Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea triennale in Fisica

Relatività Generale: dalle equazioni di Einstein all’energia oscura

Relatori:
Prof. Ester Piedipalumbo

Candidato:
Stella De Falco
Matricola N85000465

A.A. 2017/2018

Indice

Introduzione. 4

Capitolo 1: Il ruolo del Principio di Equivalenza nella formulazione della nuova teoria della gravitazione. 6

Le equazioni delle geodetiche come conseguenza del Principio di Equivalenza. 9

Riepilogo. 11

Sistemi di riferimento localmente inerziali. 11

Capitolo 2: I coefficienti della connessione affine. 12

La derivata covariante del tensore metrico. 12

La relazione tra i coefficienti della connessione affine e il tensore metrico. 13

Capitolo 3: Il tensore di curvatura. 14

Simmetrie. 17

Identità di Bianchi. 17

Capitolo 4: Il tensore stress-energia. 17

Il principio di covarianza generale. 23

Capitolo 5: Le equazioni di Einstein. 24

Equazioni della geodetica nel limite di campi deboli. 25

Equazioni di campo di Einstein. 27

L'invarianza di Gauge nelle equazioni di Einstein. 29

Capitolo 6: La Relatività Generale e l'universo omogeneo ed isotropo. 31

Le equazioni di Friedmann. 32

L'energia oscura. 33

Conclusioni. 38

Bibliografia. 40

Introduzione

La cosmologia è la disciplina scientifica che si occupa dello studio dell'universo nella sua totalità, indagandone la struttura, i costituenti fondamentali, la geometria e l'evoluzione. É per sua natura un campo scientifico di ricco interesse e in questo secolo è accompagnato da un'ambizione motivata dalla sempre crescente quantità e qualità dei dati sperimentali. La data di inizio della cosmologia quale disciplina con un vero valore nell'ambito della conoscenza scientifica è collocabile nell'anno 1917, quando Einstein applica per la prima volta la sua teoria della Relatività Generale al problema dell'indagine della struttura e dell'evoluzione dell'universo su grande scala, cui seguirà la produzione di De Sitter, Friedmann, Lemaître ed altri autori di modelli per la descrizione dell'universo nella sua totalità. Nonostante i grandi successi di un secolo, la cosmologia è tuttora sede di enigmi e questioni che sfuggono alla nostra comprensione, come evidenziato dai risultati più recenti. All'alba del XXI secolo, infatti, si manifestano i primi segni di una svolta sostanziale nella comprensione del cosmo, quando due squadre indipendenti di cosmologi, guidati da Saul Perlmutter negli USA per il Supernova Cosmology Project, e da Brian Schmidt in Australia per l' High-Z Supernovae Search Team, tramite l'osservazione delle Supernovae di tipo Ia sulle distanze più remote, evidenziarono che l'espansione dell'universo stava procedendo con una velocità crescente. Dopo queste prime indicazioni della dinamica accelerata dell'universo attuale, altre indagini indipendenti hanno contribuito a confermare in maniera definitiva questo risultato, che è valso nel 2011 il premio Nobel per la Fisica a Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt e ad Adam G. Riess. Un risultato di tale portata ha costretto a rivedere anche quanto si dava per acquisito fino ad allora dando un notevole impulso per lo sviluppo di molti nuovi modelli tra i quali quelli di cosiddetta energia oscura, il nuovo ingrediente cosmico ipotizzato come responsabile di questo fenomeno. Facendo uso della teoria della Relatività Generale di Einstein, infatti, per un universo le cui componenti fondamentali siano materia non relativistica e radiazione non sarebbe possibile ottenere una dinamica accelerata, e si rende necessario avanzare nuove ipotesi per realizzare un modello che possa rendere conto delle osservazioni sperimentali. Tra questi, il modello ΛCDM riprende in una nuova veste un' idea originaria di Einstein, il quale introdusse un termine detto "costante comologica" nelle equazioni della Relatività Generale per realizzare il suo pregiudizio di un universo eternamente statico, ma che egli stesso rigettò dopo la conferma della scoperta di Hubble negli anni 20 del moto sistematico di recessione delle galassie. Nel modello ΛCDM la costante cosmologica torna alla ribalta grazie al suo effetto di "gravità repulsiva" come un possibile candidato per la descrizione di una dinamica accelerata. Dal punto di vista della fisica delle particelle, la Λ appare come un'energia del vuoto: nella fattispecie, il valore teoricamente previsto per quest'ultima corrisponde a $\rho_{vuoto} \sim 10^{74}\ GeV^4$, che però è largamente più grande del valore osservato per la dark energy rappresentata dalla costante cosmologica, ovvero $\rho_\Lambda \equiv \Lambda c^2/8\pi G \sim 10^{-47}\ GeV^4$. Pertanto, è importante trovare un meccanismo che permetta di ottenere un valore piccolo per Λ consistente con le osservazioni effettuate. In generale, per poter distinguere la varietà di modelli per l'energia oscura, risulta rilevante l'individuazione di limiti entro cui operare

mediante dati ricavati da osservazioni come quelle del tipo SN Ia, CMB e delle strutture di larga scala. Solitamente l'equazione di stato dell'energia oscura, vale a dire $w_{de} = p_{de}/\rho_{de}$ è una relazione utile da cui partire per descrivere e verificare le proprietà della dark energy. Nel caso della costante cosmologica, in particolare, si ha $p_{de} = -\rho_{de}$, da cui $w_{de} = -1$. Perciò, si può affermare che un primo obiettivo per lo studio dell'energia oscura sia quello di individuare possibili discostamenti di w_{de} dal valore -1 per scoprire se essa sia identificabile con la costante cosmologica o meno. In questo lavoro di tesi ripercorreremo le tappe fondamentali che conducono dalla relatività generale, i cui contenuti essenziali sono descritti nei primi 5 capitoli, alla cosmologia con dark energy. che descriveremo tramite la parametrizzazione della sua equazione di stato. Infine abbiamo illustrato come i parametri della dark energy possano essere a partire da un diagramma di Hubble ad alto redshift realizzato utilizzando nuovi indicatori di distanza, quali i GRBs e i QSOs.

Capitolo 1: Il ruolo del Principio di Equivalenza nella formulazione della nuova teoria della gravitazione

La teoria della Relatività Generale è una teoria fisica della gravitazione formulata da Einstein nel 1915. Essa è basata sul Principio di Equivalenza (di gravitazione ed inerzia), che stabilisce una profonda connessione tra il campo gravitazionale e la geometria dello spaziotempo, ed il Principio di Covarianza Generale. La Relatività Generale ha cambiato profondamente la nostra visione dello spazio e del tempo, oltre che disvelato l'esistenza di fenomeni affascinanti come i buchi neri e le onde gravitazionali. Il linguaggio di questa teoria è l'analisi tensoriale, che descriveremo in maniera essenziale. Ma questo lavoro di tesi è dedicato innanzitutto a delinerae le risposte a due domande fonadamentali:

1) perchè la teoria Newtoniana diventa incapace di descrivere il campo gravitazionale;
2) perchè abbiamo bisogno di un campo tensoriale per descrivere il campo gravitazionale, e perchè tutto ciò ci costringe ad abbandonare la geometria euclidea (o pseudoeuclidea)
3) qual è il ruolo del Principio di Equivalenza in tutto questo.

Prima delle Teorie della Relatività (ristretta e generale) prerelativistiche l'arena delle teorie fisiche era costituita dallo spazio piatto della geometria Euclidea, basata sui cinque postulati di Euclide. Una disputa millenaria ha coinvolto questi postulati: per oltre duemila anni i matematici hanno provato a dimostrare che il quinto postulato deriva dai precedenti. Ricordiamo che questo postulato stabilisce che: s*e una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.*
La soluzione al problema fu trovata da Gauss (1824, Germania), Bolyai (1832, Austria), e Lobachevski (1826, Russia), che scoprirono indipendentemente una geometria che soddisfa i primi 4 postulati di Euclide, ma non il quinto. Si trattava di uno spazio 2D di curvatura costante e negativa. Felix Klein nel 1870 produsse la rappresentazione analitica di questa geometria. Egli dimostrò che essa può essere rappresentata da due numeri reali x_1, x_2 tali che ${x_1}^2 + {x_2}^2 < 1$ e trovò l'espressione analitica della distanza tra due punti arbitrari.
Nel 1827 Gauss pubblicò le *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, dove distinse le proprietà intrinseche da quelle estrinseche di una superficie. Le prime sono quelle che possono essere misurate da qualcuno che vive sulla superficie, mentre le seconde derivano dall'immersione di una superficie in uno spazio a dimensione maggiore. Gauss capì che la proprietà intrinseca fondamentale è la distanza tra due punti, definita come il cammino più breve che li colleghi. Per esempio un cilindro ha le stesse proprietà intrinseche di un piano, perchè è possibile ottenerelo da una regione di piano arrotolata opportunamente, senza distorcerla. In questo modo le linee parallele rimangono inalterate. La geometria di un

cilindro è quindi piatta. Diverso è il caso di una sfera, che non può essere mappata in un piano senza essere deformata. Gauss selezionò degli spazi 2D nei quali è possibile costruire in un intorno di ogni punto delle coordinate (ξ_1, ξ_2) tali che la distanza tra due punti vicini è data dal teorema di Pitagora. Queste coordinate locali si chiamano euclidee. A partire da queste coordinate è poi possibile costruire un tensore metrico, $g_{\mu\nu}$, che permette di rappresentare la distanza in un qualsiasi sistema di riferimento, semplicemente usando le leggi di trasformazione di un tensore. Gauss introdusse la cosiddetta curvatura gaussiana che esprime le proprietà intrinseche di una superficie e che è funzione di $g_{\mu\nu}$ e delle sue derivate prime e seconde, ed è invariante sotto trasformazioni di coordinate.
Vedremo che il Principio di Equivalenza agisce in analogia col principio di Gauss sulle geometrie non Euclidee (in ogni introrno di un punto è possibile trovare delle coordinate locali, ξ_i, nelle quali la distanza tra due punti vicini è data dal teorema di Pitagora).
Come, infatti, Gauss definì le proprietà intrinseche di una superficie in termini delle derivate delle coordinate euclidee ξ_i, così gli effetti del campo gravitazionale saranno descritti a partire da opportune coordinateξ_α che saranno dette "localmente inerziali".

Consideriamo dunque il moto di una particella non relativistica che si muove in un campo gravitazionale **costante**. Siano $\vec{F}_k$ le altre forze che agiscono sulla particella. In base alla meccanica newtoniana, le equazioni del moto sono

$$m_I \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = m_G \vec{g} + \sum_k \vec{F}_k \tag{1.1}$$

Mettiamoci ora in un ascensore che è in caduta libera in questo campo gravitazionale, cioè eseguiamo la trasformazione di coordinate

$$\overrightarrow{x'} = \vec{x} - \frac{1}{2} g t^2, \qquad t' = t \tag{1.2}$$

In questo nuovo sistema di riferimento la (1.1) diventa

$$m_I \left[\frac{d\vec{x}^2}{dt^2} + \vec{g} \right] = m_G \vec{g} + \sum_k \vec{F}_k . \tag{1.3}$$

In base al Principio di Equivalenza $\boldsymbol{m_I = m_G}$, considerando che questo è vero per qualsiasi particella, questa equazione diventa

$$m_I \frac{d\overrightarrow{x'}^2}{dt^2} = m_G \vec{g} + \sum_k \vec{F}_k \tag{1.4}$$

Confrontiamo la (1.1) e la (1.4). Risulta evidente che un osservatore O′ che è nell'ascensore, cioè in caduta libera nel campo gravitazionale, vede le stesse leggi della fisica dell'osservatore O, con la differenza che quest' ultimo non sente il campo gravitazionale. **Questo risultato deriva dall' equivalenza, che è stata provata sperimentalmente, tra la massa inerziale e la massa gravitazionale**. Se m_I fosse stata diversa da m_G, o meglio, se il loro rapporto non

fosse stato costante, il risultato non sarebbe stato vero perché non si sarebbe potuto semplificare il termine $\vec{g}$ nella (1.3). Inoltre è evidente che se $\vec{g}$ non fosse stato costante, nella (1.4) ci sarebbero stati termini addizionali contenenti le derivate di $\vec{g}$. In ogni caso, possiamo sempre considerare un intervallo di tempo tanto breve in modo che $\vec{g}$ risulti costante e che quindi la (1.4) continui a valere. Consideriamo ora una particella ferma in questo riferimento sulla quale non agisce nessuna forza $\vec{F}_k$. Sotto queste ipotesi, in accordo con la (1.4), tale particella rimarrà ferma indefinitamente. Pertanto chiamiamo questo riferimento **localmente inerziale**. Se il campo gravitazionale è costante e uniforme, la trasformazione di coordinate (1.2) definisce proprio un sistema di riferimento inerziale su tutto lo spazio-tempo. Se non ci si trova in questo caso, è comunque possibile prendere un sistema di riferimento inerziale nell' intorno di qualsiasi punto.

I punti discussi in precedenza sono cruciali per la teoria della gravitazione e richiedono una spiegazione aggiuntiva. La gravità si differenzia da tutte le altre forze perché tutti i corpi, assegnata la stessa velocità iniziale, seguono la stessa traiettoria in un campo gravitazionale, indipendentemente dalla loro conformazione. Questo non accade, ad esempio, per la forza elettromagnetica, che agisce su una carica ma non su un corpo neutro e in cui le traiettorie delle particelle cariche dipendono dal rapporto tra la carica e la massa, che non è lo stesso per tutte le particelle. Allo stesso modo altre forze, come l'interazione debole e l'interazione forte, hanno effetti diversi su particelle diverse. È questa particolare caratteristica della gravità che rende possibile descrivere i suoi effetti su una geometria curva. Ci proponiamo di farlo nel seguito.

Enunciamo ora il Principio di Equivalenza in due diverse formulazioni:

Principio di Equivalenza forte: *In un arbitrario campo gravitazionale, in un qualsiasi punto dello spazio-tempo, è possibile scegliere un sistema di riferimento localmente inerziale in cui, in un intorno del punto, le leggi della fisica hanno la stessa forma che avrebbero in assenza di gravità, vale a dire la forma descritta dalla Relatività Speciale.*

Principio di Equivalenza debole: *Come in precedenza, ma riferito solo alla legge del moto dei corpi in caduta libera.*

La precedente formulazione del Principio di Equivalenza assomiglia molto all' assioma che Gauss scelse come base per la geometria non euclidea, cioè: *in ogni dato punto dello spazio, deve esistere un riferimento localmente euclideo in cui, in un intorno del punto, la distanza tra due punti è data dal teorema di Pitagora.* Il Principio di Equivalenza afferma che in un sistema di riferimento localmente inerziale tutte le leggi della fisica devono coincidere, localmente,

con quelle della Relatività Speciale, e di conseguenza in questo riferimento la distanza tra due punti deve essere quella di Minkowski

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(d\xi^0)^2 + (d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2 \quad (1.5)$$

Ci aspettiamo quindi che le equazioni della gravitazione siano simili a quelle della geometria di Riemann. In particolare, come Gauss definì la proprietà intrinseca di una superficie curva in termini delle derivate $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ (che definiscono la metrica), dove ξ^α sono le "coordinate localmente euclidee" e x^μ sono coordinate arbitrarie, allo stesso modo ci aspettiamo che gli effetti del campo gravitazionale saranno descritti in termini delle derivate $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}$ dove ora le ξ^α sono le "coordinate localmente inerziali", e x^μ sono coordinate arbitrarie. Tutto questo deriva dal Principio di Equivalenza. Fino ad ora abbiamo solo stabilito che come conseguenza del Principio di Equivalenza deve esistere un legame tra il campo gravitazionale e il tensore metrico. Ma qual è questo legame?

Le equazioni delle geodetiche come conseguenza del Principio di Equivalenza

Iniziamo ad analizzare quali sono le conseguenze del Principio di Equivalenza. Vogliamo trovare l'equazione del moto di una particella che si muove esclusivamente sotto l'azione di un campo gravitazionale (cioè in caduta libera), quando questo moto è osservato in un arbitrario sistema di riferimento. Ora dovremmo lavorare in uno spazio-tempo quadridimensionale con coordinate $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$.

Per prima cosa valutiamo il moto in un sistema localmente inerziale, l'unico in caduta libera con la particella. In base al Principio di Equivalenza la distanza tra due punti vicini è

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu, \quad (1.6)$$

dove $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ è il tensore metrico dello spazio-tempo di Minkowski. Se τ è il tempo proprio della particella ed è scelto come coordinata di tempo, per quanto detto prima le equazioni del moto risultano

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1.7)$$

Passiamo ora in un sistema di riferimento in cui le coordinate sono $x^\alpha = x^\alpha(\xi^\alpha)$, cioè assegniamo una trasformazione che permette di esprimere le nuove coordinate in funzione

delle vecchie. Nel seguito chiariremo in maniera rigorosa questi concetti, come il tensore metrico, la trasformazione di coordinate ecc... Nel nuovo sistema la distanza è

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{1.8}$$

dove abbiamo definito il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ come

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}. \tag{1.9}$$

Questa formula è la generalizzazione in quattro dimensioni di quella usata da Gauss in due dimensioni quando, nel suo studio sulle superfici curve evidenziò la possibilità di trovare nell'intorno di qualsiasi punto di un sistema di coordinate nel quale la distanza tra due punti vicini è data dal teorema di Pitagora. Nel nuovo riferimento le equazioni del moto della particella diventano

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\tau^2} + \left[\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\right]\left[\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right] = 0. \tag{1.10}$$

Se ora definiamo le seguenti quantità

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial^2\xi^\lambda}{\partial x^\mu x\partial^\nu} \tag{1.11}$$

la (1.10) diventa

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left[\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right] = 0. \tag{1.12}$$

Le (1.11) sono chiamati **coefficienti della connessione affine** o **simboli di Christoffel**, le cui proprietà verranno chiarite in seguito. La (1.12) è l'equazione di una geodetica, cioè l'equazione del moto di una particella in caduta libera quando è osservata in un sistema di coordinate arbitrarie. Analizziamo questa equazione. Abbiamo visto che se siamo in un sistema localmente inerziale, dove, in virtù del Principio di Equivalenza, possiamo eliminare la forza di gravità, le equazioni del moto sarebbero quelle di una particella libera. Se passiamo in un altro sistema di riferimento sentiamo il campo gravitazionale (e in aggiunta tutte le forze apparenti come quella centrifuga, quella di Coriolis e quelle di trascinamento). In questo nuovo sistema l'equazione della geodetica diventa la (1.12) e il termine addizionale

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\left[\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right] \tag{1.13}$$

esprime la forza gravitazionale per unità di massa che agisce sulla particella. Se fossimo in meccanica newtoniana questo termine sarebbe $\vec{g}$ (più le accelerazioni apparenti, ma assumiamo per ora che nel riferimento scelto queste possano essere annullate), e $\vec{g}$ è il gradiente del campo gravitazionale. Cosa vuol dire questo? I coefficienti della connessione

affine $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ contengono le derivate seconde di (ξ^{α}). Dal momento che il tensore metrico (1.9) contiene le derivate prime di (ξ^{α}), è chiaro che $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$conterrà le derivate prime di $g_{\mu\nu}$. Questo può essere mostrato esplicitamente, e nel seguito proveremo che

$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \right\}. \tag{1.14}$$

Dunque, in analogia con le leggi di Newton, possiamo dire che i coefficienti della connessione affine sono la generalizzazione del campo gravitazionale newtoniano, e che il tensore metrico è la generalizzazione del potenziale gravitazionale newtoniano.

Sottolineiamo che questa è un'analogia *fisica*, basata sullo studio del moto di una particella in caduta libera, confrontata con le equazioni del moto di Newton.

Riepilogo

Abbiamo visto che, una volta introdotto il Principio di Equivalenza, la nozione di metrica e di coefficienti della connessione affine, va immediatamente a descrivere gli effetti del campo gravitazionale sul moto dei corpi in caduta libera. Abbiamo fatto notare che il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ rappresenta il potenziale gravitazionale, come si ricava dalle equazioni della geodetica. Tuttavia, esso è anche un'entità geometrica, dal momento che, attraverso la nozione di *distanza,* caratterizza la geometria dello spazio-tempo. Questo doppio ruolo del potenziale gravitazionale, fisico e geometrico, è una diretta conseguenza del Principio di Equivalenza. Ora possiamo rispondere alla domanda: "Perché abbiamo bisogno di un tensore per descrivere il campo gravitazionale?". La risposta è nel Principio di Equivalenza.

Sistemi di riferimento localmente inerziali

Mostreremo ora che se conosciamo $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ (cioè $g_{\mu\nu}$ e le sue derivate) nel punto X possiamo determinare un sistema di riferimento localmente inerziale $\xi^{\alpha}(x)$ nell'intorno di X nel seguente modo. Moltiplichiamo $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$ per $\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}}$

$$\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \delta^{\alpha} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \tag{1.15}$$

cioè

$$\frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}. \tag{1.16}$$

Questa equazione può essere risolta espandendo in serie $\xi^{\beta}(x)$ intorno a X

$$\xi^{\beta}(x) = \xi^{\beta}(X) + \left[\frac{\partial \xi^{\beta}(x)}{\partial x^{\lambda}}\right]_{x=X}\left(x^{\lambda} - X^{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi^{\beta}(x)}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right]_{x=X}(x^{\mu} - X^{\mu})(x^{\nu} - X^{\nu})$$

$$= a^{\beta} + b^{\beta}_{\lambda}\left(x^{\lambda} - X^{\lambda}\right) + \frac{1}{2}b^{\beta}_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x^{\mu} - X^{\mu})(x^{\nu} - X^{\nu}) + \cdots \qquad (1.17)$$

D'altro canto sappiamo da (1.9) che

$$g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\alpha\beta}\left.\frac{\partial \xi^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}}\right|_{x=X}\left.\frac{\partial \xi^{\beta}(x)}{\partial x^{\nu}}\right|_{x=X} = \eta_{\alpha\beta}b^{\alpha}_{\mu}b^{\beta}_{\nu}, \qquad (1.18)$$

e da questa equazione calcoliamo b^{β}_{μ}. Dunque, assegnati $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ad un fissato punto *X*, possiamo determinare il sistema localmente inerziale all'ordine $(x - X)^2$ usando la (1.17). Questa equazione definisce il sistema di coordinate a meno delle costanti a^{μ}. Inoltre possiamo sempre introdurre una trasformazione di Lorentz non omogenea, e il nuovo sistema di riferimento sarà ancora localmente inerziale.

Capitolo 2: I coefficienti della connessione affine

Abbiamo mostrato che ci sono due quantità che descrivono gli effetti del campo gravitazionale su un corpo in moto in virtù del Principio di Equivalenza: il tensore metrico e i coefficienti della connessione affine. In seguito abbiamo discusso le proprietà geometriche del tensore metrico. Ora definiremo i coefficienti della connessione affine come quelle quantità che permettono di calcolare la derivata di un vettore in uno spazio arbitrario, e mostreremo che questi coincidono con i Γ.

La derivata covariante del tensore metrico

La derivata covariante di $g_{\mu\nu}$ è zero:

$g_{\mu\nu;\alpha} = 0.$ (2.1)

La ragione è la seguente. Sappiamo dal Principio di Equivalenza che in ciascun punto dello spazio-tempo possiamo scegliere un sistema di coordinate in modo che $g_{\mu\nu}$ si riduce a $\eta_{\mu\nu}$. La base coordinata associata a queste coordinate ha vettori di base costanti, e dunque i coefficienti della connessione affine svaniscono. In questo riferimento

$$g_{\alpha\beta;\mu} = \eta_{\alpha\beta;\mu} = \frac{\partial\, \eta_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\,\eta_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\,\eta_{\alpha\nu} = 0 \qquad (2.2)$$

$g_{\alpha\beta;\mu}$ è un tensore $\binom{0}{3}$, e se tutte le componenti di un tensore sono zero in un sistema di coordinate, esse sono zero in qualsiasi sistema e dunque

$g_{\alpha\beta;\mu} = 0$ (2.3)

sempre.

La relazione tra i coefficienti della connessione affine e il tensore metrico

Da (2.3) segue che

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\, g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\, g_{\alpha\nu} = 0, \tag{2.4}$$

quindi

$$g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\, g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}_{\beta\mu}\, g_{\alpha\nu}. \tag{2.5}$$

Consideriamo ora le seguenti equazioni

$$g_{\alpha\mu,\beta} = \Gamma_{\nu\alpha\beta} g_{\nu\mu} + \Gamma_{\nu\mu\beta} g_{\alpha\nu}, \tag{2.6}$$

$$-g_{\beta\mu,\alpha} = -\Gamma_{\nu\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \Gamma_{\nu\mu\alpha} g_{\beta\nu}, \tag{2.7}$$

segue che

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = \left(\Gamma_{\nu\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\mu\alpha}\right) g_{\nu\beta} + \left(\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}\right) g_{\alpha\nu} + \left(\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\right) g_{\nu\mu}, \tag{2.8}$$

dove abbiamo usato il fatto che $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$.

Poiché $\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}$ sono simmetrici in $\beta\ e\ \gamma$, segue che

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2\Gamma_{\nu\beta\mu} g_{\alpha\nu}. \tag{2.9}$$

Se moltiplichiamo per $g^{\alpha\gamma}$ e ricordiamo che, poiché $g^{\alpha\gamma}$ è l'inverso di $g_{\alpha\gamma}$

$$g_{\alpha\gamma} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu\gamma}, \tag{2.10}$$

troviamo che

$$\Gamma^{\gamma}_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma}\left(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}\right). \tag{2.11}$$

Questa espressione è estremamente utile, poiché permette di calcolare i coefficienti della connessione affine in termini delle componenti del tensore metrico.

I $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sono componenti di un tensore?

Non lo sono, ed è facile vedere il perché. In un sistema localmente inerziale i $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ svaniscono, ma in altri riferimenti non è così. Se fosse un tensore dovrebbero sparire in qualsiasi riferimento.

Il modo più semplice di vederlo è usare la (1.11). In un sistema di coordinate arbitrario $\{x^{\mu'}\}$ esse sono

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}}\right) \\
&= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu'}} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}}\right] \\
&= \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x^{\mu'}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\mu'}}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Il primo termine è ciò che avremmo se $\Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma}$ fosse un tensore. Ma ora sappiamo che non lo è, e infatti c'è un termine addizionale.

Capitolo 3: Il tensore di curvatura

Possiamo ora introdurre il tensore di curvatura. Scriviamo le regole di trasformazione dei coefficienti della connessione affine

$$\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\alpha'}_{\ \rho'\sigma'} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}. \tag{3.1}$$

Come abbiamo già notato, se l'ultimo termine del membro destro fosse nullo, $\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}$ si trasformerebbe come un tensore. Isoliamo quest'ultimo termine e moltiplichiamolo per $\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}$:

$$\frac{\partial^2 x^{\tau'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} - \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}. \tag{3.2}$$

Differenziamo questa equazione rispetto a x^{κ}:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x^{\tau'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial^2 x^{\tau'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} + \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\right) - \frac{\partial^2 x^{\rho'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'} - \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial^2 x^{\sigma'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'} \\ &- \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Usiamo ora la (3.2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x^{\tau'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} &= \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\left[\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\ \kappa\lambda} - \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\rho'}_{\beta'\gamma'}\right] - \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\left[\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\ \kappa\nu} - \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\sigma'}_{\beta'\gamma'}\right] \\ &- \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Riscriviamo l'ultimo termine come

$$\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\eta'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right). \tag{3.5}$$

Riscriviamo quest'ultima come

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x^{\tau'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} &= \left[\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\right) + \left(\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\ \kappa\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu}\right)\right] \\ &- \left[\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\eta'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right) - \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\Gamma^{\rho'}_{\beta'\gamma'}\right] \\ &- \left[\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\Gamma^{\sigma'}_{\beta'\gamma'}\right] \\ &- \left[\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\ \kappa\mu} + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\ \kappa\nu} + \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}_{\ \mu\mu}\Gamma^{\tau'}_{\beta'\gamma'}\right].\end{aligned} \tag{3.6}$$

Riparametrizziamo gli indici nel modo seguente:

$$\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\kappa\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \to \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\Gamma^{\rho'}_{\beta'\gamma'} \to \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\lambda'\sigma'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\rho'} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\Gamma^{\sigma'}_{\beta'\gamma'} \to \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\lambda'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\varrho'} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\kappa\mu} \to \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\tau'}_{\sigma'\rho'}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\mu} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}{}_{\kappa\nu} \to \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\nu} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu}\Gamma^{\tau'}_{\beta'\gamma'} \to \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\mu}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}. \tag{3.12}$$

Dopo questi cambi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x^{\tau'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\right] \\ &- \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\eta'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right) - \Gamma^{\tau'}_{\lambda'\sigma'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\rho'} - \Gamma^{\tau'}_{\rho'\lambda'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\varrho'}\right] \\ &- \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\left[\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\mu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\nu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\kappa}}\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

Sottraiamo a questa relazione la stessa espressione con κ e ν scambiati

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x^{\tau'}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^3 x^{\tau'}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}\partial x^{\kappa}} &= 0 \\ &= \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\right] \\ &- \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\eta'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right) - \Gamma^{\tau'}_{\lambda'\sigma'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\rho'} - \Gamma^{\tau'}_{\rho'\lambda'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\varrho'}\right] \\ &- \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\left[\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\mu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\nu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\kappa}}\right] - \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\right) + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\right] \\ &+ \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\kappa}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\nu}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\eta'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\right) - \Gamma^{\tau'}_{\lambda'\sigma'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\rho'} - \Gamma^{\tau'}_{\rho'\lambda'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\varrho'}\right] \\ &+ \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}\left[\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\kappa}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\nu}}\right]\end{aligned} \tag{3.14}$$

raccogliendo tutti i termini otteniamo

$$\frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\lambda}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}+\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\right] \tag{3.15}$$

$$-\frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\kappa}}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\eta'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\sigma'}-\frac{\partial}{\partial x^{\sigma'}}\Gamma^{\tau'}_{\rho'\eta'}+\Gamma^{\tau'}_{\lambda'\eta'}-\Gamma^{\tau'}_{\lambda'\sigma'}\Gamma^{\lambda'}_{\eta'\rho'}\right]=0.$$

Se ora definiamo:

$$R^{\lambda}{}_{\nu\mu\kappa}=-\left[\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}+\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\right], \tag{3.16}$$

possiamo scrivere la (3.15) come la legge di trasformazione del tensore

$$R^{\sigma'}{}_{\alpha'\beta'\gamma'}=\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x^{\gamma'}}R^{\lambda}{}_{\nu\mu\kappa}. \tag{3.17}$$

Il tensore (3.16) è il **tensore di curvatura**, chiamato anche **tensore di Riemann**, e si può mostrare che è l'unico tensore che può essere costruito usando la metrica, le sue derivate prime e seconde, e che è lineare nelle derivate seconde.

Questo modo di definire il tensore di Riemann è il modo classico: è basato sulle proprietà di trasformazione dei coefficienti della connessione affine. L'idea che c'è sotto questa definizione è che l'informazione sulla curvatura dello spazio deve essere contenuta nella derivata seconda della metrica e quindi nella derivata prima di $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$. Tuttavia poiché vogliamo trovare un altro tensore, dobbiamo eliminare dalla (3.1) la parte che non lo fa trasformare come un tensore, e lo facciamo nella (3.14).

Dovrebbe essere chiaro perché il tensore di Riemann è anche detto **Tensore di Curvatura**: esso ci dice come cambia un vettore quando è trasportato parallelamente lungo un percorso chiuso a causa della curvatura dello spazio-tempo. Se quest'ultimo fosse piatto, $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ sarebbe nullo in qualsiasi sistema di riferimento. Le componenti del tensore di Riemann assumono una forma elegante quando sono calcolate in un riferimento localmente inerziale:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left[g_{\sigma\nu,\beta\mu}-g_{\sigma\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\sigma\nu}-g_{\beta\nu,\sigma\mu}\right], \tag{3.18}$$

o, abbassando l'indice α:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}=g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[g_{\alpha\nu,\beta\mu}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\alpha\nu}-g_{\beta\nu,\alpha\mu}\right]. \tag{3.19}$$

Bisogna porre l'accento sul fatto che:

1) Il tensore di Riemann è lineare nelle derivate seconde di $g_{\mu\nu}$, e non lineare nelle derivate prime.
2) In un sistema localmente inerziale i termini $\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}$ non compaiono e la parte non lineare del tensore di Riemann svanisce anch'essa.

Simmetrie

Dalla (3.19) è facile vedere che

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \tag{3.20}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \tag{3.21}$$

Poiché $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ è un tensore, queste proprietà di simmetria sono valide in qualsiasi riferimento.

Le simmetrie del tensore di Riemann riducono il numero di componenti indipendenti a 20.

L'identità di Bianchi

Differenziamo la (3.19) rispetto a x^{λ}:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}\left[g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}\right]. \tag{3.22}$$

Usando la simmetria di $g_{\alpha\beta}$ e la (3.40) si può mostrare che

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0. \tag{3.23}$$

Poiché è valida in un sistema localmente inerziale ed è un'equazione tensoriale, sarà valida in ogni riferimento

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda;,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \tag{3.24}$$

dove abbiamo sostituito la derivata ordinaria con quella covariante. **Queste sono le identità di Bianchi che, come vedremo, svolgono un ruolo importante nello sviluppo della teoria.**

Capitolo 4: Il tensore stress-energia

Ora sappiamo che esiste un tensore che ci permette di capire se lo spazio-tempo è curvo o piatto, cioè se siamo in presenza di un campo gravitazionale non costante e non uniforme. Ma al fine di ricavare le equazioni di Einstein, dobbiamo ancora rispondere alla seguente domanda: **come descriviamo la materia e i campi nella relatività generale?** Questa domanda è importante perché vogliamo trovare cosa mettere al membro destro delle equazioni come sorgente del campo gravitazionale.

Definiremo innanzitutto il tensore stress-energia in uno spazio-tempo piatto, e poi generalizziamo questa nozione ad uno spazio-tempo generico.

In Relatività Speciale, definiamo il quadrivettore energia-momento di una particella di massa m e velocità $\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}$ nel modo seguente:

$$p^{\alpha} = mcu^{\alpha}, \quad \alpha = 0,3, \tag{4.1}$$

dove $u^\alpha = \frac{d\xi}{d\tau}$ è la quadrivelocità ($u^\alpha u_\alpha = -1$); τ, che ha le dimensioni di una lunghezza, è connesso al tempo proprio della particella dall'equazione: $\left[\textbf{tempo proprio} = \frac{1}{c}\boldsymbol{\tau}\right]$. In ciò che segue, indichiamo in grassetto i trivettori, ad esempio **v**, mentre i quadrivettori saranno indicati con una freccia, cioè $\vec{A}$. Ricordiamo inoltre che $\{\xi^\alpha\}$ sono le coordinate Minkowskiane dello spazio-tempo piatto, o di un sistema localmente inerziale.
Notiamo che $\xi^0 = ct$ e, definendo

$$\gamma = \frac{d\xi^0}{d\tau}, \tag{4.2}$$

abbiamo:

$$u^0 = \gamma \tag{4.3}$$

$$u^i = \frac{d\xi^i}{d\tau} = \frac{d\xi^i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v^i\frac{\gamma}{c} \tag{4.4}$$

$$u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = -\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -1 \quad \rightarrow \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Dunque abbiamo:

$$p^\mu = m(c\gamma, \gamma\mathbf{v}). \tag{4.6}$$

La componente temporale del vettore energia-momento rappresenta l'energia della particella

$$p^0 = \frac{E}{c}, \quad \text{e} \quad E = mc^2\gamma. \tag{4.7}$$

Le componenti spaziali sono le componenti del momento tridimensionale

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}. \tag{4.8}$$

Cosa cambia se abbiamo a che fare con una distribuzione di materia ed energia continua o discreta? In quel caso dovremmo essere in grado di misurare alcune quantità, come la massa e l'energia che sono contenute in un volume unitario, o il flusso di energia e momento che scorre attraverso le due facce di questo volume. Queste informazioni sono contenute nel tensore stress-energia che stiamo andando a definire.
Consideriamo il semplice caso di un sistema di n particelle non interagenti con coordinate $\xi_n(t)$, ognuna con un vettore energia-momento p_n^α.
Definiamo la **densità di energia** come

$$T^{00} \equiv \sum_n cp_n^\alpha(t)\delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right) = \sum_n E_n\delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right), \tag{4.9}$$

la **densità di momento** $\frac{1}{c}T^{0i}$, dove T^{0i} è definito come

$$T^{0i} \equiv \sum_n cp_n^i(t)\delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right), \quad i = 1{,}3 \tag{4.10}$$

e la **corrente di momento** come

$$T^{ki} \equiv \sum_n cp_n^k(t)\frac{d\xi_n^i(t)}{dt}\delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right), \quad k = 1{,}3 \;\; i = 1{,}3 \tag{4.11}$$

dove $\delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right)$ è la funzione delta di Dirac che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza al cubo. Per questo motivo, ad esempio, T^{00} è un'energia divisa per un volume e quindi è una densità di energia. Le definizioni (4.9)-(4.10)-(4.11) possono essere unificate nella relazione

$$T^{\alpha\beta} \equiv \sum_n p_n^\alpha(t) \frac{d\xi_n^\beta(t)}{dt} \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right), \quad \alpha, \beta = 0{,}3, \tag{4.12}$$

o, poiché

$$p_n^\alpha(t) = \frac{E_n}{c^2} \frac{d\xi_n^\alpha(t)}{dt}, \tag{4.13}$$

la (4.12) può essere scritta come

$$T^{\alpha\beta} = c^2 \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right), \tag{4.14}$$

la quale mostra chiaramente che $T^{\alpha\beta}$ è simmetrico.
Infine, un ulteriore modo di scrivere la (4.12) è

$$T^{\alpha\beta} = c \sum_n \int p_n^\alpha(t) \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\tau_n} \delta^4\left(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)\right) d\tau_n, \tag{4.15}$$

dove

$$\delta^4\left(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)\right) = \delta(\xi^0 - \xi_n^0)\delta(\xi^1 - \xi_n^1)\delta(\xi^2 - \xi_n^2)\delta(\xi^2 - \xi_n^2); \tag{4.16}$$

usando la proprietà della funzione δ

$$\int d^3\xi f\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n\right) = f(\boldsymbol{\xi}_n), \tag{4.17}$$

è facile vedere che

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= c \sum_n \int p_n^\alpha(t) \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\tau_n} \delta^4\left(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)\right) d\tau_n \\ &= c \sum_n \int \left[p_n^\alpha(t) \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\tau_n} \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right) \right] \delta(\xi^0 - \xi_n^0(\tau_n)) \frac{d\tau_n}{d\xi_n^0} d\xi_n^0 \\ &= c \sum_n \left[p_n^\alpha(t) \frac{d\xi_n^\beta(t)}{d\tau_n} \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right) \right]_{\xi_n^0 = (\tau_n) = \xi^0} = c \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta}{d\xi^0} \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(\xi^0)\right) \\ &= c \sum_n p_n^\alpha \frac{d\xi_n^\beta}{dt} \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(\xi^0)\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

che coincide con la (4.15).
Ricapitolando, il significato delle differenti componenti è il seguente:

$\boldsymbol{T^{00}}$**=densità di energia.** Nel caso non relativistico $v \ll c$, $p_n^0 \sim m_n c$ e $T^{00} \sim \sum_n m_n c^2 \sum \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right)$ si riduce alla densità di materia ρc^2 dove

$$\rho = \sum_n m_n \delta^3\left(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\right). \tag{4.19}$$

$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{T^{0i}}$ **= densità di momento.** Poiché le dimensioni del momento $\vec{p}$ sono quelle di un'energia divisa per una velocità, segue che cT^{0i} è l'energia che scorre attraverso un'unità di superficie ortogonale all'asse ξ^i per unità di tempo.
Considerazioni dimensionali simili ci permettono di interpretare T^{ik} come il flusso della i-esima componente del momento tridimensionale p attraverso l'unità di superficie ortogonale all'asse ξ^k.

Ora dobbiamo verificare le seguenti proprietà:

1) $T^{\alpha\beta}$ è un tensore?
2) Soddisfa delle leggi di conservazione? (ricordiamo che il quadrivettore energia-momento soddisfa una legge di conservazione).
3) Se lo fa, come si scrive questa legge in uno spazio-tempo curvo, cioè in presenza di un campo gravitazionale?

1) $T^{\alpha\beta}$ è un tensore?

Consideriamo una trasformazione di coordinate generiche

$$\{\xi^{\alpha}\} \to \{x^{\alpha'}\} \quad \to \quad \xi^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma'} x^{\gamma'}, \tag{4.20}$$

Il quadrimomento e la quadrivelocità si trasformano come

$$p^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma'} p^{\gamma'}, \qquad u^{\alpha} \equiv \frac{d\xi^{\alpha}}{d\tau} = \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma'} u^{\gamma'}. \tag{4.21}$$

Al fine di vedere come si trasforma $T^{\alpha\beta}$ dobbiamo fare una breve digressione per mostrare come si trasforma $\delta^4(x)$.

In uno spazio-tempo quadridimensionale l'elemento di volume che è invariante sotto una generica trasformazione di coordinate è $\sqrt{-g}d^4x$ cioè:

$$\sqrt{-g}d^4x = \sqrt{-g'}d^4x'. \tag{4.22}$$

Inoltre,

$$d^4x = |J| d^4x', \tag{4.23}$$

dove $J = det\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}\right)$ è lo Jacobiano associato alla trasformazione di coordinate. Poiché

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu}, \tag{4.24}$$

prendendo il determinante ad entrambi i membri otteniamo

$$g' = J^2 g \quad \text{ e quindi } \sqrt{-g} = \frac{1}{|J|}\sqrt{-g'}. \tag{4.25}$$

Dunque, se $\{\xi^{\alpha}\}$ è il riferimento Minkowskiano, e $\{x^{\alpha}\}$ è un sistema di riferimento generico

$$d^4\xi = \sqrt{-g}d^4x. \tag{4.26}$$

Consideriamo ora la funzione delta in uno spazio-tempo Minkowskiano; dalla definizione, per ogni funzione $f(\vec{\xi})$,

$$\int d^4\xi\, f(\vec{\xi})\delta^4\left(\vec{\xi} - \vec{\xi}_n(t)\right) = f(\vec{\xi}_n), \tag{4.27}$$

e, in un riferimento generico,

$$\int d^4x\, f(\vec{x})\delta^4\left(\vec{x} - \vec{x}_n(t)\right) = f(\vec{x}_n). \tag{4.28}$$

Ora introduciamo una trasformazione di coordinate $\xi^{\alpha} \to x^{\alpha}$, con $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\xi^{\mu})$, e definiamo $\tilde{f}(\vec{\xi}) = f\left(\vec{x}(\vec{\xi})\right)$; moltiplicando e dividendo la (4.28) per $\sqrt{-g}$, otteniamo

$$\int \sqrt{-g}\, d^4x\, f(\vec{x}) \frac{\delta^4\left(\vec{x} - \vec{x}_n(t)\right)}{\sqrt{-g}} = \int d^4\xi\, \tilde{f}(\vec{\xi}) \frac{\delta^4\left(\vec{x} - \vec{x}_n(t)\right)}{\sqrt{-g}} = \tilde{f}(\vec{\xi}_n) \tag{4.29}$$

che è valida per ogni funzione *f*. Confrontando la (4.27) con la (4.29) segue che

$$\delta^4\left(\vec{\xi}-\vec{\xi}_n(t)\right)=\frac{\delta^4\left(\vec{x}-\vec{x}_n(t)\right)}{\sqrt{-g}}. \tag{4.30}$$

Usando le (4.15), (4.21), (4.30) è facile trovare le regole di trasformazione per $T^{\alpha\beta}$:

$$T^{\alpha\beta}=c\sum_n\int \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma'}\Lambda^{\beta}{}_{\delta'}p_n^{\gamma'}\frac{dx_n^{\delta'}}{d\tau_n}\frac{\delta^4(\vec{x}-\vec{x}_n)}{\sqrt{-g}}d\tau_n. \tag{4.31}$$

Dunque se definiamo

$$T^{\alpha\beta}=c\sum_n\int \frac{1}{\sqrt{-g}}p_n^{\alpha}\frac{dx_n^{\beta}}{d\tau_n}\delta^4(\vec{x}-\vec{x}_n)d\tau_n, \tag{4.32}$$

sotto una generica trasformazione si trasformerà come

$$T^{\alpha\beta}=\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma'}\Lambda^{\beta}{}_{\delta'}T^{\gamma'\delta'}, \tag{4.33}$$

e dunque è un tensore. In uno spazio-tempo piatto, e in un sistema localmente inerziale $\sqrt{-g}=1$ e riprende la definizione (4.15). In conclusione, la (4.32) è il tensore stress-energia adatto a descrivere un insieme di particelle non interagenti sia in uno spazio piatto che in uno curvo. Ovviamente potremmo avere differenti tipi di materia e/o energia: un fluido, un campo elettromagnetico, etc. In quel caso è possibile mostrare che il corrispondente tensore stress-energia può essere derivato scrivendo l'azione del campo considerato, e variando questa azione in accordo a $g_{\mu\nu}$. Comunque, il significato fisico delle diverse componenti di $T^{\alpha\beta}$ saranno le stesse. Ora useremo il tensore che abbiamo ricavato per rispondere alla seconda importante domanda. La risposta sarà valida per il tensore stress-energia per ogni tipo di materia e energia.

2) $T^{\alpha\beta}$ soddisfa una legge di conservazione?

Assumiamo che siamo in uno spazio-tempo piatto. Deriviamo le componenti αi del tensore stress-energia dato nella (4.12):

$$\frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial\xi^i}=\sum_n\int p_n^{\alpha}(t)\frac{d\xi_n^i}{dt}\frac{\partial}{\partial\xi^i}\delta^3(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t)), \tag{4.34}$$

dove $\alpha=0{,}3$ e $i=1{,}3$. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial\xi^i}\delta^3(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t))=-\frac{\partial}{\partial\xi_n^i}\delta^3\left(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t)\right), \tag{4.35}$$

la (4.34) diventa

$$\frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial\xi^i}=-\sum_n p_n^{\alpha}(t)\frac{d\xi_n^i}{dt}\frac{\partial}{\partial\xi_n^i}\delta^3\left(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t)\right)=-\sum_n p_n^{\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3\left(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t)\right). \tag{4.36}$$

Deriviamo ora la componente $T^{\alpha 0}$ rispetto a $\xi^0=ct$:

$$\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial\xi^0}=\sum_n\frac{dp_n^{\alpha}(t)}{dt}\delta^3\left(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t)\right)+\sum_n p_n^{\alpha}(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3\left(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_n(t)\right). \tag{4.37}$$

Poiché

$$\frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} = \frac{dp_n^\alpha(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha, \tag{4.38}$$

dove f_n^α è la forza relativistica, il primo termine della (4.37) può essere considerato come una densità di forza G^α definita come

$$G^\alpha(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_n \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt}\delta^3\big(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\big) = \sum_n \delta^3\big(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_n(t)\big)\frac{d\tau}{dt} f_n^\alpha. \tag{4.39}$$

È una densità perché la funzione delta è l'inverso di una lunghezza al cubo. Se le particelle sono libere, $f_n^\alpha = 0$ e aggiungendo la (4.36) e la (4.37) troviamo

$$\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial \xi^0} + \frac{\partial T^{\alpha i}}{\partial \xi^i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial \xi^\beta} = 0, \tag{4.40}$$

o

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0, \tag{4.41}$$

che è la legge di conservazione che stavamo cercando.
Prendiamo, come esempio, $\alpha = 0$:

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial \xi^0} = -\left[\frac{\partial T^{01}}{\partial \xi^1} + \frac{\partial T^{02}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial T^{03}}{\partial \xi^3}\right]. \tag{4.42}$$

Integrando sul volume V che, come prima, si estende su tutto lo spazio, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}\int_V T^{00} dV = -\int_V \frac{\partial T^{0k}}{\partial \xi^k} dV = -\int_S T^{0k} dS_k. \tag{4.43}$$

Dal momento che T^{0k} è l'energia che scorre attraverso l'unità di superficie ortogonale a ξ^k, se assumiamo che questa energia va a zero all'infinito troviamo che:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}\int_V T^{00} dV = 0 \quad \rightarrow \quad \int_V T^{00} dV = cost. \tag{4.44}$$

che esprime la conservazione dell'energia. Una procedura simile può essere usata per trovare la conservazione del momento ponendo $\alpha = i = 1,2,3$. In questo caso troviamo

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}\int_V T^{i0} dV = -\int_V \frac{\partial T^{ik}}{\partial \xi^k} dV = -\int_S T^{ik} dS_k. \tag{4.45}$$

Assumendo che le correnti di momento svaniscono all'infinito, troviamo

$$\frac{\partial}{\partial \xi^0}\int_V T^{i0} dV = 0 \quad \rightarrow \quad \int_V T^{i0} dV = cost. \tag{4.46}$$

Concludendo, possiamo definire il vettore

$$P^\alpha = \int_V T^{\alpha 0} dV, \quad \alpha = 0,3, \tag{4.47}$$

che può essere identificato come il vettore energia-momento, che si conserva. Bisognerebbe ricordare che questa derivazione è stata eseguita nel riferimento della Relatività Speciale.

3) Come scriviamo questa legge di conservazione in uno spazio-tempo curvo?

Per rispondere alla domanda bisogna introdurre il Principio di Covarianza Generale che rivestirà un ruolo importante nella Relatività Generale.

Il principio di covarianza generale

Una legge fisica è vera se:

1) È vera in assenza di gravità, cioè si riduce alle leggi della Relatività Speciale quando $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ e $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ svanisce. È chiaro che questa prima proposizione include il Principio di Equivalenza.
2) Per preservare la loro forma sotto un'arbitraria trasformazione di coordinate, tutte le equazioni devono essere generalmente covarianti. Questo vuol dire che tutte le equazioni devono essere espresse in forma tensoriale.

Il contenuto fisico del Principio di Covarianza Generale è che se un'equazione tensoriale è vera in assenza di gravità, allora è vera in presenza di un arbitrario campo gravitazionale. Bisogna inoltre sottolineare che il Principio di Covarianza Generale può essere applicato solo su scala piccola rispetto alle tipiche distanze associate al campo gravitazionale, perché solo su queste scale si può costruire localmente un sistema inerziale.
E ora possiamo rispondere alla terza domanda. Per prima cosa notiamo che la (4.41) è valida nella Relatività Speciale, cioè in assenza di gravità, e quindi, in accordo al Principio di Equivalenza, sarà valida in un sistema localmente inerziale di uno spazio-tempo curvo. In questo riferimento, la derivata covariante e quella ordinaria coincidono e quindi la (4.41) si può scrivere come:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \tag{4.48}$$

Poi osserviamo che alla luce del Principio di Covarianza Generale, poiché la legge di conservazione (4.41) è un'equazione tensoriale, essa è valida in ogni sistema di riferimento. Dunque per trasformare una generica equazione tensoriale valida nella relatività speciale ad una forma covariante generale sarà sufficiente sostituire la virgola con il punto e virgola. La legge di conservazione generale soddisfatta dal tensore stress-energia è quindi la (4.48).
Questa è una legge di conservazione?
Per rispondere alla domanda abbiamo bisogno di calcolare la divergenza covariante di un tensore. Dall'espressione dei coefficienti della connessione affine in termine della metrica troviamo che

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\rho}}\right). \tag{4.49}$$

Il primo e il terzo termine danno

$$g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} - g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\rho}} = g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} - g^{\rho\mu}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} = 0, \tag{4.50}$$

a causa della simmetria di $g_{\alpha\beta}$, quindi

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}}. \tag{4.51}$$

Per una matrice arbitraria M

$$\mathrm{Tr}\left[M^{-1}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}M(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} ln[|DetM(x)|]. \tag{4.52}$$

Ma questo è quello che abbiamo al membro destro della (4.51), quindi, se poniamo $Det(g) = g$, la (4.51) diventa (poiché $g < 0$)

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\ln[-g] = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{-g}. \tag{4.53}$$

Dunque per esempio, se V^μ è un vettore

$$\mathrm{V}^{\lambda}{}_{;\lambda} = \mathrm{V}^{\lambda}{}_{,\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} V^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\sqrt{-g}\mathrm{V}^{\lambda}\right), \tag{4.54}$$

e per $\mathrm{T}^{\mu\nu}$

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g}\mathrm{T}^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \mathrm{T}^{\mu\lambda}. \tag{4.55}$$

In particolare, se $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ è antisimmetrico, l'ultimo termine della (4.55) è nullo e quindi

$$\mathrm{F}^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g}\mathrm{F}^{\mu\nu}\right). \tag{4.56}$$

Ora ritorniamo alla (4.49). Usando la (4.55) essa diventa

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g}\mathrm{T}^{\mu\nu}\right) = -\sqrt{-g}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \mathrm{T}^{\mu\lambda}, \tag{4.57}$$

e questa non è una legge di conservazione. Dunque non possiamo dire che il quadrimomento si conserva come abbiamo fatto nella Relatività Speciale. Potremmo tentare di definire definire

$$P^{\alpha} = \int_V \sqrt{-g} T^{\alpha 0} dV, \quad \alpha = 0{,}3, \tag{4.58}$$

ma questo non sarebbe un vettore. La ragione fisica di questo fallimento è che ora siamo in ambito della Relatività Generale, e dobbiamo prendere in considerazione non solo l'energia e il momento associate alla materia, ma anche l'energia che è portata dal campo gravitazionale stesso, e il momento che potrebbe essere dovuto alle onde gravitazionali. Comunque vedremo che se lo spazio-tempo ammette delle simmetrie, possiamo introdurre delle quantità che si conservano.

Capitolo 5: Le equazioni di Einstein

Ora abbiamo tutti gli elementi per ricavare le equazioni del campo gravitazionale. Ci aspettiamo che esse siano più complicate delle equazioni lineari del campo elettromagnetico. Per esempio le onde elettromagnetiche sono prodotte come conseguenza del moto di particelle cariche, ma l'energia e il momento che trasportano non sono sorgenti per il campo elettromagnetico, e non compaiono al membro destro delle equazioni. In presenza della gravità la situazione è differente. Questa equazione

$$E = mc^2, \tag{5.1}$$

stabilisce che la massa e l'energia possono trasformarsi l'una nell'altra: esse sono differenti manifestazioni della stessa quantità fisica. Segue che se la massa è la sorgente del campo gravitazionale, lo è anche l'energia, e di conseguenza entrambe dovrebbero apparire al membro destro delle equazioni di campo. Questo implica che le equazioni che stiamo cercando non saranno lineari. Ad esempio un sistema di masse che si muovono arbitrariamente emaneranno onde gravitazionali, che trasportano energia, e sono entrambe sorgenti del campo gravitazionale e devono apparire al membro destro delle equazioni. Comunque, poiché la gravità newtoniana funziona bene quando abbiamo a che fare con

particelle non relativistiche, o in generale quando il campo gravitazionale è debole, nel formulare la nuova teoria dovremmo richiedere che nel limite di campi deboli le nuove equazioni si riducano all'equazione di Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \tag{5.2}$$

dove ρ è la densità di materia, Φ è il potenziale newtoniano e ∇^2 è l'operatore di Laplace in coordinate cartesiane

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{5.3}$$

Iniziamo chiedendoci come dovrebbero apparire le equazioni nel limite di campi deboli.

Equazioni della geodetica nel limite di campi deboli

Consideriamo una particella non relativistica che si muove in un campo gravitazionale **debole e stazionario**. Sia τ/c il tempo proprio. Poiché $v \ll c$, segue che

$$\frac{dx^i}{dt} \ll c \quad \rightarrow \quad \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{cdt}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau}. \tag{5.4}$$

In un arbitrario sistema di coordinate le equazioni della geodetica sono

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0. \tag{5.5}$$

Dall'espressione dei coefficienti della connessione affine in termini di $g_{\mu\nu}$ possiamo facilmente trovare che

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(2g_{0\sigma,0} - g_{00,\sigma}\right). \tag{5.6}$$

Inoltre, se il campo è stazionario $g_{0\sigma,0} = 0$, e

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}. \tag{5.7}$$

Poiché abbiamo assunto che il campo gravitazionale è debole, possiamo scegliere un sistema di coordinate tale che

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{5.8}$$

dove $h_{\mu\nu}$ è una piccola perturbazione della metrica piatta. In altre parole, stiamo assumendo che il campo è così debole che la metrica è quasi piatta. Poiché siamo interessati solo ai termini del primo ordine, dovremmo alzare e abbassare gli indici con la metrica piatta $\eta^{\mu\nu}$. Ad esempio:

$$h^\lambda{}_\nu = g^{\lambda\rho}h_{\rho\nu} \sim \eta^{\lambda\rho} + O\left(h^2{}_{\mu\nu}\right). \tag{5.9}$$

Se sostituiamo la (5.8) nella (5.7) e prendiamo solo i termini al primo ordine in $h_{\mu\nu}$ troviamo

$$\Gamma^\mu_{00} \sim -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\sigma}, \tag{5.10}$$

e l'equazione della geodetica diventa

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2, \tag{5.11}$$

o, separando le componenti spaziali da quelle temporali,

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} h_{00}\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2, \quad \text{e} \quad \frac{d^2ct}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial ct}\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 = 0, \tag{5.12}$$

dove

$$\boldsymbol{\nabla} \to \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{5.13}$$

è il gradiente in coordinate cartesiane. La seconda equazione scompare perché abbiamo assunto che il campo è stazionario. Possiamo riscalare la coordinata temporale in modo che $\frac{cdt}{d\tau} = 1$ e la prima della (5.12) diventa:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} h_{00}. \tag{5.14}$$

Dovremmo ricordare che l'equazione newtoniana corrispondente è

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi, \tag{5.15}$$

dove Φ è il potenziale gravitazionale dato dall'equazione di Poisson (5.2). Confrontando la (5.14) e la (5.15), e poiché $\tau = ct$ vediamo che deve essere

$$h_{00} = -2\frac{\Phi}{c^2} + cost. \tag{5.16}$$

Ad esempio se il campo è stazionario e a simmetria sferica, il potenziale newtoniano è

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \tag{5.17}$$

e se richiediamo che h_{00} si annulla all'infinito, la costante deve essere nulla e la (5.16) dà

$$h_{00} = -2\frac{\Phi}{c^2} \quad e \quad g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{5.18}$$

Dunque abbiamo mostrato che nel limite di campo debole le equazioni della geodetica si riducono alla legge newtoniana della gravitazione. Questo suggerisce la forma che dovrebbero avere le equazioni. Infatti se il campo è debole, la materia si comporterà in maniera non relativistica, cioè $T^{00} = T_{00} \sim \rho c^2$ e quindi la generalizzazione dell'equazione di Laplace potrebbe essere:

$$\nabla^2 g_{00} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \tag{5.19}$$

Ma questa equazione non è Lorentz-invariante e quindi non funziona. Tuttavia suggerisce che se al posto di un campo stazionario avessimo una arbitraria distribuzione di energia e materia, dovremmo costruire un tensore che parte da $g_{\mu\nu}$ e dalle sue derivate in modo che le equazioni del campo siano

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{5.20}$$

dove $G_{\mu\nu}$ è un operatore che agisce su $g_{\mu\nu}$ che ora dovremmo definire. Bisognerebbe notare che, in virtù del Principio di Covarianza Generale, se la (5.20) vale in un dato riferimento, essa varrà in qualsiasi altro.

Equazioni di campo di Einstein

Per prima cosa vediamo quali derivate e di quale ordine ci aspettiamo in $G_{\mu\nu}$. Un confronto con l'equazione di Laplace mostra che $G_{\mu\nu}$ deve avere le dimensioni di una derivata seconda. Infatti, supponiamo che contiene termini di questo tipo

$$\frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x^3{}_\mu}, \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^2{}_\mu}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \tag{5.21}$$

quindi, al fine di rendere tutto dimensionalmente uguale, ogni termine deve essere moltiplicato per una costante che ha le dimensioni di una lunghezza

$$\frac{\partial^3 g_{\mu\nu}}{\partial x^3{}_\mu}\cdot l, \quad \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^2{}_\mu}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\cdot l, \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{1}{l}. \tag{5.22}$$

In questo caso, un campo gravitazionale che agisce su piccole o su grandi scale sarebbe descritto da equazioni in cui alcuni termini sarebbero trascurabili rispetto ad altri. Questo non è accettabile, perché vogliamo un set di equazioni che siano valide su ogni scala, e di conseguenza i soli termini che possiamo accettare in $G_{\mu\nu}$ sono quelli che contengono le derivate seconde di $g_{\mu\nu}$ in forma lineare e i prodotti delle derivate prime. Riassumiamo le assunzioni che bisogna fare su $G_{\mu\nu}$:

1) deve essere un tensore;
2) deve essere lineare nelle derivate seconde, e deve contenere i prodotti delle derivate prime di $g_{\mu\nu}$;
3) poiché $T_{\mu\nu}$ è simmetrico, anche $G_{\mu\nu}$ deve esserlo;
4) poiché $T_{\mu\nu}$ soddisfa la "legge di conservazione" $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, $G_{\mu\nu}$ deve soddisfare la stessa legge di conservazione;
5) nel limite di campi deboli si deve ridurre a $G_{00}\sim\nabla^2 g_{00}$.

Nell'ultima assunzione il Principio di Equivalenza e il limite di campo debole appaiono esplicitamente.

Nella sezione precedente abbiamo mostrato che esiste un tensore che è lineare nelle derivate seconde di $g_{\mu\nu}$ e non lineare nelle derivate prime. Esso è il tensore di Riemann, che contiene l'informazione del campo gravitazionale. In ogni caso non possiamo usarlo direttamente nelle equazioni di campo che stiamo cercando, poiché esso ha quattro indici (esso è un tensore $\binom{1}{2}$) mentre noi abbiamo bisogno di un tensore $\binom{2}{2}$ o $\binom{0}{2}$. Inoltre, la divergenza covariante del tensore stress-energia scompare, e dunque questo deve valere anche per il tensore che dovremmo usare al membro sinistro della (5.20).

Contraendo il tensore di Riemann con il tensore metrico possiamo costruire un tensore $\binom{0}{2}$, cioè il **tensore di Ricci**:

$$R_{\mu\nu} = g^{\kappa\alpha}R_{\kappa\mu\alpha\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \tag{5.23}$$

che è un tensore simmetrico perché il tensore di Riemann lo è. Lo scalare

$$R = R^\alpha{}_\alpha \tag{5.24}$$

è chiamato **scalare di curvatura**.

La contrazione nella (5.24) ha il seguente significato

$$R^\alpha{}_\alpha = R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3. \tag{5.25}$$

Si può mostrare, usando le proprietà di simmetria del tensore di Riemann, che $R_{\mu\nu}$ e R sono i soli tensore del secondo ordine e scalare che è possibile costruire contraendo $R_{\kappa\mu\alpha\nu}$ con il

tensore metrico. Sia in $R_{\mu\nu}$ che in R le derivate seconde di $g_{\mu\nu}$ appaiono lineari. Quindi il tensore che stiamo cercando dovrebbe avere la seguente forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R, \tag{5.26}$$

dove C_1 e C_2 sono costanti da determinare. Il tensore $G_{\mu\nu}$ soddisfa i punti 1,2 e 3. La condizione 4 richiede che:

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = C_1 R^{\mu\nu}{}_{;\mu} + C_2 g^{\mu\nu} R_{;\mu} = 0. \tag{5.27}$$

Ora succede una cosa davvero notevole: la (5.27) è soddisfatta in virtù delle identità di Bianchi

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \tag{5.28}$$

Infatti contraendo queste equazioni troviamo

$$g^{\lambda\nu}\left(R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu}\right) = R_{;\eta} - R^{\kappa}{}_{\eta;\kappa} - R^{\nu}{}_{\eta;\nu} = 0. \tag{5.29}$$

L'ultima espressione può essere riscritta nella seguente forma

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\nu} = 0. \tag{5.30}$$

Dunque, l'identità di Bianchi dice che se

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{1}{2}, \tag{5.31}$$

la (5.30) è soddisfatta. Dobbiamo ancora trovare C_1.

Nel limite di campo debole

$$|T_{ij}| \ll |T_{00}|, \quad i,j = 1,3, \tag{5.32}$$

e quindi

$$|G_{ij}| \ll |G_{00}|, \quad i,j = 1,3. \tag{5.33}$$

Dalla (5.27) e dalla (5.31) segue che

$$\left|C_1\left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R\right)\right| \ll |G_{00}|, \tag{5.34}$$

e quindi

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R. \tag{5.35}$$

Poiché $g_{ij} \simeq \eta_{ij}$

$$R_{kk} \simeq \frac{1}{2} R, \quad k = 1,3 \tag{5.36}$$

di conseguenza

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -R_{00} + \sum_k R_{kk} = -R_{00} + \frac{3}{2} R, \tag{5.37}$$

e

$$R \simeq 2R_{00}. \tag{5.38}$$

Poiché

$$G_{\mu\nu} = C_1\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right), \tag{5.39}$$

troviamo che

$$G_{00} \simeq C_1 2R_{00}. \tag{5.40}$$

Se ora calcoliamo R_{00} nel limite di campo debole (assumendo che il campo è stazionario), troviamo che la parte non lineare è del secondo ordine. Prendendo solo il primo ordine e imponendo la stazionarietà otteniamo

$$R_{00} \simeq -\frac{1}{2}\eta^{ij}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}, \tag{5.41}$$

vale a dire

$$G_{00} \simeq C_1 \nabla^2 g_{00}. \tag{5.42}$$

Un confronto di questa equazione con la relazione $G_{00} \sim \nabla^2 g_{00}$ mostra che se richiediamo che le equazioni del campo relativistico si riducano alle equazioni newtoniane nel limite di campo debole, allora deve essere

$$C_1 = 1. \tag{5.43}$$

In conclusione, le equazioni di Einstein sono

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{5.44}$$

dove

$$G_{\mu\nu} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) \tag{5.45}$$

è chiamato **tensore di Einstein**. Una forma alternativa è

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right). \tag{5.46}$$

Nel vuoto $T_{\mu\nu} = 0$ e le equazioni di Einstein si riducono a

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{5.47}$$

Quindi nel vuoto il tensore di Ricci si annulla, ma il tensore di Riemann no, a meno che il campo gravitazionale non scompaia o sia costante e uniforme. Potremmo aggiungere alla (5.44) il termine seguente

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu}\right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{5.48}$$

dove λ è una costante. Questo termine soddisfa le condizioni 1,2,3 e 4 ma non la condizione 5. Questo vuol dire che deve essere molto piccolo in modo che nel limite di campo debole le equazioni si riducono a quelle newtoniane.

L'invarianza di Gauge delle equazioni di Einstein

Poiché ci sono 10 componenti indipendenti in $G_{\mu\nu}$, le equazioni di Einstein forniscono 10 equazioni per le 10 componenti indipendenti di $g_{\mu\nu}$. Queste equazioni non sono indipendenti, poiché, come abbiamo visto, le identità di Bianchi implicano la "legge di conservazione" $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, che fornisce 4 relazioni che il tensore di Einstein deve soddisfare. Dunque il numero di equazioni indipendenti si riduce a 6.

Abbiamo 6 equazioni e 10 funzioni incognite? Perché abbiamo questi 4 gradi di libertà? La ragione è la seguente. Sia $g_{\mu\nu}$ una soluzione delle equazioni. Se facciamo una trasformazione di coordinate $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha)$ il tensore trasformato $g'_{\mu\nu} = g_{\mu'\nu'}$ è ancora soluzione come stabilito dal Principio di Covarianza Generale. Questo vuol dire anche che $g_{\mu\nu}$ e $g'_{\mu\nu}$ rappresentano la stessa soluzione fisica (la stessa geometria) vista in differenti sistemi di riferimento. La trasformazione di coordinate include quattro funzioni arbitrarie $x^{\mu'}(x^\alpha)$ e quindi i 4 gradi di libertà derivano dalla libertà di scegliere il sistema di coordinate e scompaiono quando lo scegliamo. Ad esempio, potremmo scegliere un riferimento in cui quattro delle dieci $g_{\mu\nu}$ sono nulle. Dunque le equazioni di Einstein non determinano la soluzione $g_{\mu\nu}$ in modo univoco, ma solo in relazione ad una arbitraria trasformazione di

coordinate. Una situazione analoga si crea nel caso delle equazioni di Maxwell in Relatività Speciale. In questo caso le equazioni per il potenziale vettore A^{μ} sono

$$\Delta_{\mathbf{M}} A_{\alpha} - \frac{\partial^2 A^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = -\frac{4\pi}{c} J_{\alpha}. \tag{5.49}$$

Queste sono quattro equazioni per le quattro componenti del potenziale vettore. Esse non determinano univocamente A^{μ} perché in base alla legge di conservazione

$$J^{\mu}{}_{,\mu} = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\Delta_{\mathbf{M}} A_{\alpha} - \eta^{\mu\alpha} \frac{\partial^2 A^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right) = 0. \tag{5.50}$$

La (5.50) gioca un ruolo importante come l'identità di Bianchi nel nostro contesto. Essa fornisce una condizione che deve essere soddisfatta dalle componenti di A^{μ}, quindi il numero di equazioni di Maxwell indipendenti è tre. Il grado extra di libertà corrisponde all'invarianza di Gauge, che ora spieghiamo.

Se A_{α} è una soluzione,

$$A'_{\alpha} = A_{\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}, \tag{5.51}$$

sarà anch'essa una soluzione. Infatti, sostituendo otteniamo

$$\Delta_{\mathbf{M}} A'_{\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \Delta_{\mathbf{M}} \Phi - \frac{\partial^2 A'^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \eta^{\beta\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\delta}} = -\frac{4\pi}{c} J_{\alpha}, \tag{5.52}$$

e poiché il secondo e l'ultimo termine al membro sinistro si annullano, abbiamo

$$\Delta_{\mathbf{M}} A'_{\alpha} - \frac{\partial^2 A'^{\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = -\frac{4\pi}{c} J_{\alpha}, \tag{5.53}$$

come volevasi dimostrare.

Dal momento che Φ è arbitrario, possiamo sceglierlo in modo tale che

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}} A'^{\beta} = 0 \tag{5.54}$$

e la (5.53) diventa

$$\Delta_{\mathbf{M}} A'_{\alpha} = -\frac{4\pi}{c} J_{\alpha}. \tag{5.55}$$

Questa è la gauge di Lorenz.

Ricapitolando: nel caso elettromagnetico il grado di libertà in più su A_{μ} è dovuto al fatto che il potenziale vettore è definito in relazione a una funzione Φ definita nella (5.51). Nel nostro caso i quattro gradi di libertà in più sono dovuti al fatto che $g_{\mu\nu}$ è definito da una trasformazione di coordinate. Questa gauge è particolarmente utile quando si cerca una soluzione esatta delle equazioni di Einstein [1].

Capitolo 6: La Relatività Generale e l'universo omogeneo ed isotropo

Deriviamo la metrica di uno spazio omogeneo e isotropo. La metrica più generale può essere descritta come segue:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dx^i dt - \sigma_{ij}dx^i dx^j. \quad (6.1)$$

Facciamo ora delle semplici assunzioni:

1) Isotropia (nota che g_{0i} si trasforma come un vettore sotto trasformazione di coordinate spaziali: dovrebbe essere nullo, altrimenti introdurrebbe una direzione privilegiata)
$$g_{0i} = 0 \quad (6.2)$$

2) Ridefinizione del tempo (sincronizzazione)
$$d\tau = \sqrt{g_{00}}dt \rightarrow g_{00} = 1. \quad (6.3)$$

Quindi abbiamo ottenuto (usando t invece di τ):
$$ds^2 = dt^2 - \sigma_{ij}dx^i dx^j. \quad (6.4)$$
A causa dell'isotropia la metrica spaziale $ds_3^2 = \sigma_{ij}dx^i dx^j$ può dipendere solo dal raggio $|r|$ e da $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$. Ora possiamo scrivere in maniera del tutto generale:
$$ds_3^2 = a^2(t)\lambda^2(r)[dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] \quad (6.5)$$
oppure
$$ds_3^2 = a^2(t)\lambda'^2(r')[dr'^2 + r'^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] \quad (6.6)$$
se poniamo $\lambda r = r'$ e ridefiniamo $\lambda' = \lambda/(\frac{r d\lambda}{dr} + \lambda)$. Ora cerchiamo la funzione incognita imponendo l'omogeneità.
A questo fine, vogliamo trovare la metrica che descrive un'ipersuperficie immersa in uno spazio euclideo sferico quadri-dimensionale. Le proprietà di questa ipersuperficie saranno ovviamente le stesse in ogni suo punto. Dunque richiediamo che lo spazio tridimensionale soddisfi la condizione di "sfericità" tridimensionale
$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (6.7)$$
Introduciamo le coordinate sferiche quadridimensionali:
$$x_1 = a\cos\chi\sin\vartheta\sin\varphi \quad (6.8)$$
$$x_2 = a\cos\chi\sin\vartheta \quad (6.9)$$
$$x_3 = a\cos\chi\sin\vartheta\cos\varphi \quad (6.10)$$
$$x_4 = a\sin\chi \quad (6.11)$$
Differenziando la (6.7) abbiamo:
$$x_4 dx_4 = -(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3) \quad (6.12)$$
da cui
$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{x_4^2} \quad (6.13)$$
$$= a^2(d\chi^2 + \sin^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2))$$
che coincide con la (6.6) se $\chi = r$ e $d\chi = \lambda dr$, cioè se

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{6.14}$$

Ora possiamo generalizzare ad una generica linea (la cui omogeneità non è così ovvia come nel caso sferico):

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + kx_4^2. \tag{6.15}$$

Otteniamo dunque:

$$ds_3^2 = a^2\big(d\chi^2 + F(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\big) \tag{6.16}$$

dove

$$F(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k = 1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh\chi & k = -1 \end{cases}$$

e

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{6.17}$$

La metrica omogenea e isotropa così ottenuta è chiamata metrica di Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right] \tag{6.18}$$

La costante k può assumere qualsiasi valore, ma possiamo assorbire k ridefinendo r, dunque da questo momento in poi possiamo considerare solo i tre casi $k = -1,0,1$. La stessa metrica può essere scritta in forma cartesiana come

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1+\frac{kr^2}{4}}[dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)] = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1+\frac{kr^2}{4}}[dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{6.19}$$

che è molto conveniente dal punto di vista analitico, specialmente nel caso $k = 0$.

Equazioni di Friedmann

Scriviamo la metrica FRW:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right]; \tag{6.49}$$

per $k = 0$ i simboli di Christoffel si annullano tutti tranne

$$\Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0j} = H\delta^i_j \quad , \quad \Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\delta_{ij}. \tag{6.50}$$

Quindi abbiamo

$$R_{00} = \Gamma^\mu_{00,\mu} - \Gamma^\mu_{0\mu,0} + \Gamma^\mu_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{00} - \Gamma^\mu_{\sigma 0}\Gamma^\sigma_{\mu 0} = -3\dot{H} - H^2\delta^i_j\delta^j_i = -3\big(\dot{H} + H^2\big) = -3\frac{\ddot{a}}{a} \tag{6.51}$$

e la traccia

$$R = -\frac{6}{a^2}(\dot{a}^2 + a\ddot{a} + k) = -6\dot{H} - 12H^2 - 6ka^{-2}. \tag{6.52}$$

Ora consideriamo la componente (0,0) e la traccia delle equazioni di Einstein:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi T_{00} \tag{6.53}$$

$$R = -8\pi T. \tag{6.54}$$

Dalla prima equazione e combinando le due otteniamo le equazioni di Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{6.55}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \tag{6.56}$$
alle quali va aggiunta l'equazione di conservazione
$$\dot{\rho} + 3H(\dot{\rho} + p) = 0. \tag{6.57}$$
Le equazioni di Friedmann e le equazioni di conservazione non sono indipendenti. Differenziando la (6.55) e inserendola nelle (6.57) otteniamo l'altra equazione di Friedmann. Definiamo ora la densità critica:
$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$
e il parametro di densità:
$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \tag{6.58}$$
in modo che la (6.55) diventa
$$1 = \Omega - \frac{k}{a^2H^2}. \tag{6.59}$$
Questo mostra che $k = 0$ corrisponde ad un universo con una densità pari a quella critica, cioè con $\Omega = 1$. Gli spazi con $k = +1$ corrispondono invece a $\Omega > 1$, quelli con $k = -1$ a $\Omega < 1$. Possiamo inoltre definire la "componente di curvatura":
$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2H^2} \tag{6.60}$$
(che implica la definizione $\rho_k = -3k/8\pi a^2$). In ogni caso abbiamo che
$$1 = \Omega(a) + \Omega_k(a) \tag{6.61}$$
Questa relazione si estende a modelli con molte componenti [2].

L'energia oscura

Attraverso i dati ricavati da diversi tipi di osservazione, nel 1998 si è avuta la conferma che l'universo si sta espandendo in maniera accelerata a causa dell'energia oscura, la cui origine è ancora incerta. Tale accelerazione è dovuta alla pressione negativa che essa possiede e che si contrappone a quella gravitazionale. I dati raccolti dall'osservazione di Supernovae di tipo Ia hanno mostrato che, nel presente, circa il 70% dell'energia dell'universo è riconducibile al contributo della dark energy; il 30% restante, invece, vede la preponderanza della materia oscura (circa il 25%), seguita poi dal 4% di contributo barionico, mentre la radiazione, la quale dominava sulla materia nel passato, contribuisce solo allo 0.005% della densità di energia totale dell'universo. Nel corso del tempo sono stati formulati diversi modelli che ne potessero spiegare l'origine, tra i quali il più semplice è la costante cosmologica Λ [3].

Consideriamo l'equazione di stato per l'energia oscura:
$$\dot{\rho_{de}} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = \dot{\rho_{de}} + 3H\rho_{de}(1 + w_{de}) = 0 \tag{6.62}$$
Concentrandosi sulla seconda uguaglianza ed integrandola utilizzando la relazione $dt = -dz/[H(1+z)]$, si arriva ad ottenere
$$\rho_{de} = \rho_{de,0}e^{\int_0^x \frac{3(1+w_{de})}{1+z'}dz'} \tag{6.63}$$
dove si sta considerando w_{de} come una quantità che dipende dal tempo o, equivalentemente, dal redshift z; quest'ultima equazione si può riscrivere introducendo $\widehat{w}_{de}$, valore medio per w_{de} definito come:

$$\widehat{w}_{de} = \frac{1}{ln(1+z)} \int_0^z \frac{w_{de}(z')}{1+z'} dz' \tag{6.64}$$

ottenendo che

$$\rho_{de} = \rho_{de,0} a^{-3(1+\widehat{w}_{de})}. \tag{6.65}$$

A questo punto, considerando anche il contributo dell'energia oscura, è facile verificare come l'equazione di Friedmann nella forma $H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\frac{\rho_m}{a^3} + \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_k}{a^2}\right)$ sia riscrivibile nella forma seguente:

$$H^2(z) = H_0 \left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0} e^{\int_0^x \frac{3(1+w_{de})}{1+z'} dz'} + \Omega_{k,0}(1+z)^2\right] \tag{6.66}$$

dove gli $\Omega_{i,0}$ devono obbedire alla relazione:

$\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{de,0} + \Omega_{k,0} = 1.$

Definendo $E(z) \equiv H(z)/H_0$ e derivando la (6.66) rispetto alla variabile z, si giunge ad ottenere un'espressione per l'equazione di stato dell'energia oscura pari a

$$w_{de} = \frac{(1+z)\left(E^2(z)\right)' - 3e^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{k,0}(1+z)^2}{3[E^2(z) - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(-1+z)^3 - \Omega_{k,0}(1+z)^2]} \tag{6.67}$$

dove l'apice primo rappresenta una derivata rispetto a z; in aggiunta si può dimostrare che, nel caso di un universo piatto (cioè $\Omega_{k,0} = 0$), la quantità *E(z)* è scrivibile in termini della distanza di luminosità d_L [3] come:

$$E(z) = \frac{c}{H_0}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{d_L(z)}{1+z}\right)\right]^{-1}. \tag{6.68}$$

Dunque, una volta misurata la $d_L(z)$, si può determinare l'evoluzione di $E(z)$ e da questa risolvere la (6.67) ottenendo w_{de}. Le restrizioni sulla curvatura dell'universo dovute ai dati provenienti dalle osservazioni impongono che $-0.0175 < \Omega_{k,0} < 0.0085$ [3], indicando che l'universo è piuttosto vicino ad una geometria effettivamente piatta. Pertanto, in un universo piatto in cui sia trascurabile il contributo della densità di energia della radiazione (ovvero per $z \leq 1$, essendosi già detto che all'epoca presente $\Omega_r \sim 0.005$), la (6.67) si riduce a:

$$w_{de} = \frac{(1+z)\left(E^2(z)\right)' - 3E^2(z)}{3E^2(z) - \Omega_{m,0}(1+z)^3}. \tag{6.69}$$

Nel caso in cui si voglia considerare un universo piatto la (6.66) può essere riscritta tenendo conto della relazione $\Omega_{m,0} + \Omega_{de,0} = 1$ e ponendo

$$g(z, \boldsymbol{\theta}) \equiv e^{3\int_0^x \frac{1+w(z', \boldsymbol{\theta})}{1+z'} dz'} \tag{6.70}$$

ottenendo, così che

$$H(z, \boldsymbol{\theta}) = H_{\mathbf{0}} \sqrt{\left(\mathbf{1} - \Omega_{m,0}\right) g(z, \boldsymbol{\theta}) + \Omega_{m,0}(1+z)^3}. \tag{6.71}$$

Da quanto appena ricavato, allora, le formule per d_L e d_A vanno a scriversi nella maniera di seguito riportata:

$$d_L(z,\boldsymbol{\theta}) = \frac{c}{H_0}(1+z)\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{1}-\Omega_{m,0})g(z',\boldsymbol{\theta})+\Omega_{m,0}(1+z')^3}}dz' \tag{6.72}$$

$$d_A(z,\boldsymbol{\theta}) = \frac{c}{H_0}\frac{1}{1+z}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{1}-\Omega_{m,0})g(z',\boldsymbol{\theta})+\Omega_{m,0}(1+z')^3}}dz'. \tag{6.73}$$

Nel seguito si considererà, orientandosi ad un'analisi più generica, il modello Chevalier-Polarski-Linder, brevemente detto CPL, che utilizza per l'energia oscura una parametrizzazione così definita:

$$w(z) = w_0 + w_1\frac{z}{1+z} \tag{6.74}$$

dove w_0 e w_1 sono numeri reali che rappresentano, rispettivamente, il valore attuale di *w* per l'equazione di stato dell'energia oscura e la sua generica evoluzione temporale. È importante notare come, per valori alti del redshift, si ha una relazione del tipo:

$$\lim_{x\to\infty} w_{CPL} = w_0 + w_1 \equiv w_i \tag{6.75}$$

che permette di descrivere differenti modelli per la dark energy e, quindi, mostra come la parametrizzazione introdotta costituisca un buon compromesso per procedere ad un'analisi che sia indipendente dal modello adottato[4]. In ultima istanza, si può verificare come, alla luce di questa parametrizzazione, la (6.71) diviene

$$H(z) = H_{\mathbf{0}}\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{de,0}e^{3\left(\frac{w_1 z}{1+z}\right)}(1+z)^{3(1+w_0+w_1)}}. \tag{6.76}$$

In particolare, obiettivo importante di questo lavoro di tesi è quello di determinare i parametri cosmologici $H_{\mathbf{0}}, \Omega_m, w_0$ e w_1 dei dati osservati. Nella fattispecie si confronta il valore predetto teoricamente del modulo della distanza con quello effettivamente osservato:

$$\mu(z_j) = 5\log d_L(z_j,\boldsymbol{\theta}) + \mu_0 \tag{6.77}$$

dove μ_0 dipende dalla costante di Hubble e dalla magnitudine assoluta *M*.
A tale scopo, è effettuata in via preliminare una procedura standard di best fitting per massimizzare la funzione di verosimiglianza $\mathcal{L}(\boldsymbol{p}) \propto e^{-\chi^2(\boldsymbol{p})/2}$ dove $\boldsymbol{p}$ rappresenta l'insieme di parametri cosmologici e l'espressione di $\chi^2(\boldsymbol{p})$ dipende dall'insieme di dati utilizzato. Si definisce:

$$\chi^2(\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{N_{SNIa}}\left[\frac{\mu_{oss}(z_i)-\mu_{teo}(z_i,p)}{\sigma_i}\right]^2 + \left(\frac{h-0.742}{0.036}\right)^2 + \left(\frac{\omega_m-0.1356}{0.0034}\right)^2 \tag{6.74}$$

dove μ_{oss} e μ_{teo} sono rispettivamente i valori osservati e predetti per il modulo della distanza e la sommatoria è intesa su tutte le SN Ia contenute nel campione in esame. I due addendi finali, $\omega_m \equiv \Omega_m h^2$, sono inclusi per spezzare la degenerazione tra i parametri dei modelli ($H_0 = 100h$). Per campionare efficientemente lo spazio dei parametri $\mathcal{N}$-dimensionale, si è fatto

uso del metodo Monte Carlo basato sulle Catene di Markov (MCMC), considerando cinque diverse catene ed utilizzando il test di convergenza Gelmann-Rubin, che usa catene parallele con valori iniziali differenti per testare se esse convergono alla stessa distribuzione. Si è impiegato il fattore di riduzione R, definito come la radice quadrata del rapporto tra la varianza tra le catene e la varianza di una singola catena: un valore elevato di R sta ad indicare che il primo tipo di varianza è sostanzialmente più grande del secondo e, quindi, è necessario proseguire ancora con la simulazione numerica; si è richiesto, tra l'altro, che R convergesse ad 1 per ciascuno dei parametri considerati. Infine, sono state ricavate le restrizioni per i parametri a partire dalla fusione delle catene, deducendone valori medi, mediane ed intervalli di confidenza (per questi ultimi, in particolare, i quantili 15.87-esimo e 84.13-esimo definiscono un intervallo di confidenza del 68%, il 2.28-esimo ed il 97.72-esimo uno del 95%, mentre i quantili 0.13-esimo e 99.87-esimo individuano l'intervallo di confidenza del 99%).

Ω_m	0.29	0.29	(0.27, 0.31)	(0.25, 0.33)
w_0	-0.97	-0.98	(-1.0, -0.74)	(-1.1, -0.85)
w_a	-0.47	- 0.48	(-0.85, -0.1)	(-0.98, 0.2)
h	0.70	0.70	(0.69, 0.71)	(0.68, 0.72)

Stima dei parametri dell'equazione di stato per il modello CPL, ottenuto considerando i QSOs e i GRBs. Le colonne indicano la media $< x >$, la mediana $\tilde{x}$ e gli intervalli di confidenza al 68% e al 95%.

In questa analisi abbiamo messo insieme il diagramma di Hubble, ossia valori misurati del modulo di distanza, $\mu(z_i)$, per 1737 Quasars e 162 Gamma Ray Burst (vedi Fig.1)[6],[7]. Essi sono ottenuti calibrando la relazione non lineare tra la luminosità dei raggi X e UV nei Quasar [5], e la correlazione tra il picco energetico di fotoni, E_p, e l'equivalente energia isotropica irradiata E_{iso} nei GRB[1].

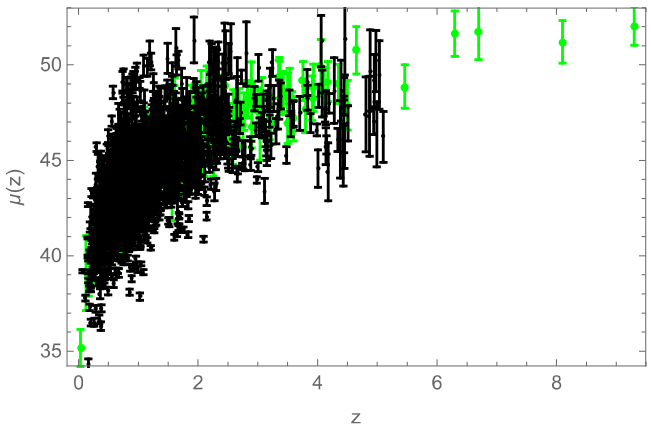

Fig. 1 Il diagramma di Hubble dei GRBs (punti verdi), e dei QSOs usati nella nostra analisi statistica.

[1] Le procedure che permettono di misurare $\mu(z_i)$ per questa nuova classe di indicatori di distanza esula dal presente lavoro di tesi.

La nostra analisi indica chiaramente un'energia oscura che evolve nel tempo, e quindi con il redshift. Il modello ΛCDM risulta quindi sfavorito.

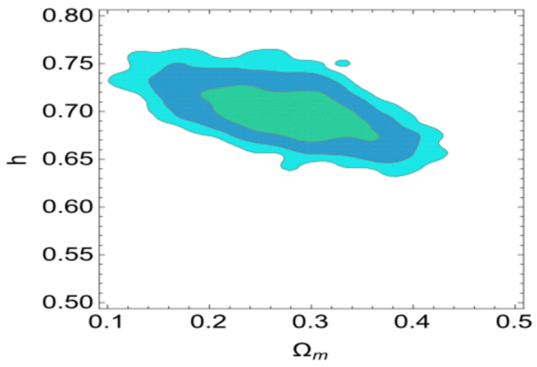

Fig.2: Regione di confidenza $2D$ nel piano $\Omega_m - h$ per il modello CPL.

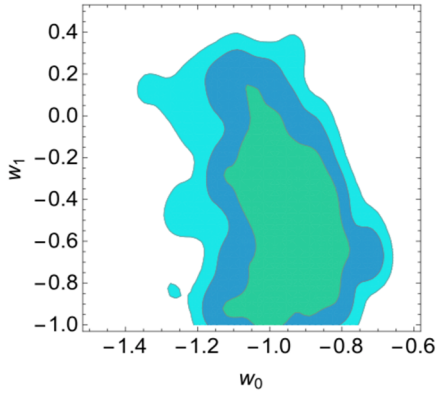

Fig.3: Regione di confidenza $2D$ nel piano $w_0 - w_1$ per il modello CPL.

Conclusioni

Nel presente lavoro è stato investigato un particolare modello cosmologico con energia oscura, nel quale l'equazione di stato di questa misteriosa componente evolva col redshift, e quindi col tempo. Essendo la Cosmologia uno dei frutti migliori della Relatività Generale di Einstein, si è partiti innanzitutto dall'illustrarne i tratti essenziali, ponendo l'accento sull'importanza dell'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale e mostrando il ruolo privilegiato dei sistemi di riferimento localmente inerziali. In tale discorso una funzione importante è svolta dal tensore metrico e dai coefficienti della connessione affine, che rappresentano rispettivamente in senso generalizzato il potenziale e il campo gravitazionale newtoniano. Tramite queste due quantità è possibile costruire il tensore di Riemann, che dà una misura della curvatura dello spazio: risulta quindi evidente che la geometria euclidea non è più sufficiente per descrivere la realtà. In seguito sono state ricavate le equazioni di Einstein, mostrando come esse si riducano a quelle newtoniane nel limite di campo debole. A questo punto abbiamo visto come si può costruire una teoria cosmologica moderna. Nel fare questo ci si è mossi all'ombra del principio cosmologico, in un universo che fosse globalmente omogeneo ed isotropo e descritto dalla metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker, arrivando così a derivare le equazioni fondametali e le relazioni più importanti che le mettono in collegamento tra di loro. Si è cercato di trattare, quando possibile, in maniera generica, le principali questioni e problematiche cosmologiche, prediligendo comunque modelli e soluzioni (spesso più semplici) che fossero più vicini ai risultati derivanti dai dati osservativi , da cui la particolare attenzione ad una dark energy rappresentata dalla costante cosmologica, Λ. Essa piuò essere interpretata come un'energia del vuoto: il valore teoricamente previsto per quest'ultima corrisponde a $\rho_{vuoto} \sim 10^{74}\ GeV^4$, che però è largamente più grande del valore osservato per la dark energy rappresentata dalla costante cosmologica, ovvero $\rho_\Lambda \equiv \Lambda c^2/8\pi G \sim 10^{-47}\ GeV^4$. Pertanto, è importante trovare un meccanismo che permetta di ottenere un valore piccolo per Λ consistente con le osservazioni effettuate. In generale, per poter distinguere la varietà di modelli per l'energia oscura, risulta rilevante l'individuazione di limiti entro cui operare mediante dati ricavati da osservazioni come quelle del tipo SN Ia, CMB e delle strutture di larga scala. Solitamente l'equazione di stato dell'energia oscura, vale a dire $w_{de} = p_{de}/\rho_{de}$ è una relazione utile da cui partire per descrivere e verificare le proprietà della dark energy. Nel caso della costante cosmologica, in particolare, si ha $p_{de} = -\rho_{de}$, da cui $w_{de} = -1$. Perciò, si può affermare che un primo obiettivo per lo studio dell'energia oscura sia quello di individuare possibili discostamenti di w_{de} dal valore -1 per scoprire se essa sia identificabile con la costante cosmologica o meno.

Nel nostro lavoro abbiamo considerato il modello Chevalier-Polarski-Linder, brevemente detto CPL, che utilizza per l'energia oscura una parametrizzazione così definita:

$$\mathrm{w(z)} = \mathrm{w_0} + \mathrm{w_1}\frac{\mathrm{z}}{1+\mathrm{z}}.$$

In particolare, obiettivo importante di questo lavoro di tesi è stato quello di determinare i parametri cosmologici $H_{\mathbf{0}}, \Omega_m, w_0$ e w_0 da dati osservati. Nella fattispecie abbiamo confrontato il valore predetto teoricamente del modulo della distanza con quello effettivamente osservato.

In questa analisi abbiamo messo insieme, per la prima volta in letteratura un diagramma di Hubble, ossia valori misurati del modulo di distanza, $\mu(z_i)$, per 1737 Quasars e 162 Gamma Ray Burst. Essi sono ottenuti calibrando la relazione non lineare tra la luminosità dei raggi X e UV nei Quasar, e la correlazione tra il picco energetico di fotoni, E_p, e l'equivalente energia isotropica irradiata E_{iso} nei GRB. Per campionare efficientemente lo spazio dei parametri $\mathcal{N}$-dimensionale, si è fatto uso del metodo Monte Carlo basato sulle Catene di Markov (MCMC), considerando cinque diverse catene ed utilizzando il test di convergenza Gelmann-Rubin, che usa catene parallele con valori iniziali differenti per testare se esse convergono alla stessa distribuzione. Si è impiegato il fattore di riduzione R, definito come la radice quadrata del rapporto tra la varianza tra le catene e la varianza di una singola catena: un valore elevato di R sta ad indicare che il primo tipo di varianza è sostanzialmente più grande del secondo e, quindi, è necessario proseguire ancora con la simulazione numerica; si è richiesto, tra l'altro, che R convergesse ad 1 per ciascuno dei parametri considerati. Infine, sono state ricavate le restrizioni per i parametri a partire dalla fusione delle catene, deducendone valori medi, mediane ed intervalli di confidenza. I risultati ricavati, allora, indicano che un modello di dark energy in cui l'equazione di stato evolve col redshift è favorito rispetto al modello standard ΛCDM.

Bibliografia

[1] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*, Liguori Editore, 2005.

[2] Amendola, Luca, *Introduction to Cosmology*, Lectures Notes.

[3] Amendola, Luca e Tsujikawa, Shinji, *Dark Energy: Theory and Observations*, Cambridge University Press, 2010.

[4] Piedipalumbo, E., Della Moglie, E., De Laurentis, M. e Scudellaro, P., 2014, MNRAS, 411, pp. 3643-3655.

[5] E.Lusso, G.Risaliti, *Astronomy & Astrophysics,* 2017, 602, A79.

[6] M.Demianski, E.Piedipalumbo,D.Sawant,L.Amati, 2017, *Astronomy&Astrophysics*, 598, A113.

[7] Demianski, E.Piedipalumbo,D.Sawant,L.Amati, 2017, *Astronomy&Astrophysics*, 598, A112.