

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

L'effetto Aharonov-Bohm

Relatore:

Prof. Rodolfo Figari

Candidato:

Giuseppe Cordella

Matricola N85000512

A.A. 2016/2017

Indice

Introduzione	3
1 L'effetto Aharonov-Bohm	5
1.1 Il ruolo dei potenziali in meccanica classica	5
1.2 Potenziali elettromagnetici e funzioni d'onda	8
1.3 Esperimenti d'interferenza	9
1.4 Particella su un anello	11
1.5 Prove sperimentali	13
2 Non-località dinamica della meccanica quantistica	17
2.1 Un'implicazione dell'effetto Aharonov-Bohm	17
2.2 Fase assoluta e fase relativa	18
2.3 L'operatore di traslazione	20
2.4 Variabili modulari	23
Conclusioni	27
Bibliografia	29

Introduzione

Gli assunti fondamentali della meccanica quantistica conducono spesso a proposizioni che sfidano l'intuito di chi si avvicina ad essa, presentando un'abbondante quantità di paradossi, i quali si prestano a diverse interpretazioni e risoluzioni. Uno di questi, evidenziato per la prima volta da Y. Aharonov e D. Bohm nel 1959, riguarda l'influenza che i campi elettromagnetici esercitano su particelle cariche che non hanno accesso diretto ai campi stessi. Un tale fenomeno è inconcepibile nell'elettrodinamica classica; ciononostante, Aharonov e Bohm risolsero l'equazione di Schrödinger per un sistema che presenta questa situazione, mostrando l'esistenza dell'effetto che oggi porta il loro nome e che è oggetto di questo lavoro di tesi.

Poco dopo la previsione teorica, arrivarono i primi risultati sperimentali. Quando, a metà degli anni '70, si recuperarono le teorie di gauge formulate negli anni '50 come candidate per una teoria unificata delle interazioni fondamentali, si ravvivò l'interesse per l'effetto Aharonov-Bohm, in quanto questo, come sarà evidenziato nelle prossime pagine, sembra attribuire ai potenziali, che sono quantità dipendenti dalla gauge, un significato fisico che manca nella teoria classica.

Nel 1978, un articolo di P. Bocchieri e A. Loinger, apparso sul *Nuovo Cimento*, mise in discussione teoria ed esperimenti, riducendo l'intero fenomeno a un costrutto matematico. Si tentarono anche riformulazioni della meccanica quantistica che escludessero del tutto l'effetto. Tali controversie furono risolte solo con prove sperimentali più accurate, come l'esperimento di Tonomura del 1986, che poté contare su tecniche più avanzate. Si è quindi potuta verificare la correttezza delle conclusioni di Aharonov e Bohm, mentre l'interpretazione che diedero è ancora oggetto di discussione.

Il primo capitolo introduce l'argomento seguendo un approccio semiclassico, in cui, sebbene la dinamica delle particelle obbedisca all'equazione di Schrödinger, i campi elettromagnetici non sono quantizzati. Si vedrà come tutti gli esempi proposti abbiano la stessa topologia, e che questa è, quindi, fondamentale per comprendere il fenomeno. La prima parte si conclude con una breve descrizione degli esperimenti storicamente più significativi.

Si apre poi la discussione sull'interpretazione del paradosso, mostrandone il legame con gli aspetti non locali della meccanica quantistica. Dell'effetto Aharonov-Bohm se n'è parlato spesso in relazione ad alcune generalizzazioni (come l'effetto duale Aharonov-Casher o l'applicazione alle teorie di gauge non abeliane) e alle caratteristiche analoghe ad altri fenomeni (fase di Berry), ma una delle più profonde implicazioni, riconosciuta dallo stesso Aharonov in più occasioni, rimane spesso sottaciuta. Nel secondo capitolo si vuole quindi guidare il lettore nell'individuazione di un'osservabile che quantifichi l'effetto della presenza di un potenziale sulle funzioni d'onda di particelle cariche, dimostrando come l'evoluzione di quest'osservabile sia regolata da un'equazione non locale. Viene poi illustrata una rappresentazione della meccanica quantistica che tenga conto di quanto detto e mostri il principio d'indeterminazione di Heisenberg da una nuova angolazione.

Capitolo 1

L'effetto Aharonov-Bohm

Nel presente capitolo si discute la questione sollevata in origine da Y. Aharonov e D. Bohm nell'articolo *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, pubblicato nel 1959 nella *Physical Review*, prendendo in esame alcuni sistemi di semplice visualizzazione.

1.1 Il ruolo dei potenziali in meccanica classica

Nella didattica della Fisica una delle prime nozioni presentate allo studente è il concetto di forza. Questa non è una scelta casuale: quella che comunemente chiamiamo forza è una grandezza facile da comprendere perché se ne fa esperienza quotidianamente, come forza muscolare, forza di gravità, forza elastica; se ne possono fare numerosi altri esempi elementari. Nella meccanica newtoniana si dà alla forza il significato di derivata temporale della quantità di moto di un corpo e, data l'espressione esplicita della legge di forza, è possibile scrivere un'equazione differenziale che, note le condizioni iniziali, abbia per soluzione l'equazione del moto. Quando risulta difficile determinare la legge di forza istante per istante oppure non si sa risolvere analiticamente l'equazione differenziale, lo strumento principe della meccanica classica per determinare posizione e velocità a un dato istante di tempo è la legge di conservazione dell'energia meccanica.

L'energia, sempre nel contesto newtoniano, è generalmente una quantità fisica meno intuitiva della forza: è una grandezza scalare, mentre la forza possiede una direzione e un verso; può assumere più forme (cinetica, potenziale); l'energia potenziale può poi essere definita a meno di una costante, generando in linea di principio un'arbitrarietà che una descrizione del sistema in termini di forze non presenta. Il motivo per cui si introduce l'energia nella

meccanica newtoniana è dunque di natura computazionale e a questo livello si presenta come una semplice astrazione della forza senza un corrispettivo nella realtà.

In elettromagnetismo al concetto di forza si sovrappone naturalmente quello di campo, e al concetto di energia quello di potenziale. Una particella puntiforme di carica q che si muove con una velocità \mathbf{v} in presenza di un campo elettrico \mathbf{E} e di un campo di induzione magnetica \mathbf{B} risente della forza di Lorentz (in unità gaussiane, che useremo d'ora in avanti)

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.1)$$

Ai campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono associati i potenziali scalare e vettore ϕ e \mathbf{A} , secondo le relazioni

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.3)$$

I potenziali non sono però definiti completamente dalla (1.2) e dalla (1.3), poiché i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono invarianti per la trasformazione di gauge classica

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (1.4)$$

dove χ è una qualunque funzione reale e differenziabile del vettore posizione e del tempo. Tale caratteristica discende direttamente dalle proprietà degli operatori di derivazione. Poiché solo \mathbf{E} e \mathbf{B} sono misurabili direttamente, tali trasformazioni non hanno conseguenze osservabili, e ϕ ed \mathbf{A} sono, per certi versi, arbitrari.

Il motivo per cui si introducono i potenziali in elettromagnetismo è ancora di natura computazionale: può essere più semplice, ad esempio, risolvere le equazioni di Maxwell per le quattro variabili ausiliarie ϕ ed \mathbf{A} , anziché per le quantità fisiche \mathbf{E} e \mathbf{B} . Una ragione più profonda è nella volontà di ottenere l'equazione di Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, per una particella sottoposta alla forza di Lorentz (1.1), a partire da un'hamiltoniana. \mathbf{E} e \mathbf{B} non possono comparire nell'hamiltoniana, poiché le equazioni dinamiche risultanti ne conterrebbero le derivate. D'altra parte, le equazioni di Hamilton

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.5)$$

per un'hamiltoniana H in cui compaiano ϕ ed \mathbf{A} ,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + q\phi, \quad (1.6)$$

restituiscono proprio l'equazione cercata. Dimostriamo quest'affermazione. Esplicitando H nelle (1.5) si ha

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{q}{mc} \left[\sum_{j=1}^3 \left(p_j - \frac{q}{c} A_j \right) \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right] - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (1.7)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{q}{c} A_i \right). \quad (1.8)$$

Derivando rispetto al tempo la (1.8) si ottiene

$$\frac{dp_i}{dt} = m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{q}{c} \frac{dA_i}{dt}. \quad (1.9)$$

Inseriamo quest'ultima relazione nella (1.7), usando, al secondo membro, la (1.8):

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{q}{c} \frac{dA_i}{dt} = \frac{q}{c} \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (1.10)$$

Esplicitando la derivata totale come

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}, \quad (1.11)$$

e ricordando la (1.2) e la (1.3), la (1.10) si riesprime come l' i -esima componente dell'equazione di Newton della particella:

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = qE_i + \frac{q}{c} \varepsilon_{ijk} \frac{dx_j}{dt} B_k, \quad (1.12)$$

con la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

L'hamiltoniana, che è somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, è una quantità conservata, e senza i potenziali elettromagnetici non si può giungere a un concetto di conservazione. In meccanica classica possiamo scegliere indifferentemente il formalismo newtoniano o quello hamiltoniano; nella trattazione quantistica siamo invece obbligati a fornire un'hamiltoniana, se seguiamo la formulazione di Schrödinger o di Heisenberg. Come vedremo nelle prossime sezioni, l'argomento per cui i potenziali siano solo un modo per esprimere in altri termini ciò che il concetto di campo è già sufficiente a descrivere pare venire a cadere con l'introduzione della meccanica quantistica, in cui i potenziali sembrano assumere un significato fisico del tutto indipendente dai campi che essi generano.

1.2 Potenziali elettromagnetici e funzioni d'onda

Le funzioni d'onda sono un oggetto fondamentale del formalismo di Schrödinger della meccanica quantistica. In questo paragrafo analizzeremo il comportamento di una particella carica in presenza di un potenziale elettromagnetico A^μ , di componenti $(\phi, \mathbf{A}) = (\phi, A_x, A_y, A_z)$, in una regione in cui $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$, dimostrando come, anche in una porzione di spazio in cui i campi sono assenti, i potenziali siano in grado di alterare in qualche modo la funzione d'onda.

Può essere utile valutare il ruolo assunto dall'azione (classica) $S \equiv \int \mathcal{L} dt$, in cui l'integrale si intende esteso sul cammino nello spazio-tempo percorso dalla particella. S è proporzionale alla fase accumulata lungo il cammino dalla funzione d'onda. Usando la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + \frac{q}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \quad (1.13)$$

si ottiene

$$S = S_0 + q \int \left(\frac{1}{c}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \phi dt \right), \quad (1.14)$$

in cui $S_0 \equiv \int \frac{1}{2}mv^2 dt$ è l'azione per una particella libera. La funzione d'onda risultante ψ differirà da quella di una particella libera ψ_0 per un fattore di fase:

$$\psi = \psi_0 e^{ig(\mathbf{r},t)}, \quad g(\mathbf{r},t) = \frac{q}{\hbar} \int \left(\frac{1}{c}\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \phi dt \right). \quad (1.15)$$

Si può infatti verificare che ψ è soluzione dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo con hamiltoniana H , data dal corrispettivo operatoriale della (1.6):

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= H\psi \\ &= \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} \right)^2 + q\phi \right] \psi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nell'inserire la (1.15) ne va calcolato dapprima il gradiente:

$$\nabla \psi = \nabla \psi_0 e^{g(\mathbf{r},t)} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \psi_0 e^{g(\mathbf{r},t)}. \quad (1.17)$$

Questo risultato è valido solo se, come da ipotesi, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$, di modo che l'integrale $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ non dipenda dal particolare cammino percorso ma solo dagli estremi di integrazione, ammettendo \mathbf{A} come primitiva. Ne consegue che l'applicazione del momento canonico $\boldsymbol{\pi} = -i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}$ su ψ non dipende da \mathbf{A} , e si può dire lo stesso del quadrato. Analogamente, l'applicazione della derivata temporale al primo membro della (1.16) fa comparire il termine $q\phi\psi$ che si elide con quello al secondo membro. Cancellando gli esponenziali ciò che resta è

$$i\hbar\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_0. \quad (1.18)$$

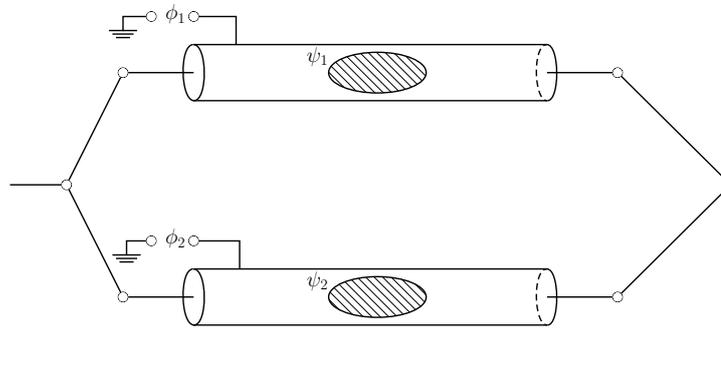
L'equazione (1.18) conferma che ψ_0 è la soluzione dell'equazione di Schrödinger ottenuta ponendo $\mathbf{A} = 0$. Con tali manipolazioni abbiamo visto quindi che l'effetto del potenziale elettromagnetico sulla funzione d'onda in una regione in cui i campi sono nulli è reso da un fattore di fase, che gioca un ruolo fondamentale negli esperimenti in cui si evidenzia la natura ondulatoria della materia. Nella prossima sezione sarà esposto un modo per mostrare quanto detto finora con due possibili allestimenti sperimentali.

1.3 Esperimenti d'interferenza

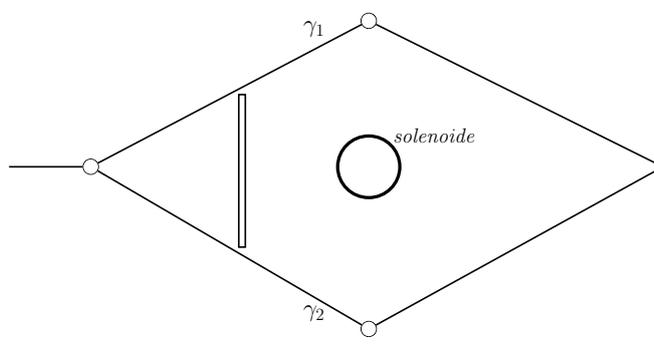
Un esperimento concettualmente semplice per mostrare l'effetto Aharonov-Bohm elettrico consiste nel prendere un fascio coerente di elettroni, dividerlo in due parti e fare entrare ciascuno dei due fasci ottenuti, spezzati in pacchetti d'onda, in un cilindro metallico. Si fa in modo che tali pacchetti d'onda, ψ_1 e ψ_2 , abbiano dimensioni lineari grandi rispetto alla lunghezza d'onda λ e piccole rispetto alla lunghezza dei cilindri. Nei due cilindri vengono generate due diverse tensioni elettriche ϕ_1 e ϕ_2 , che sono mantenute nulle finché i pacchetti d'onda non siano penetrati a sufficienza. Le tensioni vengono poi portate ai valori costanti ϕ_1^0 e ϕ_2^0 , con $\phi_1^0 \neq \phi_2^0$ e, prima che i pacchetti lascino i cilindri, riportate a zero. All'uscita dei cilindri i pacchetti d'onda vengono ricombinati e fatti interferire su uno schermo. Per quanto detto nel paragrafo precedente, i pacchetti acquisiscono ciascuno una fase, data da

$$g_1 = \frac{e}{\hbar} \int \phi_1 dt, \quad g_2 = \frac{e}{\hbar} \int \phi_2 dt. \quad (1.19)$$

L'interferenza dipende dalla differenza $g_1 - g_2$. C'è dunque un effetto fisico dei potenziali anche se nessuna forza ha agito sugli elettroni. L'esperimento è così configurato proprio per far sì che ciascun elettrone si trovi in un potenziale variabile nel tempo senza mai trovarsi in un campo: il campo elettrico



(a) Effetto Aharonov-Bohm elettrico



(b) Effetto Aharonov-Bohm magnetico

Figura 1.1: Possibili setup sperimentali

infatti compare solo sulle superfici di base del cilindro, nel momento in cui il pacchetto d'onda è già penetrato all'interno e non può più interagirvi, e scompare quando il pacchetto d'onda fuoriesce. Si può immaginare un analogo esperimento per l'effetto Aharonov-Bohm magnetico. Dato un solenoide avvolto strettamente, vi si fa passare una corrente, che genera un campo magnetico \mathbf{B} che supponiamo essere tutto contenuto nell'interno del solenoide. Ancora una volta, si prende un fascio di elettroni e lo si divide in due parti. Queste vengono fatte passare ai due lati opposti del solenoide senza farle venire a contatto con il solenoide stesso, di modo che il campo magnetico non possa influenzare la fase relativa. Il potenziale vettore \mathbf{A} , a differenza del campo magnetico, non può essere nullo ovunque fuori dal solenoide, poiché la sua circuitazione intorno al solenoide è, per il teorema di Stokes, uguale al flusso magnetico Φ al suo interno, cioè

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.20)$$

e $\Phi \neq 0$ perché $\mathbf{B} \neq 0$ all'interno del solenoide. In presenza di $\mathbf{A} \neq 0$, dunque, le funzioni d'onda elettroniche acquisiscono le fasi

$$g_1 = \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad g_2 = \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.21)$$

in cui γ_1 e γ_2 sono i cammini seguiti, che possono essere uniti in un'unica curva chiusa γ per esprimere la differenza di fase:

$$\Delta g = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.22)$$

1.4 Particella su un anello

Sia data una particella senza spin, di massa m e carica $q = -e$, vincolata a muoversi su un anello circolare di raggio R . In assenza di potenziali, l'equazione di Schrödinger stazionaria

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = E\psi \quad (1.23)$$

in cui θ è l'angolo di rotazione, ha come soluzione

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.24)$$

Inserendo questa nell'equazione, gli autovalori dell'energia risultano essere

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} n^2. \quad (1.25)$$

Notiamo immediatamente una degenerazione: a una stessa energia E_n corrispondono le due soluzioni $e^{in\theta}$ ed $e^{-in\theta}$.

Introduciamo ora un solenoide indefinito, avvolto strettamente, di raggio $\rho < R$, concentrico all'anello. Come nel caso dell'esperimento visto nella sezione 1.3 per l'effetto Aharonov-Bohm magnetico, facendovi passare una corrente, all'interno del solenoide (e solo al suo interno) si genera un campo di induzione magnetica \mathbf{B} uniforme. Data la simmetria del problema, useremo le coordinate cilindriche r, θ, z . Il potenziale vettore \mathbf{A} non può dipendere da θ né da z , per cui nella sua espressione comparirà solo la dipendenza radiale; essendo poi $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ all'esterno del solenoide, A_z è costante e può quindi essere posta uguale a zero; infine, dal fatto che il moto si svolge limitatamente alla circonferenza dell'anello, anche A_r è costante e la poniamo uguale a zero. Si ha dunque che $\mathbf{A} = A_\theta \hat{\theta}$, e possiamo esprimere A_θ in funzione del flusso magnetico tramite il teorema di Stokes (cfr. (1.20)):

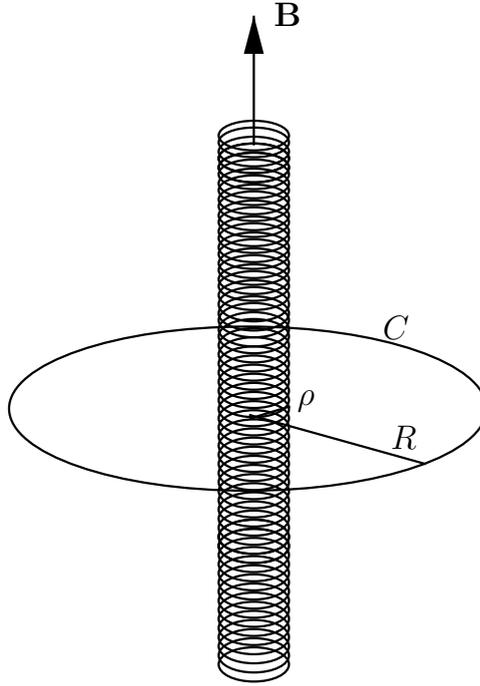


Figura 1.2: Una particella si muove su un anello circolare di raggio R . Il campo \mathbf{B} è contenuto nell'interno di un solenoide di raggio ρ .

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = R \int_0^{2\pi} A_\theta d\theta = 2\pi R A_\theta, \quad (1.26)$$

dunque $A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi R}$. L'equazione di Schrödinger stazionaria in questo caso è, ricordando la (1.16), presa senza il termine di potenziale elettrico¹,

$$\frac{1}{2mR^2} \left\{ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \left(\frac{e\Phi}{2\pi c} \right)^2 - i\hbar \frac{e\Phi}{\pi c} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \psi = E\psi. \quad (1.27)$$

Possiamo snellire la notazione ponendo $\frac{\hbar c}{e} \equiv \Phi_L$ (quanto di flusso di London²) e $\frac{\hbar^2}{2mR^2} \equiv B_{\text{rot}}$ (costante rotazionale usata in fisica molecolare):

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + 2i \frac{\Phi}{\Phi_L} \frac{d\psi}{d\theta} + C\psi = 0, \quad C \equiv \left[\frac{E}{B_{\text{rot}}} - \left(\frac{\Phi}{\Phi_L} \right)^2 \right]. \quad (1.28)$$

La soluzione è ancora la (1.24), ma stavolta, sostituendola nell'equazione, si ottiene $n^2 + 2(\Phi/\Phi_L)n - C = 0$, da cui

¹Sfruttiamo il fatto che \mathbf{A} è costante per scrivere $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$.

² Φ_L è il doppio del vero quanto di flusso magnetico Φ_0 .

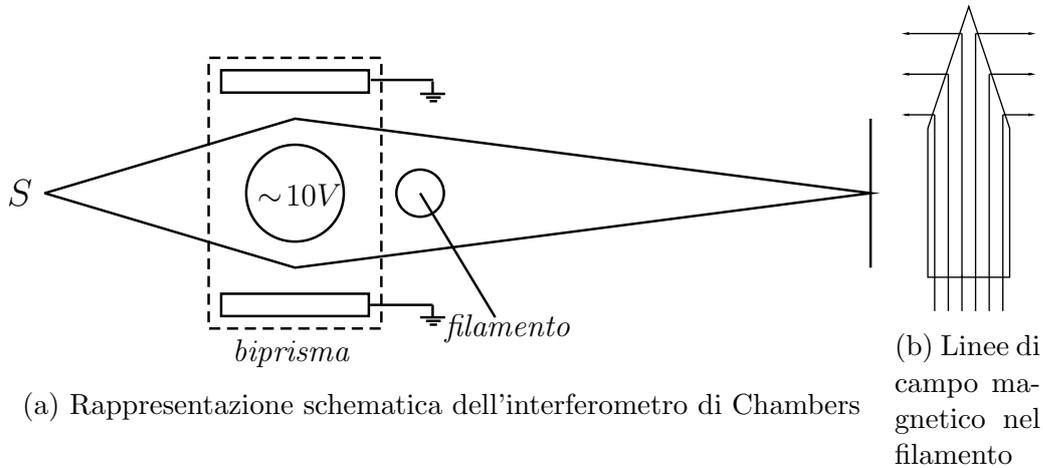


Figura 1.3: Esperimento di Chambers

$$n = -\frac{\Phi}{\Phi_L} \pm \sqrt{\frac{E_n}{B_{\text{rot}}}}. \quad (1.29)$$

Elevando al quadrato, gli autovalori dell'energia sono

$$E_n = B_{\text{rot}} \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_L} \right)^2. \quad (1.30)$$

Qui la degenerazione è rimossa dalla presenza del potenziale vettore, in una regione in cui il campo magnetico non è presente. Tale regione, come avviene per la situazione esposta da Aharonov e Bohm, non è uno spazio semplicemente connesso: non possiamo, infatti, prendere il limite $R \rightarrow 0$ per la presenza stessa del solenoide; per lo stesso motivo la curva γ della sezione 1.3 non poteva essere ridotta a un punto.

1.5 Prove sperimentali

Il primo esperimento dedicato esclusivamente all'effetto Aharonov-Bohm è attribuito a Chambers (1960). La figura 1.3a mostra uno schema semplificato dell'apparato. Un fascio di elettroni, proveniente da una sorgente puntiforme, incide su un biprisma elettronico, realizzato da una fibra di quarzo alluminizzata con due placche metalliche ai lati collegate a terra. Il biprisma divide il raggio in due parti, con un angolo che dipende dal potenziale a cui è tenuta la fibra di quarzo, per poi ricostituirlo in un punto più avanzato, facendo interferire gli elettroni che passano ai due lati. Ponendo un filamento

di ferro a punta conica nella regione centrale, le frange d'interferenza si inclinano in corrispondenza della punta. Poiché la magnetizzazione all'interno del filamento è costante nella direzione assiale, il flusso magnetico è proporzionale alla sezione. La figura d'interferenza ottenuta può essere spiegata con una variazione di fase dovuta al flusso magnetico racchiuso dal cammino percorso dagli elettroni. L'inclinazione delle frange può essere spiegata anche classicamente: il campo magnetico esterno al filamento appuntito è perpendicolare alla superficie, per cui gli elettroni, risentendo della forza di Lorentz, vengono leggermente deflessi nella direzione dell'asse del filamento, con verso opposto nei due lati. Conseguentemente, i raggi elettronici non si incontrano perpendicolari alla direzione della fibra del biprisma e le frange risultano inclinate. In ogni caso, le frange sono connesse senza soluzione di continuità tra le regioni corrispondenti alle due sezioni del filamento (conica e cilindrica), e ciò significa che la variazione di fase esiste anche nella parte cilindrica. Una tale variazione di fase non può essere spiegata classicamente. I risultati dell'esperimento di Chambers furono messi in discussione (Bocchieri *et al.* 1978, Roy 1980) come non definitivi, poiché gli elettroni avevano accesso a una regione in cui vi erano perdite di campo magnetico. Tonomura (1986) riuscì ad escludere completamente l'interazione locale tra elettroni e campo magnetico facendo uso di un magnete toroidale microscopico, interamente ricoperto da uno strato di niobio, che è un superconduttore sotto la temperatura critica $T_c = 9.3 K$, e da uno di rame. I due strati fanno in modo che gli elettroni non possano penetrare nel magnete, e il campo magnetico è confinato all'interno del magnete per l'effetto Meissner dovuto al superconduttore. Lo spostamento di fase tra due fasci di elettroni, passanti uno nella regione racchiusa del toro e uno all'esterno, viene poi misurato con la tecnica dell'olografia elettronica. Le figure d'interferenza così ottenute mostrano chiaramente uno sfasamento di $n\pi$, con n intero (π per n dispari, 0 per n pari): la variazione di fase dovuta alla presenza del flusso magnetico Φ è $\frac{e\Phi}{\hbar c}$ (cfr. sezione 2.4), ed essendo Φ quantizzato in multipli di $hc/2e$, i risultati dell'esperimento di Tonomura mostrano in via definitiva che lo sfasamento non può che essere dovuto all'effetto Aharonov-Bohm.

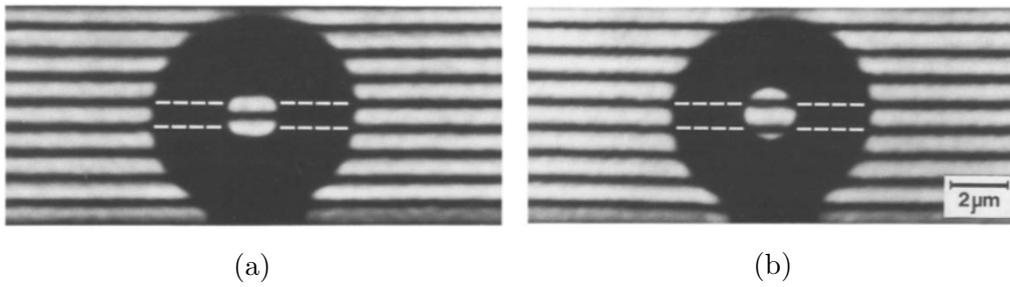


Figura 1.4: Interferogrammi dall'esperimento di Tonomura. Si evidenziano, a temperatura $T = 4.5 K$, sfasamenti di π (a) o assenza di sfasamento (b) tra le figure al centro e all'esterno dell'ombra del magnete. Immagini tratte da [3].

Capitolo 2

Non-località dinamica della meccanica quantistica

Al termine della sezione 1.1 ci eravamo chiesti, seguendo l'argomentazione di Aharonov e Bohm, se i potenziali elettromagnetici ϕ ed \mathbf{A} possedessero un senso fisico che non tenga conto dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} . In questo capitolo esamineremo un punto di vista moderno sulla questione, a partire da considerazioni di carattere generale sulla formulazione di una teoria quantistica.

2.1 Un'implicazione dell'effetto Aharonov-Bohm

In fisica, nell'analizzare quanto una teoria si adatti agli esperimenti, e dunque sia una buona teoria, si fanno due richieste. La prima è, banalmente, che la teoria predica correttamente il risultato degli esperimenti. La seconda, più sottile, è che la teoria non predica nulla di più e nulla di meno dei risultati di possibili esperimenti. L'effetto Aharonov-Bohm ci ha mostrato che i potenziali elettromagnetici hanno un ruolo, nella meccanica quantistica, che manca nella meccanica classica. Potremmo allora concludere che, mentre nella teoria classica \mathbf{E} e \mathbf{B} sono le uniche variabili fisiche, nella teoria quantistica ϕ ed \mathbf{A} siano anch'esse variabili fisiche. Il problema, come già suggerito nella prima parte, è che, in entrambi i casi, solo le grandezze invarianti per trasformazioni di gauge hanno senso fisico, essendo misurabili. Non potendo misurare ϕ ed \mathbf{A} , se li si definisce variabili fisiche si contravviene alla richiesta della miglior corrispondenza possibile tra ciò che la teoria descrive e ciò che può essere misurato. Dunque, invece di concludere che nella trattazione quantistica i potenziali siano variabili fisiche, possiamo affermare che solo i campi possono essere considerati tali, ma agiscono in maniera non locale; d'altra parte, in tutti gli esempi considerati, i campi non erano del tutto

assenti, ma esistevano in una regione dello spazio non raggiungibile direttamente dalle particelle interessate. Una tale azione a distanza da parte di un campo non è contemplata nella teoria classica.

Che la natura sia non locale, nel senso della violazione delle disuguaglianze di Bell, è un fatto noto: le correlazioni quantistiche tra particelle distanti sono tali che, per mostrarle, parti separate di un sistema dovrebbero poter comunicare a velocità superluminali. Questa non-località pertiene alla struttura dello spazio di Hilbert ed è un fatto puramente cinematico. La non-località rivelata dall'effetto Aharonov-Bohm appartiene invece alla descrizione dinamica: è contenuta, cioè, nelle equazioni del moto. A prima vista l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

semberebbe un'equazione locale, per via delle dipendenze dirette dal vettore posizione. È importante notare, però, che la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ che ne è soluzione non è né fisicamente osservabile, né gauge-invariante, in quanto può contenere, in un fattore di fase, quantità non gauge-invarianti (cfr. sezione 1.2). Dobbiamo quindi stabilire quali informazioni, contenute in una funzione d'onda, siano effettivamente misurabili.

2.2 Fase assoluta e fase relativa

Per fissare le idee, prendiamo come esempio l'esperimento della doppia fenditura. Consideriamo una sorgente di elettroni (come un filamento metallico riscaldato). A una certa distanza poniamo uno schermo con due strette fenditure, e dietro di esso un secondo schermo in grado di rivelare la posizione degli elettroni che vi incidono. Gli elettroni lasciano la sorgente uno alla volta e finiscono in punti diversi del secondo schermo. Immaginiamo di compiere tre esperimenti: il primo con una sola delle fenditure aperte, il secondo con l'altra fenditura aperta e il terzo con entrambe le fenditure aperte. Chiamiamo $N_1(x)$, $N_2(x)$ e $N_{12}(x)$ il numero di elettroni che raggiungono una posizione x sullo schermo, in un certo intervallo di tempo, per ciascuno dei tre esperimenti. A differenza di quanto ci aspettiamo in meccanica classica, $N_{12}(x) \neq N_1(x) + N_2(x)$; vediamo invece che $N_{12}(x)$ forma una tipica figura d'interferenza, con minimi e massimi. In particolare, ci sono punti in cui, quando entrambe le fenditure sono aperte, arrivano meno elettroni rispetto a quando una sola fenditura è aperta. In qualche modo, quindi, ciascun elettrone "sa" che entrambe le fenditure sono aperte. Come fa un elettrone che passa da una fenditura a sapere se anche l'altra sia aperta o meno?

A questa domanda la meccanica quantistica risponde associando una funzione d'onda Ψ all'elettrone, facendola propagare attraverso le due fenditure e interferire con se stessa. Ciò che non si spiega è come l'elettrone poi ricompaia nel punto x , con probabilità data da $|\Psi(x)|^2$. Oltretutto la propagazione della funzione d'onda dalla sorgente allo schermo non può essere trattata come un moto ondulatorio classico, per due motivi essenziali.

Il primo motivo è che in meccanica quantistica alla lunghezza d'onda λ è associato un impulso $p = h/\lambda$, per cui a un cambiamento sulla figura d'interferenza è associata una variazione di impulso. Anche classicamente un'onda trasporta quantità di moto, ma questa non è legata all'aspetto spaziale dell'onda. Il secondo motivo è che la fase che governa l'interferenza è misurabile localmente solo nel caso classico. Per vederlo, possiamo scrivere la funzione d'onda dell'elettrone come una combinazione di due termini che descrivano ciascuno un'onda che si propaghi attraverso una delle due fenditure:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\alpha_1} \psi_1(\mathbf{r}) + e^{i\alpha_2} \psi_2(\mathbf{r})). \quad (2.2)$$

La figura d'interferenza osservata al secondo schermo dipende dalla fase relativa $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Se fossimo in una situazione classica potremmo pensare di misurare le due fasi in corrispondenza delle fenditure, e quindi sottrarre l'una dall'altra per ottenere la fase relativa. Ciò non è possibile nella descrizione quantistica, poiché le singole fasi α_1 e α_2 non sono osservabili. Per dimostrarlo, basta notare che una funzione d'onda del tipo

$$\Psi'(\mathbf{r}) = e^{i\beta} \Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i(\alpha_1+\beta)} \psi_1(\mathbf{r}) + e^{i(\alpha_2+\beta)} \psi_2(\mathbf{r})) \quad (2.3)$$

è del tutto indistinguibile fisicamente dalla (2.2), poiché possiamo osservarne solo il modulo, che è indipendente dalla fase complessiva β . Possiamo concludere, quindi, che non è possibile misurare localmente le fasi individuali α_1 e α_2 e che solo la fase relativa ha senso fisico.

Del resto, la presenza di β potrebbe essere dovuta a una scelta di gauge. Se i due pacchetti d'onda interagissero con un potenziale elettromagnetico (ϕ, \mathbf{A}) , la soluzione dell'equazione di Schrödinger in una gauge (ϕ', \mathbf{A}') ottenuta trasformando ϕ e \mathbf{A} secondo le (1.4),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi'(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \chi \right)^2 + e\phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \Psi'(\mathbf{r}, t), \quad (2.4)$$

sarebbe diversa dalla soluzione in assenza di potenziali solo per una fase complessiva,

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = e^{i \frac{e}{\hbar c} \chi} \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

come si verifica per sostituzione. Tale fase, essendo dovuta alla scelta di gauge, non può essere in alcun modo misurata.

2.3 L'operatore di traslazione

Come anticipato nella sezione 2.1, vogliamo passare a una descrizione dinamica delle osservabili del sistema fisico. Per semplicità, ci mettiamo in una situazione unidimensionale: consideriamo due pacchetti d'onda $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$, che non si sovrappongono all'istante iniziale, similmente a quanto avviene per dei pacchetti d'onda che descrivano l'elettrone nell'istante immediatamente successivo all'attraversamento delle aperture nel primo schermo nell'esperimento della doppia fenditura. Nel tempo i pacchetti si slargano e interferiscono l'uno con l'altro. All'istante iniziale si ha la funzione d'onda complessiva

$$\Psi_\alpha(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x) + e^{i\alpha}\psi_2(x)), \quad (2.6)$$

in cui α è la fase relativa tra i due pacchetti. La figura d'interferenza dipenderà da α . Ci chiediamo allora quali siano le osservabili che dipendono da α e che in linea di principio ci permettano di misurarla.

Iniziamo col dimostrare che, in assenza di un potenziale, per qualunque istante t in cui i pacchetti d'onda non si siano ancora sovrapposti, il valor medio di un qualunque prodotto di potenze di x e p nello stato $\Psi_\alpha(x, t)$

$$\langle x^m p^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\alpha^*(x, t) x^m p^n \Psi_\alpha(x, t) dx \quad (2.7)$$

non dipende da α , quali che siano m e n . Nella base delle coordinate, p è l'operatore $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. All'istante iniziale è facile verificare l'asserto, poiché né $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ né le loro derivate si sovrappongono e non sopravvivono termini dipendenti da α . Per estendere la dimostrazione ad ogni istante di tempo t in cui i due pacchetti non si sovrappongano, definiamo $U(t)$ l'operatore di evoluzione temporale per la particella libera, cioè quell'operatore unitario che applicato alla funzione d'onda nell'istante iniziale ne restituisce l'evoluta al tempo t :

$$\Psi_\alpha(x, t) = U(t)\Psi_\alpha(x, 0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t} \Psi_\alpha(x, 0). \quad (2.8)$$

$\Psi_\alpha(x, t)$ è dunque soluzione dell'equazione di Schrödinger e l'integranda è

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha^*(x, t)x^m p^n \Psi_\alpha(x, t) &= \Psi_\alpha^*(x, 0)U^\dagger(t)x^m p^n U(t)\Psi_\alpha(x, 0) \\
&= \Psi_\alpha^*(x, 0) [U^\dagger(t)xU(t)]^m [U^\dagger(t)pU(t)]^n \Psi_\alpha(x, 0) \\
&= \Psi_\alpha^*(x, 0) \left[x + \frac{p}{m}t \right]^m p^n \Psi_\alpha(x, 0),
\end{aligned}$$

anch'essa indipendente da α .

Nessuna osservabile ottenuta come un prodotto di potenze di x e p sembra poterci dare informazioni sulla fase relativa che determinerà la figura d'interferenza quando i pacchetti d'onda si sovrapporranno. Ciò comporterebbe un'importante mancanza di potere predittivo della teoria. Possiamo però considerare l'operatore $e^{ipL/\hbar}$. Tale operatore ha l'effetto di traslare una particella di una distanza finita L . Lo possiamo verificare prendendo una qualunque funzione $f(x)$ che ammetta una trasformata di Fourier. Detta $\tilde{f}(p)$ la trasformata di Fourier di $f(x)$, si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{f}(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp. \quad (2.9)$$

Applicando l'operatore di traslazione otteniamo

$$\begin{aligned}
e^{ipL/\hbar} f(x) &= e^{ipL/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{f}(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{f}(p) e^{\frac{ip(x+L)}{\hbar}} dp \\
&= f(x + L).
\end{aligned}$$

Supponendo che Ψ_α consista di due pacchetti d'onda separati da una distanza L , cioè $\psi_2(x) = \psi_1(x + L)$, il valor medio dell'operatore di traslazione è, già all'istante iniziale, in cui i pacchetti non si sovrappongono, dipendente dalla fase relativa. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}
\langle e^{ipL/\hbar} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\alpha^*(x, 0) e^{ipL/\hbar} \Psi_\alpha(x, 0) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) e^{ipL/\hbar} \psi_1(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x + L) e^{ipL/\hbar} \psi_1(x + L) dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) e^{ipL/\hbar} e^{i\alpha} \psi_1(x + L) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha} \psi_1^*(x + L) e^{ipL/\hbar} \psi_1(x) dx \right].
\end{aligned}$$

Di questi quattro termini sopravvive solo l'ultimo, che dà come risultato $e^{-i\alpha/2}$. Abbiamo dunque trovato un'osservabile che renda conto della differenza di fase.

Vediamo alcune proprietà dell'operatore di traslazione:

1. non è hermitiano, ma lo sono le sue componenti $\sin pL/\hbar$ e $\cos pL/\hbar$;
2. come abbiamo verificato, è non-locale nel senso che trasforma il punto in cui è valutata la funzione su cui agisce;
3. non è definito per $\hbar \rightarrow 0$, per cui è da considerarsi puramente quantistico.

Quest'ultimo punto mostra come, nel limite classico, alla scomparsa della figura d'interferenza corrisponda la perdita di significato dell'osservabile che porta l'informazione sulla fase relativa.

Vediamo ora l'evoluzione temporale dell'operatore di traslazione nel formalismo di Heisenberg, confrontandola con quella degli operatori di posizione e impulso. Le equazioni di Heisenberg per x e p , per una particella di massa m in un potenziale $V(x)$, sono formalmente identiche alle equazioni del moto classiche:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dx}(x). \quad (2.10)$$

Ciò non vale per l'operatore di traslazione. Per scrivere un'equazione classica, poiché $e^{ipL/\hbar}$ non è definito per $\hbar \rightarrow 0$, lo si può ridefinire come $e^{i2\pi p/p_0}$, con $p_0 = h/L$ e mandare sia L che h a 0 nel limite classico. Possiamo applicare la regola di derivazione delle funzioni composte e usare la seconda delle (2.10) per scrivere

$$\frac{de^{i2\pi p/p_0}}{dt} = \frac{de^{i2\pi p/p_0}}{dp} \frac{dp}{dt} = -i \frac{2\pi}{p_0} e^{i2\pi p/p_0} \frac{dV}{dx}(x). \quad (2.11)$$

Non potendo usare lo stesso procedimento nella trattazione quantistica, prendiamo direttamente l'equazione di Heisenberg per $e^{ipL/\hbar}$,

$$i\hbar \frac{de^{ipL/\hbar}}{dt} = [e^{ipL/\hbar}, H], \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (2.12)$$

da cui

$$\frac{de^{ipL/\hbar}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} e^{ipL/\hbar} (V(x+L) - V(x)). \quad (2.13)$$

La differenza tra le due equazioni è notevole: la (2.11) è locale e dipende dalla derivata del potenziale, mentre la (2.13) dipende dalla differenza di potenziale tra le posizioni x e $x + L$. Quanto visto finora è nient'altro che l'effetto Aharonov-Bohm scalare in un caso unidimensionale, in cui la forza generata da un potenziale agisce a distanza modificando la fase relativa dei due pacchetti d'onda: il primo esempio della sezione 1.3 si riottiene prendendo l'asse x passante per le uscite dei cilindri conduttori (perpendicolare ad essi), posti a distanza L l'uno dall'altro, e identificando $V(x)$ con il potenziale $\phi(t)$ che, nel tempo, fa accumulare ai due pacchetti le fasi date dalla (1.19). Si possono fare considerazioni simili anche per la controparte magnetica.

2.4 Variabili modulari

L'operatore di traslazione resta invariato se sostituiamo p con $p - np_0$, con n intero, poiché $e^{in2\pi} = 1$. Possiamo quindi dire che $e^{ipL/\hbar}$ dipende da p a meno di un multiplo intero di $p_0 = \hbar/L$. Definiamo allora l'operatore impulso modulare $p_{\text{mod}} = p \bmod \hbar/L$, con autovalori nell'intervallo $[0, \hbar/L)$. Per descrivere l'interferenza quantistica in termini di quest'operatore, prendiamo in considerazione un esperimento simile a quello della doppia fenditura. Iniziamo da un reticolo di diffrazione, con N fenditure, di passo L , con il quale interagiscono elettroni di lunghezza d'onda λ . Le onde parziali associate alla propagazione degli elettroni interferiscono nelle direzioni angolari θ_n tali che

$$\sin \theta_n = \frac{n\lambda}{L}. \quad (2.14)$$

Dalla relazione di De Broglie possiamo trovare la componente dell'impulso lungo l'asse x sul piano dello schermo:

$$p = |\mathbf{p}| \sin \theta_n = \frac{n\hbar}{L} = np_0. \quad (2.15)$$

Se il reticolo è libero di muoversi nella direzione x trasversale al moto, esso acquisterà un impulso np_0 lungo x da ciascun elettrone. Si noti che l'elettrone e il reticolo possono scambiarsi la componente x dell'impulso solo in multipli interi di p_0 .¹

Modifichiamo ora l'esperimento ponendo, nello spazio tra le fenditure, N solenoidi uguali percorsi dalla stessa corrente, uno per fenditura, anch'essi

¹Se il reticolo è molto esteso rispetto alla regione in cui gli elettroni interagiscono con esso, possiamo trattarlo come un potenziale periodico nella direzione x , $V(x) = V(x + nL)$, con n intero. La funzione d'onda di un elettrone che interagisce con un potenziale periodico è, dal teorema di Bloch, $\psi(x) = e^{ipx/\hbar}u(x)$, con $u(x) = u(x + nL) = e^{inpnL/\hbar}u(x)$, da cui seguono i valori discreti dell'impulso $p = \hbar/L = np_0$.

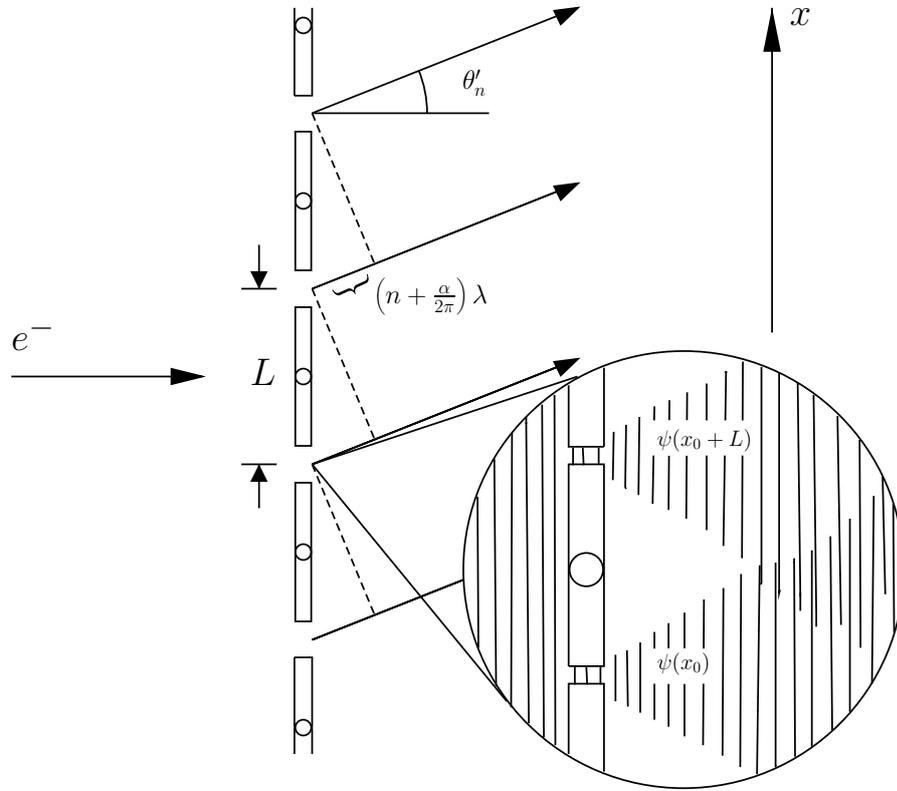


Figura 2.1: Diffrazione di elettroni da reticolo con solenoidi. Dettaglio: pacchetti d'onda che si sovrappongono in una regione non semplicemente connessa.

liberi di muoversi rigidamente come un unico sistema, indipendentemente dal reticolo (possiamo immaginare che tra le fenditure il reticolo sia cavo e li contenga al suo interno). Per valutare l'effetto della presenza dei solenoidi sulla figura di diffrazione, vediamo cosa succede alla fase relativa delle onde parziali che passano ai due lati di uno di essi, concentrandoci solo su due fenditure. Possiamo usare l'espressione $\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\theta}$ dalla sezione 1.4, poiché le due situazioni hanno la stessa geometria. Poniamo $\mathbf{A} = \nabla\chi$, con $\chi = \frac{\Phi}{2\pi} \theta$. L'espressione $\nabla\chi$ può essere vista come la trasformata di gauge di un potenziale nullo solo se consideriamo separatamente le regioni al di sopra e al di sotto del solenoide nella figura 2.1. Se chiudiamo il circuito d'integrazione del flusso Φ intorno al solenoide, χ diventa una funzione polidroma di θ , poiché a uno stesso angolo θ possono corrispondere più concatenazioni del flusso al circuito. Nel nostro caso il circuito si chiude una sola volta sul flusso, quindi la differenza di fase tra i due pacchetti sarà, ricordando la (1.22),

$$\alpha = \frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{\hbar c} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta = \frac{e\Phi}{\hbar c}. \quad (2.16)$$

Tornando al reticolo, se alla fase relativa dovuta alla differenza di cammino ottico aggiungiamo l'ulteriore sfasamento α , gli elettroni diffratti vanno a trovarsi nelle nuove direzioni θ'_n date da

$$\sin \theta'_n = \left(n - \frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{\lambda}{L} = \left(n - \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \right) \frac{\lambda}{L}, \quad (2.17)$$

e acquistano un impulso trasversale pari a

$$p = \left(n - \frac{\alpha}{2\pi} \right) p_0. \quad (2.18)$$

Poiché, ancora una volta, gli elettroni possono scambiare col reticolo solo multipli interi di p_0 di impulso trasversale al moto, il resto dell'impulso, $\alpha p_0/2\pi$, viene trasferito ai solenoidi, in maniera non-locale: la barriera di potenziale data dal reticolo non permette agli elettroni di interagire localmente col campo magnetico generato dai solenoidi. Ci chiediamo se sia possibile misurare un tale effetto. Intanto, poiché $0 \leq \alpha < 2\pi$, l'impulso trasferito al solenoide, p_s , è sempre minore di h/L . Il fatto che i solenoidi debbano rimanere confinati nelle rispettive cavità implica che l'incertezza sulla loro posizione è più piccola di L . Ora, se $\Delta x \leq L$, si perde qualsiasi informazione sull'impulso modulare, e conseguentemente il trasferimento a distanza di impulso non può essere osservato. Dimostriamo quest'affermazione. Identificando la posizione dei solenoidi si viene a conoscenza della fenditura in cui passa l'elettrone, e quindi della sua posizione x_0 , facendo collassare la funzione d'onda complessiva in una $\psi(x_0)$ localizzata entro la larghezza della fenditura. In questo stato l'operatore di traslazione $e^{inpL/\hbar}$ ha valore atteso nullo per qualunque n intero. Ora, $\langle e^{inpL/\hbar} \rangle$ può essere visto come la funzione caratteristica della distribuzione di probabilità di $p_{\text{mod}}L/\hbar$; se è nullo, la distribuzione è uniforme e tutti i valori di p_{mod} sono ugualmente probabili. Contestualmente la figura di diffrazione scompare, rispettando le usuali leggi dell'interferenza quantistica.

Avendo definito p_{mod} , possiamo cercare una grandezza analoga per x . Definiamo $x_{\text{mod}} = x \bmod L$. Vale l'identità $e^{i2\pi x_{\text{mod}}/L} = e^{i2\pi x/L}$, del tutto simile a $e^{ip_{\text{mod}}L/\hbar} = e^{ipL/\hbar}$. Possiamo calcolare il commutatore di $e^{ip_{\text{mod}}L/\hbar}$ ed $e^{i2\pi x_{\text{mod}}/L}$ esplicitando l'azione dell'operatore di traslazione su una funzione $f(x)$ con trasformata di Fourier (cfr. sezione 2.3),

$$e^{ipL/\hbar} e^{i2\pi x/L} f(x) = e^{i2\pi \frac{x+L}{L}} f(x+L) = e^{i2\pi x/L} e^{ipL/\hbar} f(x).$$

Posizione e impulso modulari, dunque, commutano:

$$[e^{ip_{\text{mod}}L/\hbar}, e^{i2\pi x_{\text{mod}}/L}] = 0. \quad (2.19)$$

Questo ci permette di misurare entrambe le osservabili con la stessa precisione. Possiamo ad esempio conoscere, nell'esperimento del reticolo, la posizione di ciascun elettrone modulo L (non sappiamo attraverso quale fenditura passi); l'interazione con i solenoidi modifica gli angoli di deflessione, e con essi gli impulsi nella direzione x , degli elettroni diffratti; guardando la figura di diffrazione possiamo quindi ricavare gli impulsi modulo h/L , poiché non sappiamo in quale angolo venga deflesso ciascun elettrone. Questa rappresentazione ci permette dunque di avere informazioni precise, per quanto incomplete, sia sulla posizione che sull'impulso.

Ancora, possiamo definire gli operatori N_x e N_p , secondo le relazioni:

$$x = N_x L + x_{\text{mod}}, \quad p = N_p \frac{h}{L} + p_{\text{mod}}. \quad (2.20)$$

Applicando la (2.19), si hanno i commutatori

$$[e^{i2\pi x_{\text{mod}}/L}, N_p] = -e^{i2\pi x_{\text{mod}}/L}, \quad [e^{ip_{\text{mod}}L/\hbar}, N_x] = e^{ip_{\text{mod}}L/\hbar},$$

che ricordano la relazione $[L_z, e^{i\varphi}] = \hbar e^{i\varphi}$ tra momento angolare e angolo di rotazione. Come L_z e φ formano una coppia di variabili coniugate, lo sono anche $\hbar N_x$ con $\frac{L}{\hbar} p_{\text{mod}}$ e $\hbar N_p$ con $\frac{2\pi}{L} x_{\text{mod}}$. Le incertezze sono legate dalle relazioni approssimate

$$\Delta N_x \Delta p_{\text{mod}} \sim \frac{h}{L}, \quad \Delta N_p \Delta x_{\text{mod}} \sim L. \quad (2.21)$$

Il principio di indeterminazione usuale implica che, nel tentare di localizzare una particella nello spazio delle fasi, si può al meglio delle possibilità individuare una cella di area h in cui questa è contenuta. La (2.21) ci suggerisce che se non chiediamo in quale cella si trovi, possiamo sapere esattamente dove sia all'interno della cella. Mentre le variabili x e p sono adeguate alla descrizione dei singoli pacchetti d'onda, x_{mod} e p_{mod} si adattano invece allo studio dell'interferenza e di altri fenomeni che coinvolgano più di un pacchetto: nel primo caso, infatti, conosciamo N_x e N_p con buona precisione, rendendo quasi del tutto indeterminati x_{mod} e p_{mod} ; nel secondo caso avviene l'esatto opposto.

Conclusioni

Abbiamo visto come l'effetto Aharonov-Bohm sia non solo un esempio di fenomeno quantistico senza corrispettivo classico, ma che la sua stessa esistenza, provata a più riprese, possa aprire a nuove considerazioni sulla natura della teoria quantistica. Sull'esperimento della doppia fenditura, ad esempio, si può concludere che l'elettrone che passa da una fenditura riceva istantaneamente un'informazione dall'altra, sapendo se è aperta o meno pur non venendo a contatto con essa. Inoltre, abbiamo visto che, nell'interazione col campo magnetico generato dai solenoidi nell'esperimento del reticolo, c'è uno scambio di impulso non locale, quantificabile però entro i limiti delle relazioni d'indeterminazione discusse nella sezione 2.4. Sono proprio tali relazioni che permettono alle interazioni non locali di non entrare in conflitto col principio di causalità.

Non dobbiamo pensare, però, che gettare luce sulla non-località delle equazioni dinamiche sia solo un modo per approfondire un aspetto interpretativo della teoria. La prova della violazione delle disuguaglianze di Bell ha aperto la strada verso la teoria dell'informazione quantistica, con tutte le applicazioni in ambito tecnologico che questa potrà offrire. Allo stesso modo, nello sviluppo di strumenti teorici per fare predizioni su nuovi effetti nell'ambito della meccanica quantistica, che continuano a essere scoperti a distanza di più di novant'anni dalle prime formulazioni della teoria, possiamo darci il proposito di prendere la non-località dell'evoluzione quantistica come punto di partenza.

Bibliografia

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. 115 (1959) p. 485–491
- [2] Y. Aharonov, D. Rohrlich, *Quantum Paradoxes* (Wiley VCH, Weinheim 2005)
- [3] M. Peshkin, A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect* (Springer Verlag, Heidelberg 1989)
- [4] R. G. Chambers, *Shift of an electron interference pattern by enclosed magnetic flux*, Phys Rev. Lett. 5 (1960) p. 3–5
- [5] S. Popescu, *Dynamical quantum non-locality*, Nature Physics vol. 6 (2010) p. 151–153