Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea triennale in Fisica

Introduzione alla Geometria Non Commutativa: Sfera e Toro Fuzzy

Relatori:
Prof. Fedele Lizzi

Candidato:
Salvatore Niro
Matr. N85/763

A.A. 2016/2017

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di descrivere alcuni dei primi aspetti fondamentali di quella che è forse la più naturale generalizzazione della struttura geometrica che è alla base della meccanica classica: la geometria non commutativa. Nel corso del lavoro si presenta la costruzione di quelli che sono chiamati *spazi fuzzy*[1]. Per dare un'idea generale, gli spazi fuzzy sono delle approssimazioni costruite a partire da uno spazio vettoriale, sul quale è possibile definire un'algebra commutativa, per poi munirlo di un'algebra non commutativa che ne definisce intrinsecamente anche le proprietà geometriche. In particolare l'algebra che andiamo considerare è quella matriciale a dimensione finita (o più in generale l'algebra degli operatori). Il primo passo è un richiamo dell'espediente matematico necessario a formalizzare la trasformazione degli spazi che andremo a considerare nel seguito. Questi sono la versione fuzzy di sfera e toro, che costruiamo in maniera simile partendo dall'analogo ordinario mediante la corrispondenza di Weyl-Wigner. Successivamente ne analizziamo le principali proprietà nel passaggio da funzioni a matrici di dimensione finita e definiamo le principali strutture di calcolo differenziale su di essi. È utile sottolinare ancora una volta il carattere approssimato di tali costruzioni, tenendo sempre presente che nel limite induttivo gli spazi fuzzy si riconducono dal caso discreto a quello ordinario, continuo. Infine, in appendice sono rimarcate le principali proprietà dell'algebra di Lie di SU(2), di cui si fa ampiamente uso durante la trattazione.

[1]Dall'inglese *sfocato*, che non renderebbe però fedelmente l'idea dell'uso che se ne fa in questo contesto.

"[...] Geometry thus completed is evidently a natural science; we may in fact regard it as the most ancient branch of physics. Its affirmations rest essentially on induction from experience... not on logical inferences only. We will call this completed geometry "practical geometry," and shall distinguish it from "purely axiomatic geometry."

Albert Einstein

Capitolo 2

Mappe di Quantizzazione

Lo strumento matematico centrale che utilizzeremo per realizzare il passaggio da uno spazio commutativo ad uno noncommutativo è una mappa di quantizzazione, il cui nome richiama lo spazio noncommutativo più familiare: lo spazio delle fasi quantistico, la cui algebra delle funzioni definite su di esso perde la proprietà di commutatività per il principio di indeterminazione. Tali mappe associano a elementi dell'algebra classica delle funzioni definite su uno spazio vettoriale, operatori in uno spazio di Hilbert, muniti dell'usuale prodotto noncommutativo.

2.1 Considerazioni generali

Il primo a intuire l'analogia analitica tra la meccanica classica e quella quantistica fu Dirac, che pensò di associare alle variabili dinamiche q e p gli operatori autoaggiunti $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ in maniera tale da soddisfare il principio di Heisenberg.
La mancanza di commutatività genera però un problema di ordinamento. Infatti, consideriamo la funzione qp: ad essa possiamo associare due operatori distinti $\hat{Q}\hat{P}$ o $\hat{P}\hat{Q}$ oppure ancora una loro combinazione lineare normalizzata. Ad esempio una quantizzazione standard è quella simmetrica: $\frac{1}{2}(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q})$.
In generale sono possibili diverse scelte di ordinamento, ognuna delle quali è alla base della definizione di una diversa mappa di quantizzazione.

2.2 Corrispondenza di Weyl-Wigner

La mappa di cui ci serviremo è quella definita da Weyl: egli, come vedremo, superò il problema dell'ordinamento introducendo sullo spazio di Hilbert

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ una base di operatori unitari fornita da:

$$\hat{U}(q) = e^{\frac{i}{\hbar}q\hat{P}} \quad \hat{V}(p) = e^{\frac{i}{\hbar}p\hat{Q}} \tag{2.1}$$

che sono inoltre limitati e dunque estendibili all'intero spazio.

Questi agiscono sulla generica funzione d'onda $\psi(x)$ come:

$$\begin{aligned} \left[\hat{U}(q)\psi\right](x) &= \psi(x+q) \\ \left[\hat{V}(p)\psi\right](x) &= e^{\frac{i}{\hbar}px}\psi(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Una base equivalente, più conveniente, è data da:

$$\hat{W}(\alpha,\beta) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha\hat{P}+\beta\hat{Q})} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Un generico operatore in questa base si scrive come:

$$\hat{G}(\hat{P},\hat{Q}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} g(\alpha,\beta)\hat{W}(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta \tag{2.4}$$

Analogamente si considera sullo spazio delle funzioni la base:

$$w(\alpha,\beta) = e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha p+\beta q)} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

dove una generica funzione può essere sviluppata come:

$$f(p,q) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha,\beta)w(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta \tag{2.6}$$

Tenendo presente che la funzione $\tilde{f}(\alpha,\beta)$ è la trasformata di Fourier di $f(p,q)$:

$$\tilde{f}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} f(p,q)\overline{w}(\alpha,\beta)\,dpdq \tag{2.7}$$

è dunque possibile associare tramite le (2.4), (2.6) un operatore su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ad ogni funzione identificando $g(\alpha,\beta)$ nell'univocamente definita $\tilde{f}(\alpha,\beta)$: ciò risolve ogni ambiguità relativa all'ordinamento e in particolare seleziona quello simmetrico.
La mappa di Weyl è quindi l'applicazione Ω definita da:

$$f(p,q) \mapsto \Omega(f)(\hat{P},\hat{Q}) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha,\beta)\hat{W}(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta \tag{2.8}$$

Essa è lineare e soddisfa la condizione:

$$\Omega(\overline{f}) = \Omega(f)^\dagger \tag{2.9}$$

In particolare, se f è reale, allora $\Omega(f) = \Omega(f)^\dagger$, cioè $\Omega(f)$ è simmetrico.
A questo punto si definisce anche la mappa inversa, l'applicazione di Wigner, come:

$$\Omega^{-1}(\hat{F})(p,q) \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \overline{w}(\alpha,\beta) Tr[\hat{F}\hat{W}^\dagger(\alpha,\beta)]\, d\alpha d\beta \tag{2.10}$$

Per verificare che sia effettivamente l'inversa basta applicarla alla (2.8), infatti:

$$\Omega^{-1}(\Omega(f))(p,q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha p+\beta q)} Tr[\Omega(f)\hat{W}^\dagger(\alpha,\beta)]\, d\alpha d\beta \tag{2.11}$$

Tenendo presente che l'operatore traccia applicato a $\hat{W}$ e $\hat{W}^\dagger$ agisce da delta di Dirac e cioè:

$$Tr[e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\alpha\hat{P}+\beta\hat{Q})}] = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\pm\frac{i}{\hbar}(\alpha p+\beta q)}\, dpdq = (2\pi\hbar)^2\delta(\alpha,\beta) \tag{2.12}$$

si ha allora che:

$$\begin{aligned} Tr[\Omega(f)\hat{W}^\dagger(\alpha,\beta)] &= Tr\left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi\hbar}\tilde{f}(\xi,\eta)\hat{W}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \hat{W}^\dagger(\alpha,\beta))\right] = \\ &= 2\pi\hbar \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\xi,\eta)\delta(\xi-\alpha,\eta-\beta)\, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{2.13}$$

dove nel passaggio intermedio si è portato fuori dall'integrale ciò che non dipende da ξ e η.
Si ottiene, infine:

$$\Omega^{-1}(\Omega(f))(p,q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha,\beta) e^{\frac{i}{\hbar}(\alpha p+\beta q)}\, d\alpha d\beta \tag{2.14}$$

e dunque l'asserto.
Tutto ciò è generalizzabile al caso multidimensionale.

2.3 Prodotto di Moyal

Per completare l'analogia tra lo spazio delle fasi della meccanica classica e quello della meccanica quantistica, dove di nuovo qui per quantistico può intendersi in senso più ampio uno spazio noncommutativo, c'è bisogno di un nuovo prodotto tra funzioni che sia noncommutativo in modo da tener conto del principio di indeterminazione tra osservabili. L'idea è quella di sfruttare la corrispondenza di Weyl-Wigner per trasformare le funzioni dello spazio commutativo in operatori e portarle in uno spazio di Hilbert dove applicare l'usuale prodotto noncommutativo, per poi ritrasformare l'operatore prodotto riottenendo una funzione.

Si introduce quindi il prodotto di Moyal (o prodotto star), definito da:

$$f \star g = \Omega^{-1}(\Omega(f)\Omega(g)) \tag{2.15}$$

Tale prodotto è associativo e soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{gathered}\overline{f \star g} = \overline{g} \star \overline{f} \\ (\alpha f) \star g = \alpha(f \star g) = f \star (\alpha g) \\ \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x) \star g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(x)\, dx\end{gathered} \tag{2.16}$$

Inoltre l'usuale derivata del prodotto di Moyal è una derivazione che soddisfa la regola di Leibniz:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f \star g) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \star g + f \star \frac{\partial g}{\partial x^i} \qquad i = 1, 2, \ldots, 2n \tag{2.17}$$

In più si può dimostrare che:

$$(f \star g)(p,q) = f(p,q) e^{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q^i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\right)} g(p,q) \tag{2.18}$$

oppure equivalentemente sviluppando in serie l'esponenziale:

$$(f \star g)(p,q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(p,q) \frac{1}{n!} \left[\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} - \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q^i}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i}\right)\right]^n g(p,q) \tag{2.19}$$

dove in ambedue i casi le frecce indicano il verso nel quale agiscono le derivate parziali.

Il prodotto di Moyal agisce dunque da deformazione del prodotto usuale nel parametro $\hbar$ e nel limite $\hbar \to 0$ si riconduce ad esso, dando adito ad un'interpretazione dello spazio delle fasi quantistico in termini di deformazione dello spazio delle fasi classico munito del prodotto di Moyal anziché l'usuale.

D'altronde lo stesso vale anche per il commutatore, visto come una deformazione della parentesi di Poisson:

$$\{\cdot, \cdot\} \to \frac{1}{i\hbar}\,[\cdot, \cdot] \tag{2.20}$$

e per altri aspetti della meccanica quantistica riconducibili nel limite alla meccanica classica. Infatti gli elementi della meccanica quantistica possono essere formalmente rivisti come uno sviluppo in serie di potenze nel parametro $\hbar$ degli analoghi classici, con cui concidono all'ordine zero. La costante di Planck assume dunque il ruolo di artefice del passaggio da macroscopico a microscopico.

Capitolo 3

Sfera Fuzzy

La sfera fuzzy differisce dalla sfera ordinaria perché l'algebra delle funzioni su di essa è noncommutativa.
Si inizia quindi a descrivere la sfera fuzzy come una sequenza di approssimazioni delle funzioni sulla sfera ordinaria mediante matrici di dimensione finita per poi munirle di prodotto noncommutativo.

3.1 Sfera

Una 2-sfera $\mathbb{S}^2$ di raggio R può essere definita come la sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ le cui coordinate x_1, x_2, x_3 sono legate dalla relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \tag{3.1}$$

In coordinate sferiche standard, una base ortonormale e completa per la parte angolare delle funzioni definite su tale spazio è data dalle armoniche sferiche $Y_l^m(\theta, \varphi)$, con l'usuale regola per il prodotto data in termini dei coefficienti di Clebsch-Gordan:

$$Y_{l'm'}Y_{l''m''} = \sum_{l=|l'-l''|}^{l'+l''} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi(2l+1)}} C^{l0}_{l'0l''0} C^{lm}_{l'm'l''m''} Y_{lm} \tag{3.2}$$

Questo permette di sviluppare una funzione definita su $\mathbb{S}^2$ nella forma:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{3.3}$$

Quest'algebra è commutativa, se munita dell'usuale prodotto tra funzioni.

Inoltre, le armoniche sferiche sono gli autovettori della parte angolare del Laplaciano, che in coordinate sferiche coincide con $\hat{L}^2$, il quadrato del momento angolare e assume la forma:

$$\hat{L}^2 = -\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \tag{3.4}$$

Lo spettro di quest'operatore è formato dagli autovalori $l(l+1)$ con $l \in \mathbb{N}$, ognuno con molteplicità $2l+1$.

3.2 Generatori delle rotazioni

Siano $\hat{J}_a^{(N)} \quad a = 1, 2, 3$ tre operatori Hermitiani di dimensione $N < \infty$ che formano una base per la rappresentazione N-dimensionale di SU(2) indicizzata dallo spin $j = \frac{N-1}{2}$. Essi soddisfano le regole di commutazione:

$$\left[\hat{J}_a^{(N)}, \hat{J}_b^{(N)}\right] = i\epsilon_{abc}\hat{J}_c^{(N)} \tag{3.5}$$

e muniti dell'usuale prodotto tra matrici generano l'algebra $\mathbb{M}_N$ delle matrici $N \times N$

Poiché l'unico invariante di Casimir di SU(2) è:

$$C = \hat{J}_a^2 + \hat{J}_b^2 + \hat{J}_c^2 = j(j+1)\mathbb{I}_N \tag{3.6}$$

è possibile dunque ridefinire una nuova terna di generatori $\hat{x}_a^{(N)} \equiv \theta_N \hat{J}_a^{(N)}$ affinché soddisfino una relazione analoga alla (3.1):

$$(\hat{x}_1^{(N)})^2 + (\hat{x}_2^{(N)})^2 + (\hat{x}_3^{(N)})^2 = R^2 \tag{3.7}$$

Questo fissa il parametro $\theta_N = \frac{R}{\sqrt{j(j+1)}}$ e inoltre, ricordando che $j = \frac{N-1}{2}$, quantizza il raggio in N come:

$$\frac{R}{\theta_N} = \sqrt{\frac{N^2-1}{4}} \qquad\qquad N \in \mathbb{N} \tag{3.8}$$

I nuovi operatori così definiti soddisfano ora le regole di commutazione:

$$\left[\hat{x}_a^{(N)}, \hat{x}_b^{(N)}\right] = i\theta_N\epsilon_{abc}\hat{x}_c^{(N)} \tag{3.9}$$

e generano l'algebra $\mathbb{S}_N^2 \simeq \mathbb{M}_N$.

Notiamo che nel limite $N \to \infty$ il parametro di noncommutatività θ_N si annulla riportando il commutatore al caso classico. Ciò mette in evidenza il carattere finito della sfera fuzzy come approssimazione della sfera ordinaria, a cui sembra convergere con rappresentazioni di dimensione sempre maggiore.

3.3 Armoniche fuzzy

Nello spazio ordinario si possono definire le armoniche sferiche $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ in coordinate cartesiane come polinomi complessi omogenei. In analogia, mappando le coordinate classiche nelle "coordinate fuzzy" $x_i \to \hat{x}_i^{(N)}$, è possibile definire le armoniche fuzzy $\hat{Y}_{lm}^{(N)}$ come polinomi omogenei nelle $\hat{x}^{(N)}$. Ad esempio, le prime quattro armoniche fuzzy sono:

$$
\begin{aligned}
Y_{0,0} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} && \to && \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\mathbb{I}_N = \hat{Y}_{0,0}^{(N)} \\
Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x-iy}{R} && \to && \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{\hat{x}_1^{(N)} - i\hat{x}_2^{(N)}}{R} = \hat{Y}_{1,-1}^{(N)} \\
Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{z}{R} && \to && \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{\hat{x}_3^{(N)}}{R} = \hat{Y}_{1,0}^{(N)} \\
Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{x+iy}{R} && \to && -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{\hat{x}_1^{(N)} + i\hat{x}_2^{(N)}}{R} = \hat{Y}_{1,1}^{(N)}
\end{aligned}
$$

Una volta date queste prime armoniche fuzzy, è poi operativamente conveniente definire anche un algoritmo di costruzione per tutto il set, che utilizzi le proprietà di commutazione. Infatti, passando alla base sferica della rappresentazione N-dimensionale dei generatori $\hat{J}_a$ (app. A), è possibile sfruttare l'algebra degli operatori gradino per definire tutte le armoniche fuzzy.
Notiamo, dapprima, che valgono le seguenti catene di uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\theta_N \hat{J}_1^{(N)} &= \hat{x}_1^{(N)} = R\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(\hat{Y}_{1,-1}^{(N)} - \hat{Y}_{1,1}^{(N)}\right) \\
\theta_N \hat{J}_2^{(N)} &= \hat{x}_2^{(N)} = iR\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(\hat{Y}_{1,-1}^{(N)} + \hat{Y}_{1,1}^{(N)}\right) \\
\theta_N \hat{J}_3^{(N)} &= \hat{x}_3^{(N)} = R\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\hat{Y}_{1,0}^{(N)}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Ciò permette di definire gli operatori gradino come:

$$
\theta_N \hat{J}_\pm^{(N)} = \theta_N\left(\hat{J}_1^{(N)} \pm i\hat{J}_2^{(N)}\right) = \hat{x}_1^{(N)} \pm i\hat{x}_2^{(N)} = \pm R\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\hat{Y}_{1,\pm1}^{(N)} \tag{3.11}
$$

con le regole di commutazione:

$$
\begin{aligned}
[\hat{J}_+^{(N)}, \hat{J}_-^{(N)}] &= \hat{J}_3^{(N)} \\
[\hat{J}_3^{(N)}, \hat{J}_\pm^{(N)}] &= \pm\hat{J}_\pm^{(N)}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

A questo punto ricordiamo che per ogni $l > m = 0$ le armoniche sferiche $Y_{l,0}$ si riducono, a meno di costanti di normalizzazione, ai polinomi di Legendre. In particolare, quindi, per ogni $N \geq l > m = 0$ le armoniche fuzzy $\hat{Y}^{(N)}_{l,0}$ sono espandibili in polinomi nella variabile $\frac{\hat{x}^{(N)}_3}{R}$. Partendo da queste e sfruttando le proprietà ricavate finora è quindi possibile dimostrare che:

$$\left[\hat{J}^{(N)}_+, \hat{Y}^{(N)}_{l,m}\right] = \mu_+ \hat{Y}^{(N)}_{l,m+1} \qquad \left[\hat{J}^{(N)}_-, \hat{Y}^{(N)}_{l,m}\right] = \mu_- \hat{Y}^{(N)}_{l,m-1} \qquad N \geq l \geq |m| \tag{3.13}$$

con $\mu_\pm$, analogamente al caso continuo, dato da:

$$\mu_\pm = \begin{cases} \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} & |m| \leq l \\ 0 & |m| > l \end{cases} \tag{3.14}$$

Le armoniche fuzzy soddisfano la seguente proprietà:

$$(\hat{Y}^{(N)}_{l,m})^\dagger = (-1)^l \hat{Y}^{(N)}_{l,-m} \tag{3.15}$$

da cui si deduce che sono tutte a traccia nulla (con l'eccezione di $\hat{Y}^{(N)}_{0,0}$).
Per cui vale anche:

$$Tr[(\hat{Y}^{(N)}_{lm})^\dagger \hat{Y}^{(N)}_{l'm'}] \propto \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{3.16}$$

ossia sono ortogonali rispetto alla traccia, formando così una base per ognuno degli spazi $\mathbb{M}_N$. Dunque un generico operatore $\hat{F}^{(N)} \in \mathbb{M}_N$ può essere sviluppato come:

$$\hat{F}^{(N)} = \sum_{l=0}^{j} \sum_{m=-l}^{l} F^{(N)}_{lm} \hat{Y}^{(N)}_{lm} \tag{3.17}$$

con coefficienti dati da:

$$F^{(N)}_{lm} = \frac{Tr\left[(\hat{Y}^{(N)}_{lm})^\dagger \hat{F}^{(N)}\right]}{Tr[(\hat{Y}^{(N)}_{lm})^\dagger \hat{Y}^{(N)}_{l'm'}]} \tag{3.18}$$

Lo sviluppo in (3.17) è una sommatoria finita. Questo implica che le armoniche fuzzy non obbediscono più all'algebra delle armoniche sferiche ordinarie data dalla (3.2) poiché il prodotto tra due armoniche con spin $l \leq N$ coinvolge in generale anche armoniche di ordine superiore. Tuttavia essendo un'algebra di operatori essa è munita dell'usuale prodotto noncommutativo tra matrici.

3.4 Algebra

A questo punto è possibile definire una mappa di Weyl-Wigner $\Omega_N : \mathcal{C}(\mathbb{S}^2) \to \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$ semplicemente trasformando le armoniche sferiche nelle armoniche fuzzy:

$$\Omega_N(Y_{lm}) = \begin{cases} \hat{Y}^{(N)}_{lm} & l \leq j \\ 0 & l > j \end{cases} \tag{3.19}$$

per poi estenderla per linearità. Notiamo che l'applicazione tronca le armoniche "in eccesso". Si definisce anche la mappa inversa come:

$$\Omega_N^{-1}(\hat{Y}^{(N)}_{lm}) = Y_{lm} \tag{3.20}$$

Lo spazio così costruito non è un'algebra rispetto all'usale prodotto tra funzioni, ma è un'algebra noncommutativa se munita del classico prodotto di Moyal definito come:

$$(f \star g) = \Omega_N^{-1}(\Omega_N(f)\Omega_N(g)) \tag{3.21}$$

Questo prodotto è dato in termini di armoniche fuzzy mediante i 6j-simboli:

$$\hat{Y}^{(N)}_{l'm'}\hat{Y}^{(N)}_{l''m''} = \sum_{l=0}^{j}(-1)^{2j+l}\sqrt{\frac{(2l'+1)(2l''+1)(2j-l)(2j+l'+1)(2j+l''+1)}{4\pi(2j+l+1)(2j+l'+1)(2j+l''+1)}}\times$$
$$\times \begin{Bmatrix} l' & l'' & l \\ j & j & j \end{Bmatrix} C^{lm}_{l'm'l''m''}\hat{Y}^{(N)}_{lm} \tag{3.22}$$

Quest'algebra è la stessa del prodotto tra matrici. Notiamo che è indipendente da R ma non da j (e quindi N) per definizione e di nuovo nel limite $N \to \infty$ ci si riconduce all'algebra del prodotto delle armoniche sferiche sulla sfera ordinaria.

3.5 Laplaciano fuzzy

Su ogni algebra $\mathbb{M}_N$ si definiscono delle derivazioni come operatori in termini dei generatori $\hat{J}^{(N)}_a$ di SU(2):

$$\begin{aligned} &\nabla_a : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \\ &\nabla_a \hat{F}^{(N)} = \left[\hat{J}^{(N)}_a, \hat{F}^{(N)}\right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

A questo punto le armoniche fuzzy possono essere riviste anche come gli autovettori (o le "automatrici") dell'operatore definito da:

$$\nabla_N^2 : \mathbb{M}_N(\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$$
$$\nabla_N^2 \hat{F}^{(N)} = \sum_{a=1}^{3} \left[\hat{J}_a^{(N)}, \left[\hat{J}_a^{(N)}, \hat{F}^{(N)}\right]\right] \tag{3.24}$$

Infatti, abbiamo che, applicato ad una generica $\hat{Y}_{lm}^{(N)}$:

$$\nabla_N^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} = \left[\hat{J}_1^{(N)}, \left[\hat{J}_1^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right] + \left[\hat{J}_2^{(N)}, \left[\hat{J}_2^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right] + \left[\hat{J}_3^{(N)}, \left[\hat{J}_3^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right] \tag{3.25}$$

e valutiamo i commutatori tenendo presente le (3.13), (3.14):

$$\left[\hat{J}_3^{(N)}, \left[\hat{J}_3^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right] = m^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_1^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right] &= \frac{1}{2}\left(\left[\hat{J}_+^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right] + \left[\hat{J}_-^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\mu_+ \hat{Y}_{lm+1}^{(N)} + \mu_- \hat{Y}_{lm-1}^{(N)}\right) \\
\left[\hat{J}_1^{(N)}, \left[\hat{J}_1^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right] &= \frac{1}{4}\left(\left[\hat{J}_+^{(N)} + \hat{J}_-^{(N)}, \mu_+ \hat{Y}_{lm+1}^{(N)} + \mu_- \hat{Y}_{lm-1}^{(N)}\right]\right) = \\
\frac{1}{4}&\left(\mu_{++}\mu_+ \hat{Y}_{lm+2}^{(N)} + \mu_+^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} + \mu_-^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} + \mu_{--}\mu_- \hat{Y}_{lm-2}^{(N)}\right)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{J}_2^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right] &= \frac{1}{2i}\left(\left[\hat{J}_+^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right] - \left[\hat{J}_-^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right) = \\
&= \frac{1}{2i}\left(\mu_+ \hat{Y}_{lm+1}^{(N)} - \mu_- \hat{Y}_{lm-1}^{(N)}\right) \\
\left[\hat{J}_2^{(N)}, \left[\hat{J}_2^{(N)}, \hat{Y}_{lm}^{(N)}\right]\right] &= -\frac{1}{4}\left(\left[\hat{J}_+^{(N)} - \hat{J}_-^{(N)}, \mu_+ \hat{Y}_{lm+1}^{(N)} - \mu_- \hat{Y}_{lm-1}^{(N)}\right]\right) = \\
-\frac{1}{4}&\left(\mu_{++}\mu_+ \hat{Y}_{lm+2}^{(N)} - \mu_+^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} - \mu_-^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} + \mu_{--}\mu_- \hat{Y}_{lm-2}^{(N)}\right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Sommando, sopravvivono solo i termini in $\hat{Y}_{lm}^{(N)}$; in particolare si ottiene:

$$\nabla_N^2 \hat{Y}_{lm}^{(N)} = \left(\frac{\mu_+^2 + \mu_-^2}{2} + m^2\right) \hat{Y}_{lm}^{(N)} = l(l+1)\hat{Y}_{lm}^{(N)} \tag{3.29}$$

Questo operatore è chiamato per analogia Laplaciano fuzzy ed il suo spettro è formato dagli autovalori $l(l+1)$ con $l = 0, \dots, N$, ognuno di molteplicità $2l+1$. Lo spettro del Laplaciano fuzzy coincide, dunque, con quello della sua controparte continua fino al grado N.

3.6 Prodotto interno

È utile anche definire un prodotto interno sulla sfera fuzzy.
Si introduce l'integrale di $\hat{F}^{(N)} \in \mathbb{S}^2_N$ come:

$$R^2 \int_{\mathbb{S}^2_N} \hat{F}^{(N)} = \frac{4\pi R^2}{N+1} Tr[\hat{F}^{(N)}] \tag{3.30}$$

Nel caso in cui $\hat{F} = \mathbb{I}_N$ diventa:

$$R^2 \int_{\mathbb{S}^2_N} \mathbb{I}_N = 4\pi R^2 \frac{N}{N+1} \tag{3.31}$$

convergendo alla superficie della sfera ordinaria nel limite $N \to \infty$.
In generale, data una funzione $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$ essa è sviluppabile come (3.3), per cui l'integrale di f sulla 2-sfera è dato da:

$$\int_{\mathbb{S}^2} f = \int_{\mathbb{S}^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm} Y_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{lm} \int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm} \tag{3.32}$$

dove si è portato fuori tutto ciò che non dipende dalle coordinate angolari sulla sfera.

Adesso, ricordando che le armoniche sferiche sono ortonormali sulla sfera, ossia $\int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$, possiamo riguardare l'integrale della generica Y_{lm} come:

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm} = \int_{\mathbb{S}^2} (Y_{lm}) 1 = \sqrt{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} Y_{lm} Y_{00} = \sqrt{4\pi} \delta_{l0} \delta_{m0} \tag{3.33}$$

Facendo uso di questo passaggio preliminare, otteniamo infine che la (3.32) diventa $\int_{\mathbb{S}^2} f = \sqrt{4\pi} f_{00}$.

Alla funzione f abbiamo associato un operatore $\hat{F}^{(N)}$ tramite la mappa Ω_N e per l'integrale sulla sfera ordinaria abbiamo definito un rispettivo integrale

sulla sfera fuzzy; possiamo dunque esplicitare la relazione che c'è tra le due misure e generalizzare il risultato della (3.31). Infatti, analogamente al caso classico, abbiamo che per un operatore $\hat{F}^{(N)}$ sulla sfera fuzzy esiste uno sviluppo dato dalla (3.17) che possiamo inserire nella formula dell'integrale (3.30).
Con un ragionamento che ricalca il caso ordinario abbiamo dunque che:

$$\int_{\mathbb{S}^2_N} \hat{F}^{(N)} = \frac{4\pi}{N+1} Tr\left[\sum_{l=0}^{j}\sum_{m=-l}^{l} F^{(N)}_{lm}\hat{Y}^{(N)}_{lm}\right] = \frac{4\pi}{N+1}\sum_{l=0}^{j}\sum_{m=-l}^{l} F^{(N)}_{lm} Tr\left[\hat{Y}^{(N)}_{lm}\right] \tag{3.34}$$

dove stavolta abbiamo sfruttato la proprietà di linearità della traccia.
A questo punto, sfruttiamo la proprietà delle armoniche fuzzy di essere tutte a traccia nulla, esclusa $\hat{Y}^{(N)}_{00}$ che è proporzionale all'identità.
Ne concludiamo dunque che la (3.34) diventa:

$$\int_{\mathbb{S}^2_N} \hat{F}^{(N)} = \frac{4\pi}{N+1} F^{(N)}_{00} Tr\left[\hat{Y}^{(N)}_{00}\right] = \frac{4\pi}{N+1} F^{(N)}_{00} Tr\left[\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\mathbb{I}_N\right] \tag{3.35}$$

e dunque in definitiva $\int_{\mathbb{S}^2_N} \hat{F}^{(N)} = \sqrt{4\pi}\frac{N}{N+1} F^{(N)}_{00}$.
Tale risultato è coerente con la (3.31), infatti nel limite $N \to \infty$ il risultato coincide con quello del caso ordinario.

Dopo aver dotato lo spazio di un integrale, si definisce quindi il prodotto interno come:

$$\langle \hat{F}^{(N)}_1, \hat{F}^{(N)}_2 \rangle_{\mathbb{S}^2_N} = \int_{\mathbb{S}^2_N} (\hat{F}^{(N)}_1)^\dagger \hat{F}^{(N)}_2 \tag{3.36}$$

Da qui possiamo definire $\Omega^\dagger$.
Per ogni $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$ e per ogni $\hat{G}^{(N)} \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$, definiamo la mappa aggiunta nel senso dei prodotti scalari:

$$\langle \Omega_N(f), \hat{G}^{(N)} \rangle_{\mathbb{S}^2_N} = \langle f, \Omega^\dagger_N(\hat{G}^{(N)}) \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{S}^2)} \tag{3.37}$$

presi rispettivamente sulla sfera fuzzy e sullo spazio delle funzioni a quadrato sommabile sulla sfera.
L'applicazione Ω_N mappa dunque l'algebra delle matrici di dimensione finita in un sottospazio di $\mathcal{C}(\mathbb{S}^2)$, di dimensioni infinita. Restringendo l'immagine dell'applicazione a questo sottospazio, si ottiene $\Omega^\dagger_N = \Omega^{-1}_N$.

Capitolo 4

Toro Fuzzy

Come per la sfera, l'idea alla base del toro fuzzy è di definire una sequenza di approssimazioni delle funzioni sul toro ordinario mediante delle matrici di dimensione finita e poi munire l'algebra di queste funzioni di prodotto noncommutativo.

4.1 Toro

Un 2-toro $\mathbb{T}^2$ è definito come la varietà prodotto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ delle circonferenze di raggi r, R. L'algebra commutativa delle funzioni definite sul toro $\mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ è generata dai due elementi:

$$u = e^{\frac{2\pi i x}{r}} \qquad v = e^{\frac{2\pi i y}{R}} \tag{4.1}$$

dove x, y sono le usuali coordinate sul toro. In altre parole, ogni elemento $a \in \mathcal{A} \equiv \mathcal{C}(\mathbb{T}^2)$ può essere scritto nella forma:

$$a = \sum_{(l,m)\in\mathbb{Z}^2} f(l,m) u^l v^m \tag{4.2}$$

per qualche funzione di Schwartz $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$. Le derivazioni standard su quest'algebra sono definite sui generatori come:

$$\begin{cases} \partial_1 u = \frac{2\pi i}{r} u & \partial_1 v = 0 \\ \partial_2 u = 0 & \partial_2 v = \frac{2\pi i}{R} v \end{cases} \tag{4.3}$$

ed estese poi su tutta l'algebra $\mathcal{A}$ con la regola di Leibniz.

4.2 Toro noncommutativo

Il procedimento verso la costruzione di un toro fuzzy passa adesso attraverso la definizione di una struttura noncommutativa su $\mathbb{T}^2$.
Per toro noncommutativo $\mathbb{T}^2_\theta$ si intende l'algebra $\mathcal{A}_\theta$ generata da due elementi unitari $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ che per definizione soddisfano:

$$\mathbf{vu} = e^{2\pi i\theta}\mathbf{uv} \tag{4.4}$$

con $\theta \in [0,1)$. Queste definizione generalizza il caso commutativo (4.1) a cui si riconduce nel caso di $\theta = 0$. Come nella (4.2), inoltre, ogni elemento $a \in \mathcal{A}_\theta$ può essere sviluppato sulla base dei generatori dell'algebra come:

$$\mathbf{a} = \sum_{(l,m)\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{f}(l,m)\mathbf{u}^l\mathbf{v}^m \tag{4.5}$$

sempre per qualche funzione di Schwartz $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$, facendo però attenzione in questo caso all'ordine. Si definiscono in maniera identica anche le derivazioni:

$$\begin{cases} \partial_1\mathbf{u} = 2\pi i\mathbf{u} & \partial_1\mathbf{v} = 0 \\ \partial_2\mathbf{u} = 0 & \partial_2\mathbf{v} = 2\pi i\mathbf{v} \end{cases} \tag{4.6}$$

dove per semplicità stavolta abbiamo posto $r = R = 1$.

4.3 Clock & Shift

Quando il parametro di deformazione θ che appare in (4.4) è un numero razionale $\frac{M}{N}$, $N > M \geq 0$ interi, esiste una rappresentazione in dimensione finita della relazione (4.4) data da due matrici:

$$\hat{U}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi^{N-1} \end{pmatrix} \qquad \hat{V}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

dove $\xi = e^{2\pi i\frac{M}{N}}$.

Queste matrici sono chiamate Clock e Shift: sono matrici unitarie e a traccia nulla che soddisfano $(\hat{U}_N)^N = (\hat{V}_N)^N = \mathbb{I}_N$ e obbediscono alle relazioni di commutazione $\hat{V}_N\hat{U}_N = \xi\hat{U}_N\hat{V}_N$. Infatti $\hat{V}_N$ agisce da sinistra su una generica matrice spostandone gli elementi alla riga superiore, mentre agisce da destra spostandoli una colonna a destra; l'identità vale poi per la ciclicità di ξ (dove vale $\xi^N = e^{2\pi i M} = 1$). Nel caso in cui M ed N siano anche coprimi, esse generano una sottoalgebra che commuta solo con la matrice identità $\mathbb{I}_N$ e multipli, quindi di conseguenza generano l'intera algebra $\mathbb{M}_N$ delle matrici $N \times N$. Ciò si dimostra tenendo presente l'azione dell'operatore di Shift sulla matrice Clock: applicazioni successive di $\hat{V}_N$ su potenze di $\hat{U}_N$ permettono di scrivere ogni elemento di una qualsiasi matrice come combinazioni lineari di potenze di ξ e quindi di radici dell'unità, generando quindi ogni matrice $\hat{M}_N$ a coefficienti complessi, che si puo' esprimere come:

$$\hat{M}_N = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij} (\hat{U}_N)^i (\hat{V}_N)^j \qquad \alpha_{ij} \in \mathbb{C} \tag{4.8}$$

Al variare di i e j, le $(\hat{U}_N)^i(\hat{V}_N)^j$ sono N^2 matrici che formano un sistema minimale di generatori per lo spazio vettoriale delle matrici $N \times N$, da cui si evince che sono una base.

4.4 Corrispondenza

È evidente che gli operatori di Clock e Shift assumono per il toro fuzzy lo stesso ruolo che hanno le armoniche fuzzy per la sfera.
Si definisce dunque analogamente per ogni N una mappa di Weyl-Wigner $\Omega_N : \mathcal{C}(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$ che trasforma i generatori (4.1) dell'algebra sul toro commutativo nelle matrici che abbiamo definito:

$$\Omega_N(u) = \hat{U}_N \qquad\qquad \Omega_N(v) = \hat{V}_N \tag{4.9}$$

con inversa data da:

$$\Omega_N^{-1}(\hat{U}_N) = u \qquad\qquad \Omega_N^{-1}(\hat{V}_N) = v \tag{4.10}$$

Inoltre, per la (2.9) abbiamo che:

$$\begin{aligned} (\hat{U}_N)^{-1} &= (\hat{U}_N)^\dagger = \Omega_N(u)^\dagger = \Omega_N(\overline{u}) \\ (\hat{V}_N)^{-1} &= (\hat{V}_N)^\dagger = \Omega_N(v)^\dagger = \Omega_N(\overline{v}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Di nuovo, lo spazio così costruito non è un'algebra rispetto all'usale prodotto tra funzioni, ma diventa un'algebra noncommutativa quando munito del classico prodotto di Moyal definito come:

$$(f \star g) = \Omega_N^{-1}(\Omega_N(f)\Omega_N(g)) \tag{4.12}$$

che applicato ai generatori restituisce la (4.4).
È bene notare che quella appena definita non è una mappa $1:1$, per la condizione $(\hat{U}_N)^N = (\hat{V}_N)^N = \mathbb{I}_N$. Resta tuttavia valida l'approssimazione dell'algebra del toro tramite matrici, fintanto che lo sviluppo (4.2) è troncato per $l, m < N$.

4.5 Derivazioni

Si cercano ora delle derivazioni per l'algebra del toro fuzzy che siano consistenti con quelle del toro noncommutativo definite dalle (4.6), che riscriviamo in forma compatta come:

$$\partial_i \mathbf{u}_j = \frac{2\pi i}{R_j}\delta_{ij}\mathbf{u}_j \qquad i,j = 1,2 \tag{4.13}$$

dove stavolta abbiamo esplicitato i raggi R_j.
Ciò significa che per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_\theta$:

$$\partial_j \mathbf{a} = \frac{2\pi i}{R_j}\sum_{(l_1,l_2)\in\mathbb{Z}^2} l_j \mathbf{f}(l_1,l_2)\mathbf{u}_1^{l_1}\mathbf{u}_2^{l_2} \qquad j = 1,2 \tag{4.14}$$

per qualche funzione di Schwartz ed è consistente con la regola di Leibniz.

Quello che vorremmo è una derivazione analoga per gli elementi di $A_{\frac{M}{N}}$ che rispetti le stesse proprietà sui generatori, con la regola di Leibniz data ad ogni grado di approssimazione N da una corrispondente al caso continuo:

$$[\hat{\nabla}_i, \hat{U}_j] = \frac{2\pi i}{R_j}\delta_{ij}\hat{U}_j \qquad i,j = 1,2 \tag{4.15}$$

Quest'ultima condizione è incompatibile con la proprietà dei generatori che valga l'identità $(\hat{U}_N)^N = \mathbb{I}_N$, poiché si giungerebbe all'assurdo:

$$0 = [\hat{\nabla}_1, \mathbb{I}_N] = [\hat{\nabla}_1, (\hat{U}_N)^N] = N\frac{2\pi i}{R_1}(\hat{U}_N)^N = N\frac{2\pi i}{R_1} \tag{4.16}$$

È tuttavia possibile costruire una versione esponenziata di questa relazione in ogni algebra.
Rappresentiamo le (4.7) come:

$$\hat{U}_N = \left[\tilde{U}_1^{(N)}\right]_{m,n} = e^{2\pi i\frac{n-1}{N}}\delta_{m,n} \qquad\qquad \hat{V}_N = \left[\tilde{U}_2^{(N)}\right]_{m,n} = \delta_{m,n-M+1} \tag{4.17}$$

con $m,n=1,\ldots,N$.
Cerchiamo quindi una sequenza di operatori unitari $e^{i\nabla_j^{(N)}} \in \mathcal{A}_{\frac{M}{N}}$, per cui $(\nabla_j^{(N)})^\dagger = \nabla_j^{(N)}$, tali che per ogni grado di approssimazione N agiscano sui generatori come:

$$e^{-i\nabla_j^{(N)}} \tilde{U}_i^{(N)} e^{i\nabla_j^{(N)}} = e^{\frac{2\pi i}{R_i}\delta_{ij}\frac{k_j^{(N)}}{N}} \tilde{U}_i^{(N)} \qquad i,j=1,2 \tag{4.18}$$

dove $k_j^{(N)}$ sono successioni di interi tali che:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k_j^{(N)}}{N} = R_j \qquad j=1,2 \tag{4.19}$$

cioè i raggi delle circonferenze che generano il toro.
Un set di operatori che obbediscano alle (4.18) è dato da:

$$\begin{aligned} \left[e^{i\nabla_1^{(N)}}\right]_{m,n} &= \delta_{m-k_1^{(N)}+1,n} \\ \left[e^{i\nabla_2^{(N)}}\right]_{m,n} &= e^{2\pi i\frac{n-1}{M}\frac{k_2^{(N)}}{N}}\delta_{m,n} \end{aligned} \tag{4.20}$$

con $m,n=1,\ldots,N$.
Esse soddisfano le regole di commutazione:

$$e^{i\nabla_1^{(N)}} e^{i\nabla_2^{(N)}} = e^{-2\pi i\frac{k_1^{(N)}}{M}\frac{k_2^{(N)}}{N}} e^{i\nabla_2^{(N)}} e^{i\nabla_1^{(N)}} \tag{4.21}$$

Appendice A

SU(2)

Il gruppo speciale unitario di grado n, denotato $SU(N)$, è il gruppo di Lie delle matrici unitarie $N \times N$ con determinante 1. L'operazione interna del gruppo è il prodotto tra matrici e come varietà ha dimension $N^2 - 1$.

L'algebra di Lie di $SU(N)$, che denotiamo con $su(N)$, può essere allora identificata con le matrici $N \times N$ anti-Hermitiane a traccia nulla, dove per parentesi di Lie si usa il commutatore. Essa può essere generata da N^2 operatori $\mathcal{O}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ che soddisfano le regole di commutazione:

$$[\mathcal{O}_{ij}, \mathcal{O}_{kl}] = \delta_{jk}\mathcal{O}_{il} - \delta_{il}\mathcal{O}_{kj} \qquad i, j, k, l = 1, 2, \ldots, N. \tag{A.1}$$

dove δ è la delta di Kronecker.
È inoltre possibile sfruttare l'identità (che commuta con ognuno degli operatori) per formare un set di matrici a traccia nulla e ridurre il numero di generatori indipendenti di $su(N)$ a $N^2 - 1$.

A questo punto consideriamo il caso $N = 2$.
Una generica matrice 2×2 si scrive come:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

dove le entrate della matrice sono numeri complessi.
Fissiamo la notazione scrivendo la matrice inversa:

$$\mathcal{U}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

e la matrice Hermitiana:

$$\mathcal{U}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

trasposta dei complessi coniugati.

Quindi, la condizione di unitarietà diventa $\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}$ e unita all'altra condizione $det|\mathcal{U}| = 1$ definisce in maniera generale il gruppo $SU(2)$ come:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \tag{A.5}$$

i cui elementi soddisfano le condizioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\alpha_2, \beta_2)\mathcal{U}(\alpha_1, \beta_1) &= \mathcal{U}(\alpha_2\alpha_1 - \beta_2\overline{\beta}_1, \alpha_2\beta_1 + \beta_2\overline{\alpha}_1) \\ \mathcal{U}(\alpha, \beta) &= \mathcal{U}(\overline{\alpha}, -\beta) \end{aligned} \tag{A.6}$$

Esplicitando $\alpha = x_1 + iy_1$ e $\beta = x_2 + iy_2$ con $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ si ottiene la matrice:

$$\begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & -x_2 + iy_2 \\ x_2 + iy_2 & x_1 - iy_1 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

e la condizione sul determinante implica $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$, da cui si deduce che $SU(2)$ è omeomorfo alla 3-sfera di raggio 1 immersa in $\mathbb{R}^4$.
A questo punto è dunque possibile esprimere un elemento in funzione degli altri, per cui i gradi di libertà diventano 3.

L'algebra di Lie di $SU(2)$ è formata dalle matrici 2×2 anti-Hermitiane a traccia nulla, ossia:

$$su(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\lambda & -\overline{z} \\ z & -i\lambda \end{pmatrix} : \quad \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\} \tag{A.8}$$

I generatori di $su(2)$ sono le matrici σ di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

e soddisfano le regole di commutazione:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{A.10}$$

A partire dalle matrici di Pauli è possibile anche definire gli operatori gradino:

$$\begin{aligned} \sigma_+ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_- &= \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.11}$$

che assieme a σ_z formano una base alternativa, la base sferica. Tale base soddisfa le regole di commutazione:

$$\begin{aligned} [\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_z \\ [\sigma_z, \sigma_\pm] &= \pm\sigma_\pm \end{aligned} \tag{A.12}$$

Si può inoltre utilizzare tale algebra per costruire una rappresentazione di ordine superiore tramite matrici $N \times N$, per poi tornare al gruppo tramite esponenziazione.
In generale, per una rappresentazione N-dimensionale, si definisce l'analoga base sferica $L_z^{(N)}, L_+^{(N)}, L_-^{(N)}$ in modo che soddisfi le regole di commutazione $(A.12)$. Definiti gli autostati di $L_z^{(N)}$ come $|l, m\rangle_N$ con $2l + 1 = N$ e $m = -l, \ldots, l$ i tre generatori $L_z^{(N)}, L_+^{(N)}, L_-^{(N)}$ agiscono su tali autostati come:

$$\begin{aligned} {}_N\langle l, m'|L_z^{(N)}|l, m\rangle_N &= m_N\langle l, m'|l, m\rangle_N = m\delta^{(N)}_{m',m} \\ {}_N\langle l, m'|L_+^{(N)}|l, m\rangle_N &= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\delta^{(N)}_{m',m+1} \\ {}_N\langle l, m'|L_-^{(N)}|l, m\rangle_N &= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\delta^{(N)}_{m',m-1} \end{aligned} \tag{A.13}$$

Ad esempio nel caso $N = 4$, $l = \frac{3}{2}$, $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ assumono la forma:

$$L_z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad m_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad m_{-\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

Da qui è dunque possibile ricavare l'elemento generico di $SU(2)$ esponenziando:

$$\mathcal{U}^{(N)}(w) = e^{iL^{(N)} \cdot w} \tag{A.15}$$

dove $L^{(N)} \equiv (L_z^{(N)}, L_+^{(N)}, L_-^{(N)})$.

Appendice B

Stati coerenti

Un'altra maniera per definire le armoniche fuzzy è passare attraverso la costruzione di un set di stati coerenti dell'algebra di Lie di SU(2). Questi sono una generalizzazione astratta degli stati coerenti dell'oscillatore armonico, gli autostati dell'operatore di annichilazione (o distruzione) dove la dinamica quantistica assomiglia molto al comportamento classico.
Consideriamo lo spazio delle rappresentazioni $\mathbb{C}^N$ del gruppo SU(2) nella rappresentazione di spin $j = \frac{N-1}{2}$ e indichiamo con $g \mapsto \hat{U}^{(N)}(g)$ l'azione del gruppo su questo spazio, una cui base è denotata con $|j, m\rangle$ dove $m = -j, \ldots, j$. Si è quindi associato ad ogni elemento di SU(2) un elemento dello spazio degli operatori agenti sullo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^N$ di dimensione finita:

$$\hat{U}^{(N)} : SU(2) \mapsto \mathcal{B}(\mathbb{C}^N) \tag{B.1}$$

Si definisce la classe di equivalenza H_ψ come l'azione degli elementi di SU(2) su $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^N$ tramite moltiplicazione per una fase; prendendo $|\psi\rangle = |j, j\rangle$ si rende H_ψ massimale e isomorfo a U(1), perché generato dall'elemento di algebra $\hat{L}_3$ nella rappresentazione $\hat{U}^{(N)}$. Poiché $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$, possiamo inoltre riguardere $\mathbb{S}^2$ come lo spazio quoziente SU(2)$/H_\psi$.
Una base di $\mathbb{S}^3$ è data dagli angoli di Eulero $\alpha \in [0, 4\pi), \beta \in [0, \pi), \gamma \in [0, 2\pi)$ ai quali è possibile associare gli elementi di SU(2) nella rappresentazione $\hat{U}^{(N)}$:

$$\hat{U}^{(N)}(g) = e^{-i\alpha\hat{L}_3} e^{-i\beta\hat{L}_2} e^{-i\gamma\hat{L}_3} \tag{B.2}$$

Ritroviamo, dunque, $\mathbb{S}^2$ identificando $\theta = \beta$ e $\varphi = \alpha(mod 2\pi)$, aggiungendo la condizione precedente H_ψ che si traduce in questo caso con $\gamma = 0$.
Abbiamo allora definito il nostro set di stati coerenti come:

$$|\theta, \varphi\rangle_N = \hat{U}^{(N)}(g)|j, j\rangle \tag{B.3}$$

Questi stati dipendono dalla dimensione N della rappresentazione, ma ricordando che N=2j+1 e proiettando sugli elementi $|j, m\rangle$ della base di $\mathbb{C}^N$ si trova:

$$|\theta, \varphi\rangle_N = \sum_{m=-j}^{j} \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} cos^{j+m}\left(\frac{\theta}{2}\right) sin^{j-m}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-im\varphi}|j, m\rangle \tag{B.4}$$

Inoltre il set è sovracompleto e non ortogonale:

$$_N\langle\theta', \varphi'|\theta, \varphi\rangle_N = e^{-ij(\varphi'-\varphi)}\left[e^{i(\varphi'-\varphi)}cos\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right]^{2j} \tag{B.5}$$

$$\mathbb{I}d = \frac{N}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} d\Omega|\theta, \varphi\rangle_{N\,N}\langle\theta, \varphi| \tag{B.6}$$

dove $d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi$ è l'elemento di angolo solido.

Usando questi stati si definisce una mappa dallo spazio degli operatori agenti su uno spazio di Hilbert $\mathbb{C}^N$ di dimensione finita nello spazio delle funzioni sulla sfera $\mathbb{S}^2$:

$$f(\theta, \varphi) =_N \langle\theta, \varphi|\hat{F}^{(N)}|\theta, \varphi\rangle_N \tag{B.7}$$

Così facendo si associano le matrici di grado finito alle funzioni sulla sfera. In particolare, guardando le armoniche sferiche, per ogni $l \leq j$ si ha che :

$$_N\langle\theta, \varphi|\hat{Y}_{lm}^{(N)}|\theta, \varphi\rangle_N = Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{B.8}$$

Bibliografia

[1] C. S. Chua, J. Madore and H. Steinacker, *"Scaling Limits of the Fuzzy Sphere at one Loop"*, JHEP 0108, 038 (2001)

[2] G. Landi, F. Lizzi and R. J. Szabo, *"Matrix quantum mechanics and soliton regularization of noncommutative field theory"* Adv.\Theor.\Math.\Phys.\ 8 no.1, 1 (2004)

[3] F. Lizzi and A. Pinzul, *"Dimensional Deception from Noncommutative Tori: An alternative to Hořava-Lifschitz"*, Phys. Rev. D96 no.12, 126013 (2017)

[4] J. Madore, *"An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications"*, Cambridge University Press (1995)

[5] J. Madore, *"The Fuzzy Sphere"*, Class. Quant. Grav. 9 (1992)

[6] M. Rieffel, *"On the C^* algebra on irrational rotations"*, Pacific J. of Math., 93, 415 (1981)

[7] J. J. Sakurai, *"Meccanica quantistica moderna"*, Seconda edizione, Zanichelli (2003)

[8] A. Zampini, *Applications of the Weyl-Wigner formalism to noncommutative geometry"*, hep-th/0505271 (2005)