Università degli Studi di Napoli
"Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea triennale in Fisica

Processi di Levy e teoremi limite: applicazioni alle serie storiche finanziarie

Relatore
Dott. Mario Nicodemi

Candidato
Carlo Schiano di Cola
Matricola N85/219

Anno Accademico 2016/2017

Introduzione

I mercati finanziari sono sistemi costituiti da un gran numero di investitori che interagiscono fra loro e con le informazioni esterne al fine di determinare il prezzo più ragionevole[1] per un dato prodotto finanziario. Ciò che si osserva, per quanto concerne l'evoluzione dei prezzi e dei rendimenti logaritmici[2], è un'andamento pressoché casuale, tipico delle "random walk" (Fig. 1 e 2), le cui oscillazioni sono da imputarsi principalmente ad informazioni nuove ed inattese (riguardanti il prodotto in questione, in ipotesi di mercato efficiente) o a variazioni nelle aspettative degli investitori[3].
Nel presente scritto, il prezzo del generico prodotto finanziario viene inteso come processo stocastico; il problema da porsi, in quest'ottica, è trovare la distribuzione di probabilità che meglio lo caratterizza (sulla base delle osservazioni sperimentali), o quantomeno restringerne il campo di ricerca. Se diamo per appurata la sostanziale indipendenza statistica delle variazioni dei prezzi, dobbiamo focalizzare la nostra attenzione su distribuzioni che obbediscono a teoremi limite. Inizieremo, nel Capitolo 1, con l'esaminare le distribuzioni stabili (senza pretesa di generalità), concentrandoci su certi aspetti essenziali e sul teorema limite che ci interessa. Nel capitolo 2, ci rivolgeremo alla più generale classe delle distribuzioni infinitamente divisibili.
Attualmente, sono stati sviluppati modelli di gran lunga più raffinati di quelli presentati in questa tesi, ma le considerazioni che seguono restano valide a qualunque livello.

---

[1] ovvero tale da equilibrare, almeno nel breve termine, la domanda con l'offerta[12]

[2] per dati ad alta frequenza, trascurando effetti di inflazione, i prezzi e rendimenti logaritmici sono approssimativamente equivalenti[11]

[3] a questo proposito, è stato sviluppata in tempi recenti un nuova disciplina denominata "finanza comportamentale", che applica i concetti di altre scienze sociali (come l'antropologia, la sociologia e specialmente la psicologia) all'andamento dei mercati finanziari[12]

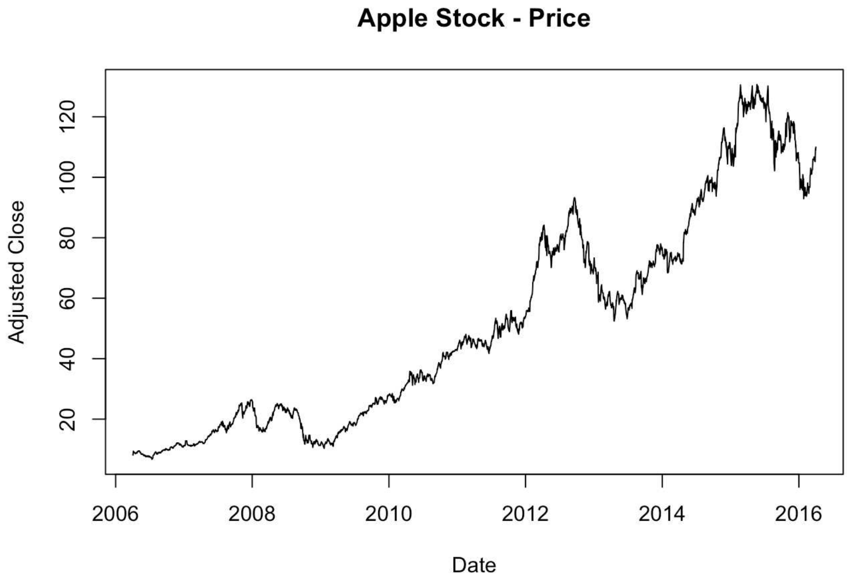

Fig. 1: Serie storica delle azioni Apple (con prezzi aggiustati per stock split, stacco dei dividendi e corporate action), per gentile concessione di E.Ionides

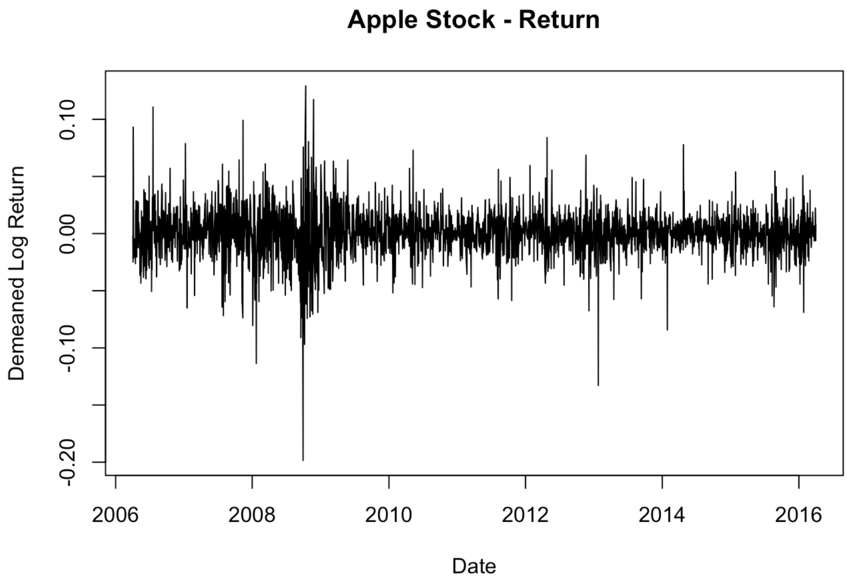

Fig. 2: Serie dei rendimenti Apple (con dati indeboliti), per gentile concessione di E.Ionides

Indice

Capitolo 1

I processi di Levy

Il loro utilizzo nei modelli finanziari è stato introdotto da Mandelbrot[10] e Fama[4], in risposta all'evidenza empirica che i rendimenti logaritmici dei vari titoli presentano delle code più spesse[1] rispetto a quelle della Gaussiana ipotizzata da Bachelier[1].
Nel corso di questo capitolo saranno introdotte le relative distribuzioni e ne saranno discusse le principali proprietà, con particolare attenzione a quelle che ci saranno utili nel seguito.

1.1 Distribuzioni stabili

Date n variabili i.i.d[2] x_i, la somma

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n \tag{1.1}$$

avrà in generale una distribuzione diversa da quella delle variabili x_i.
Esiste tuttavia una particolare classe di distribuzioni caratterizzate da una certa "stabilità" rispetto all'azione di sommatoria, ovvero tali per cui la distribuzione di ciascuna variabile x_i corrisponde a quella di S_n a meno di una riscalatura. Più formalmente,

[1] caratteristiche di distribuzioni *leptocurtiche*
[2] indipendenti e identicamente distribuite

una distribuzione è detta stabile se, per ogni n, esistono due coefficienti a_n e b_n tali che

$$P_{S_n}(s)ds = P_{x_i}(x)dx, \tag{1.2}$$

con $s = a_n x + b_n$. Questa proprietà risulta di particolare interesse nei modelli finanziari, in quanto riflette l'invarianza di scala osservata nelle variazioni dei prezzi[3].
Possiamo agevolmente mostrare, servendoci delle rispettive funzioni caratteristiche[3], che la distribuzione di Gauss e quella di Lorentz appartengono entrambe a questa classe.
Per variabili aleatorie Lorentziane, la densità di probabilità è del tipo

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2 + x^2}, \tag{1.3}$$

pertanto la funzione caratteristica è

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|}. \tag{1.4}$$

Consideriamo per semplicità il caso $n = 2$. La funzione di densità per la variabile S_2 si ottiene come convoluzione delle densità $P(x_i)$[4]. Per il teorema di convoluzione, la sua funzione caratteristica è data da

$$\varphi_2(q) = [\varphi(q)]^2, \tag{1.5}$$

la quale, per la (1.4), diventa

$$\varphi_2(q) = e^{-2|q|\gamma}. \tag{1.6}$$

[3]ricordiamo che la funzione caratteristica di una distribuzione con densità di probabilità P(x) è data da

$$\varphi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{iqx}dx,$$

ovvero, dalla trasformata di Fourier della funzione di densità

[4]per il momento abbiamo supposto che le variabili fossero i.i.d, ma la succitata proprietà è di carattere generale e richiede soltanto che le x_i siano indipendenti (anche qualora $n > 2$)

Operando la trasformazione inversa otteniamo così

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(q) e^{-iqx} dq \\ &= \frac{2\gamma}{\pi}\frac{1}{4\gamma^2 + x^2}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

che costituisce la distribuzione relativa alla variabile S_2, ed è ancora Lorentziana. Reiterando il conto, si vede che ciò vale per ogni S_n, e in definitiva possiamo annoverare la distribuzione di Lorentz fra le distribuzioni stabili.
Analogamente, per la gaussiana

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{(2\sigma)^2}} \tag{1.8}$$

scriviamo la funzione caratteristica

$$\varphi(q) = e^{\frac{\sigma^2}{2}q^2} = e^{-\gamma q^2}, \tag{1.9}$$

avendo posto $\gamma \equiv \frac{\sigma^2}{2}$. Dalla (1.5) si ha

$$\varphi_2(q) = e^{-2\gamma q^2}, \tag{1.10}$$

la cui antitrasformata è

$$P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\gamma}} e^{-\frac{x^2}{8\gamma}}. \tag{1.11}$$

Da ciò si vede che anche la distribuzione di Gauss è stabile. Riscrivendola nella forma

$$P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)} e^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2}\sigma)^2}} \tag{1.12}$$

troviamo

$$\sigma_2 = \sqrt{2}\sigma. \tag{1.13}$$

Da notare che in entrambi i processi esaminati la funzione caratteristica è del tipo

$$\varphi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}, \tag{1.14}$$

dove $\alpha = 1$ per la Lorentziana e $\alpha = 2$ per la Gaussiana.
Il problema generale di determinare l'intera classe delle distribuzioni stabili è stato risolto da Levy[9] e Khintchine[8]. Essi hanno dimostrato che, per ogni funzione caratteristica di un siffatto processo, deve valere la condizione

$$\ln \varphi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha[1 - i\beta\frac{q}{|q|}\tan(\frac{\pi}{2}\alpha)] & [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma|q|[1 + i\beta\frac{q}{|q|}\frac{2}{\pi}\ln|q|] & [\alpha = 1] \end{cases} \tag{1.15}$$

dove $0 < \alpha \leq 2$, γ è un fattore positivo di scala, μ è un qualsiasi numero reale (identificabile, laddove sia definibile, con la media) e $-1 \leq \beta \leq 1$ è un parametro di asimmetria[5].
La forma analitica delle distribuzioni di Levy è nota solo per alcuni valori dei parametri caratteristici:

- $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ (Levy-Smirnov);
- $\alpha = 1, \beta = 0$ (Lorentziana);
- $\alpha = 2$ (Gaussiana).

Assumendo $\beta = 0$ e $\mu = 0$, la funzione caratteristica assume la forma (1.14). In questo caso, la funzione di densità diventa

$$P_L(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha \cos qx} dq. \tag{1.16}$$

Possiamo dedurre, tramite un'espansione in serie, l'andamento asintotico di questa funzione per $|x|$ divergente. Ponendo $\gamma = 1$, l'espansione lontano dall'origine ($|x| \gg 0$) è del tipo

$$P_L(|x|) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{|x|^{\alpha k+1}}\sin\left[\frac{k\pi\alpha}{2}\right] + R(|x|), \tag{1.17}$$

dove $\Gamma(x)$ è la "Γ di Eulero", R(|x|) è il "resto"

$$R(|x|) = \mathcal{O}(|x|^{-\alpha(n+1)-1}) \tag{1.18}$$

[5] risulta $a_n = n^{1/\alpha}$

ed n va inteso sufficientemente grande da rendere l'approssimazione accettabile. Per $|x| \to +\infty$ abbiamo dunque

$$P_L(|x|) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)\sin(\frac{\pi\alpha}{2})}{\pi|x|^{1+\alpha}} \sim |x|^{-(1+\alpha)}, \tag{1.19}$$

il che vuol dire che la funzione di densità decade all'infinito come una legge di potenza. Ciò comporta, in generale, che il momento $E\{|x|^n\}$ diverge per $n \geq \alpha$. Per distribuzioni di Levy non gaussiane risulta $\alpha < 2$, e di conseguenza ogni distribuzione appartenente a questa classe ha varianza infinita, e non dispone di alcuna "scala caratteristica".

1.2 Teorema limite per distribuzioni stabili

Per la distribuzione Gaussiana vale il ben noto "teorema limite centrale"[6], in virtù del quale la suddetta distribuzione costituisce un'attrattore nello spazio delle densità. Ci chiediamo, in questa sezione, se è possibile estendere questa proprietà a tutte le distribuzioni di Levy con $\alpha < 2$. Esiste, in effetti, una generalizzazione del TLC[5][6] la quale afferma che la somma S_n di n variabili i.i.d. converge, in probabilità, ad una distribuzione stabile sotto la condizione

$$P(x_i) \sim \begin{cases} C_-|x_i|^{-(1+\alpha)} & \text{per } x \to -\infty \\ C_+|x_i|^{-(1+\alpha)} & \text{per } x \to +\infty \end{cases}. \tag{1.20}$$

La densità (riscalata) $\tilde{P}(\tilde{S_n})$ tende in questo caso ad una funzione di Levy con parametro di asimmetria $\beta \equiv \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C-}$.
Essendo α un parametro continuo, abbiamo un infinito numero di attrattori nello spazio delle densità. Nel loro bacino di attrazione, a differenza del rispettivo bacino per la Gaussiana, sono presenti distribuzioni con varianza infinita. Quest'ultima caratteristica le rende particolarmente efficaci nel modellare rendimenti causati da eventi estremi o catastrofi naturali.

[6] nel seguito abbreviato con TLC

Capitolo 2

I processi infinitamente divisibili

In questo capitolo cercheremo di motivare il passaggio dalle distribuzioni di Levy a quelle infinitamente divisibili, daremo una elementare caratterizzazione di queste ultime e forniremo alcuni esempi.

2.1 Statistica delle variazioni di prezzo

Abbiamo fin qui rivolto la nostra attenzione alle distribuzioni limite perchè è in questo tipo di distribuzioni che ci aspettiamo di trovare quelle che meglio descrivono la variazione dei prezzi azionari. L'analisi delle rispettive serie storiche conferma, per orizzonti temporali variabili da pochi minuti a diversi anni, l'ipotesi di indipendenza delle suddette variazioni. Tuttavia, la deviazione standard (la cosiddetta "volatilità") mostra una forte dipendenza dal tempo[13](Fig. 2.1). Ciò comporta che, in qualche modo, dobbiamo fare a meno dell'ipotesi di variazioni "identicamente distribuite".
A Bawly e Khintchine[6][7] dobbiamo una ulteriore ed importante generalizzazione del TLC, nella quale si richiede che le variabili x_i siano indipendenti ed infinitesime. Quest'ultima condizione comporta, essenzialmente, che nessuna delle variabili assume un ruolo dominante nella somma, ovvero che il contributo relativo di ciascuna di esse tende a zero. [1] Sotto quest'ipotesi, la distribuzione limite della somma risulta appartenere

[1]una definizione rigorosa di variabili infinitesime può essere data nel modo seguente: consideriamo una sequenza $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ di variabili aleatorie ciascuna delle quali è somma di un certo numero di

alla più generale classe delle distribuzioni infinitamente divisibili, che saranno descritte nel paragrafo seguente.

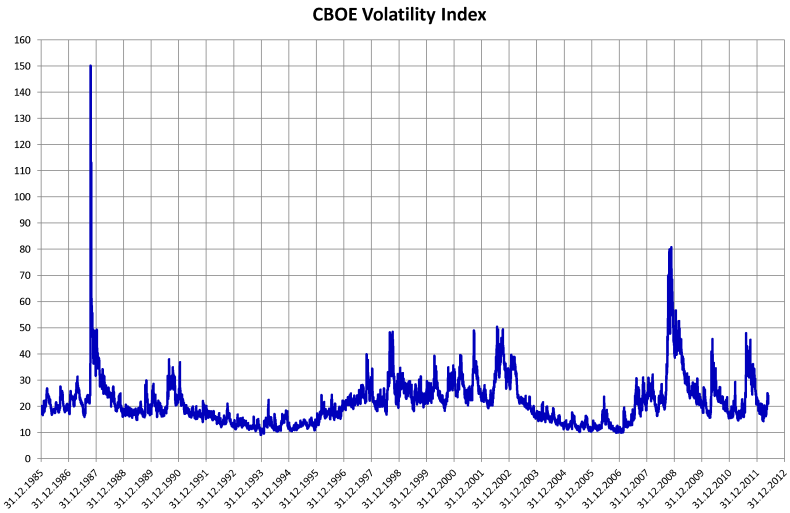

Fig. 2.1: Indice di volatilità VIX relativo all'arco temporale 1985-2012, Jashuah, [*http://www.cboe.com/products/vix-index-volatility/vix-options-and-futures/vix-index/vix-historical-data*]

2.2 Distribuzioni infinitamente divisibili

Sono così chiamate le distribuzioni che, per ogni k naturale, possono scriversi come somma di k variabili i.i.d.
Esse costituiscono un'ampia classe che comprende le distribuzioni di Levy come sottoinsieme proprio, e possono in generale avere varianza finita o infinita. Una definizione alternativa può essere data con riferimento alle funzioni caratteristiche, richiedendo

variabili indipendenti,

$$S_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nk_n}.$$

Le variabili x_{nk} sono dette infinitesime se

$$\sup_{1 \le k \le k_n} P\{|x_{nk}| \ge \varepsilon\} \to 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$ ed $n \to 0$

che per ogni k naturale la funzione caratteristica sia del tipo

$$\varphi(q) = [\varphi_k(q)]^k, \tag{2.1}$$

dove $\varphi_k(q)$ è una funzione continua tale che $\varphi_k(0) = 1$. Questa definizione risulta particolarmente utile quando si vuole mostrare che un dato processo sia infinitamente divisibile, come si vede negli esempi a seguire.

2.2.1 Processi stabili

Come si vede dalla (1.15), la funzione caratteristica di una distribuzione simmetrica stabile è data

$$\varphi(q) = \exp\left[i\mu q - \frac{\sigma^2}{2}q^2\right], \tag{2.2}$$

per cui, una soluzione della (2.1) è

$$\varphi_k(q) = \exp\left[\frac{i\mu q}{k} - \frac{\sigma^2}{2k}q^2\right]. \tag{2.3}$$

2.2.2 Processi di Poisson

Il processo di Poisson $P(m;\lambda) = e^{-\lambda}(\lambda^m/m!)$ ha come funzione caratteristica

$$\varphi(q) = \exp[\lambda(e^{iq} - 1)], \tag{2.4}$$

per cui

$$\varphi_k(q) = \exp\left[\frac{\lambda}{k}(e^{iq} - 1)\right]. \tag{2.5}$$

2.2.3 Variabili con distribuzione Gamma

La funzione di densità è data in questo caso da

$$P(x) = \frac{e^{-x}x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}. \tag{2.6}$$

Per $x \geq 0$ e $0 < \nu < \infty$, la funzione caratteristica è

$$\varphi(q) = (1 - iq)^{-\nu}, \tag{2.7}$$

da cui

$$\varphi_k(q) = (1 - iq)^{-\frac{\nu}{k}}. \tag{2.8}$$

2.2.4 Variabili con distribuzione uniforme

Questo è un esempio di processo che non è infinitamente divisibile. La funzione di densità è definita come segue:

$$P(x) = \begin{cases} 0 & x < -l \\ 1/2l & -l \leq x \leq l \\ 0 & x > l \end{cases}. \tag{2.9}$$

La funzione caratteristica risulta essere

$$\varphi(q) = \frac{\sin(ql)}{ql} \tag{2.10}$$

e non possiede una radice k-esima, ergo il processo qui considerato non è infinitamente divisibile.

Conclusioni

Abbiamo sinteticamente enunciato i vari risultati sulle distribuzioni limite che ci permettono di interpretare, almeno parzialmente, i dati storici sui prodotti finanziari. Ora sappiamo, a meno di modifiche o raffinamenti nel modello probabilistico della dinamica dei prezzi, che la funzione di densità dovrà convergere, per lunghi intervalli temporali, ad una funzione infinitamente divisibile.
Anche in presenza di fluttuazioni di volatilità, dunque, è possibile modellizzare le variazioni di prezzo in termini di opportune variabili i.i.d, purchè uno consideri orizzonti temporali sufficientemente lunghi.
Resta tuttavia da considerare che al modello qui presentato sono sottese delle ipotesi che rappresentano situazioni piuttosto idealizzate. La cosiddetta "ipotesi di mercato efficiente", che implica a sua volta la martingalità dei prezzi azionari[11], non è applicabile in modo generalizzato. In effetti, vi è un'ampia letteratura sulle anomalie rispetto a questo comportamento[12], e ciò non è così soprendente se pensiamo al mercato finanziario come ad un sottosistema della società umana, dalla quale eredita numerosi aspetti decisamente ardui da inquadrare in un modello matematico. Si rivela dunque necessario, al fine di poterci servire utilmente dell'analisi stocastica, testare opportunamente di volta in volta la validità delle ipotesi su cui ci basiamo.

Bibliografia

[1] L. Bachelier, *Theory of Speculation*, in P. Cootiner, *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge University, MIT Press, (1900).

[2] H. Bergstrom, 'On Some Expansions of Stable Distributions', *Ark. Mathematicae II* **18**, 375-378 (1952).

[3] J. P. Bouchaud, M. Potters *THEORY OF FINANCIAL RISKS. FROM STATISTICAL PHYSICS TO RISK MANAGEMENT* (Cambridge University Press), **218** (2000).

[4] E. F. Fama, *Mandelbrot and the stable Paretian hypotesis*, Journal of Business, n.36 (1963)

[5] B. V. Gnedenko, 'On the Theory of Domains of Attractions of Stable Laws', *Uchenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. Matematkia* **45**, 61-72 (1940).

[6] B. V. Gnedenko e A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge MA, 1954).

[7] A . Ya. Khintchine, 'Zur Theorie der unbeschrankt teilbaren Verteilungsgesetze', *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.* 2, 79-120 (1937).

[8] A. Ya. Khintchine e P. Levy, 'Sur le loi stables', C, *R. Acad. Sci. Paris* **202**, 374-376 (1936).

[9] P. Levy, *Calcul des probabilites* (Gauthier-Villars, Paris, 1925).

[10] B. Mandelbrot, *New methods in statistical economics*, Journal of Political Economy, n.71 (1963).

[11] R. N. Mantegna, H. E. Stanley *AN INTRODUCTION TO ECONOPHYSICS. Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press), **144**, 39 (2000).

[12] S. F. Mishkin, S. G. Eakins, G. Forestieri, *Istituzioni e mercati finanziari* (Milano-Torino, Pearson Italia) **752**, (2010)

[13] G. W. Schwert, "Why Does Stock Market Volatiliy Change over Time?', *J. Finance* **44**, 1115-1153

Elenco delle figure

Ringraziamenti

Desidero ringraziare i miei amici e compagni di studio, in particolare Cristiano e Giuseppe, per tutto il tempo che hanno dedicato a me ed al mio lavoro.
Un ringraziamento speciale va fatto alla mia famiglia, il cui sostegno morale, fisico ed economico è stato cruciale sotto ogni punto di vista.