wheeler nel 1957 [51], sebbene gli studi teorici di tali oggetti abbiano una storia più lunga. La possibilità della loro esistenza fu discussa da Michell e Laplace, nell'ambito della teoria newtoniana, già alla fine del XVIII secolo [4] [44] [56]. In Relatività Generale, invece, il problema nacque circa un anno dopo la pubblicazione della teoria di Einstein, ossia nel 1916, quando Schwarzschild giunse alla prima soluzione esatta delle equazioni di campo nel vuoto [63]. Trascorsero, però, diversi anni prima di arrivare ad una profonda conoscenza della struttura dello spazio-tempo in campi gravitazionali forti come risultato dell'analisi della soluzione di Schwarzschild. Questa lunga pausa fu influenzata dalla convinzione che in natura non potesse esistere un corpo le cui dimensioni fossero comparabili al proprio raggio gravitazionale. Successivi studi effettuati su sistemi gravitazionali compatti, a partire dal lavoro sulle nane bianche di Chandrasekhar [22], mostrarono, invece, la possibile formazione di stelle di neutroni, con raggi pari soltanto a poche volte quello gravitazionale. Il collasso gravitazionale di una stella massiva che produce un buco nero fu descritto per la prima volta da Oppenheimer e Snyder nel 1939 [58]. Dopo la scoperta delle pulsar (stelle di neutroni) verso la fine degli anni '60, gli astrofisici iniziarono ad esaminare quali potessero essere i modi per riuscire ad osservare i buchi neri. L'analisi dell'aumento di materia su buchi neri isolati e su buchi neri in sistemi binari portò all'idea che tali buchi neri potessero essere potenti sorgenti di raggi X. I progressi nel campo dell'astronomia a raggi X e gli studi effettuati utilizzando satelliti a raggi X negli anni '70 portarono alla scoperta di numerose sorgenti di raggi X. L'ipotesi proposta fu che alcune di queste sorgenti fossero buchi neri in sistemi stellari binari. Più di 25 anni dopo, tale ipotesi fu confermata. Attualmente, un altro aspetto della fisica dei buchi neri è diventato molto importante per le applicazioni astrofisiche. La collisione di un buco nero con una stella di neutroni e la coalescenza di una coppia di buchi neri in un sistema binario sono sorgenti molto potenti di radiazione gravitazionale che può essere abbastanza forte da raggiungere la Terra ed essere rivelata da interferometri per onde gravitazionali (LIGO, LISA, VIRGO e altri). Infatti, la prima osservazione di onde gravitazionali, prodotte dalla fusione di due buchi neri, è avvenuta il 14 Settembre del 2015 grazie agli esperimenti LIGO e VIRGO.

In questo capitolo analizzeremo, in particolare, il buco nero di Schwarzschild per arrivare, così, alla descrizione del primo importante cunicolo spazio-temporale, il ponte di Einstein Rosen.

2.1 Il buco nero di Schwarzschild

Nel capitolo precedente abbiamo visto che, ogni volta che le componenti della metrica presentano dei problemi in corrispondenza a determinati valori delle coordinate,

le possibili cause sono due: (1) la geometria dello spazio tempo è singolare; o (2) la geometria è non singolare ma il sistema di coordinate scelto non copre l'intero spazio-tempo. In generale, non è facile stabilire in quale situazione ci si trovi. Normalmente, la possibilità (1) la si verifica calcolando uno scalare di curvatura, come $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$, e mostrando che esso diverge nella singolarità[1]. Invece, la possibilità (2) deve essere dimostrata mostrando esplicitamente un'estensione della regione non singolare della metrica originale, vale a dire uno spazio tempo non singolare $(M', g'_{\mu\nu})$ che include lo spazio tempo originale $(M, g_{\mu\nu})$ come sottoinsieme proprio. Questo può essere fatto trovando una trasformazione di coordinate che elimina le singolarità delle componenti della metrica di partenza.
In particolare, nel paragrafo (1.1), abbiamo visto che la singolarità $r = R_S$ della metrica di Schwarzschild è una singolarità di coordinata e che un'estensione geodeticamente completa della metrica è possibile (Kruskal, 1960).
Analizziamo dunque l'*estensione di Kruskal* [45].
La metrica di Schwarzschild è, come ben sappiamo, quadridimensionale ma, a causa della simmetria sferica, soltanto la parte bidimensionale $r - t$ della metrica è importante per l'analisi della natura della singolarità in $r = R_S$. Per cui studieremo la metrica bidimensionale:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 \tag{2.1}$$

dove abbiamo posto $G = c = 1$.
In spazi bidimensionali esiste un metodo sicuro per analizzare le singolarità di coordinata. In due dimensioni, infatti, le geodetiche di tipo nullo si dividono (almeno localmente) in due classi - entranti e uscenti - e, all'interno di ogni classe, due geodetiche nulle distinte non possono incrociarsi poiché le loro tangenti dovrebbero coincidere nel punto d'intersezione, implicando così che le geodetiche coincidano ovunque. Ciò suggerisce, quindi, l'introduzione di coordinate di tipo nullo, grazie alle quali le uniche singolarità di coordinata che possono presentarsi sono quelle dovute ad una cattiva parametrizzazione delle geodetiche. Tali singolarità possono essere allora studiate e corrette confrontando la parametrizzazione di coordinata con una parametrizzazione affine. Le geodetiche nulle dello spazio-tempo di Schwarzschild

[1]Tuttavia esistono anche singolarità reali in cui gli scalari di curvatura non divergono.

si determinano facilmente a partire dalla condizione (*null condition*):

$$0 = g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)\dot{t}^2 - \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)^{-1}\dot{r}^2 \tag{2.2}$$

dove k^μ è il vettore tangente alla geodetica e il punto indica la derivata rispetto al parametro affine. La (2.2) implica che:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r}{r-2M}\right)^2$$

Allora, le geodetiche nulle della metrica di Schwarzschild che si propagano lungo la direzione radiale soddisfano la seguente:

$$t = \pm r_* + const \tag{2.3}$$

dove il segno + si riferisce alle geodetiche uscenti, il segno − a quelle entranti.
La *coordinata radiale di Regge-Wheeler* r_* è definita da:

$$r_* = r + 2Mln(r/2M - 1)$$

per cui $dr_*/dr = (1 - 2M/r)^{-1}$.
Definiamo ora le coordinate nulle u e v come:

$$\begin{aligned} u &= t - r_* \\ v &= t + r_* \end{aligned} \tag{2.4}$$

In queste coordinate[2], la metrica (2.1) diventa:

$$ds^2 = \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dudv \tag{2.5}$$

dove r, stavolta, è una funzione di u e v, essendo data implicitamente da:

$$r + 2Mln\Big(\frac{r}{2M} - 1\Big) = r_* = \frac{v-u}{2} \tag{2.6}$$

Usando la (2.6), possiamo riscrivere la (2.5) come:

$$ds^2 = \frac{2Me^{-r/2M}}{r}e^{(v-u)/4M}dudv \tag{2.7}$$

In questo modo abbiamo fattorizzato la metrica nel prodotto di un termine, $e^{-r/2M}/r$, che è non singolare per $r \to 2M$ (equivalentemente: $u \to \infty$ o $v \to -\infty$) con un

[2]Le coordinate ibride (u, r) e (v, r) sono conosciute come *coordinate di Eddington-Finkelstein.*

altro dipendente soltanto da u e v.

Tuttavia, la trasformazione di coordinate (2.4) non è sufficiente per raggiungere il nostro scopo, ossia analizzare la singolarità presente in $r = 2M$ ed estendere lo spazio-tempo di partenza. Infatti, le coordinate u e v, il cui range è $(-\infty, \infty)$, corrispondono ancora alla regione $r > 2M$. Andiamo allora a definire delle nuove coordinate, $U = U(u)$ e $V = V(v)$:

$$\begin{aligned} U &= -e^{-u/4M} \\ V &= e^{v/4M} \end{aligned} \tag{2.8}$$

in termini delle quali la metrica diventa:

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} dUdV \tag{2.9}$$

La singolarità $r = 2M$ ($U = 0$ o $V = 0$) non c'è più e possiamo quindi estendere la soluzione di Schwarzschild, richiedendo soltanto che U e V assumano tutti i valori compatibili con $r > 0$. La singolarità presente in $r = 0$, invece, è una singolarità reale e dunque non può essere eliminata con un'ulteriore trasformazione di coordinate.

Effettuando la trasformazione finale:

$$\begin{aligned} T &= (U + V)/2 \\ X &= (V - U)/2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

la metrica di Schwarzschild assume la forma ottenuta da Kruskal:

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r}(-dT^2 + dX^2) - r^2 d\Omega^2 \tag{2.11}$$

La relazione tra le vecchie coordinate (t, r) e le nuove coordinate (T, X) è data da:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = X^2 - T^2$$

$$\frac{t}{2M} = ln\left(\frac{T + X}{X - T}\right) = 2 \tanh^{-1}(T/X)$$

Per cui, nella (2.11), r è una funzione di X e T. I valori assunti dalle coordinate X e T sono quelli compatibili con la condizione $r > 0$, che dà:

$$X^2 - T^2 > -1$$

Un diagramma dello spazio-tempo per l'estensione di Kruskal è mostrato nella seguente Fig.:

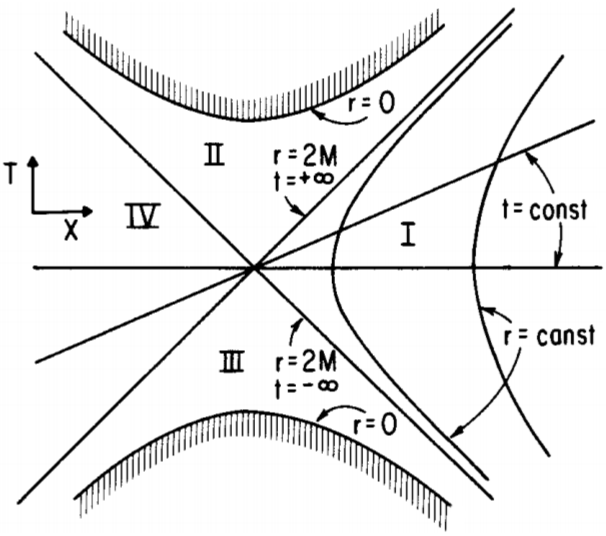

Figura 2.1: Estensione di Kruskal dello spazio-tempo di Schwarzschild.

La struttura causale dello spazio-tempo esteso di Schwarzschild si vede chiaramente nel diagramma dato che, per costruzione, le geodetiche nulle che si propagano in direzione radiale sono rette inclinate a 45° nelle coordinate di Kruskal. Osserviamo che, essendo lo spazio tempo di Schwarzschild quadridimensionale, ogni punto della Fig.(2.1) rappresenta una sfera bidimensionale di raggio r. La singolarità reale $r = 0$ nello spazio esteso è individuata dalle due iperboli $X = \pm(T^2 - 1)^{1/2}$.

La regione I corrisponde a quella dello spazio-tempo originale $r > 2M$ e rappresenta quindi il campo gravitazionale presente all'esterno di un corpo a simmetria sferica. Gli osservatori stazionari della metrica di Schwarzschild si trovano in questa regione e corrispondono alle iperboli con r costante. Un osservatore in caduta nella regione I lungo la direzione radiale attraverserà la retta $X = T$ ed entrerà nella regione II. Una volta entrato nella regione II, però, l'osservatore non potrà più uscirne. Questo perché, entro un intervallo finito di tempo proprio, esso cadrà inevitabilmente sulla singolarità posta a $X = (T^2 - 1)^{1/2}$. Allo stesso modo, qualsiasi segnale luminoso l'osservatore mandi dalla regione II, rimarrà in tale regione e finirà sulla singolarità. Per questo motivo, la regione II è anche detta *buco nero*. La regione

III, invece, ha proprietà opposte alla regione II ed è quindi nota come *buco bianco*. Qualsiasi segnale presente nella regione III deve necessariamente aver avuto origine sulla singolarità spazio-temporale $X = -(T^2 - 1)^{1/2}$ e, entro un intervallo finito di tempo proprio, abbandonerà la regione stessa. Infine, la regione IV ha proprietà identiche alla regione I: rappresenta un'altra regione asintoticamente piatta dello spazio-tempo. Notiamo, però, che un osservatore posto nella regione I non può comunicare con un osservatore posto nella regione IV: un segnale luminoso inviato dalla regione I verso la regione IV andrà a finire nel buco nero e, di conseguenza, sulla singolarità.

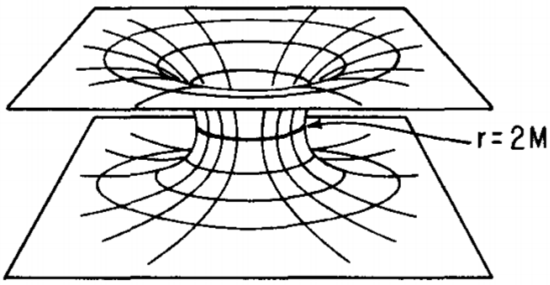

Figura 2.2: La geometria spaziale dell'ipersuperficie $t = 0$ dello spazio-tempo di Schwarzschild mostra come apparirebbe se fosse immersa in uno spazio piatto. Una dimensione è soppressa, ossia la topologia dell'ipersuperficie è $\mathbb{R} \times S^2$ e non $\mathbb{R} \times S^1$. Di conseguenza, ogni cerchio rappresenta una 2-sfera. La porzione di superficie posta al di sopra di $r = 2M$ corrisponde alla regione I della Fig.(2.1); analogamente, la porzione di superficie posta al di sotto di $r = 2M$ corrisponde alla regione IV.

2.2 Il ponte di Einstein-Rosen

Uno degli aspetti più interessanti della teoria della Relatività Generale è la possibile esistenza di spazi-tempi con strutture topologiche non banali.
Da un punto di vista qualitativo, è possibile definire il wormhole come una "scorciatoia", un collegamento, tra regioni diverse dello spazio-tempo. In questo senso, se ne possono distinguere, in generale, due tipi:

1. wormhole *inter-universe* che connettono due universi differenti;

2. wormhole *intra-universe* che connettono regioni diverse di uno stesso universo.

La differenza tra queste due classi di wormhole nasce soltanto a livello globale (geometria e topologia globale): un osservatore che si limita ad effettuare misure locali, nelle vicinanze del wormhole, non è in grado di dire se stia viaggiando verso un altro universo o verso una regione diversa dell'universo in cui si trova. Questa è una banale conseguenza del fatto che i wormhole sono soluzioni delle equazioni di campo di Einstein che non pongono vincoli sulla topologia delle soluzioni.
Un'altra distinzione viene fatta in base alla varietà nella quale è immerso il wormhole. Si parla, infatti, di *wormhole Lorentziano* se la varietà è Lorentziana (pseudo-Riemanniana) oppure di *wormhole Euclideo* se la varietà è Riemanniana (con metrica Euclidea).
Una definizione più rigorosa di wormhole, invece, può essere data in termini di topologia e geometria.
Matt Visser [66] definisce topologicamente il wormhole (in particolare di tipo intra-universe) nel seguente modo:

> Se uno spazio-tempo di Minkowski contiene una regione compatta Ω e se la topologia di Ω è della forma $\Omega \sim R \times \Sigma$, dove Σ è una varietà tridimensionale della topologia non banale, i cui bordi hanno topologia della forma $\partial\Sigma \sim S2$, e se, inoltre, le ipersuperfici Σ sono tutte *space-like*, allora la regione Ω contiene un wormhole (quasipermanente) di tipo intra-universe.

D'altra parte, da un punto di vista geometrico, il wormhole può essere descritto come una regione dello spazio-tempo che vincola la deformazione di superfici chiuse, cioè una regione nella quale un *world tube* (l'evoluzione temporale di una superficie chiusa) non può essere trasformato in una *world line* (l'evoluzione temporale di un punto) tramite una deformazione continua.
L'esempio più semplice di uno spazio-tempo con topologia non banale di questo tipo è il ponte di Einstein-Rosen, anche detto *wormhole di Schwarzschild*.
Partendo dalla soluzione di Schwarzschild (3) e introducendo una nuova variabile u, secondo la relazione:

$$u^2 = r - 2m$$

Einstein e Rosen giunsero alla seguente espressione della metrica:

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2 - 4(u^2 + 2m)du^2 - (u^2 + 2m)^2 d\Omega^2 \tag{2.12}$$

con $u \in (-\infty, +\infty)$ e $c = G_N = 1$. Questa trasformazione di coordinate scarta la regione contenente la singolarità di curvatura $r \in [0, 2m)$ e copre due volte la regione asintoticamente piatta $r \in [2m, +\infty)$. Lo spazio quadridimensionale è descritto matematicamente da due parti congruenti, o "fogli", corrispondenti a $u > 0$ e $u < 0$, unite dall'iperpiano $r = 2m$ o $u = 0$, in cui il determinante g del tensore metrico si annulla. Si noti che il modello di Einstein e Rosen non funziona se $m < 0$ perché esso richiede l'esistenza di un orizzonte per il set up della trasformazione di coordinate. La soluzione di Schwarzschild a massa negativa ha una singolarità *nuda*[3], che non è un orizzonte, e dunque la costruzione "a ponte" cade.
Citando gli stessi autori dell'articolo [34]:

> *Se si risolvono le equazioni della teoria della Relatività Generale nel caso di simmetria sferica e staticità, con o senza un campo elettromagnetico, si trovano delle singolarità nelle soluzioni. Se si modificano le equazioni in maniera tale da renderle libere dai denominatori, si possono ottenere soluzioni regolari, purché si consideri lo spazio fisico come costituito da due fogli congruenti. La particella neutra, così come quella carica, è la porzione di spazio che connette i due fogli (ponte).*

Possiamo facilmente generalizzare il risultato di Einstein e Rosen considerando che, senza perdere di generalità, una metrica a simmetria sferica può essere sempre scritta nella forma:

$$ds^2 = e^{-2\phi(r)} \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} - r^2 d\Omega^2 \tag{2.13}$$

Questa metrica ha orizzonti in corrispondenza a quei valori di r tali che $b(r_H) = r_H$. Se è presente un orizzonte, la geometria descrive un buco nero. Introduciamo la coordinata u ponendo:

$$u^2 = r - r_H$$

[3]La singolarità nuda è una singolarità di curvatura non circondata da un orizzonte degli eventi

Allora la (2.13) diventa:

$$ds^2 = e^{-\phi(r_H+u^2)}\frac{r_H + u^2 - b(r_H + u^2)}{r_H + u^2}dt^2 - 4\frac{r_H + u^2}{r_H + u^2 - b(r_H + u^2)}u^2du^2 - (r_H+u^2)^2d\Omega^2 \tag{2.14}$$

La regione vicina a $u = 0$ è il ponte che collega la regione asintoticamente piatta vicina a $u = +\infty$ a quella asintoticamente piatta vicina a $u = -\infty$.

Analizziamo gli andamenti della metrica (2.14) per $u \approx 0$ e $u \to \pm\infty$.

Nel primo caso, ovvero in prossimità della gola del wormhole:

$$ds^2 = e^{-\phi(r_H)}\frac{u^2[1 - b'(r_H)]}{r_H}dt^2 - 4\frac{r_H + u^2}{1 - b'(r_H)}du^2 - (r_H + u^2)^2d\Omega^2$$

dove con l'apice[4] abbiamo indicato la derivata rispetto alla coordinata radiale r. Nel secondo caso, invece, l'andamento asintotico implica che $\phi \to 0$ e $b \to 2m$, per cui la metrica diventa:

$$ds^2 = \frac{r_H + u^2 - 2m}{r_H + u^2}dt^2 - 4\frac{r_H + u^2}{r_H + u^2 - 2m}u^2du^2 - (r_H + u^2)^2d\Omega^2$$

Si definisce *gola* la parte più stretta della geometria. Nel wormhole di Schwarzschild, la gola si trova proprio in corrispondenza dell'orizzonte degli eventi. La regione vicina alla gola, invece, è chiamata *ponte*.

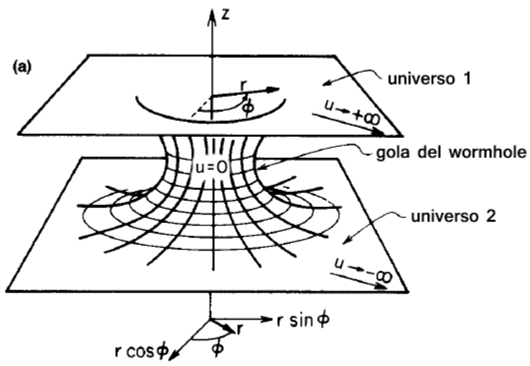

Figura 2.3: (a) Wormhole inter-universe. La coordinata radiale u è legata ad r dalla relazione $u = \pm\sqrt{r - r_H}$, con il segno + riferito all'universo posto più in alto e il segno $-$ riferito a quello posto più in basso. Il grafico rappresenta la geometria del wormhole in un determinato istante di tempo (t=cost).

[4]Useremo questa notazione in tutto il testo.

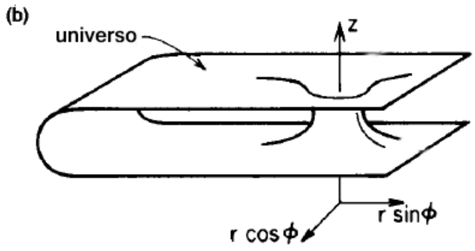

Figura 2.4: (b) Wormhole intra-universe. Analogamente alla Fig.(2.3), il grafico rappresenta la geometria del wormhole in un determinato istante di tempo (t=cost).

Da questa descrizione, si evince che la caratteristica principale del wormhole di Schwarzschild è la presenza di un orizzonte degli eventi, che ne impedisce però la traversabilità: qualunque osservatore provi ad attraversare la gola del wormhole, cadrà inevitabilmente sulla singolarità. Questo perché:

- le forze gravitazionali di marea alla gola del wormhole di Schwarzschild sono dello stesso ordine di grandezza di quelle all'orizzonte di un buco nero di Schwarzschild;
- un wormhole di Schwarzschild è dinamico, non statico. Esso si espande da un valore nullo della circonferenza della gola (due universi disconnessi) fino ad un valore massimo della circonferenza, per poi ricontrarsi a zero. Queste espansioni e contrazioni sono talmente rapide che, anche muovendosi alla velocità della luce, un osservatore non può attraversare la gola del wormhole e arrivare in un altro universo senza essere coinvolto dalla contrazione e ucciso, così, dalle forze di marea.
- l'orizzonte è instabile sotto piccole perturbazioni.

Capitolo 3

I wormhole traversabili

Nel capitolo precedente abbiamo visto perché un wormhole, come quello di Schwarzschild, non sia traversabile. A partire da queste considerazioni, cerchiamo di capire quali debbano essere allora le proprietà soddisfatte dalla metrica affinché venga risolto il problema della traversabilità.
Considerando, per semplicità, il caso di simmetria sferica (e staticità), ci aspettiamo che:

1. la metrica sia soluzione delle equazioni di campo di Einstein;
2. per essere di tipo wormhole, la soluzione sia caratterizzata da una gola che connetta due regioni asintoticamente piatte dello spazio-tempo;
3. non ci siano orizzonti degli eventi;
4. le forze mareali siano sufficientemente piccole;
5. un osservatore sia in grado di attraversare il wormhole in un intervallo di tempo proprio ragionevolmente piccolo, non solo per il proprio orologio, ma anche per quello di un altro osservatore posto all'esterno;
6. la soluzione sia perturbativamente stabile.

Nel 1987 Morris e Thorne realizzarono che questo tipo di struttura fosse possibile e iniziarono così la loro analisi sui wormhole traversabili [52] [53], considerando innanzitutto una geometria che soddisfacesse i requisiti appena elencati. Passarono poi al calcolo delle componenti del tensore di Riemann e usarono le equazioni di campo di Einstein per dedurre quale dovesse essere la distribuzione di massa energia. In particolare, osservarono che il tensore impulso-energia, nei pressi della gola, violava la cosiddetta *null energy condition* (NEC). In realtà, successivamente, fu dimostrato che i wormhole traversabili violano anche le altre condizioni sull'energia, ossia la debole (WEC), la forte (SEC) e la dominante (DEC). Ciò significa che la distribuzione di massa-energia nelle vicinanze della gola è davvero particolare: si tratta di materia con densità di energia e pressione negative ("materia esotica").

Nella prima parte di questo capitolo analizzeremo le condizioni sull'energia in Relatività Generale per meglio comprendere il risultato finale del lavoro di Morris e Thorne sulla traversabilità dei wormhole che analizzeremo, invece, nella seconda parte.

3.1 Le condizioni sull'energia in Relatività Generale

Di fondamentale importanza nello studio dei wormhole e, in generale, delle equazione di campo di Einstein sono le condizioni sull'energia.
Nell'analisi di queste condizioni, considereremo un campo di vettori nulli, k^a, cioè tali che $g_{ab}k^a k^b = 0$, e un insieme di curve di tipo tempo, il cui quadrivettore tangente indicheremo con W^a. Quest'ultimo rappresenta il vettore velocità di una famiglia di osservatori. Rispetto a W^a, il tensore impulso-energia può essere decomposto come:

$$T^{ab} = \rho W^a W^b + p(g^{ab} + W^a W^b) + \Pi^{ab} + 2q^{(a}W^{b)} \tag{3.1}$$

dove ρ e p sono la densità di energia e la pressione misurate da un osservatore che si muove con velocità W^a, Π^{ab} è il tensore degli sforzi anisotropo e q^a è il vettore corrente del flusso di calore/energia. Queste quantità sono date dalle seguenti relazioni:

$$\rho = T_{cd}W^cW^d \tag{3.2}$$

$$3p = T_{cd}h^{cd} \tag{3.3}$$

$$\Pi^{ab} = \Big(h^{ac}h^{bd} - \frac{1}{3}h^{ab}h^{cd}\Big)T_{cd} \tag{3.4}$$

$$q^a = W^cT_{cd}h^{ad} \tag{3.5}$$

dove $h^{ab} = g^{ab} + W^aW^b$ è la metrica indotta sull'ipersuperficie spaziale ortogonale a W^a. Notiamo che in queste definizioni abbiamo posto $c = 1$.

Le condizioni sull'energia sono definite considerando le contrazioni dei vettori nulli e di tipo tempo con i tensori di Ricci e di Einstein e il tensore impulso-energia. Esse possono essere classificate come segue:

- *WEC (weak energy condition)*:

$$T_{ab}W^aW^b \geq 0 \tag{3.6}$$

  dove W^a è un vettore di tipo tempo, cioè tale che: $W^aW_a = -1$. Dall'equazione (3.1), si verifica che ciò implica che $\rho \geq 0$. Questa condizione, quindi, equivale a stabilire che la densità di energia misurata da qualsiasi osservatore è non-negativa. Si può inoltre dimostrare che qualsiasi fluido di materia standard è consistente con questa condizione. Utilizzando le equazioni di campo di Einstein, la (3.6) si traduce in:

$$G_{ab}W^aW^b \geq 0$$

  che è equivalente a:

$$R_{ab}W^aW^b \geq -\frac{R}{2}$$

  ed anche a:

$$R_{ab}W^aW^b \geq -4\pi G(\rho - 3p)$$

  Qui abbiamo sfruttato il fatto che, dalla (3.1), possiamo scrivere le equazioni di Einstein (2) come:

$$R^{ab} = 8\pi G\Big[\frac{\rho + 3p}{2}W^aW^b + \Pi^{ab} + 2q^{(a}W^{b)} + \frac{\rho - p}{2}(g^{ab} + W^aW^b)\Big]$$

- *NEC (null energy condition)*:

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0 \tag{3.7}$$

dove k^a è un vettore nullo. Attraverso le equazioni di Einstein, questa si traduce in:

$$R_{ab}k^a k^b \geq 0$$

- *SEC (strong energy condition)*:

$$T_{ab}W^a W^b \geq \frac{1}{2} T W^a W_a \tag{3.8}$$

dove, come sempre, W^a è un vettore di tipo tempo. Alternativamente, in RG e attraverso le equazioni di campo, la disuguaglianza (3.8) può essere scritta nella forma:

$$R_{ab}W^a W^b \geq 0$$

che ci dice che la gravità deve essere attrattiva.

- *DEC (dominant energy condition)*:

essa afferma che, in aggiunta alla condizione (3.6), si ha che $T^{ab}W_b$ è un vettore non di tipo spazio dove, come prima, W^a è un vettore di tipo tempo. Ciò corrisponde ad avere un vettore flusso di energia locale che è non di tipo spazio e una densità di energia non-negativa. In questo senso, è determinata la struttura causale dello spazio-tempo. Notiamo che la DEC implica la WEC e la NEC ma non necessariamente la SEC.

- *ANEC (averaged null energy condition)*:

$$\int_\Gamma T_{ab}k^a k^b d\lambda \geq 0 \tag{3.9}$$

dove Γ è una curva nulla, λ è una generica parametrizzazione affine della curva Γ, il cui corrispondente vettore tangente è k^a.

- *AWEC (averaged weak energy condition)*:

$$\int_\Gamma T_{ab}W^a W^b ds \geq 0 \tag{3.10}$$

dove s indica la parametrizzazione affine (tempo proprio) della curva di tipo tempo Γ, il cui corrispondente vettore tangente è W^a.

- *ASEC (averaged strong energy condition)*:

$$\int_\Gamma \Big[T_{ab}W^aW^b + \frac{1}{2}T\Big]ds \geq 0 \tag{3.11}$$

dove Γ è una curva di tipo tempo.

Riassumendo, queste condizioni definiscono la struttura causale, geodetica e la natura del campo gravitazionale in uno spazio-tempo riempito da un fluido di materia standard che soddisfa una regolare equazione di stato.

3.2 I wormhole traversabili

Per semplificare la trattazione, Morris e Thorne considerarono un wormhole a simmetria sferica, indipendente dal tempo e non rotante [52]. La varietà d'interesse era dunque quella di uno spazio-tempo sfericamente simmetrico e statico, con due regioni asintoticamente piatte.

3.2.1 La forma della metrica

Partiamo dalla seguente metrica (*metrica di Morris-Thorne*)[1]:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1-b(r)/r} + r^2d\Omega^2 \tag{3.12}$$

dove $b(r)$ e $\phi(r)$ sono funzioni della sola coordinata radiale e rappresentano, rispettivamente, la *funzione di forma* e la *funzione di redshift*. La gola del wormhole è definita dal valore minimo della coordinata radiale, $r_{min} = r_0$, dato dalla condizione $b(r_0) = r_0$. Per cui, r varia da r_0 ad infinito. Per essere più precisi, r ha un andamento non monotono: decresce da $+\infty$ ad r_0 quando ci si muove attraverso l'universo posto più in basso (si veda, ad esempio, Fig(2.3)), aumenta da r_0 a $+\infty$ quando ci si muove al di fuori della gola, verso l'universo posto più in alto.
In qualsiasi metrica statica e asintoticamente piatta, inclusa quella che descrive un wormhole, gli orizzonti sono definiti come superfici non singolari in cui $g_{00} \to 0$. Allora, affinché sia soddisfatta la richiesta 3, si impone che $\phi(r)$ abbia valore finito $\forall r$.

[1] In questo paragrafo utilizzeremo la segnatura $(-,+,+,+)$, come fatto da Morris e Thorne nel loro articolo originale.

Si richiede, inoltre, che i campi vadano a zero abbastanza velocemente per $r \to \infty$, in maniera tale da avere uno spazio-tempo asintoticamente piatto:

$$\frac{b}{r} \to 0 \quad e \quad \phi(r) \to 0 \quad per \quad r \to \infty$$

Un altro ingrediente fondamentale nella fisica dei wormhole è la *flaring-out condition*, la quale impone che:

$$\frac{b - b'r}{2b^2} > 0 \tag{3.13}$$

Infine, l'ultimo vincolo per la funzione $b(r)$ è che $b(r)/r \leq 1$, con l'uguaglianza valida soltanto in corrispondenza della gola. Questa condizione assicura che la distanza radiale propria, $l(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{1-b(r)/r}}$, abbia valore finito e che la componente g_{rr} del tensore metrico non cambi segno $\forall r \geq r_0$.

3.2.2 Il tensore impulso-energia

In Relatività Generale, il *teorema di Birkhoff* afferma che soltanto un tipo di wormhole a simmetria sferica e nel vuoto è ammesso dalle equazioni di campo di Einstein: il wormhole non traversabile di Schwarzschild. Ciò significa che per avere un wormhole traversabile in RG, bisogna necessariamente inserire materia o campi aventi un tensore impulso-energia non nullo.

Andiamo a scrivere, quindi, le equazioni di campo nella materia per la metrica (3.12). Osserveremo che le proprietà che devono essere soddisfatte dalle funzioni $b(r)$ e $\phi(r)$ comporteranno un vincolo forte per le componenti del tensore impulso-energia che genera la curvatura dello spazio-tempo. Di seguito, riportiamo solo i risultati ottenuti da Morris e Thorne nel loro articolo del 1987 [52]. In particolare, per le componenti del tensore di Einstein, ottennero:

$$G_{tt} = \frac{b'}{r^2} \tag{3.14}$$

$$G_{rr} = -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{\phi'}{r} \tag{3.15}$$

$$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = \left(1 - \frac{b}{r}\right)\left(\phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\phi' + \phi'^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}\right) \tag{3.16}$$

Considerando, poi, un tensore impulso-energia con componenti non nulle[2] date da:

$$T_{tt} = \rho(r)c^2 \qquad T_{rr} = -\tau(r) \qquad T_{\theta\theta} = T_{\varphi\varphi} = p(r)$$

dove $\rho(r)$ è la densità totale di massa-energia, $\tau(r)$ è la tensione per unità di area misurata nella direzione radiale e $p(r)$ la pressione misurata nella direzione laterale (ortogonale a quella radiale), Morris e Thorne giunsero alle seguenti equazioni di campo[3]:

$$b' = 8\pi G c^{-2} r^2 \rho \tag{3.17}$$

$$\phi' = \frac{-8\pi G c^{-4} \tau r^3 + b}{2r(r-b)} \tag{3.18}$$

$$\tau' = (\rho c^2 - \tau)\phi' - 2\frac{p+\tau}{r} \tag{3.19}$$

che possono anche essere invertite e scritte nella forma:

$$\rho = b'/(8\pi G c^{-2} r^2) \tag{3.20}$$

$$\tau = \frac{\frac{b}{r} - 2(r-b)\phi'}{8\pi G c^{-4} r^2} \tag{3.21}$$

$$p = \frac{r}{2}[(\phi c^2 - \tau)\phi' - \tau'] - \tau \tag{3.22}$$

Sfruttiamo proprio queste ultime per scrivere la seguente funzione scalare in termini delle funzioni geometriche $b(r)$ e $\phi(r)$:

$$\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|} = \frac{b/r - b' - 2(r-b)\phi'}{|b'|} \tag{3.23}$$

che possiamo opportunamente riscrivere come:

$$\zeta = \frac{2b^2}{r|b'|}\frac{b - b'r}{2b^2} - 2(r-b)\frac{\phi'}{|b'|} \tag{3.24}$$

[2] Tutte le altre componenti del tensore impulso-energia sono nulle per via della simmetria sferica.

[3] L'equazione (3.17) si integra banalmente:

$$b(r) = b(r_0) + \int_{r_0}^{r} 8\pi G c^{-2} \rho(r') r'^2 dr' = 2Gc^{-2} m(r)$$

avendo definito:

$$m(r) \equiv \frac{r_0 c^2}{2G} + \int_{r_0}^{r} 4\pi c^{-2} \rho r'^2 dr'$$

come massa effettiva all'interno del raggio r. La funzione $b(r)$ ha così un'interpretazione diretta in termini della distribuzione di massa contenuta nel wormhole.

La (3.23) e la (3.24), insieme al valore finito di ρ e di conseguenza di b' (eq.(3.20)) e al fatto che, alla gola, $(r-b)\phi' \to 0$, fa sì che la condizione (3.13) possa essere scritta come:

$$\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0 \tag{3.25}$$

alla gola del wormhole o nelle sue vicinanze. Il vincolo che ne segue:

$$\tau_0 > \rho_0 c^2 \tag{3.26}$$

è molto forte: nella gola del wormhole, la tensione deve essere sufficientemente grande da eccedere la densità totale di massa-energia. Questo significa che il tensore impulso-energia vìola la *null energy condition* (NEC) alla gola, ovvero:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \mid_{r_0} < 0$$

Per questo motivo, la materia che riempie un wormhole traversabile in RG è detta *esotica*. In teorie estese della gravità, invece, è il tensore impulso-energia *effettivo* a violare la NEC alla gola: $T^{eff}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \mid_{r_0} < 0$. Tuttavia, nel caso, ad esempio, delle teorie $f(R)$, il discorso fatto in RG non è banalmente generalizzabile. La validità del teorema di Birkhoff, infatti, non è stata definitivamente provata per teorie di questo tipo [13]. Attualmente, poiché per una generica teoria $f(R)$ le equazioni di campo sono del quarto ordine, è abbastanza difficile dimostrare che l'unica soluzione a simmetria sferica, stazionaria e nel vuoto sia quella di Schwarzschild. Questo è stato provato soltanto per teorie estese che coinvolgono termini del tipo $R+R^2$, con $R^2 = R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\mu\nu}R_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\mu\nu}$ con torsione [60], e nel caso di invarianti della forma R^2, anche con torsione nulla [54].

3.3 La censura topologica

Il lavoro di Morris e Thorne rappresenta anche il punto di partenza dello sviluppo dei teoremi "no wormhole". I tipi di wormhole trattati fino ad ora avevano delle caratteristiche particolari che ne semplificavano la trattazione. Tuttavia, in generale, un wormhole potrebbe essere asimmetrico, con una gola arbitrariamente lunga e con una geometria dipendente dal tempo. L'analisi di tali configurazioni è piuttosto difficile e richiede l'utilizzo di tecniche globali. Andiamo a vedere, quindi, quali sono le proprietà topologiche e i teoremi annessi che caratterizzano un wormhole del tutto generico.

Teorema 3.3.1. *In qualsiasi spazio-tempo globalmente iperbolico e asintoticamente piatto, tale che ogni geodetica inestensibile di tipo nullo soddisfi la ANEC, ogni curva causale dall'infinito passato all'infinito futuro è deformabile ad una curva causale banale.*

Facciamo delle osservazioni tecniche. "Globalmente iperbolico" significa che la topologia dello spazio-tempo M è della forma $M \sim \mathbb{R} \times \Sigma$, dove Σ è una varietà tridimensionale con topologia non banale, e non possono esserci curve causali (non di tipo spazio) chiuse[4]. "Curva causale banale", invece, significa che la curva si muove dall'infinito passato all'infinito futuro restando nella regione asintoticamente piatta.
Il *teorema di censura topologica* ci permette di avere una definizione matematicamente precisa e generale di wormhole traversabile:

Definizione 3.1. Se uno spazio-tempo M asintoticamente piatto possiede una curva causale γ che si estende dal dall'infinito passato all'infinito futuro e tale che non sia deformabile ad una curva causale banale, allora M possiede un wormhole traversabile e la curva γ passa attraverso il wormhole.

Il punto fondamentale, quindi, è che un raggio luminoso (o un osservatore) è in grado di attraversare il wormhole e giungere dall'altra parte. A partire da questa definizione, si ottiene l'inverso del teorema di censura topologica:

[4]Nel caso di una curva causale aperta, ogni evento x divide gli altri eventi sulla curva in due insiemi: eventi futuri ed eventi passati rispetto ad esso. Tutti gli eventi passati possono influenzare x mentre quelli futuri no. Su una curva causale chiusa, invece, un evento x divide gli altri eventi sulla curva in eventi futuri e passati solo localmente. Non c'è, quindi, una divisione globale di eventi su curve causali chiuse. Non solo il futuro è il risultato dell'evoluzione del passato, ma anche il passato è il risultato del futuro. Secondo il *principio di auto-consistenza*, tutti gli eventi su curve causali chiuse si influenzano reciprocamente in maniera auto-regolata. Una formulazione più precisa di questo principio è: *le uniche soluzioni delle leggi della fisica che possono esistere nell'Universo sono quelle globalmente auto-consistenti.* Il principio di auto-consistenza proibisce cambiamenti del passato. Tutti gli eventi possono accadere soltanto una volta e non possono essere cambiati.

Teorema 3.3.2. *Qualunque spazio-tempo contenente un wormhole traversabile o (1) non è globalmente iperbolico o (2) è tale che esista almeno una geodetica nulla inestensibile lungo la quale è violata la ANEC.*

Il teorema inverso, dunque, afferma che qualsiasi spazio-tempo "ragionevole" che contiene un wormhole traversabile e che soddisfa le equazioni di campo di Einstein deve violare la ANEC.

Capitolo 4

Le Teorie Estese della Gravitazione

La fisica moderna è basata su due grandi pilastri: la Relatività Generale e la Teoria Quantistica dei Campi. Entrambe le teorie hanno riscosso diversi successi nel proprio campo: la prima nella descrizione di sistemi gravitanti e di riferimenti non inerziali, da un punto di vista classico, su scale sufficientemente grandi; la seconda, invece, nella descrizione dei sistemi fisici ad alte energie o piccole scale, quando la teoria classica non funziona più. Tuttavia, la Teoria Quantistica dei Campi assume che lo spazio-tempo sia piatto mentre, dall'altra parte, la Relatività Generale non considera la natura quantistica della materia ma utilizza una descrizione idrodinamica (e dunque classica) della stessa. Viene naturale, quindi, chiedersi cosa succede se un campo gravitazionale forte è presente a scale quantistiche. Come si comportano i campi quantistici in presenza della gravità? Fino a che punto queste due teorie sono compatibili? Queste domande assumono un significato ancora più profondo se si considera che, attualmente, uno degli obiettivi principali della fisica è quello di trovare una teoria di unificazione, che sia in grado di descrivere le interazioni fondamentali della natura (forte, debole, elettromagnetica e gravitazionale) come aspetti differenti della stessa simmetria. Tutti gli schemi di unificazione noti fino ad ora, come la teoria delle Superstringhe, della Supergravità e quella della Grande Unificazione, considerano azioni effettive dove sono presenti accoppiamenti non-minimali con la geometria o termini di ordine superiore negli invarianti di

curvatura. Tali contributi sono dovuti a correzioni a *one-loop* o a *loop* di ordine superiore nel regime della Gravità Quantistica. Ciò succede, in pratica, quando si cerca di inserire la quantizzazione su spazi-tempi curvi: il risultato è che le interazioni tra campi scalari quantistici e background geometrico o le auto-interazioni gravitazionali comportano termini correttivi nella Lagrangiana di Hilbert-Einstein. Da qui, la nascita delle *Teorie Estese della Gravitazione* (TEG), ovvero tutte quelle teorie semiclassiche in cui la Lagrangiana di campo effettiva è modificata, rispetto a quella della gravitazione, da termini di ordine superiore negli invarianti di curvatura (come R^2, $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$, $R\Box R$, $R\Box^k R$) o da termini con campi scalari non minimalmente accoppiati alla geometria (come $\phi^2 R$). D'altra parte, da un punto di vista concettuale, non c'è un motivo a priori per restringere la Lagrangiana gravitazionale a funzioni lineari dello scalare di Ricci R, minimalmente accoppiato con la materia. E' ovvio, però, che rilassando queste ipotesi, cioè adattando schemi estesi, le equazioni di campo non sono più, in generale, del secondo ordine e risultano più difficili da integrare. Inoltre, l'idea che non esistano leggi "esatte" della fisica può essere presa seriamente in considerazione: in tal caso, la Lagrangiana effettiva delle interazioni fisiche sono funzioni "stocastiche". Ciò significa che le invarianze locali di gauge (ad esempio, le leggi di conservazione) sono ben approssimate solo nel limite delle basse energie e le costanti fisiche fondamentali sono delle *running coupling costants*, ossia parametri che possono variare.
Un altro motivo per modificare la Relatività Generale, in realtà, viene anche dalla volontà di recuperare pienamente il *principio di Mach* che porta ad assumere un accoppiamento gravitazionale variabile. Questo principio, infatti, afferma che il sistema inerziale locale è determinato dalla media dei moti degli oggetti astronomici lontani. Ne risulta, allora, che l'accoppiamento gravitazionale può dipendere dalla scala ed essere funzione di qualche campo scalare. Di conseguenza, il concetto di inerzia e il Principio di Equivalenza devono essere rivisti. Infine, è stato dimostrato che, per mezzo di trasformazioni conformi, i termini di ordine superiore e non minimalmente accoppiati corrispondono sempre alla somma di un termine einsteiniano con uno o più campi scalari minimalmente accoppiati alla curvatura [1] [8] [40] [47] [65] [69]. Più precisamente, i termini di ordine superiore appaiono sempre

come contributi del secondo ordine alle equazioni di campo quando sono sostituiti da equivalenti campi scalari. Ad esempio, il termine R^2 nella Lagrangiana dà equazioni del moto del quarto ordine [61], $R\Box R$ equazioni del sesto ordine [1] [2] [6] [7] [40], $R\Box^2 R$ equazioni dell'ottavo ordine [5] e così via. Con le trasformazioni conformi, ogni derivata del secondo ordine corrisponde ad un campo scalare: una teoria del quarto ordine è equivalente alla Gravità di Einstein più un singolo campo scalare; una teoria del sesto ordine, invece, alla RG più due campi scalari [40] [62] ecc. Allo stesso modo, si può dimostrare che la teoria $f(R)$ è equivalente non solo ad una teoria scalar-tensoriale ma anche alla teoria einsteiniana accoppiata ad un fluido ideale [11].

In questo capitolo, vedremo come le condizioni sull'energia che abbiamo studiato precedentemente cambiano quando passiamo in Teorie Estese della Gravitazione, in particolare nella teoria $\mathcal{L} = f(R)$. Passeremo poi ad analizzare una soluzione particolare, ossia quella a simmetria sferica, in quanto ci risulterà utile nei capitoli successivi.

4.1 Le condizioni sull'energia in Teorie Estese della Gravitazione

Consideriamo le seguenti equazioni di campo gravitazionali generalizzate:

$$g_1(\psi^\alpha)(G_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}) = 8\pi G g_2(\psi^\beta)T_{\mu\nu} \tag{4.1}$$

dove i fattori $g_1(\psi^\alpha)$ modificano gli accoppiamenti con i campi di materia $T^{\mu\nu}$ e i $g_2(\psi^\alpha)$ incorporano accoppiamenti curvatura-materia della teoria gravitazionale considerata; i termini ψ^α generalmente rappresentano invarianti di curvatura oppure altri campi gravitazionali, ad esempio campi scalari, che contribuiscono alla dinamica della teoria. Il tensore $H_{\mu\nu}$ rappresenta un termine geometrico aggiuntivo, rispetto al caso della Relatività Generale, contenente le modifiche geometriche introdotte dalla teoria estesa che si sta considerando. Notiamo che la RG è recuperata imponendo $H_{\mu\nu} = 0$ e $g_1(\psi^\alpha) = g_2(\psi^\alpha) = 1$. In questo senso abbiamo a che fare con Teorie Estese della Gravitazione: la Relatività Generale e i suoi risultati positivi possono essere recuperati come caso particolare in ogni teoria estesa.

4.1.1 Le identità di Bianchi contratte e l'invarianza per diffeomorfismi

Mettiamoci nel caso specifico di $g_1(\psi^\alpha) = g(\psi^\alpha)$ e $g_2(\psi^\alpha) = 1$, per cui l'equazione (4.1) diventa:

$$g(\psi^\alpha)(G_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}) = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.2}$$

Prendendo in considerazione l'identità di Bianchi contratta e l'invarianza per diffeomorfismi dell'azione di materia, che implica la conservazione covariante del tensore impulso-energia, $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$, si ricava la seguente legge di conservazione:

$$\nabla_\nu H^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{g^2} T^{\mu\nu} \nabla_\nu g$$

Osserviamo che, dalla (4.2), per ottenere un'identità di Bianchi estesa $\nabla_\nu H^{\mu\nu} = 0$, per un valore non divergente dell'accoppiamento g, dobbiamo avere il vuoto e quindi $G_{\mu\nu} = -H_{\mu\nu}$. Ora, imporre delle condizioni specifiche sul tensore impulso-energia significa imporle alla combinazione di $G_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ e non soltanto al tensore di Einstein. Per cui, nel contesto delle TEG, non è possibile ottenere una semplice implicazione geometrica dalle condizioni imposte. Ad esempio, in RG, la SEC ci dice che $R_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq 0$ e, di conseguenza, attraverso le equazioni di campo, si ha $\rho + 3p \geq 0$. Ciò, a sua volta, implica una gravità attrattiva. Nel caso delle TEG che stiamo considerando, invece, la stessa condizione ci dice che:

$$g(\psi^\alpha)(R_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} H) W^\mu W^\nu \geq 0$$

che non implica necessariamente che $R_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \geq 0$ e quindi non è possibile concludere che il carattere attrattivo della gravità sia una conseguenza della validità della SEC.

In letteratura, spesso si usa portare il termine $H_{\mu\nu}$ al membro di destra dell'equazione di campo gravitazionale e riscrivere quest'ultima come un'equazione di campo di Einstein modificata:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T^{eff}_{\mu\nu}$$

dove $T^{eff}_{\mu\nu}$ è considerato come un tensore impulso-energia effettivo, definito da $T^{eff}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}/g - H_{\mu\nu}/8\pi G$. Allora, il significato attribuito alle condizioni sull'energia è la soddisfazione di qualche disuguaglianza da parte della quantità combinata $T_{\mu\nu}/g - H_{\mu\nu}/8\pi G$. E', quindi, erroneo chiamarle condizioni sull'energia dato che non emergono soltanto da $T^{\mu\nu}$ ma da una quantità combinata che comprende una parte geometrica aggiuntiva al tensore impulso-energia. Infatti, sottolineiamo che $H^{\mu\nu}$ è una quantità geometrica, nel senso che può essere data da invarianti geometrici come R o da campi scalari diversi dai campi di materia ordinari.

Tuttavia, se la TEG presa in considerazione permette una descrizione equivalente sotto un'appropriata trasformazione conforme, risulta giustificato associare il tensore $H^{\mu\nu}$ trasformato al tensore ridefinito $T^{\mu\nu}$ nel sistema di Einstein (*Einstein frame*) conformemente trasformato. Questo è il caso, ad esempio, delle teorie $f(R)$ che analizzeremo dopo. Diverse teorie generalizzate della gravitazione possono essere ridefinite come RG più un numero appropriato di campi accoppiati alla materia per mezzo di trasformazioni conformi nel cosiddetto sistema di Einstein. Infatti, nelle teorie scalar-tensoriali, in particolare nel cosiddetto sistema di Jordan (*Jordan frame*), si ha una separazione tra i termini geometrici e quelli di materia standard, che possono essere messi nella forma dell'equazione (4.1), dove $H_{\mu\nu}$ comprende campi gravitazionali scalari e tensoriali. Un ruolo fondamentale in questa analisi è giocato dalla riformulazione della teoria, tramite trasformazioni conformi, nel sistema di Einstein dove materia e geometria possono essere poste nella forma della RG, ossia: $\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{T}^M_{\mu\nu} + \tilde{T}^\varphi_{\mu\nu}$ dove $\tilde{T}^M_{\mu\nu}$ è il tensore impulso-energia di materia trasformato e $\tilde{T}^\varphi_{\mu\nu}$ è il tensore impulso-energia per il campo scalare φ ridefinito e accoppiato con la materia (per questo motivo ha senso considerare tutto il membro destro dell'equazione come un unico tensore impulso-energia effettivo). Bisogna però sottolineare che le condizioni sull'energia possono assumere un significato completamente differente passando dal sistema di Jordan a quello di Einstein (o viceversa), per cui è molto importante individuare il sistema utilizzato.

Un altro aspetto importante per una corretta formulazione delle condizioni sull'energia per le Teorie Estese della Gravitazione riguarda le identità di Bianchi contratte, le quale assicurano specifiche leggi di conservazione. Infatti, sfruttando il fatto che

$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$, è possibile ricavare proprietà fisiche per il tensore $H^{\mu\nu}$. D'altra parte, le identità di Bianchi garantiscono l'auto-consistenza della teoria. Tuttavia, questi tipi di accoppiamenti, implicano, in generale, una non-conservazione del tensore impulso-energia e, di conseguenza, un marchio delle TEG è il moto non geodetico. Consideriamo l'equazione (4.1). Nel caso di non-conservazione del tensore impulso-energia, le identità di Bianchi contratte comportano che:

$$\nabla_\nu H^{\mu\nu} = \nabla_\nu \Big(\frac{T^{\mu\nu}}{\bar{g}}\Big) \tag{4.3}$$

dove abbiamo definito $\bar{g} = g_1/g_2$ e considerato $8\pi G = 1$ per semplicità di notazione. La (4.3) implica a sua volta:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T^{\mu\nu} &= \bar{g}\nabla_\nu H^{\mu\nu} + \Big(\frac{\nabla_\nu \bar{g}}{\bar{g}}\Big)T^{\mu\nu} \\ &= \nabla_\nu(\bar{g}H^{\mu\nu}) + \Big(\frac{\nabla_\nu \bar{g}}{\bar{g}}\Big)[T^{\mu\nu} - \bar{g}H^{\mu\nu}]\end{aligned}$$

Sebbene le identità di Bianchi contratte siano relazioni geometriche, e quindi non dipendenti dalla specifica teoria gravitazionale considerata, quando le si traducono, però, in equazioni che governano il comportamento dei campi di materia, interviene la scelta della teoria (questo succede con il termine $\bar{g}H^{\mu\nu}$). In sintesi, la validità di tali identità seleziona le teorie adatte e permette la definizione di condizioni auto-consistenti sull'energia.

4.1.2 La teoria $f(R)$

La teoria $f(R)$ è un esempio di Teoria Estesa della Gravitazione, in cui l'azione è data da:

$$S = \frac{1}{16\pi}\int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_M \tag{4.4}$$

dove R è lo scalare di Ricci e S_M la parte dell'azione relativa alla materia standard. Il termine $H_{\mu\nu}$ include combinazioni non lineari degli invarianti di curvatura costruiti a partire dai tensori di Riemann e di Ricci, così come derivate di questi; gli accoppiamenti, invece, sono $g_1(\psi^\alpha) = F(R) = f_R(R)$ e $g_2(\psi^\alpha) = 1$, dove con il pedice abbiamo indicato, in $f(R)$, la derivata rispetto ad R. Infatti, le equazioni di campo, determinate applicando il principio variazionale, sono:

$$F(R)G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}[RF(R) - f(R)]g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Box F(R) = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.5}$$

che possono essere anche scritte nella forma:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\left(\frac{T_{\mu\nu}}{F(R)}\right) - \frac{1}{F(R)}\left[\frac{1}{2}\Big(RF(R) - f(R)\Big)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Box F(R)\right] \tag{4.6}$$

e individuare così:

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{F(R)}\left[\frac{1}{2}\Big(RF(R) - f(R)\Big)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu}\Box F(R)\right] \tag{4.7}$$

In queste equazioni, ∇_μ è l'operatore derivata covariante associato a $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ è il contributo al tensore impulso-energia della materia ordinaria. Tutte le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti sono valide e la gravità sarà repulsiva o attrattiva a seconda della forma di $f(R)$.

Introduciamo le seguenti quantità:

$$\tilde{\rho} = (\bar{g}H_{\mu\nu})W^\mu W^\nu \tag{4.8}$$

$$3\tilde{p} = (\bar{g}H_{\mu\nu})h^{\mu\nu} \tag{4.9}$$

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu} = \Big(h^{\mu\lambda}h^{\nu\sigma} - \frac{1}{3}h^{\mu\nu}h^{\lambda\sigma}\Big)(\bar{g}H_{\lambda\sigma}) \tag{4.10}$$

$$\tilde{q}^\mu = W^\lambda(\bar{g}H_{\lambda\sigma})h^{\mu\sigma} \tag{4.11}$$

che ci permettono di calcolare la decomposizione del tensore $H_{\mu\nu}$ in una componente parallela al vettore di tipo tempo W^μ e in una ortogonale ad esso:

$$H_{||} = -\frac{1}{F}\Big[\frac{1}{2}(RF - f) - h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F\Big]$$
$$H_\perp = \frac{1}{F}\Big[\frac{1}{2}(RF - f) - \frac{1}{3}h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F + \Box F\Big]$$

In questo caso, quindi, la gravità risulterà attrattiva quando:

$$8\pi G(\rho + 3p) \geq [(RF - f) - 2h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F + 3\Box F] \tag{4.12}$$

che è l'equivalente della condizione $R_{\mu\nu}W^\mu W^\nu \geq 0$ (SEC) in RG.

Notiamo, però, che la condizione (4.12) non è una condizione sulla configurazione iniziale, né sulla distribuzione di materia. In altre parole, non è una condizione sull'energia perché le derivate di ordine superiore possono essere ancora eliminate usando le equazioni del moto. Essa però si riduce alla usuale $(\rho + 3p \geq 0)$ quando $f \propto R$ e si recupera, quindi, la RG. Un aspetto importante, comunque, è che i termini non lineari nell'azione inducono gli effetti repulsivi o attrattivi. Se non ci fosse materia, la gravità diventerebbe repulsiva se:

$$(RF - f) - 2h^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu F + 3\Box F \leq 0$$

Ancora, se invece della SEC considerassimo la NEC, ovvero $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$, le equazioni si semplificherebbero ulteriormente:

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu + k^\mu k^\nu \frac{\nabla_\mu\nabla_\nu F}{F} \geq 0$$

che è un'equazione di tipo Poisson.
In conclusione, tutta questa analisi ci sta dicendo che, nelle Teorie Estese della Gravitazione, non c'è una violazione delle condizioni sull'energia della Relatività Generale ma semplicemente una reinterpretazione dei gradi di libertà aggiuntivi che emergono dalla dinamica.

4.2 Le soluzioni a simmetria sferica

Nello studio di una teoria, fisica o matematica che sia, si cerca sempre di trovare soluzioni esatte ai quesiti posti. Purtroppo, però, questo obiettivo non è sempre facile da raggiungere, soprattutto quando si ha a che fare con teorie non lineari. Allora, per semplificare il calcolo, si assumono delle particolari simmetrie e si cercano soluzioni che le soddisfino. Sebbene possa sembrare un approccio un po' riduttivo, questo tipo di soluzioni permettono comunque di ottenere qualche informazione in più sulla teoria che altrimenti non si sarebbe potuta avere.
Abbiamo già visto un esempio nella risoluzione delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto, nel caso della Relatività Generale, ossia la soluzione a simmetria sferica di Schwarzschild. Ed è proprio la simmetria sferica che andremo a considerare anche per le Teorie Estese della Gravitazione.
In generale, le soluzioni a simmetria sferica possono essere classificate usando lo scalare di curvatura R come:

- soluzioni con $R = 0$;
- soluzioni con R costante: $R = R_0 \neq 0$;

- soluzioni con R dipendente soltanto dalla coordinata radiale r: $R = R(r)$;
- soluzioni con R dipendente dalla coordinata radiale r e dal tempo t: $R = R(t, r)$

Nei primi tre casi, in RG, il teorema di Birkhoff è valido, il che significa che le soluzioni stazionarie a simmetria sferica sono necessariamente statiche. Invece, nell'ambito delle Teorie Estese della Gravitazione, come ad esempio la teoria $f(R)$, questo teorema non è detto che valga per nessuno dei quattro casi perché possono emergere evoluzioni temporali già in teoria perturbativa, a qualche ordine di approssimazione. Dunque, un problema importante nell'analisi delle teorie estese consiste nel recuperare la soluzione asintoticamente piatta e i risultati ben noti della RG. Soltanto in questa situazione, infatti, è possibile un confronto corretto tra RG e qualsiasi tipo di TEG , sia da un punto di vista teorico che sperimentale.
La più generica metrica a simmetria sferica e indipendente dal tempo che si possa scrivere è:

$$ds^2 = m_1(r')dt'^2 + m_2(r')dr'^2 + m_3(r')dt'dr' + m_4(r')d\Omega^2$$

dove le m_i sono funzioni della coordinata radiale r'. In RG, grazie alla libertà di scelta del sistema di coordinate, è possibile considerare una trasformazione di coordinate che mappi questa metrica in un'altra in cui non compaiono i termini non diagonali, ossia:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{4.13}$$

Questa espressione può essere considerata, senza perdere di generalità, come la definizione più generale di metrica a simmetria sferica ed indipendente dal tempo, compatibile con una varietà pseudo-Riemanniana senza torsione.
Partiamo dalla metrica (4.13) per determinarne i simboli di Christoffel, le componenti del tensore di Ricci e, infine, lo scalare di curvatura.
Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange[1]:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \tag{4.14}$$

[1]In tal caso, s è il parametro affine e il punto indica la derivata rispetto ad esso.

ed esplicitandole rispetto alle derivate di ordine massimo, si possono riconoscere i simboli di Christoffel.

Per $\alpha = 0$, la (4.14) diventa:

$$\ddot{x}^0 + \frac{A'}{A}\dot{x}^0\dot{x}^1 = 0$$

Quindi, dal confronto con le equazioni delle geodetiche, $\frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$, si ottengono i seguenti simboli di Christoffel:

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A}$$

Per $\alpha = 1$, la (4.14) diventa:

$$\ddot{x}^1 + \frac{B'}{2B}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \frac{A'}{2B}\dot{x}^0\dot{x}^0 - \frac{r}{B}\dot{x}^2\dot{x}^2 - \frac{r\sin^2\theta}{B}\dot{x}^3\dot{x}^3 = 0$$

da cui si ricavano:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2B} \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{B'}{2B} \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B} \qquad \Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{B}$$

Ancora, per $\alpha = 2$, la (4.14) diventa:

$$\ddot{x}^2 + \frac{2}{r}\dot{x}^1\dot{x}^2 - \sin\theta\cos\theta\dot{x}^3\dot{x}^3 = 0$$

da cui si ricavano:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

Infine, per $\alpha = 3$, la (4.14) diventa:

$$\ddot{x}^3 + \frac{2}{r}\dot{x}^1\dot{x}^3 + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{x}^2\dot{x}^3 = 0$$

da cui si ricavano:

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta$$

Quindi, in sintesi, gli unici simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{A'}{2A} \tag{4.15}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{B'}{2B} \tag{4.16}$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{A'}{2B} \tag{4.17}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{r}{B} \tag{4.18}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{r\sin^2\theta}{B} \tag{4.19}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \tag{4.20}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \tag{4.21}$$

$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \tag{4.22}$$

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta \tag{4.23}$$

Una volta noti i simboli di Christoffel, passiamo al calcolo delle componenti del tensore di Ricci. Sappiamo che:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\beta} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} & \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} & \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^\sigma_{\tau\sigma} & \Gamma^\sigma_{\tau\beta} \\ \Gamma^\tau_{\alpha\sigma} & \Gamma^\tau_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

Per i termini contenenti i simboli di Christoffel con due indici uguali, si può utilizzare:

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ln\sqrt{-g}$$

che, inserita a sua volta nella (4.24), permette di ottenere la seguente espressione del tensore di Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} ln\sqrt{-g} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\tau} ln\sqrt{-g} - \Gamma^\tau_{\alpha\sigma}\Gamma^\sigma_{\tau\beta}$$

A partire da questa e dai simboli di Christoffel ricavati prima, si determinano le componenti $R_{\alpha\beta}$ del tensore di Ricci, considerando che, nel nostro caso, $g = -ABr^4\sin^2\theta$

e quindi $\sqrt{-g} = \sqrt{AB}r^2 \sin\theta$. Le uniche componenti non nulle sono:

$$R_{00} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4AB} + \frac{A'}{rB} \tag{4.25}$$

$$R_{11} = \frac{B'}{rB} + \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2} \tag{4.26}$$

$$R_{12} = R_{21} = -\frac{1}{r^2} \tag{4.27}$$

$$R_{13} = R_{31} = -\frac{1}{r^2} \tag{4.28}$$

$$R_{22} = -\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} + 1 \tag{4.29}$$

$$R_{33} = \sin^2\theta\Big(-\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} + 1\Big) \tag{4.30}$$

Una volta noto il tensore di Ricci, possiamo calcolare lo scalare di curvatura:

$$\begin{aligned} R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} &= \frac{1}{A}\Big(\frac{A''}{2B} - \frac{A'B'}{4B^2} - \frac{A'^2}{4AB} + \frac{A'}{rB}\Big) - \frac{1}{B}\Big(\frac{B'}{rB} + \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A''}{2A} + \frac{A'^2}{4A^2}\Big) + \\ &- \frac{1}{r^2}\Big(-\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} + 1\Big) - \frac{1}{r^2 \sin^\theta}\sin^2\theta\Big(-\frac{1}{B} + \frac{rB'}{2B^2} - \frac{rA'}{2AB} + 1\Big) = \\ &= \frac{A''}{AB} - \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{A'^2}{2A^2B} + \frac{2A'}{rAB} - \frac{2B'}{rB^2} + \frac{2}{r^2B} - \frac{2}{r^2} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Capitolo 5

Le simmetrie di Noether

L'approccio alle simmetrie di Noether permette di ridurre la dinamica di un sistema. Scopo del metodo, infatti, è quello di costruire un campo vettoriale che, contratto con la Lagrangiana di punto, fa sì che possano essere trovate, se esistono, le quantità conservate della dinamica. Quindi è possibile riscrivere la Lagrangiana originale in termini di un nuovo insieme di variabili in cui appaiono esplicitamente quelle cicliche. Il numero di variabili cicliche coincide con quello delle quantità conservate. Questa tecnica, dunque, riduce l'ordine di derivazione delle equazioni e semplifica il procedimento per ottenere soluzioni esatte.

In questo capitolo, analizzeremo il metodo di Noether per il calcolo delle simmetrie e lo applicheremo, in particolare, al caso della Lagrangiana $f(R)$ in Teorie Estese della Gravitazione.

5.1 Il metodo

Sia $\mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i)$ una Lagrangiana indipendente dal tempo e non degenere, ossia tale che:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \det H_{ij} \overset{def}{=} \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\| \neq 0$$

Generalmente, nei problemi di meccanica analitica, $\mathcal{L}$ è del tipo:

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}) \tag{5.1}$$

dove T e V sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale. In particolare, T è una forma quadratica in $\dot{\mathbf{q}}$ definita positiva. Ad $\mathcal{L}$ è associata poi la funzione energia:

$$E_{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - \mathcal{L} \tag{5.2}$$

che è proprio l'energia totale $T + V$. Osserviamo, però, che $\mathcal{L}$ può avere anche espressioni più complesse della (5.1) e la $E_{\mathcal{L}}$, come definita nella (5.2), può non avere nulla a che fare con l'energia fisica (continuando comunque ad essere una costante del moto) ed essere chiamata lo stesso "funzione energia". Nel nostro caso, $\mathcal{L}$ avrà sempre la forma (5.1).

Nel formalismo lagrangiano, dobbiamo considerare soltanto trasformazioni di punto. Ogni trasformazione invertibile e liscia delle posizioni $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ induce una trasformazione delle velocità nel modo seguente:

$$\dot{Q}^i(\mathbf{q}) = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial q^j}\dot{q}^j \tag{5.3}$$

La matrice $J = \| \partial Q^i / \partial q^j \|$ è lo Jacobiano della trasformazione sulle posizioni e si assume non nullo. Lo Jacobiano J' della trasformazione indotta si deriva facilmente e si ha che $J \neq 0 \to J' \neq 0$. Di solito, questa condizione non è soddisfatta su tutto lo spazio ma solo nell'intorno di un punto, per cui è detta *locale*.

Una trasformazione di punto $Q^i = Q^i(\mathbf{q})$ può dipendere da uno o più parametri. Supponiamo, ad esempio, che dipenda da un solo parametro ϵ, $Q^i = Q^i(\mathbf{q}, \epsilon)$, e che dia origine ad un gruppo di Lie ad un parametro. Per valori infinitesimi di ϵ, la trasformazione è generata da un campo vettoriale: ad esempio, $\partial/\partial x$ rappresenta una traslazione lungo l'asse x, $x(\partial/\partial y) - y(\partial/\partial x)$ una rotazione lungo l'asse z e così via. In generale, una trasformazione infinitesima di punto è rappresentata da un generico campo vettoriale su Q:

$$\mathbf{X} = \alpha^i(\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial q^i}$$

La trasformazione indotta (5.3) è rappresentata allora da:

$$\mathbf{X}^c = \alpha^i(\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{dt}\alpha^i(\mathbf{q})\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \tag{5.4}$$

$\mathbf{X}^c$ è detto *lift completo* di $\mathbf{X}$.

Una funzione $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è invariante sotto una trasformazione rappresentata da $\mathbf{X}^c$ se:

$$L_{\mathbf{X}^c} f \stackrel{def}{=} \alpha^i(\mathbf{q}) \frac{\partial f}{\partial q^i} + \left(\frac{d}{dt} \alpha^i(\mathbf{q}) \right) \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^j} = 0 \tag{5.5}$$

dove $L_{\mathbf{X}^c} f$ è la *derivata di Lie* di f. In particolare, se $L_{\mathbf{X}^c} f = 0$, allora $\mathbf{X}^c$ è una *simmetria* per la dinamica derivata da $\mathcal{L}$.

Consideriamo, ora, le equazioni di Eulero Lagrange per $\mathcal{L}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = 0 \tag{5.6}$$

e un campo vettoriale del tipo (5.4). Contraendo la (5.6) con le α^i, si ottiene:

$$\alpha^j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} \right) = 0 \tag{5.7}$$

Essendo:

$$\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = \alpha^j \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} = \frac{d}{dt} \left(\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \right) - \left(\frac{d\alpha^j}{dt} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}$$

da cui[1]:

$$\frac{d}{dt} \left(\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \right) = \alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} + \left(\frac{d\alpha^j}{dt} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \equiv \mathbf{X}[\mathcal{L}] \equiv L_{\mathbf{X}} \mathcal{L}$$

si ha che la (5.7)diventa:

$$\frac{d}{dt} \left(\alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \right) = L_{\mathbf{X}} \mathcal{L}$$

La conseguenza immediata è il *teorema di Noether*:

Se $L_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = 0$, allora la funzione[2] $\Sigma_0 = \alpha^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j}$ è una costante del moto.

[1]D'ora in poi, per alleggerire la notazione, scriveremo semplicemente $\mathbf{X}$ al posto di $\mathbf{X}^c$.

[2]L'equazione che definisce Σ_0 può essere espressa anche indipendentemente dalle coordinate come contrazione di $\mathbf{X}$ con la *1-forma di Cartan*:

$$\theta_{\mathcal{L}} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} dq^i$$

Per un generico campo vettoriale $\mathbf{Y} = y^i \partial / \partial x^i$ e una 1-forma $\beta = \beta_i dx^i$, abbiamo, per definizione, che $i_{\mathbf{Y}} \beta = \langle \beta, \mathbf{Y} \rangle = y^i \beta_i$. Per cui:

$$i_{\mathbf{X}} \theta_{\mathcal{L}} = \langle \theta_{\mathcal{L}}, \mathbf{X} \rangle = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \langle dq^i, \alpha^j \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{d\alpha^j}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \rangle = \alpha^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \equiv \Sigma_0$$

Sotto una trasformazione di punto, il campo vettoriale $\mathbf{X}$ diventa:

$$\mathbf{X}' = \left(i_{\mathbf{X}} dQ^k\right) \frac{\partial}{\partial Q^k} + \left(\frac{d}{dt}\left(i_{\mathbf{X}} dQ^k\right)\right) \frac{\partial}{\partial \dot{Q}^k}$$

Vediamo, quindi, che $\mathbf{X}'$ è ancora il *lift* di un campo vettoriale definito soltanto sullo spazio delle posizioni. Se $\mathbf{X}$ è una simmetria e scegliamo una trasformazione di punto tale che:

$$i_{\mathbf{X}} dQ^1 = 1; \qquad i_{\mathbf{X}} dQ^i = 0, \qquad i \neq 1 \tag{5.8}$$

otteniamo:

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial}{\partial Q^1}; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^1} = 0 \tag{5.9}$$

Quindi Q^1 è la *coordinata ciclica* e la dinamica può essere ridotta.
Osserviamo infine che:

- la trasformazione di coordinate definita dalla (5.8) non è unica;
- in generale,la soluzione dell'equazione (5.8) non è ben definita su tutto lo spazio ma è locale.
- è possibile che vengano trovati più campi $\mathbf{X}$, ad esempio $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$. Se essi commutano, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$, allora è possibile ottenere due coordinate cicliche risolvendo il sistema:

  $$i_{\mathbf{X}_1} dQ^1 = 1; \quad i_{\mathbf{X}_2} dQ^2 = 1; \quad i_{\mathbf{X}_1} dQ^i = 0, \quad i \neq 1; \quad i_{\mathbf{X}_2} dQ^j = 0, \quad j \neq 1$$

  I campi trasformati saranno $\partial/\partial Q^1$ e $\partial/\partial Q^2$. Se invece i campi non commutano, tale procedura non è applicabile perché le regole di commutazione sono preservate per diffeomorfismi. Notiamo, inoltre, che $\mathbf{X}_3 = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$ è ancora una simmetria: $L_{\mathbf{X}_3}\mathcal{L} = L_{\mathbf{X}_1} L_{\mathbf{X}_2}\mathcal{L} - L_{\mathbf{X}_2} L_{\mathbf{X}_1}\mathcal{L} = 0$. Se $\mathbf{X}_3$ è indipendente da $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$, possiamo continuare fino a quando i campi vettoriali non chiuderanno l'algebra di Lie.

5.2 L'approccio di Noether per la teoria $f(R)$ in simmetria sferica

Nei capitoli precedenti, abbiamo visto che l'azione:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[f(R) + \mathcal{L}] \tag{5.10}$$

descrive una teoria della gravitazione dove $f(R)$ è una funzione generica dello scalare di curvatura, g è il determinante del tensore metrico e $\mathcal{L}$ è la Lagrangiana di materia standard minimalmente accoppiata alla gravità
Abbiamo, inoltre, visto che uno spazio-tempo a simmetria sferica può essere descritto dalla metrica:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - M(r)\Omega^2 \tag{5.11}$$

Vogliamo, ora, ridurre l'azione (5.10) ad una forma con un numero finito di gradi di libertà, ossia nell'azione canonica:

$$S = \int dr\mathcal{L}(A, A', B, B', M, M', R, R')$$

dove R è, come sempre, lo scalare di curvatura e i potenziali A, B ed M costituiscono l'insieme di variabili indipendenti. Per ottenere la Lagrangiana di punto in questo insieme di coordinate, scriviamo:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[f(R) - \lambda(R - \bar{R})] \tag{5.12}$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange e $\bar{R}$ è lo scalare di Ricci espresso in termini della metrica (5.11):

$$\bar{R} = \frac{A''}{AB} - \frac{A'B'}{2AB^2} - \frac{A'^2}{2A^2B} + \frac{A'M'}{ABM} + \frac{2M''}{BM} - \frac{M'^2}{2BM^2} - \frac{B'M'}{B^2M} - \frac{2}{M}$$

che può essere riscritto anche nella forma più compatta:

$$\bar{R} = R^* + \frac{A''}{AB} + \frac{2M''}{BM}$$

dove R^* contiene derivate al primo ordine. Variando l'azione (5.12) rispetto ad R si ottiene il moltiplicatore di Lagrange $\lambda = f_R(R)$. Esprimendo, quindi, g ed R in termini di A, R ed M e sostituendo la λ appena determinata nell'azione, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
S &= \int dr A^{1/2}B^{1/2}M\left[f - f_R\left(R - R^* - \frac{A''}{AB}\frac{2M''}{BM}\right)\right] \\
&= \int dr\left[A^{1/2}B^{1/2}M\left(f - f_R\left(R - R^*\right)\right) - \left(\frac{f_R M}{A^{1/2}B^{1/2}}\right)' A' - 2\left(\frac{A^{1/2}}{B^{1/2}}f_R\right)' M'\right]
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Le due righe differiscono per una pura divergenza che può essere eliminata integrando per parti. Per cui, la Lagrangiana di punto è:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &- \frac{A^{1/2}f_R}{2MB^{1/2}}M'^2 - \frac{f_R}{A^{1/2}B^{1/2}}A'M' - \frac{Mf_{RR}}{A^{1/2}B^{1/2}}A'R' - \frac{2A^{1/2}f_{RR}}{B^{1/2}}R'M' + \\
&- A^{1/2}B^{1/2}\left[\left(2 + MR\right)f_R - Mf\right]
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

che è canonica perché compaiono soltanto le variabili e le loro derivate prime rispetto ad r. Se si scrivono le equazioni di campo, in particolare da quella per lo scalare di curvatura si ottengono dei vincoli per le coordinate configurazionali. Inoltre, il determinante dell'Hessiano $\left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right\|$ è nullo. Questo risultato dipende dall'assenza della velocità generalizzata B' nella Lagrangiana di punto (5.14). Ciò significa che la variabile metrica B non contribuisce alla dinamica e che le equazioni del moto per B devono essere considerate come ulteriori vincoli. Dunque questa Lagrangiana ha tre gradi di libertà e non quattro, come ci aspetteremmo a priori. Possiamo, allora, esprimere B in termini delle altre variabili e la (5.14) diventa:

$$
\mathbf{L} = \frac{\left[\left(2 + MR\right)f_R - Mf\right]}{M}\left[2M^2 f_{RR}A'R' + 2MM'\left(f_R A' + 2Af_{RR}R'\right) + Af_R M'^2\right]
\tag{5.15}
$$

Lo spazio delle configurazioni è costituito, quindi, da $\mathcal{Q} = \{A, M, R\}$ mentre lo spazio tangente da $\mathcal{TQ} = \{A, A', M, M', R, R'\}$. Applichiamo, finalmente, il metodo di Noether alla Lagrangiana (5.15) e vediamo se esiste qualche simmetria. Ciò significa, dunque, risolvere il sistema di equazioni proveniente dalla condizione $L_{\mathbf{X}}\mathbf{L} = 0$. Considerando il vettore dello spazio delle configurazioni $\underline{q} = (A, M, R)$ e definendo il vettore di Noether $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, il sistema assume la seguente forma:

$$(\partial_A \alpha_2) f_R + M(\partial_A \alpha_3) f_{RR} = 0 \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}&\frac{A}{M}\left((2+MR)\,\alpha_3 f_{RR} - \frac{2\alpha_2}{M} f_R\right) f_R + \\ &+ ((2+MR)\,f_R - Mf)\left(\left(\frac{\alpha_1}{M} + 2(\partial_M \alpha_1) + \right.\right.\\ &+ \left.\frac{2A}{M}(\partial_M \alpha_2)\right) f_R + A\left(\frac{\alpha_3}{M} + 4(\partial_M \alpha_3)\right) f_{RR}\Bigg) = 0\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$M(\partial_R \alpha_1) + 2A(\partial_R \alpha_2) = 0 \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_2\,(f - Rf_R)\,f_R - (2+MR)\,f_{RR} f_R M \alpha_3 - \\ &+ ((2+MR)\,f_R - Mf)\,((\alpha_3 + M\partial_M \alpha_3 + \\ &+\ 2A\partial_A \alpha_3)\,f_{RR} + \left(\partial_M \alpha_2 + \partial_A \alpha_1 + \frac{A}{M}\partial_A \alpha_2\right) f_R\Bigg) = 0\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}&(M\,(2+MR)\,\alpha_3 f_{RR} - 2\alpha_2 f_R)\,f_{RR} + \\ &+ ((2+MR)\,f_R - Mf)\,(f_R \partial_R \alpha_2 + (2\alpha_2 + M\partial_A \alpha_1\ + \\ &+\ 2A\partial_A \alpha_2 + M\partial_R \alpha_3)\,f_{RR} + M\alpha_3 f_{RRR}) = 0\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}&2A\,((2+MR)\,\alpha_3 f_{RR} - (f - Rf_R)\,\alpha_2)\,f_{RR} + \\ &+ ((2+MR)\,f_R - Mf)\left(\left(\partial_R \alpha_1 + \frac{A}{M}\partial_R \alpha_2\right) f_R + (2\alpha_1\ + \right.\\ &+\ 2A\partial_R \alpha_3 + M\partial_M \alpha_1 + 2A\partial_M \alpha_2)\,f_{RR} + 2A\alpha_3 f_{RRR}) = 0\end{aligned} \tag{5.21}$$

Scegliendo $f(R) = f_0 R^n$, il sistema è soddisfatto dal vettore di Noether:

$$\underline{\alpha} = ((3-2n)kA, -kM, kR) \tag{5.22}$$

dove n è un numero reale, k una costante di integrazione e f_0 una costante di accoppiamento dimensionale[3]. Ciò significa, allora, che per ogni $f(R) = R^n$ esiste (almeno) una simmetria di Noether e la costante del moto corrispondente:

$$\Sigma_0 = 2nkMR^{2n-3}[2n + (n-1)MR][(n-2)RA' - (2n^2 - 3n + 1)AR'] \tag{5.23}$$

[3]Che d'ora in poi poniamo uguale ad 1.

Capitolo 6

I wormhole in Teorie Estese della Gravitazione

In Relatività Generale abbiamo visto che i wormhole hanno una caratteristica particolare: il tensore impulso-energia vìola la NEC in prossimità della gola, ovvero $T_{\mu\nu}k^{\mu}k^{\nu} < 0$, e per questo la materia contenuta all'interno del wormhole è detta esotica. Tuttavia, nelle Teorie Estese della Gravitazione, è possibile imporre al tensore impulso-energia della materia standard di soddisfare le usuali condizioni sull'energia. Saranno, invece, i termini di curvatura di ordine superiore a supportare queste geometrie esotiche. L'idea, cioè, è quella di modificare opportunamente la parte geometrica delle equazioni di campo anziché la parte di materia con l'introduzione di fluidi esotici.

In questo capitolo analizzeremo due casi specifici di wormhole. Nel primo, considereremo una metrica di tipo Morris e Thorne che soddisfa, cioè, le proprietà geometriche necessarie affinché ci sia traversabilità. Nel secondo caso, invece, una metrica di tipo Schwarzschild, contenente, quindi, un orizzonte degli eventi e, di conseguenza, non traversabile.

6.1 Caso 1

Il caso della metrica di tipo Morris e Thorne rappresenta il fulcro di questo lavoro di tesi. Considerando, come nel caso di RG, la varietà di uno spazio-tempo sfericamente simmetrico, con due regioni asintoticamente piatte e coefficienti della metrica indipendenti dal tempo, arriveremo a determinare una classe di soluzioni *esatte* di wormhole traversabili, senza violare alcuna condizione sull'energia.
Vedremo, inoltre, come queste soluzioni siano direttamente connesse alla teoria di Noether: saranno le simmetrie e le quantità conservate a determinare la larghezza della gola del wormhole.

6.1.1 La forma della metrica

Partiamo da una metrica a simmetria sferica e indipendente dal tempo:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{6.1}$$

e prendiamo, in particolare:

$$A(r) = e^{\frac{r_0}{r}} \qquad\qquad B(r) = \frac{1}{1-\varphi(r)} \tag{6.2}$$

per cui la (6.1) diventa:

$$ds^2 = e^{\frac{r_0}{r}}dt^2 - \frac{dr^2}{1-\varphi(r)} - r^2 d\Omega^2 \tag{6.3}$$

ovvero una metrica di tipo Morris e Thorne, con $2\phi = r_0/r$ e $b(r)/r = \varphi(r)$. La (6.3) rappresenta, quindi, un wormhole, la cui gola è definita per quel valore della coordinata radiale, $r = r^*$, tale che: $\varphi(r^*) = 1$. Si osservi che la componente g_{00} della metrica è ben definita $\forall r \in [r^*, +\infty)$ e, inoltre, per $r \to \infty$, $e^{r_0/r} \to 1$.
La funzione $\varphi(r)$, invece, deve violare la *flaring-out condition*, che abbiamo visto nel §3.2, e che in questo caso specifico è:

$$\frac{\varphi'}{2\varphi^2} < 0$$

e soddisfare la condizione asintotica:

$$\varphi \to 0 \quad per \quad r \to \infty$$

Queste sono le proprietà che devono essere soddisfatte dai coefficienti della metrica affinché possa esserci traversabilità.

6.1.2 Il tensore impulso-energia

Vediamo, ora, qual è la forma del tensore impulso-energia e quali le annesse condizioni sull'energia.
Consideriamo una teoria $f(R)$ di tipo *power-law*:

$$f(R) = f_0 R^{1+\epsilon} \tag{6.4}$$

con f_0 costante dimensionale e ϵ numero reale. Ricordiamo che le equazioni di campo di Einstein nel caso di una teoria $f(R)$ sono:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{f_R(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Big[f(R) - R f_R(R) \Big] + f_R(R)_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Box f_R(R) \right\} + \frac{T^{(m)}_{\mu\nu}}{f_R(R)}$$

che possono essere riscritte isolando il tensore impulso-energia:

$$T^{(m)}_{\mu\nu} = f_R(R) \Big[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \Big] - \Big\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Big[f(R) - R f_R(R) \Big] + f_R(R)_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Box f_R(R) \Big\}$$

oppure con un indice covariante e uno controvariante come:

$$T^{\mu(m)}_{\nu} = f_R(R) \Big[R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R \Big] - \Big\{ \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu \Big[f(R) - R f_R(R) \Big] + \partial^\mu \partial_\nu f_R(R) - \delta^\mu_\nu \Box f_R(R) \Big\} \tag{6.5}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $f(R)$ e le sue derivate sono funzioni scalari della coordinata radiale.
Allora, per determinare le componenti del tensore impulso-energia, iniziamo col calcolare quelle del tensore di Ricci, per poi passare allo scalare di curvatura e le sue derivate. Considerando che:

$$R^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} R_{\alpha\nu}$$

e le (4.25)-(4.30) del §4.2, si ha:

$$R^0_0 = g^{00} R_{00} = \frac{r_0}{4r^4} [r_0 - r_0 \varphi + r^2 \varphi'] \tag{6.6}$$

$$R^1_1 = g^{11} R_{11} = \frac{1}{4r^4} [r^2 (r_0 - 4r) \varphi' + r_0 (r_0 + 4r)(1 - \varphi)] \tag{6.7}$$

$$R^2_2 = g^{22} R_{22} = -\frac{1}{2r^3} [(2r - r_0) \varphi + r^2 \varphi' + r_0] \tag{6.8}$$

$$R^3_3 = g^{33} R_{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \, R_{22} = -\frac{1}{r^2} R_{22} = g^{22} R_{22} = R^2_2 \tag{6.9}$$

Per cui, lo scalare di curvatura è:

$$R = \frac{1}{2r^4}[r_0^2 - (r_0^2 + 4r^2)\varphi + r^2(r_0 - 4r)\varphi'] \tag{6.10}$$

Andando a calcolare le derivate di R rispetto ad r, invece, otteniamo:

$$R' = \frac{1}{2r^5}[-r_0 r(2r + r_0)\varphi' + r^3(r_0 - 4r)\varphi'' + 4(2r^2 + r_0^2)\varphi - 4r_0^2] \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} R'' = \frac{1}{2r^6}[&r^2(-4rr_0 + 4r^2 - r_0^2)\varphi'' + 2r(3r_0 r + 4r_0^2 + 4r^2)\varphi' + \\ &+ r^4(r_0 - 4r)\varphi''' - 4(6r^2 + 5r_0^2)\varphi + 20r_0^2] \end{aligned} \tag{6.12}$$

Esplicitiamo, infine, il termine $\Box f_R(R)$ che compare nella (6.5). Tenendo conto del fatto che:

$$f(R) = R^{1+\epsilon} \quad \Rightarrow \quad f_R(R) = (1+\epsilon)R^\epsilon$$

si ha:

$$\Box f_R(R) = -\epsilon(1+\epsilon)R^{\epsilon-1}\left[\frac{2}{r}R' + (\epsilon - 1)\frac{R'^2}{R} + R''\right] \tag{6.13}$$

Osserviamo, inoltre, che, poiché $f(R)$ e derivate dipendono solo dalla coordinata radiale r, le derivate di $f_R(R)$ rispetto alle altre coordinate (t, θ e ϕ) sono nulle e il contenuto della parentesi graffa nella (6.5) è lo stesso per T_0^0, T_2^2 e T_3^3. Lo calcoliamo a parte. Considerando la (6.10), la (6.11), la (6.12) e la (6.13), si ha:

$$\begin{aligned} &-\epsilon\frac{1}{2}R^{1+\epsilon} + \epsilon(1+\epsilon)R^{\epsilon-1}\left[\frac{2}{r}R' + (\epsilon-1)\frac{R'^2}{R} + R''\right] = \\ &= -\epsilon\left[\frac{r_0^2 + r^2(r_0 - 4r)\varphi' - (r_0^2 + 4r^2)\varphi}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2} + \right. \\ &- \frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r_0^2 + r^2(r_0 - 4r)\varphi' - (r_0^2 + 4r^2)\varphi]^2}\left[12r_0^2 + r^4(r_0 - 4r)\varphi''' + \right. \\ &- r^2(2rr_0 + 4r^2 + r_0^2)\varphi'' + 2r(rr_0 + 3r_0^2 + 4r^2)\varphi' - 4(2r^2 + 3r_0^2)\varphi + \\ &\left.\left. + (\epsilon - 1)\frac{\left(r^3(r_0 - 4r)\varphi'' - r_0 r(2r + r_0)\varphi' + 4(2r^2 + r_0^2)\varphi - 4r_0^2\right)^2}{r_0^2 + r^2(r_0 - 4r)\varphi' - (r_0^2 + 4r^2)\varphi}\right]\right\} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Adesso abbiamo tutti gli strumenti per poter calcolare le componenti del tensore impulso-energia:

1) componente 00:

$$
\begin{aligned}
T_0^0 =& \frac{1+\epsilon}{r^2}\Big(r\varphi'+\varphi\Big)\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon}+\\
&+\epsilon\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2}+\right.\\
&-\frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2]^2}\Bigg[12r_0^2+r^4(r_0-4r)\varphi'''+\\
&-r^2(2rr_0+4r^2+r_0^2)\varphi''+2r(rr_0+3r_0^2+4r^2)\varphi'-4(2r^2+3r_0^2)\varphi+\\
&\left.+(\epsilon-1)\frac{\Big(r^3(r_0-4r)\varphi''-r_0r(2r+r_0)\varphi'+4(2r^2+r_0^2)\varphi-4r_0^2\Big)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}\Bigg]\right\}
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

2) componente 11:

$$
\begin{aligned}
T_1^1 =& \frac{1+\epsilon}{r^3}\Big[(r-r_0)\varphi+r_0\Big]\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon}+\\
&+\epsilon\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2}+\right.\\
&-\frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2]^2}\Bigg[r^4(r_0-4r)\varphi\varphi'''+\\
&+4\Big(r_0^2(2-5\varphi)+2r^2(2-3\varphi)\Big)\varphi+\\
&+r^2\Big(2rr_0(1-2\varphi)+4r^2(\varphi-2)-r_0^2\varphi\Big)\varphi''+\\
&+2r\Big(rr_0(3\varphi-2)+r_0^2(4\varphi-1)+4r^2\varphi\Big)\varphi'+4r_0^2(5\varphi-2)+\\
&\left.+(\epsilon-1)\varphi\frac{\Big(r^3(r_0-4r)\varphi''-r_0r(2r+r_0)\varphi'+4(2r^2+r_0^2)\varphi-4r_0^2\Big)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}\Bigg]\right\}
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

3) componente 22:

$$
\begin{aligned}
T^2_2 = & -\frac{1+\epsilon}{4r^4}\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon} \times \\
& \times \left[r^2(r_0-2r)\varphi' - r_0(2r+r_0)\varphi + r_0^2 + 2r\right] + \\
& + \epsilon\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon} \Bigg\{ \frac{1}{2} + \\
& - \frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2]^2}\Bigg[12r_0^2 + r^4(r_0-4r)\varphi''' + \\
& - r^2(2rr_0 + 4r^2 + r_0^2)\varphi'' + 2r(rr_0 + 3r_0^2 + 4r^2)\varphi' - 4(2r^2+3r_0^2)\varphi + \\
& + (\epsilon - 1)\frac{\left(r^3(r_0-4r)\varphi'' - r_0 r(2r+r_0)\varphi' + 4(2r^2+r_0^2)\varphi - 4r_0^2\right)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

4) componente 33:

$$
T^3_3 = T^2_2 \tag{6.18}
$$

Per scrivere le condizioni sull'energia, consideriamo un fluido anisotropo, per il quale il tensore impulso-energia ha la seguente forma generale:

$$
T^\mu_\nu = (\rho + p_t)V^\mu V_\nu - p_t\delta^\mu_\nu + (p_r - p_t)\xi^\mu\xi_\nu \tag{6.19}
$$

dove:

- p_t è la pressione tangenziale;
- p_r è la pressione radiale;
- ρ è la densità di energia

mentre il quadrivettore velocità V_μ e il quadrivettore radiale ξ_μ soddisfano le seguenti condizioni:

$$
\begin{aligned}
V^\mu &= e^{-\frac{a}{2}}, & V^\mu V_\mu &= 1, & a &= \frac{r_0}{r} \\
\xi^\mu &= e^{-\frac{b}{2}}\delta^\mu_1, & \xi^\mu\xi_\mu &= -1, & b &= ln\left(\frac{1}{1-\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

Dunque, le uniche componenti non nulle di T^μ_ν sono quelle diagonali:

1)
$$T^0_0 = \rho \tag{6.20}$$

2)
$$T^1_1 = -p_r \tag{6.21}$$

3)
$$T^2_2 = -p_t \tag{6.22}$$

4)
$$T^3_3 = -p_t \tag{6.23}$$

che possiamo scrivere in forma compatta come:

$$T^\mu_\nu = diag(\rho, -p_r, -p_t, -p_t) \tag{6.24}$$

Osserviamo che la (6.22) e la (6.23) danno la stessa equazione, essendo $T^3_3 = T^2_2$. Confrontando le due espressioni di T^0_0 date dalla (6.15) e dalla (6.20), ricaviamo ρ:

$$\begin{aligned}
\rho = \; & \frac{1+\epsilon}{r^2}\Big(r\varphi' + \varphi\Big)\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon} + \\
& + \epsilon\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\Bigg\{\frac{1}{2} + \\
& - \frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2]^2}\Bigg[12r_0^2 + r^4(r_0-4r)\varphi''' + \\
& - r^2(2rr_0 + 4r^2 + r_0^2)\varphi'' + 2r(rr_0 + 3r_0^2 + 4r^2)\varphi' - 4(2r^2+3r_0^2)\varphi + \\
& + (\epsilon-1)\frac{\Big(r^3(r_0-4r)\varphi'' - r_0 r(2r+r_0)\varphi' + 4(2r^2+r_0^2)\varphi - 4r_0^2\Big)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Anaolgamente, dalla (6.16) e dalla (6.21), otteniamo p_r:

$$
\begin{aligned}
p_r = &-\frac{1+\epsilon}{r^3}\Big[(r-r_0)\varphi + r_0\Big]\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon} + \\
&-\epsilon\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\Bigg\{\frac{1}{2}+ \\
&-\frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2]^2}\Bigg[r^4(r_0-4r)\varphi\varphi''' + \\
&+4\Big(r_0^2(2-5\varphi)+2r^2(2-3\varphi)\Big)\varphi + \\
&+r^2\Big(2rr_0(1-2\varphi)+4r^2(\varphi-2)-r_0^2\varphi\Big)\varphi'' + \\
&+2r\Big(rr_0(3\varphi-2)+r_0^2(4\varphi-1)+4r^2\varphi\Big)\varphi' + 4r_0^2(5\varphi-2) + \\
&+(\epsilon-1)\varphi\frac{\Big(r^3(r_0-4r)\varphi'' - r_0r(2r+r_0)\varphi' + 4(2r^2+r_0^2)\varphi - 4r_0^2\Big)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Infine, dalla (6.17) e dalla (6.22), ricaviamo p_t:

$$
\begin{aligned}
p_t = &\frac{1+\epsilon}{4r^4}\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon}\times \\
&\times\Bigg[r^2(r_0-2r)\varphi' - r_0(2r+r_0)\varphi + r_0^2 + 2r\Bigg] + \\
&-\epsilon\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\Bigg\{\frac{1}{2}+ \\
&-\frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2]^2}\Bigg[12r_0^2 + r^4(r_0-4r)\varphi''' + \\
&-r^2(2rr_0+4r^2+r_0^2)\varphi'' + 2r(rr_0+3r_0^2+4r^2)\varphi' - 4(2r^2+3r_0^2)\varphi + \\
&+(\epsilon-1)\frac{\Big(r^3(r_0-4r)\varphi'' - r_0r(2r+r_0)\varphi' + 4(2r^2+r_0^2)\varphi - 4r_0^2\Big)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Una volta note ρ, p_t e p_r, è possibile scrivere le condizioni sull'energia, in particolare la NEC. In tal caso, si hanno le due seguenti disequazioni:

1)

$$
\begin{aligned}
\rho + p_t = &\frac{1+\epsilon}{4r^4}\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi + r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon}\Bigg[r^2(2r+r_0)\varphi' + \\
&+(4r^2-2r_0r-r_0^2)\varphi + 2r + r_0^2\Bigg] \geq 0
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\rho + p_r = &\frac{1+\epsilon}{r^3}\Big[r_0(\varphi-1)+r^2\varphi'\Big]\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}{2r^4}\right]^{\epsilon}+\\
&-\epsilon(1-\varphi)\left[\frac{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}{2r^4}\right]^{1+\epsilon}\times\\
&\times\frac{2(1+\epsilon)r^2}{[r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2]^2}\Bigg[20r_0^2+r^4(r_0-4r)\varphi'''+\\
&+r^2(4r^2-4rr_0-r_0^2)\varphi''-4(5r_0^2+6r^2)\varphi+2r(3rr_0+4r_0^2+4r^2)\varphi'+\\
&+(\epsilon-1)\varphi\frac{\Big(r^3(r_0-4r)\varphi''-r_0r(2r+r_0)\varphi'+4(2r^2+r_0^2)\varphi-4r_0^2\Big)^2}{r^2(r_0-4r)\varphi'-(r_0^2+4r^2)\varphi+r_0^2}\Bigg]\geq 0
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

Consideriamo il caso particolare del sistema costituito dalle due equazioni:

$$\rho + p_t = 0$$

$$\rho + p_r = 0$$

Una classe di soluzioni esatte del sistema, valide per $\epsilon > -1$ e $\epsilon \neq 0$, è data da:

$$\varphi(r) = \frac{r_0^2(r_0^4-20r_0^3r+156r_0^2r^2-568r_0r^3+824r^4)}{r_0(r_0-4r)^5}+c_1\frac{r^4e^{-r_0/r}}{(4r-r_0)^5} \tag{6.30}$$

con c_1 costante di integrazione. Si nota subito come la (6.30) soddisfi la condizione asintotica: tende a zero per $r\to\infty$. Sottolineiamo anche che essa è valida per tutti i numeri reali maggiori di -1 e diversi da 0, vale a dire che non è più soluzione nel caso di Relatività Generale ($f(R)=R$), come ci saremmo aspettati. Tuttavia basta una piccola perturbazione della teoria per "bucare" lo spazio e renderlo traversabile. Abbiamo trovato, quindi, una classe di funzioni $\varphi(r)$ che soddisfano le proprietà geometriche necessarie per la traversabilità del wormhole e, soprattutto, le condizioni sull'energia. Queste ultime, in particolare, ci garantiscono non solo la traversabilità della struttura ma anche la sua stabilità, indipendentemente dalla validità o meno del teorema di Birkhoff.

6.1.3 La *flaring-out condition*

La *flaring-out condition* gioca un ruolo fondamentale nella fisica dei wormhole. La sua validità, infatti, implica la violazione delle condizioni sull'energia, come abbiamo potuto vedere nel §3.2.2 e, in particolare, dalla (3.25). Vediamo cosa succede quando la si applica alla metrica in esame, ovvero la (6.3). Innanzitutto, osserviamo che la (3.13), in questo caso, diventa:

$$\frac{\varphi'(r)}{2\varphi^2(r)} < 0 \tag{6.31}$$

essendo $b(r)/r = \varphi(r)$. Dunque, la *flaring-out condition* è violata se:

$$\frac{\varphi'(r)}{2\varphi^2(r)} \geq 0 \tag{6.32}$$

Tenendo conto della soluzione (6.30) e della sua derivata:

$$\begin{aligned}\varphi'(r) = \frac{1}{r_0(r_0-4r)^6}\Big\{&(r_0-4r)\Big[-4c_1 r_0 r^3 e^{-r_0/r} - c_1 r_0^2 r^2 e^{-r_0/r} + \\ &+ r_0^2(-20r_0^3 + 312r_0^2 r - 1704 r_0 r^2 + 3296 r^3)\Big] - 20 c_1 r_0 r^4 e^{-r_0/r} + \\ &+ 20 r_0^2(r_0^4 - 20r_0^3 r + 156 r_0^2 r - 568 r_0 r^3 + 824 r^4)\Big\}\end{aligned} \tag{6.33}$$

la (6.32) diventa:

$$\begin{aligned}&\frac{r_0}{r^2}\frac{e^{r_0/r}}{r_0^2+4r^2}\Big[(r_0-4r)(-20r_0^3 + 312r_0^2 r - 1704 r_0 r^2 + 3296 r^3) + \\ &+ 20(r_0^4 - 20r_0^3 r + 156 r_0^2 r - 568 r_0 r^3 + 824 r^4)\Big] \geq c_1\end{aligned} \tag{6.34}$$

Da tutta questa analisi, si evince, quindi, che è possibile ottenere, nell'ambito delle Teorie Estese della Gravitazione, soluzioni *esatte* di wormhole traversabili senza che venga violata alcuna condizione sull'energia ma, semplicemente, vincolando la funzione $\varphi(r)$ a soddisfare o meno opportune condizioni al contorno, come la *flaring-out condition* e la condizione asintotica.

6.1.4 Le simmetrie

Nel capitolo precedente, abbiamo studiato e calcolato le simmetrie di Noether per la Lagrangiana $f(R)$, mettendoci anche nel caso specifico di una teoria di tipo *power-law*, ovvero $f(R) = R^{1+\epsilon}$.

Applichiamo, dunque, i risultati ottenuti nel §5.2 per la metrica (6.3). A tal scopo, ricordiamo che $A = e^{r_0/r}$, $M = r^2$ e che, dalla (4.31), si ricava:

$$R = \frac{1}{2r^4}[r_0^2 + r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi] \tag{6.35}$$

Per cui, in base alla (5.22), il vettore di Noether risulta avere le seguenti componenti:

$$\alpha_1 = (1-2\epsilon)ke^{r_0/r}$$
$$\alpha_2 = -kr^2$$
$$\alpha_3 = \frac{k}{2r^4}[r_0^2 + r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi]$$

mentre, dalla (5.23), si ottiene per la costante del moto:

$$\Sigma_0 = -\frac{k(1+\epsilon)}{r^4}e^{r_0/r}\left[\frac{r_0^2 + r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi}{2r^4}\right]^{2\epsilon-1}\Bigg[2(1+\epsilon)+ + \frac{\epsilon}{2r^2}\Big(r_0^2 + r^2(r_0-4r)\varphi' - (r_0^2+4r^2)\varphi\Big)\Bigg]\Bigg[(\epsilon-1)r_0\Big(r_0^2 + r^2(r_0-4r)\varphi'+ - (r_0^2+4r^2)\varphi\Big) + r\epsilon(2\epsilon+1)\Big(r^3(r_0-4r)\varphi'' - r_0 r(2r+r_0)\varphi'+ + 4(2r^2+r_0^2)\varphi - 4r_0^2\Big)\Bigg] \tag{6.36}$$

In prossimità della gola del wormhole, ovvero per $r = r^*$ e $\varphi(r^*) = 1$, quest'ultima diventa:

$$\Sigma_0|_{r^*} = -\frac{8k(1+\epsilon)}{r^{*2}}e^{r_0/r^*}\Big(-\frac{2}{r^{*2}}\Big)^{2\epsilon-1}\big[r_0(1-\epsilon) + 2r^*\epsilon(2\epsilon+1)\big] \tag{6.37}$$

Questa equazione evidenzia un risultato importante: sono le simmetrie e la costante del moto a determinare la larghezza della gola. Dunque, la teoria di Noether non solo ci permette di calcolare le quantità conservate della struttura ma di definire la struttura stessa.

Osserviamo, infine, che nel caso di Relatività Generale ($\epsilon = 0$) e per $r = \frac{r_0}{\log\left(\frac{R_S}{4kr_0}\right)}$, la (6.36) diventa:

$$\Sigma_0 = R_S \equiv 2GM$$

e otteniamo, quindi, il valore della costante del moto per la soluzione di Schwarzschild.

6.2 Caso 2

Il caso della metrica di tipo Schwarzschild è quello di una geometria con orizzonte degli eventi, dunque non traversabile. Tuttavia, tale analisi risulta interessante sia da un punto di vista puramente formale, sia per il legame con le simmetrie di Noether.

6.2.1 La forma della metrica

Partiamo, come per il Caso 1, da una metrica a simmetria sferica e indipendente dal tempo:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{6.38}$$

ma, stavolta, scegliamo:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} = 1 + \frac{2\phi(r)}{c^2} \tag{6.39}$$

per cui la (6.38) diventa:

$$ds^2 = \left[1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}\right] dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2\phi(r)}{c^2}} - r^2 d\Omega^2 \tag{6.40}$$

ovvero una metrica di tipo Schwarzschild (o ponte di Einstein-Rosen generalizzato), dove $\phi(r)$ è il potenziale gravitazionale generato da una massa puntiforme m alla distanza r.

6.2.2 Il tensore impulso-energia

Considerando, come prima, la (6.5) e la (6.4), calcoliamo le componenti 00, 11, 22 e 33 del tensore impulso-energia per la metrica (6.40), ottenendo i seguenti risultati:

1) componente 00:

$$\begin{aligned} T_0^0 = &\frac{1+\epsilon}{r^2}\left[\frac{r^2A'' + 4rA' + 2A - 2}{r^2}\right]^{\epsilon}\Big(1 - A - rA'\Big) + \\ &+ \epsilon\left[\frac{r^2A'' + 4rA' + 2A - 2}{r^2}\right]^{1+\epsilon}\Bigg\{\frac{1}{2} + \\ &- \frac{1+\epsilon}{[r^2A'' + 4rA' + 2A - 2]^2}\Bigg[r^4A^{(4)} + 6r^3A''' + 2r^2A'' + \\ &- 4rA' + 4A - 4 + (\epsilon - 1)\frac{(r^3A''' + 4r^2A'' - 2rA' - 4A + 4)^2}{r^2A'' + 4rA' + 2A - 2}\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{6.41}$$

2) componente 11:

$$
\begin{aligned}
T_1^1 &= (1+\epsilon)\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{\epsilon}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{A'}{r}-\frac{A}{r^2}\right)+\\
&+\epsilon\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2}+\right.\\
&-\frac{1+\epsilon}{[r^2A''+4rA'+2A-2]^2}\Big[(1-A)r^4A^{(4)}+\\
&+2(3-2A)r^3A'''+2(1+3A)r^2A''-12A^2+16A-4rA'-4+\\
&\left.+(\epsilon-1)(1-A)\frac{(r^3A'''+4r^2A''-2rA'-4A+4)^2}{r^2A''+4rA'+2A-2}\Big]\right\}
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

3) componente 22:

$$
\begin{aligned}
T_2^2 &= -\frac{1+\epsilon}{2r^2}\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{\epsilon}\Big(2rA'+r^2A''\Big)+\\
&+\epsilon\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2}+\right.\\
&-\frac{1+\epsilon}{[r^2A''+4rA'+2A-2]^2}\Big[r^4A^{(4)}+6r^3A'''+2r^2A''-4rA'+\\
&\left.+4A-4+(\epsilon-1)\frac{(r^3A'''+4r^2A''-2rA'-4A+4)^2}{r^2A''+4rA'+2A-2}\Big]\right\}
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

4) componente 33:

$$
T_3^3 = T_2^2 \tag{6.44}
$$

Per determinare le condizioni sull'energia, mettiamoci di nuovo nel caso del fluido anisotropo descritto dalla (6.19), le cui uniche componenti non nulle sono quelle diagonali, con l'unica differenza che il quadrivettore velocità V_μ e il quadrivettore radiale ξ_μ sono definiti da:

$$
\begin{aligned}
&V^\mu = e^{-\frac{a}{2}}, \qquad && V^\mu V_\mu = 1, \qquad && a = ln(A)\\
&\xi^\mu = e^{-\frac{b}{2}}\delta_1^\mu, \qquad && \xi^\mu\xi_\mu = -1, \qquad && b = ln\left(\frac{1}{A}\right)
\end{aligned}
$$

.

Confrontando le due espressioni di T_0^0 date dalla (6.41) e dalla (6.20), ricaviamo ρ:

$$\begin{aligned}\rho = &\frac{1+\epsilon}{r}\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{\epsilon}\left(\frac{rA''}{2}+A'\right)+\\ &+\epsilon\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{1+\epsilon}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1+\epsilon}{[r^2A''+4rA'+2A-2]^2}\left[r^4A^{(4)}+\right.\right.\\ &+6r^3A'''+2r^2A''-4rA'+4A-4+\\ &\left.\left.+(\epsilon-1)\frac{(r^3A'''+4r^2A''-2rA'-4A+4)^2}{r^2A''+4rA'+2A-2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.45}$$

Anaolgamente, dalla (6.42) e dalla (6.21), otteniamo p_r:

$$\begin{aligned}p_r = &-(1+\epsilon)\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{\epsilon}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{A'}{r}-\frac{A}{r^2}\right)+\\ &-\epsilon\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2}+\right.\\ &-\frac{1+\epsilon}{[r^2A''+4rA'+2A-2]^2}\left[(1-A)r^4A^{(4)}+\right.\\ &+2(3-2A)r^3A'''+2(1+3A)r^2A''-12A^2+16A-4rA'-4+\\ &\left.\left.+(\epsilon-1)(1-A)\frac{(r^3A'''+4r^2A''-2rA'-4A+4)^2}{r^2A''+4rA'+2A-2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.46}$$

Infine, dalla (6.43) e dalla (6.22), ricaviamo p_t:

$$\begin{aligned}p_t = &\frac{1+\epsilon}{2r^2}\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{\epsilon}\left(2rA'+r^2A''\right)+\\ &-\epsilon\left[\frac{r^2A''+4rA'+2A-2}{r^2}\right]^{1+\epsilon}\left\{\frac{1}{2}+\right.\\ &-\frac{1+\epsilon}{[r^2A''+4rA'+2A-2]^2}\left[r^4A^{(4)}+\right.\\ &+6r^3A'''+2r^2A''-4rA'+4A-4+\\ &\left.\left.+(\epsilon-1)\frac{(r^3A'''+4r^2A''-2rA'-4A+4)^2}{r^2A''+4rA'+2A-2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.47}$$

Note, quindi, p_t, p_r e ρ, andiamo ad analizzare le condizioni sull'energia. Consideriamo il caso particolare del sistema costituito dalle due equazioni:

$$\rho + p_t = 0$$
$$\rho + p_r = 0$$

Una classe di soluzioni esatte del sistema, valide per $\epsilon > -1$ e $\epsilon \neq 0$, è data da:

$$A(r) = 1 + \frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2} \tag{6.48}$$

Sostituendo la (6.39) in quest'ultima equazione, otteniamo la forma esatta del potenziale gravitazionale:

$$\phi(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{r} + \frac{c_2}{r^2}\right) \tag{6.49}$$

dove abbiamo posto $c = 1$. Osserviamo che, per $r \to \infty$, $\phi(r)$ tende a 0 e $A(r)$ a 1, come dev'essere.

6.2.3 Le simmetrie

Applichiamo, anche in questo caso, i risultati ottenuti nel §5.2 per la metrica (6.40). A tal scopo, ricordiamo che $M = r^2$ e che, dalla (4.31), si ricava:

$$R = \frac{1}{r^2}(r^2 A'' + 4rA' + 2A - 2) \tag{6.50}$$

Per cui, in base alla (5.22), il vettore di Noether risulta avere le seguenti componenti:

$$\alpha_1 = (1 - 2\epsilon)kA$$
$$\alpha_2 = -kr^2$$
$$\alpha_3 = \frac{k}{r^2}(r^2 A'' + 4rA' + 2A - 2)$$

mentre, dalla (5.23), si ottiene per la costante del moto:

$$\begin{aligned}\Sigma_0 = 2k(1+\epsilon)r^2 \left[\frac{r^2 A'' + 4rA' + 2A - 2}{r^2}\right]^{2\epsilon - 1} \Big[2(1+\epsilon) + \epsilon(r^2 A'' + \\ + 4rA' + 2A - 2)\Big] \Big[\frac{A'}{r^2}(\epsilon - 1)(r^2 A'' + 4rA' + 2A - 2) + \\ - \frac{A}{r^3}\epsilon(2\epsilon + 1)(r^3 A''' + 4r^2 - 2rA' - 4A + 4)\Big]\end{aligned} \tag{6.51}$$

Conclusioni

Lo studio della Relatività Generale ci ha mostrato che esistono diverse soluzioni di tipo wormhole delle equazioni di campo di Einstein ma tutte presentano dei problemi relativamente alla traversabilità. La soluzione di tipo Schwarzschild è caratterizzata principalmente dalla presenza di un orizzonte degli eventi. Ciò implica che qualunque osservatore provi ad attraversare la gola del wormhole, cadrà inevitabilmente sulla singolarità. Dunque, la forma della metrica ne impedisce a priori la traversabilità. Da qui l'idea di Morris e Thorne di considerare metriche non singolari, quindi ben definite per ogni valore della coordinata radiale. In più, per tener conto della validità del teorema di Birkhoff in RG, secondo cui l'unica soluzione delle equazioni di campo a simmetria sferica e nel vuoto è quella di Schwarzschild, la necessità di inserire nel modello materia o campi aventi un tensore impulso-energia non nullo. La loro analisi, però, portò ad vincolo molto forte, $\tau_0 > \rho_0 c^2$: nella gola del wormhole, la tensione radiale deve essere sufficientemente grande da eccedere la densità totale di massa-energia. Questo significa che il tensore impulso-energia vìola la *null energy condition* alla gola, $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu < 0$. Per cui, nell'ambito della Relatività Generale, soltanto considerando materia esotica, ovvero un fluido con densità di energia e pressione negative, è possibile ottenere una struttura che sia traversabile.

Tuttavia, nel contesto delle Teorie Estese della Gravitazione, abbiamo visto come sia possibile ottenere wormhole stabili indipendentemente dal particolare fluido di materia ma, semplicemente, considerando opportune geometrie. Partendo da una metrica di tipo Morris e Thorne, con $2\phi = r_0/r$ e $b(r) = \varphi(r)$, e considerando una teoria $f(R)$ di tipo *power-law*, abbiamo determinato una classe di soluzioni esatte $\varphi(r)$ che soddisfa tutte le condizioni richieste. La geometria, infatti, risulta essere

non singolare, ossia ben definita $\forall r \in [r^*, +\infty)$, con r^* gola del wormhole, e asintoticamente piatta (per $r \to \infty$ si ottiene lo spazio-tempo di Minkowski). La NEC è pienamente soddisfatta; in particolare, le soluzioni $\varphi(r)$ trovate verificano le condizioni di stretta uguaglianza $\rho + p_t = 0$ e $\rho + p_r = 0$. Infine, la *flaring-out condition*, che in Relatività Generale implicava il vincolo sull'energia di cui sopra, è violata. Dunque, non è più la materia esotica a supportare tali strutture e renderle traversabili ma sono termini di ordine superiore nello scalare di curvatura. Abbiamo, cioè, opportunamente modificato soltanto la parte geometrica delle equazioni di campo di Einstein, lasciando invariata quella di materia (standard).
Ma l'aspetto ancora più importante di tutta questa analisi è che tali metriche risultano essere connesse alle simmetrie di Noether. I corrispondenti vettore di Noether e costante del moto determinano la larghezza della gola: i wormhole sono, quindi, una conseguenza delle simmetrie di Noether della teoria gravitazionale.
Le soluzioni esatte ottenute non costituiscono soltanto un semplice risultato teorico ma presentano dei risvolti applicativi interessanti.
Uno di questi, ad esempio, è connesso alla scelta della funzione $f(R)$ come *power law*, ossia $f(R) = R^{1+\epsilon}$. Se assumiamo piccole deviazioni rispetto alla Relatività Generale, ovvero $\mid \epsilon \mid \ll 1$, è possibile fare un'espansione di Taylor al primo ordine:

$$R^{1+\epsilon} \simeq R + \epsilon R \ln R + O(\epsilon^2) \tag{6.52}$$

In questo modo, è possibile controllare l'ordine di grandezza delle correzioni rispetto alla Gravità di Einstein. La (6.52) risulta, inoltre, utile nel caso di quantizzazione e rinormalizzazione della teoria.
In ambito cosmologico, invece, la teoria $f(R)$ può rappresentare un'alternativa alla *dark energy*. Le osservazioni astronomiche e cosmologiche degli ultimi dieci anni, unite agli studi sulle strutture a larga scala, sulle supernovae e sulla CMB, hanno fatto emergere un universo in espansione accelerata, con un contributo di energia che comprende un 4% di materia barionica ordinaria, un 20% di *dark matter* e un 76% di *dark energy* con proprietà esotiche. La *costante cosmologica* λ sarebbe la spiegazione più naturale per questa *dark energy*, se non fosse per i ben noti problemi della costante cosmologica: il valore osservato della costante cosmologica è enormemente più piccola dell'energia di vuoto prevista dalla meccanica quantistica; le

densità di energia della λ e della materia sono confrontabili soltanto durante un breve intervallo di tempo nella storia dell'universo. Volendo allora rigettare la costante cosmologica e restare comunque nel contesto della RG, si potrebbe pensare alla *dark energy* come una forma sconosciuta di energia che sfugge al rilevamento diretto e non si addensa come la materia ordinaria. Per giustificare la fase di accelerazione dell'universo, questa *dark energy* deve possedere una pressione negativa (e dunque esotica), com'è possibile dedurre dalle equazioni di Friedmann, $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$, e la *strong energy condition*, $\rho + 3P \geq 0$, risulta violata. La spiegazione più diffusa per una *dark energy* dinamica è la cosiddetta *quintessenza*, ovvero un campo scalare. Anche questa, però, non fornisce una soluzione soddisfacente al problema, in quanto la massa di questo campo scalare è generalmente di molti ordini di grandezza minore rispetto alle masse tipiche delle particelle fisiche e non è chiaro il motivo per il quale campi di questo tipo non si accoppino esplicitamente alla materia. Per cui, una spiegazione alternativa alla *dark energy* può essere ricercata nell'ambito delle Teorie Estese della Gravitazione. In particolare, è stato osservato [9] [14] che, per una teoria $f(R)$, considerando la metrica di *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$, e un universo riempito con un fluido perfetto, con tensore impulso energia $T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu}$, si ottiene una densità di energia non negativa. Dunque la gravità descritta da $f(R)$ può riprodurre un'espansione accelerata senza dover ricorrere alla *dark energy*.

Da un punto di vista sperimentale, poi, è possibile realizzare un sistema *analogo* a quello gravitazionale su piccole scale, andando a risolvere le equazioni di campo di Einstein, ad esempio, per il grafene, definito come uno dei materiali più innovativi conosciuti oggi [57] [71]. In accordo con quanto detto precedentemente, è la geometria del grafene, l'analogo dello spazio-tempo, a rendere stabile e traversabile il wormhole, come osservato in [64] [21].

Questi studi, che connettono la fisica dello stato solido con la teoria della gravità modificata, potrebbero dunque fornire, da una parte, una prova sperimentale per i modelli teorici che prevedono che il grafene sia un superconduttore e, dall'altra, essere il punto di partenza per un nuovo sviluppo tecnologico.

Osserviamo, infine, che le metriche studiate in questo lavoro di tesi non sono le uniche possibili. Altre teorie relativistiche possono generare wormhole stabili e traversabili, come ad esempio quelle di *Chern-Simons* [21], *Gauss-Bonnet* e *Reissner-Nordstrom*, che stiamo classificando.

Bibliografia

[1] Adams F. C., Freese K., Guth A. H. (1991). *Constraints on the scalar-field potential in inflationary models.* Phys. Rev. D **43**, 965.

[2] Amendola L., Battaglia-Mayer A., Capozziello S., Gottlöber S., Müller V., Occhionero F., Schmidt H. J. (1993). *Generalized sixth-order gravity and inflation.* Class. Quantum Grav. **10**, L43.

[3] Bahamonde S., Camci U., Capozziello S., Jamil M. (2016). *Scalar-Tensor Teleparallel Wormholes by Noether Symmetries.* Phys. Rev. D **94**, 084042.

[4] Barrow J. D., Silk I. (1983). *The Left Hand of Creation.* Basic Books (New York).

[5] Battaglia-Mayer A., Schmidt H. J. (1993). *The de Sitter spacetime as attractor solution in eighth-order gravity.* Class. Quantum Grav. **10**(11), 2441.

[6] Berkin A., Maeda K. (1990). *Effects of R^3 and $R\Box R$ terms on R^2 inflation.* Phys. Lett. B **245**, 348.

[7] Buchdahl H. A. (1951). *Über die Variationsableitung von Fundamental-Invarianten beliebig hoher Ordnung.* Acta Math. **85**, 63-72.

[8] Capozziello S., De Ritis R., Marino A. A. (1998). *Recovering the effective cosmological constant in extended gravity theories.* Gen. Rel. Grav. **30**, 1247-1272.

[9] Capozziello S. (2002). *Curvature Quintessence.* Int. J. of Mod. Phys. D **11**(4), 483-491.

[10] Capozziello S., Funaro M. (2005). *Introduzione alla Relatività Generale.* Liguori Editori (Napoli).

[11] Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S. D. (2006). *Dark energy: the equation of state description versus scalar-tensor or modified gravity.* Phys. Lett. B **634**, 93.

[12] Capozziello S., Stabile A., Troisi A. (2007). *Spherically symmetric solutions in $f(R)$ gravity via the Noether symmetry approach.* Class. Quantum Grav. **24**, 2153-2166.

[13] Capozziello S., Stabile A., Troisi A. (2007). *The Newtonian Limit of $F(R)$ gravity.* Phys. Rev. D **76**, 104019.

[14] Capozziello S., Carloni S., Troisi A. (2008). *Quintessence without scalar fields.* Recent Res. Dev. Astron. Astrophys. **1**, 625.

[15] Capozziello S., Stabile A., Troisi A. (2008). *Spherical symmetry in $f(R)$ gravity.* Class. Quantum Grav. **25**, 085004.

[16] Capozziello S., De Laurentis M. (2011). *Extended Theories of Gravity.*

[17] Capozziello S., Faraoni V. (2011). *Beyond Einstein Gravity. A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics.* Springer.

[18] Capozziello S., Harko T., Koivisto T. S., Lobo F. S. N., Olmo G. J. (2012). *Wormholes supported by hybrid metric-Palatini gravity.* Phys. Rev. D **86**, 127504.

[19] Capozziello S., Lobo F. S. N. , Mimoso J. P. (2015). *Generalized energy conditions in Extended Theory of Gravity.* Phys. Rev. D **91**.

[20] Capozziello S., Jovanović P., Borka Jovanović V., Borka D. (2017). *Addressing the missing matter problem in galaxies through a new fundamental gravitational radius.*

[21] Capozziello S., Pincak R., Saridakis E. N. (2018). *Constructing superconductors by graphene Chern–Simons wormholes.* Ann. of Phys. **390**, 303-333.

[22] Chandrasekhar S. (1931). *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs.* Astr. J. **74**, 81.

[23] Clarke C. J. S. (1993). *The analysis of space-time singularities.* Cambridge Univ. Press (Cambridge).

[24] Eddington A. S. (1924). *The Mathematical Theory of Relativity.* Cambridge Univ. Press.

[25] Einstein A. (1905). *Zur Elektrodynamik bewegter körper.* Ann. der Phys. **17**, 891-921.

[26] Einstein A. (1905). *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt.* Ann. der Phys. **17**, 132-148.

[27] Einstein A. (1905). *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Ann. der Phys. **17**, 549–560.

[28] Einstein A. (1905). *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* Ann. der Phys. **18**, 639–641.

[29] Einstein A. (1907). *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogene Folgerungen.* Jahrbuch der Radioaktivitaet und Elektronik. **4**, 411-462.

[30] Einstein A. (1911). *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes.* Ann. der Phys. **35**, 898-908.

[31] Einstein A. (1915). *Die Feldgleichungen der Gravitation.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 844–847.

[32] Einstein A. (1916). *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Ann. der Phys. **354** (7), 769-822.

[33] Einstein A. (1918). *Kritisches zu einer von Herrn De Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen.* Ann. der Phys.

[34] Einstein A., Rosen N. (1935). *The particle problem in the General Theory of Relativity*. Phys. Rev, **48**, 73-77.

[35] Flamm L. (1916). *Beiträge zur Einstein'schen Gravitationstheorie*. Physikalische Zeitschrift. **17**, 448.

[36] Frolov V. P., Novikov J. D. (1997). *Black hole physics: basic concepts and new developments*. Kluwer Academic Publishers (Norwell, Mass.).

[37] Galiakhmetov A. M. (2017). *Einstein-Cartan traversable Wormholes and Black Universes*. Int. J. of Mod. Phys. D.

[38] Galilei G. (1632). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*.

[39] Geroch R. P. (1968). *What is a singularity in general relativity?* Ann. of Phys. **48**, 526.

[40] Gottlober S., Schmidt H. J., Starobinsky A. A. (1990). *Sixth-order gravity and conformal transformations*. Class. Quantum Grav. **7**, 893.

[41] Hawking S. W. (1965). *Occurrence of singularities in open universes*. Phys.Rev. Lett. **15**, 689.

[42] Hawking S. W. (1966). *Singularities in the Universe*. Phys. Rev. Lett. **17**, 443.

[43] Hawking S. W., Penrose R. (1970). *The singularities of gravitational collapse and cosmology*. Proc. Roy. Soc. London **A314**, 529.

[44] Israel W. (1987). *300 Years of Gravity*. Cambridge Univ. Press.

[45] Kruskal M. D. (1960). *Maximal Extension of Schwarzschild Metric*. Phys. Rev. **119**, 1743.

[46] Lobo F. S. N., Oliveira M. A. (2009). *Wormhole geometries in $f(R)$ modified theories of gravity*. Phys. Rev. D **80**, 104012.

[47] Maeda K. (1989). *Towards the Einstein-Hilbert action via conformal transformation*. Phys. Rev. **D 39**, 3159.

[48] Maknickas A. A. (2014). *The space-time wormhole and time direction of travelling light*.

[49] Maxwell J. C. (1865). *A dynamical theory of the electromagnetic field*. Philos. Trans. of the Roy. Soc. London. **155**, 459–512.

[50] Michelson A., Morley E.W. (1887). *On the relative motion of the Earth and the Luminiferous Ether*. Am. J. of Science. **34**, 333-345.

[51] Misner C. W., Wheeler J. A. (1957). *Classical physics as geometry*. Ann. of Phys. **2**, 525.

[52] Morris M. S., Thorne K. S. (1987). *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching General Relativity*. Am. J. Phys. **56**(5).

[53] Morris M.S., Thorne K.S., Yurtsever U. (1988). *Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition*. Phys. Rev. Lett. **61**(13), 1446–1449.

[54] Neville D. E. (1980). *Birkhoff theorems for $R+R^2$ gravity theories with torsion*. Phys. Rev. D **21**, 2770.

[55] Newton I. (1687). *Philosophiae naturalis Principia mathematica*.

[56] Novikov I. D. (1990). *Black Holes and the Universe*. Cambridge Univ. Press.

[57] Novoselov K. S., Geim A. K., Morozov S. V., Jiang D., Katsnelson M. I., Grigorieva I. V., Dubonos S. V., Firsov A. A. (2005). *Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene*. Nature. **438**(7065), 197–200.

[58] Oppenheimer J. R., Snyder H. (1939). *On Continued Gravitational Contraction*. Phys. Rev. **56**, 455.

[59] Penrose R. (1965). *Gravitational collapse and space-time singularities*. Phys. Rev. Lett. **14**, 57.

[60] Ramaswamy S., Yasskin P. B. (1979). *Birkhoff theorem for an $R + R^2$ theory of gravity with torsion*. Phys. Rev. D **19**, 2264.

[61] Ruzmaikina T. V., Ruzmaikin A. A. (1970). *Quadratic Corrections to the Lagrangian Density of the Gravitational Field and the Singularity*. JETP **30**(2), 372.

[62] Schmidt H. J. (1990). *Variational derivatives of arbitrarily high order and multi-inflation cosmological models*. Class. Quant. Grav. **7**, 1023.

[63] Schwarzschild K. (1916). *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. **7**, 189–196.

[64] Sepehri A., Pincak R., Bamba K., Capozziello S., Saridakis E. N. (2017). *Current density and conductivity through modified gravity in the graphene with defects.* Int.J.Mod.Phys. D **26**, 1750094.

[65] Teyssandier P., Tourrenc P. (1983). *The Cauchy problem for the $R+R^2$ theories of gravity without torsion*. J. Math. Phys. **24**, 2793.

[66] Visser M. (1996). *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*. Springer-Verlag New York, Inc. (New York).

[67] Visser M. (1998). *Acoustic black holes: horizons, ergospheres and Hawking radiation*. Class. Quantum Grav. **15**, 1767-1791.

[68] Wald R. M. (1984). *General Relativity*. Chicago Univ. Press (Chicago).

[69] Wands D. (1994). *Extended Gravity Theories and the Einstein-Hilbert Action*. Class. Quant. Grav. **11**, 269-280.

[70] Weinberg S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley& Sons, Inc. (USA).

[71] Zhang Y., Tan Y. W., Stormer H. L., Kim P. (2005). *Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene*. Nature. **438**(7065), 201–204.