

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

## **Effetto Casimir**

**Relatori:**

Prof. Luigi Rosa

**Candidato:**

Claudio Piva

Matricola N85000722

A.A. 2017/2018



# Indice

0.1	Introduzione . . . . .	3
1	L'energia di punto zero	6
1.1	Il problema del corpo nero . . . . .	6
1.2	La prima teoria di Planck . . . . .	10
1.3	L'energia di punto zero di Planck . . . . .	14
2	Campo elettromagnetico in una cavità	17
2.1	Modi di oscillazione del campo . . . . .	17
2.2	Il campo come un sistema di oscillatori . . . . .	23
3	Formulazione teorica dell'effetto Casimir	25
3.1	L'oscillatore armonico quantistico . . . . .	25
3.1.1	Metodo algebrico . . . . .	26
3.2	La forza di Casimir . . . . .	29
4	Conclusioni	34
4.1	Cenni alle verifiche sperimentali . . . . .	34
4.2	L'effetto Casimir e la cosmologia . . . . .	36

## 0.1 Introduzione

L'effetto Casimir è un fenomeno di natura puramente quantistica, teorizzato nel 1948 dal fisico olandese Heindrik Casimir, che è stato verificato sperimentalmente dopo circa cinquant'anni dalla sua formulazione. Il fenomeno si manifesta come una piccola forza attrattiva che agisce fra due corpi estesi, non carichi e molto vicini tra loro [3]. La spiegazione del perchè esista una simile interazione trascende il buon senso comune ed ha a che fare con il modo in cui si definisce il vuoto in meccanica quantistica. Per la fisica classica una regione di spazio in cui non è presente la materia è definita come vuota; secondo la moderna visione della fisica, a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, è impossibile garantire la totale assenza di particelle e/o campi in una regione dello spazio. Il vuoto non può essere considerato uno stato privo di energia a causa delle «fluttuazioni quantiche»<sup>1</sup> che a loro volta comportano la creazione e la distruzione di «particelle virtuali» che vivono per istanti di tempo brevi, ma finiti<sup>2</sup>. Poiché non esistono fenomeni analoghi nella vita e nella esperienza quotidiana possiamo provare a immaginare analogie che, per forza di cose, saranno non rigorose nella descrizione del fenomeno in questione [11]. Come un gas esercita una pressione sulle pareti del recipiente che lo contiene, tramite l'incessante bombardamento delle pareti da parte delle molecole che lo compongono, così le particelle virtuali esercitano una pressione sulle pareti di una superficie posta nel vuoto. Essendo il bombardamento (la pressione) uguale su entrambe le facce, l'effetto netto di questo fenomeno è nullo. Se però si pongono due piastre metalliche non cariche una di fronte all'altra si opera una selezione, per cui solo determinate particelle di fissata energia possono essere create nello spazio di separazione tra le due piastre, mentre nello spazio esterno il vuoto continua a “produrre” particelle di ogni energia. Le piastre vengono dunque bombardate sulle loro facce esterne da molte più particelle che non sulle facce interne. Questo squilibrio si esplicita in una forza che tende ad avvicinare le piastre. Tale forza generata dal “nulla” viene appunto detta *forza di Casimir* ed è descritta matematicamente dalla seguente equazione [9]

$$\frac{F}{A} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 d^4}$$

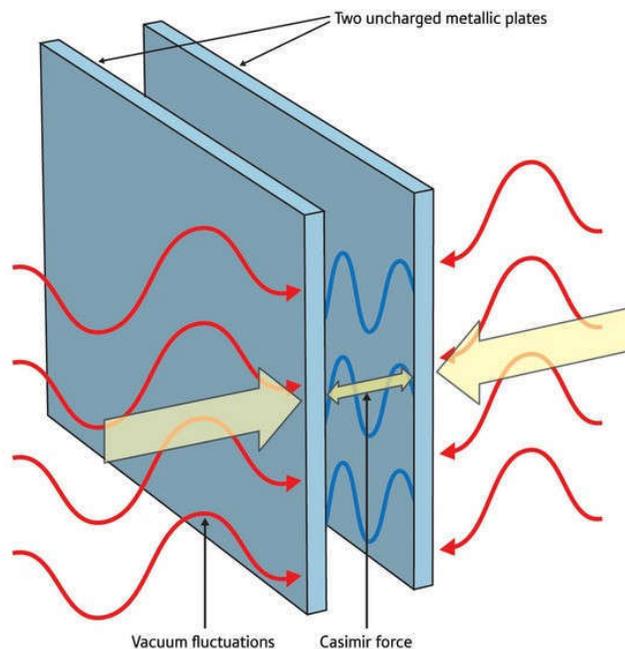
dove  $A$  rappresenta l'area di ciascuna piastra,  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} J \cdot s$  è la costante di Planck ridotta,  $c = 299792458 m/s$  è la velocità della luce nel vuoto,  $d$  è la distanza di separazione. Il segno negativo indica che si tratta proprio di una forza di attrazione. Per capire il motivo di tale squilibrio bisogna tener presente della

---

<sup>1</sup>Per fluttuazioni quantistiche si intendono dei mutamenti temporanei nello stato (di energia) dello spazio vuoto, inteso come privo di materia, in accordo al principio di indeterminazione  $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ . Questo significa che la conservazione dell'energia può essere violata, ma solo per brevissimi istanti.

<sup>2</sup>L'indeterminazione quantistica permette l'apparizione dal nulla di piccole quantità di energia, sempre a condizione che esse scompaiano in un tempo molto breve. La nostra analisi si riferirà ai mediatori dell'interazione elettromagnetica, ossia i fotoni.

duplice natura delle particelle. È noto, ad esempio, che la luce visibile è classicamente composta da onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda compresa tra i 380 nanometri (luce violetta) e i 780 nanometri (luce rossa). Ma un raggio luminoso può anche essere interpretato come un fascio di “particelle elettromagnetiche” o quanti di luce detti fotoni. L'oscillazione del campo elettromagnetico produce fotoni con lunghezza d'onda pari a quella dell'onda elettromagnetica associata ( $\lambda = c \backslash \nu$ ) e la loro energia è inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda stessa tramite l'equazione di Planck  $E = h\nu$ . La radiazione elettromagnetica che si propaga nello spazio infinito è composta da onde di tutte le possibili lunghezze d'onda. Al contrario, la radiazione presente tra due specchi piani<sup>3</sup> posti a distanza  $d$  — e che dunque viaggia avanti e indietro tra i due specchi — può essere composta solo da onde stazionarie, ossia da onde di lunghezza d'onda selezionata.



Capiamo bene quindi che, mentre all'esterno — dove lo spazio è infinitamente esteso — sono presenti fotoni virtuali di qualunque lunghezza d'onda (energia), nello spazio tra i due specchi vengono generati solo fotoni di lunghezza d'onda (energia) opportuna. Si crea così lo squilibrio descritto più sopra che genera la forza di Casimir.

- Il lavoro di tesi è stato organizzato in questo modo:
  1. Nel primo capitolo si tenterà di fornire le motivazioni che hanno portato alla nascita del concetto di energia di punto zero, ossia il più basso livello energetico possibile in un sistema, ripercorrendo lo sviluppo storico e prendendo in analisi il lavoro svolto da Planck sul problema del corpo nero.

<sup>3</sup>Le nostre piastre metalliche (conduttori ideali) si comportano schematicamente come degli specchi per i fotoni.

2. Nel secondo capitolo dimostreremo la forte analogia tra un insieme di oscillatori armonici e il campo elettromagnetico sottoposto a condizione periodiche al bordo; in particolare considereremo il caso di una cavità con pareti metalliche scariche e perfettamente conduttrici e risolveremo le corrispondenti equazioni differenziali per il potenziale vettore.
3. Nel terzo capitolo affronteremo più in dettaglio il calcolo che porta all'espressione della forza di Casimir utilizzando un approccio che non prevede in maniera diretta la quantizzazione del campo elettromagnetico, bensì sfrutteremo lo spettro energetico di un oscillatore armonico quantistico legandolo agli oscillatori che schematizzano il comportamento della cavità. Successivamente faremo tendere a infinito due delle tre facce della cavità per porci nella situazione analizzata da Casimir e, introducendo opportuni artifici matematici, arriveremo al risultato atteso.
4. Nel capitolo conclusivo descriveremo in breve alcuni degli esperimenti più importanti che hanno confermato l'esistenza della forza di Casimir. In particolare discuteremo del primo tentativo di misurazione eseguito da Sparnaay, che portò a risultati inconcludenti, per poi passare alla prima prova sperimentale in buon accordo con la teoria ottenuta da Lamoreaux, e, infine, parleremo dell'esperimento eseguito dal gruppo di ricerca italiano guidato da Bressi che, ad oggi, è l'unico esperimento che abbia riprodotto fedelmente la configurazione delle due piastre parallele. Per terminare accenneremo al problema della costante cosmologica, intimamente collegato all'energia di punto zero dei campi quantistici.

# Capitolo 1

## L'energia di punto zero

### 1.1 Il problema del corpo nero

Alla fine del XIX secolo, il problema del corpo nero mise in luce i limiti della fisica classica e pose le basi per la rivoluzione quantistica. Ciò che è meno noto in letteratura, invece, è che la stessa teoria del corpo nero conduceva al concetto innovativo di energia di punto zero, che più tardi sarebbe comparso come naturale conseguenza della formulazione matematica della meccanica quantistica.

Nel 1860 Kirchhoff derivò una relazione generale tra lo spettro  $\rho(\lambda, T)$  emesso da un generico corpo in esame e la sua assorbanza  $a(\lambda, T)$  a una fissata temperatura<sup>1</sup>: il rapporto  $\rho(\lambda, T)/a(\lambda, T)$  per una data lunghezza d'onda è lo stesso per tutti i corpi a temperatura fissata T, e definisce una funzione universale  $F(\lambda, T)$ . Un *corpo nero* ideale ha un'assorbanza unitaria per ogni  $\lambda$  [1]; ciò, ovviamente, implica che stiamo considerando un corpo in grado di assorbire totalmente la radiazione incidente.  $F(\lambda, T)$  caratterizza, quindi, lo spettro di un corpo nero a lunghezza d'onda  $\lambda$  e temperatura T fissata. Il problema per gli scienziati dell'epoca era trovare questa funzione universale.

Un importante passo in avanti avvenne nel 1884 grazie a Boltzmann; utilizzando la teoria elettromagnetica di Maxwell arrivò al seguente risultato: una radiazione isotropa esercita su una superficie perfettamente riflettente una pressione  $u/3$ , dove  $u$  rappresenta la densità energetica della radiazione. Successivamente considerò la radiazione di corpo nero confinata in un cilindro di volume  $V$ , in cui l'estremità superiore fosse formata da un pistone perfettamente riflettente. La pressione di radiazione sul pistone aumenta il volume di una quantità  $dV$ , e, per mantenere

---

<sup>1</sup>Lo spettro  $\rho(\lambda, T)$  è una funzione che, calcolata per un certo valore  $\bar{\lambda}$  di  $\lambda$  e moltiplicata per  $d\lambda$ , fornisce la quantità di energia che il corpo irraggia a una data temperatura per unità di superficie, unità di tempo e nell'intervallo di lunghezze d'onda compreso tra  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\lambda} + d\lambda$ . [1]

Per assorbanza si intende il rapporto tra l'intensità della radiazione assorbita dal corpo entro un certo angolo di incidenza e l'intensità della radiazione incidente:  $a(\lambda, \theta, T) = I_A/I$ . L'assorbanza considerata sopra è quella integrata su tutto l'angolo solido  $\Omega$  ( $a(\lambda, T) = \int a(\lambda, \theta, T)d\Omega$ ).

costante la temperatura, occorre aggiungere una quantità di calore pari a

$$dQ = dU + PdV = d(uV) + \frac{1}{3}udV = Vdu + \frac{4}{3}udV \quad (1.1.1)$$

in accordo al primo principio della termodinamica. La legge di Kirchoff implica che la densità energetica  $u$  è una funzione solo di  $T$  per tutte le lunghezze d'onda fissate, quindi

$$dQ = V \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3}udV. \quad (1.1.2)$$

All'espansione del cilindro è associato un aumento dell'entropia del sistema:

$$dS = \frac{1}{T}dQ = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV, \quad (1.1.3)$$

che, per la seconda legge della termodinamica, è un differenziale esatto. Quindi, possiamo scrivere

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} \quad (1.1.4)$$

e

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \frac{d}{dT} \left( \frac{u}{T} \right), \quad (1.1.5)$$

da cui segue che  $du/dT = 4u/T$ ; risolvendo questa semplice equazione differenziale si ottiene la *legge di Stefan-Boltzmann*:

$$u = bT^4, \quad (1.1.6)$$

dove  $b$  rappresenta una costante universale. Stefan aveva infatti in precedenza suggerito una tale relazione dall'analisi dei dati sperimentali.

Il problema nacque quando ci si accorse che la legge di Stefan-Boltzmann era in conflitto con i modelli elementari di equilibrio tra radiazione e materia della fisica classica [9]. Consideriamo il modello classico di atomo visto come un oscillatore, in cui si assume che un elettrone sia legato da una forza di richiamo elastica. Se  $\rho(\nu)d\nu$  denota l'energia per unità di volume della radiazione nell'intervallo di frequenza  $[\nu, \nu + d\nu]$ , allora si dimostra che la rapidità con cui l'atomo assorbe energia dal campo elettromagnetico è data dall'equazione

$$\dot{W}_A = \frac{\pi e^2}{3m} \rho(\nu_0), \quad (1.1.7)$$

dove  $W_A$  è l'energia dell'elettrone,  $m$  ed  $e$  la sua massa e la sua carica, rispettivamente, infine  $\nu_0$  è la frequenza naturale dell'oscillazione dell'elettrone nell'atomo. Dall'elettromagnetismo classico è noto che un elettrone accelerato irraggia energia elettromagnetica data dalla formula di Larmor:

$$\dot{W}_{EM} = \frac{2e^2 a^2}{3c^3}, \quad (1.1.8)$$

dove  $a$  è l'accelerazione dell'elettrone. Per un'oscillazione a frequenza  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ , l'accelerazione la scriviamo come  $a = -\omega_0^2 x$ , e la potenza emessa la riscriviamo quindi come

$$\dot{W}_{EM} = \left( \frac{32\pi^4 e^2 \nu_0^4}{3c^3} \right) x^2, \quad (1.1.9)$$

in cui  $x$  rappresenta lo spostamento dell'elettrone dalla sua posizione di equilibrio. Per il teorema del viriale della meccanica classica<sup>2</sup>, l'energia potenziale media  $\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$  dell'oscillatore (l'elettrone), il cui moto è schematizzato come unidimensionale, è uguale all'energia cinetica media, e la loro somma è uguale all'energia totale  $U$  dell'oscillatore. In uno stato di equilibrio tra radiazione e materia, inoltre, la quantità di energia assorbita per unità di tempo dovrebbe essere uguale a quella emessa, allora, uguagliando la (1.1.7) e la (1.1.9), si ottiene

$$\rho(\nu_0) = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} (m\omega_0^2 x^2) = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3} U, \quad (1.1.10)$$

o più in generale per un corpo nero che assorbe a tutte le frequenze  $\nu$ :

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U. \quad (1.1.11)$$

Infine, il teorema classico di equipartizione dell'energia della meccanica statistica richiede che il valore medio di  $U$  in equilibrio termico sia  $kT$ , con  $k$  costante di Boltzmann; in questo modo la densità spettrale di energia della radiazione termica diventa

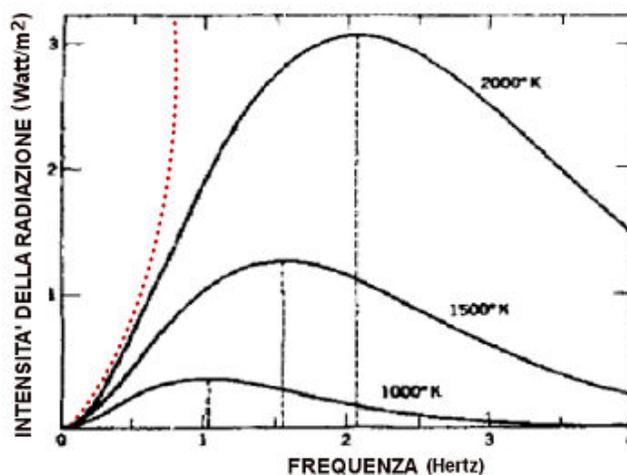
$$\rho(\nu) = \left( \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \right) kT. \quad (\text{distribuzione di Rayleigh - Jeans}) \quad (1.1.12)$$

Se provassimo a calcolare l'energia per unità di volume del campo elettromagnetico  $u = \int_0^\infty \rho(\nu) d\nu$  con la  $\rho(\nu)$  ottenuta sopra, ci accorgeremo immediatamente che essa viola la legge di Stefan-Boltzmann, ma non solo: l'integrale diverge! I fisici dell'epoca chiamarono tale circostanza *catastrofe ultravioletta*; ecco che iniziò la crisi della fisica classica.

Sperimentalmente, all'epoca, era già noto l'andamento dello spettro di un corpo nero:

---

<sup>2</sup>Il teorema del viriale afferma che in un sistema di  $N$  particelle che si muovono in una regione limitata dello spazio, la cui energia cinetica totale sia  $T$ , vale la relazione  $2 \langle T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle$ , dove le parentesi indicano la media temporale ed  $\mathbf{F}_k$  rappresenta la forza che agisce sulla  $k$ -esima particella, situata nella posizione  $\mathbf{r}_k$ . Se l'energia potenziale del sistema è una funzione omogenea di grado  $n$  delle coordinate, ovvero della forma  $U_{pot}(r) = \alpha r^n$ , cioè proporzionale a una potenza  $n$  della distanza media  $r$  tra le particelle, allora il teorema assume la forma  $2 \langle T \rangle = n \langle U_{pot} \rangle$ , dove l'energia potenziale totale media è la somma dell'energia potenziale tra ogni coppia di particelle. Nel nostro caso, per l'energia potenziale elastica  $n=2$ .



Nel grafico in figura, la linea rossa tratteggiata rappresenta il risultato ottenuto da Rayleigh e Jeans: l'andamento teorico riesce ad approssimare quello sperimentale solo per basse frequenze.

L'equazione (1.1.11) fu derivata anche da Planck e, come vedremo, ha giocato un ruolo molto importante nel suo lavoro sul problema del corpo nero.

L'equazione (1.1.12) per la densità spettrale di energia della radiazione di un corpo nero fu originariamente dedotta in una maniera meno esplicita da Rayleigh nel 1900. Sebbene la derivazione appena introdotta potrebbe essere criticata a causa della sua dipendenza dal particolare modello di elettrone atomico, si verifica che, anche utilizzando un metodo più generale, si giunge allo stesso risultato. In particolare, riassumendo il discorso, un modo di oscillazione del campo elettromagnetico si schematizza con un oscillatore armonico che, sempre per il teorema classico di equipartizione, ha un'energia media  $kT$  all'equilibrio termico. Poichè il numero di modi di oscillazione per unità di volume nell'intervallo di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$  è  $\left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right) d\nu$ , allora l'energia elettromagnetica per unità di volume in questo intervallo di frequenze dovrebbe essere  $\rho(\nu)d\nu = \left(\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\right) (kT)d\nu$ , analoga alla legge ricavata in precedenza sebbene, in questo caso, non viene utilizzato alcun modello in particolare.

Da questa prospettiva, il fallimento della teoria classica, secondo Kelvin e Rayleigh, doveva trovarsi nel teorema classico di equipartizione dell'energia.

E' bene sottolineare un altro risultato classico ottenuto da Wien nel 1893. Seguendo il modello di Boltzmann della radiazione contenuta in un cilindro con un pistone, Wien incluse nel suo ragionamento lo spostamento Doppler della radiazione riflessa dal pistone in movimento; ciò permetteva lo scambio di energia radiante tra diverse frequenze. Il suo lavoro dimostrò che la densità spettrale di energia doveva seguire la forma generale

$$\rho(\nu) = \nu^3 \phi_1(\nu/T) \quad (\text{legge dello spostamento di Wien}) \quad (1.1.13)$$

o, in termini della lunghezza d'onda,

$$\rho(\lambda) = \rho(\nu) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \lambda^{-5} \phi_2(\lambda T) \quad (\text{legge dello spostamento di Wien}) \quad (1.1.14)$$

dove  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono funzioni generiche di cui sono note solo le dipendenze dalle variabili indipendenti<sup>3</sup>. La distribuzione di Rayleigh-Jeans obbedisce ovviamente alla legge di Wien. Il motivo del nome «legge dello spostamento» è dovuto al fatto che, sperimentalmente, si notò che, graficando lo spettro in termini della lunghezza d'onda, il grafico variava se la temperatura veniva cambiata; in particolare la posizione del massimo era «shiftata» (un comportamento analogo lo si può notare anche nel grafico inserito sopra, sebbene esso sia espresso in termini della frequenza). In questo modo si trovò che il prodotto della temperatura e della lunghezza d'onda corrispondente al massimo di emissione era costante:  $\lambda_{max}T = const.$

Pochi anni più tardi lo stesso Wien presentò argomenti a supporto della distribuzione

$$\rho(\lambda) = \alpha \lambda^{-5} e^{-\beta/kT}, \quad (1.1.15)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti. Una funzione simile, con il fattore  $\lambda^{-5}$  rimpiazzato da  $\lambda^{-\gamma}$ , era proprio stata proposta da Paschen come fit per i suoi dati sperimentali: l'interpolazione indicava che  $\gamma$  era compreso tra 5 e 6, e ulteriori misure dimostrarono che  $\gamma$  era praticamente 5, in accordo alla legge di Wien. Gli argomenti a supporto dell'equazione (1.1.15) erano per lo più motivati dal desiderio di riuscire a giungere al risultato sperato piuttosto che da motivazioni di natura fisica. In ogni caso, la distribuzione di Wien avrebbe presto trovato una provenienza più sicura dal punto di vista teorico grazie al lavoro di Planck.

## 1.2 La prima teoria di Planck

Dato che Planck era un vero esperto in termodinamica, non sorprende che il suo lavoro sul corpo nero enfatizzava il concetto di entropia. In una serie di articoli della fine del 1890, Planck derivò la distribuzione di Wien da considerazioni termodinamiche aggiungendo come assunzione che l'entropia di un insieme di radiatori dipende solo dalla loro energia totale [9]. Un importante risultato fu la seguente relazione tra l'entropia  $S$  e l'energia media  $U$  di un radiatore elementare (che per i nostri scopi rappresenta una molecola) in equilibrio termico con la radiazione a temperatura  $T$ :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{A}{U}, \quad (1.2.1)$$

---

<sup>3</sup>L'equazione (1.1.14) si ricava eseguendo una semplice conversione [2]: poichè è immediato che debbano valere le relazioni  $\rho(\nu)d\nu = \rho(\lambda)d\lambda$  e  $\lambda\nu = c$ , differenziando quest'ultima e considerando i moduli delle variazioni si ottiene  $\left| \frac{d\nu}{\nu} \right| = \left| \frac{d\lambda}{\lambda} \right|$ . Utilizzando in  $\rho(\nu)d\nu$  l'espressione data dalla (1.1.13) e utilizzando le relazioni appena descritte, si ricava:  $\rho(\lambda) = \frac{c^4}{\lambda^5} \phi_1\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$ , che possiamo riscrivere nella forma (1.1.14).

dove  $A$  è una costante per un dato radiatore. Da questa equazione e dalla relazione generale della termodinamica  $\frac{\partial S}{\partial U} = 1/T$ , che riassume praticamente il primo principio della termodinamica con l'assunzione fatta da Planck, segue che

$$U = Be^{-1/AT}, \quad (1.2.2)$$

dove  $B$  è un'altra costante che, come  $A$ , può dipendere dalla frequenza di un dato radiatore. Questo risultato, unito con la (1.1.11), fornisce la seguente densità spettrale di energia

$$\rho(\nu) = f(\nu)e^{-1/AT}, \quad (1.2.3)$$

dove  $f(\nu)$  è una qualche funzione di  $\nu$ . La legge di Wien implica che  $f(\nu)$  e  $A$  sono proporzionali, rispettivamente, a  $\nu^3$  e  $\nu^{-1}$ , e quindi

$$\rho(\nu) = C\nu^3 e^{-D\nu/T} \quad (1.2.4)$$

oppure

$$\rho(\lambda) = \alpha\lambda^{-5} e^{-\beta/\lambda T}, \quad (1.2.5)$$

con  $C$ ,  $D$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  costanti; la (1.2.5) rappresenta proprio la distribuzione di Wien. La distribuzione di Wien, comunque, si mostrò ben presto limitata quando gli esperimenti si estesero a lunghezze d'onda più alte. Nel febbraio del 1900 gli scienziati Lummer e Pringsheim ottennero dati che deviavano dalla distribuzione teorica di Wien per il 40-50% per l'unghezze d'onda comprese tra i 12 e i 18  $\mu\text{m}$ . Fu grazie al lavoro del amico Rubens che Planck ottenne la sua formula per la densità spettrale di energia della radiazione termica. In particolare, i dati indicavano che  $\rho(\nu)$  fosse proporzionale alla temperatura  $T$  per piccoli valori di  $\nu$  e grandi  $T$ . Planck trovò una formula con quel comportamento a piccoli  $\nu$  e che approssimava la distribuzione di Wien per grandi  $\nu$ .

In un articolo consegnato a un meeting del 19 ottobre dello stesso anno lo scienziato tedesco presentò la sua formula e fornì alcune giustificazioni del suo ragionamento. Per piccoli  $\nu$  e grandi  $T$ , dal risultato sperimentale  $\rho(\nu) \propto T$  e dall'equazione (1.1.11) segue che  $U \propto T$  e quindi, poichè  $\frac{\partial S}{\partial U} = 1/T$ , allora  $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \propto U^{-2}$  e  $S \propto \log U$ . D'altra parte, l'equazione (1.2.1) porta alla distribuzione di Wien, che ha la forma corretta per grandi  $\nu$  e piccoli  $T$ . Planck propose l'interpolazione

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = -\frac{A}{U(B+U)} \quad (A, B \text{ costanti}). \quad (1.2.6)$$

Secondo Planck, l'equazione (1.2.6) «è di gran lunga la più semplice di tutte le espressioni che rende  $S$  una funzione logaritmica di  $U$  (condizione che suggerisce la teoria della probabilità) e che inoltre coincide con la legge di Wien per piccoli valori di  $U$ .» Usando ancora la relazione  $\frac{\partial S}{\partial U} = 1/T$ , l'equazione (1.1.11), e la legge

di Wien, si ottiene dalla (1.2.6) la densità spettrale di energia<sup>4</sup>

$$\rho(\lambda) = \frac{\alpha\lambda^{-5}}{e^{\beta/\lambda T} - 1} \quad (\alpha, \beta \text{ costanti}). \quad (1.2.7)$$

Questa formula si dimostrò essere in accordo con tutti i dati esistenti. Per fornire un «reale significato fisico», Planck iniziò quelle che lui descrisse più tardi come «alcune delle settimane di lavoro più faticose della mia vita.» Il culmine di quel lavoro fu la nascita dei concetti fondanti della teoria dei quanti.

Il ragionamento di Planck può essere riassunto in questo modo. Si considerino  $N$  radiatori di frequenza  $\nu$  ed energia totale  $U_N = NU = P\epsilon$ , dove  $P$  è un intero grande ed  $\epsilon$  è una certa quantità finita di energia. Scriviamo l'entropia del sistema utilizzando la sua definizione statistica:  $S_N = NS = k \log W_N$ , dove  $W_N$  è il numero di modi in cui i  $P$  elementi di energia possono essere distribuiti tra gli  $N$  radiatori e  $k$  è la costante di Boltzmann. Se  $N = P = 2$ , per esempio, allora le differenti partizioni di energia tra i due radiatori sono  $(2\epsilon, 0)$ ,  $(\epsilon, \epsilon)$  e  $(0, 2\epsilon)$  se gli elementi di energia sono considerati indistinguibili. Sotto questa forte assunzione, ovviamente in contrasto con le idee classiche, si ha, in generale,

$$W_N = \frac{(N-1+P)!}{P!(N-1)!}, \quad (1.2.8)$$

che, come ci insegna il calcolo combinatorio, rappresenta in pratica il numero di modi in cui è possibile collocare  $P$  particelle indistinguibili in  $N$  differenti scatole. In questo modo, usando l'approssimazione di Stirling ( $\log M! \simeq M(\log M - 1)$ , per  $M$  grandi) e considerando  $N, P \gg 1$ , l'entropia diventa

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{N} \log \frac{(N-1+P)!}{P!(N-1)!} \\ &\simeq k \left[ \left(1 + \frac{P}{N}\right) \log \left(1 + \frac{P}{N}\right) - \frac{P}{N} \log \frac{P}{N} \right] \\ &= k \left[ \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) \log \left(1 + \frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} \log \frac{U}{\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Quindi

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} = \frac{k}{\epsilon} \log \left(1 + \frac{\epsilon}{U}\right), \quad (1.2.10)$$

che quindi implica

$$U = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (1.2.11)$$

<sup>4</sup>Il calcolo si imposta in questo modo:  $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{A}{U(B+U)} \Rightarrow -\frac{1}{A} \partial \left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\partial U}{U(B+U)}$ , risolvendo si ha:  $\frac{1}{B} \log \frac{U}{U+B} = -\frac{1}{AT} \Rightarrow U = \frac{Be^{-B/AT}}{1 - e^{-B/AT}}$ ; in questo modo otteniamo l'espressione della densità spettrale  $\rho(\nu) = f(\nu) \frac{e^{-B/AT}}{1 - e^{-B/AT}}$ , e sfruttando la legge di Wien  $\rho(\nu) = \frac{C\nu^3}{e^{\frac{D}{T\nu}} - 1}$ , esprimibile in termini della lunghezza d'onda come nella (1.2.7).

per l'energia media di ogni radiatore. L'eccellente accordo tra la (1.2.7) e i dati sperimentali, insieme all'equazione (1.1.11), suggeriscono che  $\epsilon$  sia direttamente proporzionale alla frequenza  $\nu$  dell'oscillatore:

$$\epsilon = h\nu. \quad (1.2.12)$$

Quindi

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (1.2.13)$$

e, dalla (1.1.11), si arriva all'importante risultato

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (\text{Spettro di Planck}) \quad (1.2.14)$$

per la densità spettrale di energia del corpo nero. L'espressione (1.2.9) soddisfa l'equazione (1.2.6) con  $A = k$ ,  $B = \epsilon$ . Dopo aver ottenuto la (1.2.9), si è quindi condotti alla forma (1.2.7) per lo spettro di energia in termini della lunghezza d'onda.

Il grande successo di Planck fu quello di aver ottenuto un'espressione che si accordava molto bene con i dati sperimentali ma che, tuttavia, lui stesso definì come «un atto di disperazione» per le assunzioni fatte per ricavarla. In particolare, un aspetto di questo disperato atto era il modo con cui Planck contò il numero di modi in cui i  $P$  elementi di energia potessero essere distribuiti tra gli  $N$  radiatori. La sua procedura di conteggio era in totale disaccordo con i metodi della meccanica statistica classica poichè considerava gli elementi di energia come fondamentalmente indistinguibili. In un certo senso, Planck stava seguendo Boltzmann per quanto riguarda l'equiprobabilità dei modi ma la sua procedura di conteggio era differente: i suoi elementi di energia obbedivano a quella che poi sarebbe stata chiamata statistica di Bose-Einstein. Un altro aspetto rivoluzionario del suo calcolo era il significato fisico attribuito agli «elementi di energia» di grandezza  $\epsilon$  (battezzati successivamente come quanti di energia), e la relazione  $\epsilon = h\nu$  tra l'energia e la frequenza dell'oscillatore materiale. Anche Boltzmann impiegò «elementi di energia» nel suo conteggio, tuttavia, nei suoi calcoli  $\epsilon$  non aveva un particolare significato fisico infatti, veniva alla fine posto uguale a zero una volta ottenuta la formula per  $W_N$ . Se Planck avesse preso il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  nell'equazione (1.2.10), allora  $\frac{\partial S}{\partial U} \rightarrow k/U$  e  $\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} \rightarrow -k/U^2$ , che avrebbero condotto al risultato ottenuto da Rayleigh-Jeans. Nella derivazione dello spettro di Planck era inevitabile l'assunzione della quantizzazione dell'energia.

Questo è il panorama tradizionale dell'innovazione di Planck. Fino al 1905 la sua formula era vista come poco più che una superba interpolazione dei dati sperimentali. Il suo vero significato iniziò a essere apprezzato solo quando si capì che la legge di Rayleigh-Jeans era un'inevitabile conseguenza della fisica classica associata al teorema di equipartizione, e che quindi gli esperimenti sul corpo nero avevano evidenziato un fallimento fondamentale della nota teoria classica.

E' importante, a questo punto, menzionare una circostanza importante collegata

all'energia di punto zero che fu notata da Einstein e Stern nel 1913. Si consideri il limite classico  $kT \gg h\nu$  nell'espressione (1.2.13) associata all'energia media di un oscillatore in equilibrio termico con la radiazione; eseguendo dei semplici sviluppi di Taylor si ha:

$$\begin{aligned} U &= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \simeq \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 - 1} \\ &= \frac{kT}{1 + \frac{1}{2} \frac{h\nu}{kT}} \simeq kT - \frac{1}{2} h\nu. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Quindi  $U$  contiene una correzione al primo ordine indipendente dalla temperatura; notiamo che  $kT$  è proprio l'energia predetta dal teorema classico di equipartizione. Se aggiungiamo all'equazione generica di  $U$  la correzione indipendente dalla temperatura:

$$U + \frac{1}{2} h\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{1}{2} h\nu, \quad (1.2.16)$$

notiamo che tale espressione non possiede una correzione al primo ordine indipendente dalla temperatura nel limite classico. Proprio per questo motivo, nella «seconda teoria» di Planck,  $U$  fu rimpiazzata da  $U + \frac{1}{2} h\nu$ .

### 1.3 L'energia di punto zero di Planck

E' stato già detto che ci vollero parecchi anni affinché il profondo significato della distribuzione di Planck venisse apprezzato. Lo stesso Planck non era soddisfatto con gran parte della teoria che aveva dovuto introdurre ad hoc per la derivazione dello spettro, e per molti anni avanzò ipotesi alternative che potessero portare allo stesso risultato.

Nel 1912 Planck pubblicò la sua «seconda teoria» [9]. Assumiamo che l'assorbimento della radiazione proceda secondo la teoria classica, mentre l'emissione della radiazione si verifichi in maniera discontinua con quanti discreti di energia. Supponiamo che un oscillatore possa emettere solo dopo aver assorbito in maniera continua un'energia  $h\nu$ . Sia  $P_n$  la probabilità che l'oscillatore abbia un'energia compresa tra  $(n-1)h\nu$  e  $nh\nu$ . Quando la sua energia raggiunge  $nh\nu$  dopo l'assorbimento della radiazione, c'è una probabilità  $p$  che l'oscillatore perda tutta la sua energia sottoforma di radiazione, e una probabilità  $1-p$  che continui ad assorbire senza emissione. In questo modo  $P_2 = P_1(1-p)$ ,  $P_3 = P_2(1-p) = P_1(1-p)^2, \dots$ ,  $P_n = P_1(1-p)^{n-1}$ , e, come condizione di normalizzazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_1(1-p)^{n-1} = P_1/p; \quad (1.3.1)$$

dove nell'ultimo passaggio si è considerato il fatto che si tratta di una serie geometrica sicuramente convergente in quanto  $0 < (1-p) < 1$ . Dalla (1.3.1) ricaviamo che  $P_1 = p$  rappresenta la probabilità che l'oscillatore abbia un'energia compresa

tra 0 e  $h\nu$ ;  $P_2 = p(p-1)$  rappresenta, invece, la probabilità che l'oscillatore abbia energia compresa tra  $h\nu$  e  $2h\nu$ ; infine  $P_n = p(1-p)^{n-1}$  rappresenta la probabilità che l'energia sia compresa tra  $(n-1)h\nu$  e  $nh\nu$ . Seguendo i procedimenti di Boltzmann, Planck definisce l'entropia dell'oscillatore come

$$\begin{aligned} S &= -k \sum_{n=1}^{\infty} P_n \log P_n = -k \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \log [p(1-p)^{n-1}] \\ &= -k \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \log p - k \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} (n-1) \log(1-p); \end{aligned}$$

notiamo che la prima serie è una serie geometrica convergente che sappiamo calcolare, mentre per risolvere la seconda usiamo la seguente identità nota in analisi:  $\sum_{i=1}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ ; dunque si ottiene dopo qualche semplice passaggio la seguente relazione:

$$S = -k \left[ \frac{1}{p} \log p + \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \log \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \right]. \quad (1.3.2)$$

Planck ora assume che tutte le energie comprese tra  $(n-1)h\nu$  e  $nh\nu$  sono equamente probabili; in questo modo, l'energia media degli oscillatori con energie tra  $(n-1)h\nu$  e  $nh\nu$  diventa  $\frac{1}{2}(n+n-1)h\nu = (n-\frac{1}{2})h\nu$ . Allora, l'energia totale degli oscillatori sarà data dalla somma su tutti gli  $n$ :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( n - \frac{1}{2} \right) h\nu P_n = h\nu \sum_{n=1}^{\infty} \left( n - \frac{1}{2} \right) p(1-p)^{n-1} \\ &= \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) h\nu, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato un ragionamento analogo al calcolo della (1.3.2); la relazione (1.3.3) appena ottenuta implica che  $1/p = U/h\nu + \frac{1}{2}$ . Dalla (1.3.2), quindi, si ha

$$S = k \left[ \left( \frac{U}{h\nu} + \frac{1}{2} \right) \log \left( \frac{U}{h\nu} + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{U}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) \log \left( \frac{U}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (1.3.4)$$

Usando ancora una volta la relazione  $\partial S / \partial U = 1/T$ , si ottiene il risultato ottenuto da Planck nella sua «seconda teoria»:

$$U = \frac{1}{2} h\nu \frac{e^{h\nu/kT} + 1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{1}{2} h\nu. \quad (1.3.5)$$

Questa equazione implica che  $U \neq 0$  quando  $T \rightarrow 0$ : infatti quando ciò accade,  $U \rightarrow \frac{1}{2} h\nu$ . L'equazione di Planck (1.3.5) segnò la nascita del concetto di energia di punto zero.

Per derivare  $\rho(\nu)$  Planck non poteva ricorrere all'equazione  $\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U$ ; infatti,

questa era stata derivata assumendo che i processi di assorbimento ed emissione fossero processi continui. Lo stratagemma che utilizzò fu quello di assumere che il rapporto della probabilità di assorbimento rispetto a quella di emissione della radiazione per un oscillatore fosse proporzionale a  $\rho(\nu)$ :  $(1 - p)/p = C\rho(\nu)$ , allora  $1/p = C\rho(\nu) + 1$ , con  $C$  costante di proporzionalità. Questa assunzione è plausibile poichè, in linea di principio, maggiore è l'intensità della radiazione, più l'assorbimento dovrebbe dominare sull'emissione<sup>5</sup>. Allora, dalla (1.3.3),  $U = [C\rho(\nu) + \frac{1}{2}] h\nu$ ,

$$\Rightarrow \rho(\nu) = \frac{1}{C} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (1.3.6)$$

Per determinare  $C$  Planck richiamò il limite classico, dove si sarebbe potuta applicare la legge di Rayleigh-Jeans: per  $kT \gg h\nu$ ,  $\rho(\nu)$  dovrebbe ridursi alla (1.1.12), che richiede  $1/C = 8\pi h\nu^3/c^3$ , e quindi che

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (1.3.7)$$

E' interessante notare che, nel dedurre  $C$  in quel modo, Planck stava eseguendo implicitamente quello che presto sarebbe stato chiamato il *principio di corrispondenza*. Inoltre, il ragionamento fatto sulla probabilità  $p$  potrebbe essere riguardato come il primo esempio di una transizione di probabilità quantistica.

E' degno di nota che nella seconda teoria di Planck gli oscillatori materiali hanno un'energia di punto zero mentre il campo elettromagnetico ne è privo:  $\rho(\nu) \rightarrow 0$  per  $T \rightarrow 0$ . Se il fisico tedesco avesse semplicemente utilizzato nell'equazione (1.1.11) l'espressione di  $U$  ricavata nella (1.3.5) avrebbe ottenuto una densità spettrale di energia pari a

$$\rho'(\nu) = \rho(\nu) + \frac{4\pi h\nu^3}{c^3} = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{4\pi h\nu^3}{c^3}, \quad (1.3.8)$$

che rappresenta proprio la forma corretta dello spettro secondo il moderno punto di vista dell'elettrodinamica quantistica. Inoltre, nonostante i ragionamenti di Planck non fossero in pieno accordo con i principi della meccanica quantistica, l'energia di punto zero che appare nell'equazione (1.3.5) da lui ricavata è in accordo con la moderna teoria.

Nel 1914 Planck era certo che non ci sarebbero state conseguenze sperimentali associate all'energia di punto zero; sebbene siano dovuti trascorrere più di 80 anni, le sue convinzioni si sono dimostrate errate come hanno confermato gli esperimenti condotti sullo studio dell'effetto Casimir.

<sup>5</sup>Ovviamente Planck non era a conoscenza dell'emissione stimolata!

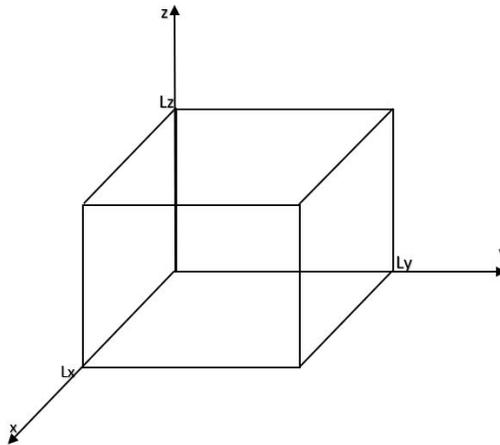
## Capitolo 2

# Campo elettromagnetico in una cavità

### 2.1 Modi di oscillazione del campo

Ci proponiamo di calcolare il campo elettromagnetico all'interno di una cavità vuota e priva di sorgenti le cui pareti siano perfettamente conduttrici. Dopo aver fatto ciò, ricaveremo l'energia associata e mostreremo che essa può essere calcolata come la somma dell'energia di infiniti oscillatori armonici [5].

Supponiamo per semplicità che la cavità abbia la forma di un parallelepipedo i cui lati siano  $L_x, L_y, L_z$  e assumiamo che tre dei suoi spigoli coincidano con gli assi di un sistema cartesiano ortogonale come in figura.



Scriviamo le note equazioni di Maxwell per il problema in esame<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & (2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, \\ (3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & (4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

<sup>1</sup>Per la nostra trattazione utilizzeremo le unità di misura del sistema cgs gaussiano

Introduciamo il potenziale vettore  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , ossia quel campo vettoriale che soddisfa la seguente condizione:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{H}; \quad (2.1.2)$$

poichè  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , allora la (2) è soddisfatta. Nell'equazione (3), utilizzando il potenziale vettore, si ricava

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad (2.1.3)$$

dove  $\phi(\vec{r}, t)$  è il potenziale scalare. Definita la gauge di Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (2.1.4)$$

e in assenza di sorgenti ( $\phi = 0$ ), manipolando le equazioni di Maxwell con l'ausilio del potenziale vettore, si ricava la seguente espressione:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{Equazione di d'Alembert}) \quad (2.1.5)$$

In questo modo il problema è ricondotto alla risoluzione del set di equazioni differenziali alle derivate parziali (2.1.5) sotto appropriate condizioni al bordo. L'ipotesi di pareti perfettamente conduttrici si traduce in quella che su di esse siano verificate in ogni istante le condizioni di equilibrio per le superfici dei conduttori, secondo le quali devono essere nulle le componenti tangenziali del campo elettrico e la componente normale del campo magnetico. Quindi sulla superficie  $\sigma$  della cavità devono valere in ogni istante le seguenti condizioni:

$$\vec{E}_t = 0 \quad H_n = 0. \quad (2.1.6)$$

Esplicitando le (2.1.6) lungo ciascuno degli assi si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \text{asse } x &\longrightarrow \begin{cases} H_x(0, y, z, t) = H_x(L_x, y, z, t) = 0 \\ E_y(0, y, z, t) = E_y(L_x, y, z, t) = 0 \\ E_z(0, y, z, t) = E_z(L_x, y, z, t) = 0 \end{cases} ; \\ \text{asse } y &\longrightarrow \begin{cases} H_y(x, 0, z, t) = H_y(x, L_y, z, t) = 0 \\ E_x(x, 0, z, t) = E_x(x, L_y, z, t) = 0 \\ E_z(x, 0, z, t) = E_z(x, L_y, z, t) = 0 \end{cases} ; \\ \text{asse } z &\longrightarrow \begin{cases} H_z(x, y, 0, t) = H_z(x, y, L_z, t) = 0 \\ E_x(x, y, 0, t) = E_x(x, y, L_z, t) = 0 \\ E_y(x, y, 0, t) = E_y(x, y, L_z, t) = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

In funzione del potenziale vettore (sfruttando l'arbitrarietà a meno di cui questo è ancora definito) queste relazioni possono essere scritte in questo modo:

$$A_x(x, 0, z, t) = A_x(x, L_y, z, t) = A_x(x, y, 0, t) = A_x(x, y, L_z, t) = 0; \quad (2.1.7)$$

$$A_y(0, y, z, t) = A_y(L_x, y, z, t) = A_y(x, y, 0, t) = A_y(x, y, L_z, t) = 0; \quad (2.1.8)$$

$$A_z(0, y, z, t) = A_z(L_x, y, z, t) = A_z(x, 0, z, t) = A_z(x, L_y, z, t) = 0. \quad (2.1.9)$$

Il requisito che sulla superficie  $\sigma$  valga anche la condizione (2.1.4) porta alle ulteriori condizioni

$$\frac{\partial A_x(0, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial A_x(L_x, y, z, t)}{\partial x} = 0; \quad (2.1.10)$$

$$\frac{\partial A_y(x, 0, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial A_y(x, L_y, z, t)}{\partial y} = 0; \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial A_z(x, y, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial A_z(x, y, L_z, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.1.12)$$

Iniziamo con il considerare l'equazione per la componente  $x$  del potenziale vettore:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1.13)$$

e, applicando il metodo della separazione delle variabili, cerchiamo eventuali soluzioni della forma

$$A_x(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \phi(t). \quad (2.1.14)$$

Sostituendo la (2.1.14) nella (2.1.13) e dividendo il risultato per  $u(\vec{r}) \phi(t)$  si ottiene

$$\frac{\nabla^2 u}{u} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\phi(t)} \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2}. \quad (2.1.15)$$

Il primo membro di quest'ultima equazione dipende solo da  $\vec{r}$ , mentre il secondo solo dalla variabile  $t$ . Poichè i due gruppi di variabili sono indipendenti, la (2.1.15) è soddisfatta solo se i due membri risultano identicamente uguali a una costante che per convenienza indichiamo con  $-k^2$  (a priori, tale costante può avere un valore arbitrario). La (2.1.15) si spezza in questo modo in due equazioni:

$$\ddot{\phi} = -k^2 c^2 \phi \quad (2.1.16)$$

e

$$\nabla^2 u = -k^2 u. \quad (2.1.17)$$

L'equazione (2.1.16) è di facile risoluzione; posto  $\omega = kc$ , la soluzione generale la possiamo scrivere in questo modo:

$$\phi(t) = a \cos(\omega t - \beta), \quad (2.1.18)$$

con  $a$  e  $\beta$  costanti arbitrarie.

Per risolvere la (2.1.17) si utilizza nuovamente una separazione delle variabili ponendo

$$u(\vec{r}) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (2.1.19)$$

La (2.1.17) diventa allora

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2. \quad (2.1.20)$$

Analogamente a prima l'equazione è soddisfatta solo se ciascun termine del primo membro della (2.1.20) è identicamente uguale a una costante, che indicheremo rispettivamente con  $-k_x^2$ ,  $-k_y^2$ ,  $-k_z^2$ , la cui somma sia uguale a  $-k^2$ . Le equazioni che si ottengono sono

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 X \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 Y \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 Z \end{cases} \quad (k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad , \quad (2.1.21)$$

avremo quindi

$$\begin{cases} X(x) = b_x \cos k_x x + c_x \sin k_x x \\ Y(y) = b_y \cos k_y y + c_y \sin k_y y \\ Z(z) = b_z \cos k_z z + c_z \sin k_z z \end{cases} . \quad (2.1.22)$$

Le condizioni al bordo (2.1.10) per una  $A_x(\vec{r}, t)$  nella forma (2.1.14) si traducono in

$$\frac{d}{dx} X(0) = \frac{d}{dx} X(L_x) = 0, \quad (2.1.23)$$

e le (2.1.6) in

$$Y(0) = Y(L_y) = 0, \quad (2.1.24)$$

$$Z(0) = Z(L_z) = 0. \quad (2.1.25)$$

Dalla (2.1.23) si ricava

$$\begin{aligned} c_x &= 0, & \sin k_x L_x &= 0 \\ \implies k_x &= n_x \frac{\pi}{L_x} & \text{con } n_x &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

La (2.1.24) e (2.1.25) implicano:

$$\begin{aligned} b_y &= b_z = 0, & \sin k_y L_y &= \sin k_z L_z = 0 \\ \implies k_y &= n_y \frac{\pi}{L_y}, & k_z &= n_z \frac{\pi}{L_z} & \text{con } n_y, n_z &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Ponendo

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \vec{k}_{\vec{n}} = \left( n_x \frac{\pi}{L_x}, n_y \frac{\pi}{L_y}, n_z \frac{\pi}{L_z} \right), \quad V = L_x L_y L_z = \text{volume cavit\`a}, \quad (2.1.28)$$

e sfruttando i risultati appena ottenuti, troviamo che  $u(\vec{r})$  deve essere della forma

$$u_{\vec{n}}(\vec{r}) = A_n \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \sin \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \sin \frac{n_z \pi}{L_z} z, \quad (2.1.29)$$

dove  $A_n$  si ricava imponendo la condizione di normalizzazione<sup>2</sup>:  $\int_V |u_{\vec{n}}(\vec{r})|^2 d\vec{r} =$

$1 \implies A_n = \sqrt{\frac{8}{V}}$ . Quindi

$$u_{\vec{n}}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{8}{V}} \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \text{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z \quad (2.1.30)$$

In conclusione otteniamo le seguenti soluzioni particolari della (2.1.13):

$$\begin{aligned} A_{\vec{n}x}(\vec{r}, t) &= \phi(t) \sqrt{\frac{8}{V}} \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \text{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z \\ &= a \cos(\omega_{\vec{n}} t - \beta) \sqrt{\frac{8}{V}} \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \text{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z, \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

dove

$$\omega_{\vec{n}} = c |\vec{k}_{\vec{n}}|^2 = c \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{L_z}\right)^2}. \quad (2.1.32)$$

La soluzione più generale della (2.1.13) si può ottenere come una sovrapposizione lineare di infinite soluzioni del tipo (2.1.31), cioè:

$$A_x(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \phi_{\vec{n}x}(t) \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \text{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z, \quad (2.1.33)$$

dove

$$\phi_{\vec{n}x}(t) = a_{\vec{n}x} \cos(\omega_{\vec{n}} t - \beta_{\vec{n}x}). \quad (2.1.34)$$

Per convincersi di quest'ultima affermazione basta osservare che al variare di  $n_x, n_y, n_z$  le funzioni  $u_{\vec{n}}(\vec{r})$  definite dalla (2.1.30) descrivono un sistema ortonormale completo nello spazio  $L^2(V)$  delle funzioni a quadrato integrabile nella regione occupata dalla cavità (si tratta di una delle possibili basi che forniscono una generalizzazione al caso tridimensionale dello sviluppo di Fourier in forma trigonometrica) e che conseguentemente  $a_{\vec{n}x}$  e  $\beta_{\vec{n}x}$  possono essere determinate in modo da soddisfare condizioni iniziali del tipo

$$A_x(\vec{r}, 0) = A_{0x}(\vec{r}) \quad \frac{\partial A_x(\vec{r}, 0)}{\partial t} = A_{1x}(\vec{r}). \quad (2.1.35)$$

Con ragionamenti analoghi è possibile dimostrare che le più generali soluzioni delle equazioni per  $A_y$  e  $A_z$  sono date da

$$A_y(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} \phi_{\vec{n}y}(t) \text{sen} \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \cos \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z, \quad (2.1.36)$$

<sup>2</sup>Vogliamo che la nostra soluzione appartenga allo spazio di Hilbert  $L^2(V)$ , ossia lo spazio delle funzioni a quadrato integrabili; questa richiesta ha senso fisicamente poichè la soluzione dell'equazione differenziale dovrà successivamente essere integrata (in particolare il suo modulo quadro) per trovare l'energia associata al campo elettromagnetico della cavità che ovviamente dev'essere una quantità finita.

$$A_z(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \phi_{\vec{n}z}(t) \operatorname{sen} \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \operatorname{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \operatorname{cos} \frac{n_z \pi}{L_z} z, \quad (2.1.37)$$

dove  $\phi_{\vec{n}y}(t)$  e  $\phi_{\vec{n}z}(t)$  sono ancora espressioni del tipo (2.1.34) con lo stesso valore di  $\omega_{\vec{n}}$ ; analogamente possiamo considerare che il vettore  $\vec{\phi}_{\vec{n}}(t) = (\phi_{\vec{n}x}(t), \phi_{\vec{n}y}(t), \phi_{\vec{n}z}(t))$  sia una generica soluzione dell'equazione differenziale

$$\ddot{\vec{\phi}}_{\vec{n}} = -\omega_{\vec{n}}^2 \vec{\phi}_{\vec{n}}. \quad (2.1.38)$$

Imponendo la condizione (2.1.4), si ottiene

$$\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \vec{\phi}_{\vec{n}}(t) = 0 \quad \forall t. \quad (2.1.39)$$

Se introduciamo due versori  $\hat{e}_1(\vec{k})$  ed  $\hat{e}_2(\vec{k})$  che realizzino con  $\vec{k}_{\vec{n}}/|k_{\vec{n}}|$  una terna ortogonale destra

$$\begin{aligned} \vec{k}_{\vec{n}} \cdot \hat{e}_1 &= \vec{k}_{\vec{n}} \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \\ |\hat{e}_1| &= |\hat{e}_2| = 1 \quad \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \vec{k}_{\vec{n}}/|k_{\vec{n}}|, \end{aligned}$$

allora possiamo riscrivere la  $\vec{\phi}_{\vec{n}}(t)$  in questo modo:

$$\vec{\phi}_{\vec{n}}(t) = c\sqrt{4\pi} \left[ q_{\vec{n}1} \hat{e}_1(\vec{k}) + q_{\vec{n}2} \hat{e}_2(\vec{k}) \right], \quad (2.1.40)$$

dove il fattore  $c\sqrt{4\pi}$  è introdotto per ragioni di convenienza per il sistema di unità di misura utilizzato e  $q_{\vec{n}1}$  e  $q_{\vec{n}2}$  sono soluzioni dell'equazione

$$\ddot{q}_{\vec{n}\lambda} = -\omega_{\vec{n}}^2 q_{\vec{n}\lambda} \quad (\lambda = 1, 2), \quad (2.1.41)$$

e quindi espressioni del tipo

$$q_{\vec{n}\lambda}(t) = b_{\vec{n}\lambda} \cos(\omega_{\vec{n}} t - \beta_{\vec{n}\lambda}). \quad (2.1.42)$$

Le soluzioni ricavate in questo modo per  $A_x(\vec{r}, t)$ ,  $A_y(\vec{r}, t)$ ,  $A_z(\vec{r}, t)$ , insieme alla (2.1.40) forniscono la più generale soluzione della (2.1.5) soddisfacente le richieste date dalle condizioni al bordo e dalla gauge imposta. Le componenti monocromatiche  $\vec{A}_{\vec{n}}(\vec{r}, t)$  che compaiono nella soluzione generale, sono discrete e sono discreti i possibili valori della frequenza dati dalla (2.1.32). Questi ultimi valori prendono il nome di *frequenze caratteristiche* (o *modi normali*) del campo elettromagnetico della cavità. In un fissato punto  $\vec{r}$  della cavità, le funzioni  $A_{\vec{n}x}(\vec{r}, t)$ ,  $A_{\vec{n}y}(\vec{r}, t)$  e  $A_{\vec{n}z}(\vec{r}, t)$  hanno andamento sinusoidale col tempo; al variare di  $\vec{r}$  però varia l'ampiezza e non la fase di tali sinusoidi. In particolare per ciascuna grandezza esistono dei piani nodali e dei piani ventrali dove l'ampiezza è rispettivamente sempre nulla e sempre massima. Per questi motivi  $\vec{A}_{\vec{n}x}(\vec{r}, t)$  è anche detta un'onda *stazionaria*. A questo punto, ricordando che  $\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  e tenendo presente la

(2.1.40), abbiamo per le componenti  $E_x$  e  $H_x$  dei campi elettrico e magnetico le espressioni

$$E_x(\vec{r}, t) = -\sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{n}} \dot{q}_{\vec{n}\lambda}(t) e_{\lambda x}(\vec{k}_{\vec{n}}) \cos \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \text{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z, \quad (2.1.43)$$

$$H_x(\vec{r}, t) = c\sqrt{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{8}{V}} \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{n}} q_{\vec{n}\lambda}(t) \left[ \vec{k}_{\vec{n}} \times \hat{e}_{\lambda x}(\vec{k}_{\vec{n}}) \right]_x \text{sen} \frac{n_x \pi}{L_x} x \cdot \text{sen} \frac{n_y \pi}{L_y} y \cdot \text{sen} \frac{n_z \pi}{L_z} z. \quad (2.1.44)$$

Analoghe espressioni si ottengono per le altre componenti dei campi eseguendo semplicemente permutazioni di  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

## 2.2 Il campo come un sistema di oscillatori

Dalla teoria dell'elettromagnetismo [5] è noto che l'energia associata al campo elettromagnetico è

$$E = \frac{1}{8\pi} \int_V d\vec{r} (|\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2); \quad (2.2.1)$$

utilizzando le espressioni ricavate per i due campi<sup>3</sup> si ottiene poi, con semplici calcoli, che

$$E = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2} (q_{\vec{n}\lambda}^2 + \omega_{\vec{n}}^2 q_{\vec{n}\lambda}^2). \quad (2.2.2)$$

Osserviamo che, finchè non è precisata la forma dei vettori  $\vec{\phi}_{\vec{n}}(t)$ , le equazioni (2.1.33), (2.1.36) e (2.1.37) non hanno alcun contenuto dinamico; sono dei semplici sviluppi in serie di Fourier del potenziale vettore  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  a un tempo fissato che tengono solo conto in maniera semplice delle condizioni al contorno a cui  $\vec{A}$  è sottoposto. La (2.1.40) a sua volta tiene in considerazione semplicemente della restrizione (2.1.4). Le equazioni in cui è contenuta l'evoluzione del campo sono le equazioni (2.1.41) e che quindi traducono le originarie equazioni di Maxwell. D'altra parte le (2.1.41) sono formalmente identiche alle equazioni del moto di un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati di massa unitaria e pulsazione  $\omega_{\vec{n}}$ . Secondo la (2.2.2) l'energia del campo è semplicemente la somma delle energie di tali oscillatori. Di conseguenza, il campo elettromagnetico all'interno della cavità equivale a un sistema di infiniti oscillatori armonici, individuati dal vettore  $\vec{n}$  e dall'indice di polarizzazione  $\lambda$ . Ciascuno di tali oscillatori corrisponde a una delle possibili soluzioni stazionarie delle equazioni del campo e ha frequenza identica a quella della frequenza caratteristica della soluzione. Introducendo il momento

$$p_{\vec{n}\lambda} = \dot{q}_{\vec{n}\lambda}, \quad (2.2.3)$$

---

<sup>3</sup>Ricordiamo che  $\int_0^L d\gamma \text{sen}(k_n \gamma) \text{sen}(k_m \gamma) = \int_0^L d\gamma \cos(k_n \gamma) \cos(k_m \gamma) = \frac{1}{2} L \delta_{n,m}$ , dove  $\delta_{n,m}$  è il delta di Kronecker.

l'equazione dell'energia (2.2.2) può essere riscritta in una forma hamiltoniana:

$$E = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2} (p_{\vec{n}\lambda}^2 + \omega_{\vec{n}}^2 q_{\vec{n}\lambda}^2); \quad (2.2.4)$$

tale espressione può essere interpretata come l'hamiltoniana del campo elettromagnetico. Questa equivalenza acquisisce particolare interesse nello studio dell'interazione del campo con la materia all'interno o sulle pareti della cavità. In questo modo gli scambi di energia tra materia e campo possono allora essere descritti come scambi di energia tra materia e oscillatori.

# Capitolo 3

## Formulazione teorica dell'effetto Casimir

### 3.1 L'oscillatore armonico quantistico

L'oscillatore armonico è uno di quei pochi problemi che riveste un ruolo fondamentale in tutti i rami della fisica poichè fornisce un utile modello per schematizzare una grande varietà di fenomeni vibrazionali.

L'operatore hamiltoniano di una particella di massa  $m$  che oscilla con frequenza angolare  $\omega$  sotto l'influenza di un potenziale armonico unidimensionale è

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2, \quad (3.1.1)$$

dove  $\hat{P}$  e  $\hat{X}$  sono gli operatori associati rispettivamente al momento lineare e alla posizione della particella.<sup>1</sup> Il problema che ci proponiamo di risolvere è quello di trovare gli autovalori e gli autovettori di questo operatore [6]. Esistono due differenti approcci che conducono allo stesso risultato. Il primo metodo, chiamato *metodo analitico*, consiste nel risolvere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo  $\hat{H}\varphi = E\varphi$  utilizzando l'hamiltoniano dato dalla (3.1.1). Il secondo metodo, chiamato *metodo algebrico*, utilizza invece particolari operatori noti come *operatori di creazione e distruzione*. Nella nostra presentazione ci soffermeremo in particolare su quest'ultimo metodo per la sua eleganza e per la sua semplicità rispetto alla risoluzione di un'equazione differenziale tutt'altro che banale.

---

<sup>1</sup>Nella rappresentazione delle posizioni, l'operatore del momento lineare della particella è dato da  $\vec{\hat{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}$ , mentre l'operatore di posizione è dato semplicemente da  $\vec{\hat{R}} = \vec{r}$ .

### 3.1.1 Metodo algebrico

Iniziamo riscrivendo l'hamiltoniano in termini di due operatori hermitiani<sup>2</sup> adimensionali  $\hat{p} = \hat{P}/\sqrt{m\hbar\omega}$  e  $\hat{q} = \hat{X}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ :

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2), \quad (3.1.2)$$

e poi introduciamo due operatori non hermitiani adimensionali:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q} - i\hat{p}). \quad (3.1.3)$$

Si noti che

$$\begin{aligned} \hat{a}^+\hat{a} &= \frac{1}{2}(\hat{q} - i\hat{p})(\hat{q} + i\hat{p}) = \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2 + i\hat{q}\hat{p} - i\hat{p}\hat{q}) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) + \frac{i}{2}[\hat{q}, \hat{p}]; \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

usando che  $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ , è immediato verificare che il commutatore tra  $\hat{q}$  e  $\hat{p}$  è

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \left[ \hat{X}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega}}\hat{P} \right] = \frac{1}{\hbar} [\hat{X}, \hat{P}] = i; \quad (3.1.5)$$

quindi

$$\hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) - 1/2 \implies \frac{1}{2}(\hat{q}^2 + \hat{p}^2) = \hat{a}^+\hat{a} + 1/2. \quad (3.1.6)$$

Inserendo l'equazione (3.1.6) nella (3.1.2) otteniamo

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \hat{N} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{con } \hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}, \quad (3.1.7)$$

dove  $\hat{N}$  è detto operatore *numero* ed è chiaramente hermitiano poichè  $\hat{H}$  è hermitiano.

Deriviamo ora il commutatore  $[\hat{a}, \hat{a}^+]$ . Poichè  $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ , si ha  $[\hat{q}, \hat{p}] = \frac{1}{\hbar} [\hat{X}, \hat{P}] = i$ ; quindi

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \frac{1}{2} [\hat{q} + i\hat{p}, \hat{q} - i\hat{p}] = -i[\hat{q}, \hat{p}] = 1. \quad (3.1.8)$$

Si noti che  $\hat{H}$ , scritta in termini dell'operatore numero come nella (3.1.7), commuta con  $\hat{N}$  stesso poichè  $\hat{H}$  è lineare in  $\hat{N}$ . Quindi  $\hat{H}$  e  $\hat{N}$  possono avere una base di autovettori in comune, che indicheremo con  $|n\rangle$  :

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (3.1.9)$$

---

<sup>2</sup>Un operatore  $\hat{A}$  si dice hermitiano se esso è uguale al suo aggiunto  $\hat{A}^+$ :  $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^*$

e

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle; \quad (3.1.10)$$

gli stati  $|n\rangle$  sono detti autostati energetici. Combinando la (3.1.7) e la (3.1.9), otteniamo lo spettro del nostro operatore hamiltoniano:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (3.1.11)$$

Mostriamo in seguito che  $n$  può essere solo un intero positivo.

Possiamo ora chiarire il significato fisico degli operatori  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$  e  $\hat{N}$ . Per prima cosa, abbiamo bisogno dei due seguenti commutatori che possono essere ricavati usando la (3.1.8) e la (3.1.7):

$$[\hat{a}, \hat{H}] = \hbar\omega\hat{a}, \quad [\hat{a}^+, \hat{H}] = -\hbar\omega\hat{a}^+. \quad (3.1.12)$$

Queste relazioni di commutazione, assieme alla (3.1.9), portano a

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (\hat{a}\hat{H} - \hbar\omega\hat{a})|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle), \quad (3.1.13)$$

$$\hat{H}(\hat{a}^+|n\rangle) = (\hat{a}^+\hat{H} + \hbar\omega\hat{a}^+)|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)(\hat{a}^+|n\rangle). \quad (3.1.14)$$

In questo modo,  $\hat{a}|n\rangle$  e  $\hat{a}^+|n\rangle$  sono autostati di  $\hat{H}$  con autovalori  $(E_n - \hbar\omega)$  e  $(E_n + \hbar\omega)$ , rispettivamente. L'azione di  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^+$  sullo stato  $|n\rangle$  è quella di generare nuovi stati energetici che sono più bassi o più alti di un'unità di  $\hbar\omega$ . Di conseguenza, non sorprende che  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^+$  sono chiamati rispettivamente operatori di creazione e distruzione (anche detti di innalzamento e abbassamento).

Scopriamo ora come gli operatori  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^+$  agiscono sugli autostati  $|n\rangle$ . Iniziamo dicendo che  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^+$  non commutano con  $\hat{N}$ , infatti, usando la (3.1.8) insieme alla relazione generale  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}\hat{C}]\hat{B}$ , si ottiene che

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+; \quad (3.1.15)$$

quindi  $\hat{N}\hat{a} = \hat{a}(\hat{N} - 1)$  e  $\hat{N}\hat{a}^+ = \hat{a}^+(\hat{N} + 1)$ . Questo implica che gli stati  $|n\rangle$  non sono autostati nè di  $\hat{a}$  nè di  $\hat{a}^+$ . Combinando le ultime relazioni ottenute con la (3.1.10), otteniamo

$$\hat{N}(\hat{a}|n\rangle) = \hat{a}(\hat{N} - 1)|n\rangle = (n - 1)(\hat{a}|n\rangle), \quad (3.1.16)$$

$$\hat{N}(\hat{a}^+|n\rangle) = \hat{a}^+(\hat{N} + 1)|n\rangle = (n + 1)(\hat{a}^+|n\rangle). \quad (3.1.17)$$

Queste relazioni rivelano che  $\hat{a}|n\rangle$  e  $\hat{a}^+|n\rangle$  sono autostati di  $\hat{N}$  con autovalori  $(n - 1)$  e  $(n + 1)$ , rispettivamente. Deduciamo che quando  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^+$ ) opera su  $|n\rangle$  diminuisce (aumenta)  $n$  di un'unità. Cioè, l'azione di  $\hat{a}$  su  $|n\rangle$  genera un nuovo

stato  $|n-1\rangle$ , mentre l'azione di  $\hat{a}^+$  su  $|n\rangle$  genera lo stato  $|n+1\rangle$ . Quindi, dalla (3.1.16) possiamo scrivere

$$\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle, \quad (3.1.18)$$

dove  $c_n$  è una costante da determinare richiedendo che gli stati  $|n\rangle$  siano normalizzati per tutti i valori di  $n$ . D'altra parte, dalla (3.1.18) otteniamo

$$(\langle n|\hat{a}^+) \cdot (\hat{a}|n\rangle) = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = |c_n|^2\langle n-1|n-1\rangle = |c_n|^2 \quad (3.1.19)$$

e dalla (3.1.10) otteniamo

$$(\langle n|\hat{a}^+) \cdot (\hat{a}|n\rangle) = \langle n|\hat{a}^+\hat{a}|n\rangle = n\langle n|n\rangle = n. \quad (3.1.20)$$

Combinando queste ultime equazioni si ricava

$$|c_n|^2 = n. \quad (3.1.21)$$

Questo significa che  $n$  non può essere negativo:  $n \geq 0$ . Sostituendo la (3.1.20) nella (3.1.18) concludiamo che

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (3.1.22)$$

Questa equazione mostra che l'applicazione ripetuta dell'operatore  $\hat{a}$  su  $|n\rangle$  genera una sequenza di autovettori  $|n-1\rangle$ ,  $|n-2\rangle$ ,  $|n-3\rangle$ , ecc. Poichè  $n \geq 0$  e poichè  $\hat{a}|0\rangle = 0$ , questa sequenza ha un termine a  $n=0$ ; questo è vero se iniziamo con un valore interno di  $n$ . Ma se iniziassimo con un valore non intero, la sequenza non terminerà; ciò condurrebbe ad autovettori con valori negativi di  $n$ ; ma come abbiamo detto prima, poichè  $n$  non può essere negativo, si conclude che  $n$  deve essere necessariamente un intero non negativo.

Si dimostra facilmente una relazione analoga che coinvolge l'operatore  $\hat{a}^+$  :

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (3.1.23)$$

Questo implica che applicazioni ripetute di  $\hat{a}^+$  su  $|n\rangle$  generano una sequenza infinita di autostati  $|n+1\rangle$ ,  $|n+2\rangle$ ,  $|n+3\rangle$ , ecc. Poichè  $n$  è un intero positivo, lo spettro in energia dell'oscillatore armonico è quindi discreto:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (3.1.24)$$

Notiamo che questo spettro possiede dei livelli energetici che sono egualmente spazati:  $E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ . Questa è la famosa idea di energia «equidistanziata» di Planck - l'energia della radiazione di una carica oscillante (delle pareti interne di una cavità) deve essere emessa in pacchetti (quanti) di energia discreti che sono multipli interi di  $\hbar\omega$  - che, come abbiamo menzionato nel primo capitolo, portò allo sviluppo della meccanica quantistica.

Notiamo un fatto molto rilevante nell'equazione (3.1.24): il più basso autovalore

energetico dell'oscillatore non è zero ma è uguale a  $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ . Questa è chiamata *energia di punto zero* dell'oscillatore che corrisponde a  $n = 0$ . L'energia di punto zero di un sistema legato non può essere nulla altrimenti si violerebbe il principio di indeterminazione di Heisenberg. Ad esempio, in meccanica classica il minimo di energia per l'oscillatore armonico corrisponde a  $x = 0$  e  $p = 0$ ; ossia non ci sono oscillazioni. Questo implicherebbe che potremmo conoscere simultaneamente e con assoluta precisione sia la posizione che il momento lineare della particella del sistema; ciò sarebbe in contrasto con il principio di indeterminazione  $\Delta x \Delta p \sim h$ . Il metodo algebrico può essere utilizzato anche per determinare gli autovettori dell'operatore hamiltoniano. Per prima cosa, usando la (3.1.23), vediamo che i vari autovettori possono essere scritti in termini dello stato fondamentale  $|0\rangle$  in questo modo:

$$\begin{aligned}
 |1\rangle &= \hat{a}^+|0\rangle, \\
 |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}^+|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}(\hat{a}^+)^2|0\rangle, \\
 |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}^+|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}}(\hat{a}^+)^3|0\rangle, \\
 &\vdots \\
 |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}}\hat{a}^+|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle.
 \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Quindi per trovare un qualsiasi autostato  $|n\rangle$  abbiamo semplicemente bisogno di operare  $\hat{a}^+$  su  $|0\rangle$  per  $n$  volte. Notiamo anche che i ket  $|n\rangle$  e  $|n'\rangle$ , corrispondenti a differenti autovalori, devono essere ortogonali:  $\langle n'|n\rangle \simeq \delta_{n,n'}$ , poichè  $\hat{H}$  è hermitiano e nessuno dei suoi autostati è degenere. Inoltre gli stati  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle$ , ecc, sono simultaneamente autostati di  $\hat{H}$  e  $\hat{N}$ ; l'insieme  $\{|n\rangle\}$  costituisce una base ortonormale e completa:

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n,n'}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1. \tag{3.1.26}$$

Chiariamo infine che il metodo algebrico, sebbene sia molto potente e rapido, confina i nostri ragionamenti a vettori di stato che «vivono» in uno spazio di Hilbert astratto; per questo motivo generalmente si sceglie di «proiettare» i nostri autostati in uno spazio fisico, per esempio lo spazio delle posizioni:  $\langle x|n\rangle \equiv \varphi_n(x)$ .

## 3.2 La forza di Casimir

Nel secondo capitolo abbiamo ottenuto che l'energia del campo elettromagnetico all'interno di una cavità con pareti perfettamente conduttrici e non cariche si comporta come un sistema di infiniti oscillatori armonici disaccoppiati di massa unitaria:

$$E = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{n}} \frac{1}{2} (p_{\vec{n}\lambda}^2 + \omega_{\vec{n}}^2 q_{\vec{n}\lambda}^2);$$

tale quantità può essere interpretata come l'hamiltoniana  $H$  del campo elettromagnetico. Dall'analisi condotta sull'oscillatore armonico quantistico sappiamo che il corrispettivo operatore hamiltoniano di  $H$ , ottenuto dal principio di corrispondenza, ammette uno spettro discreto simile a quello dato nella (3.1.24). In questo caso, tuttavia, abbiamo a che fare con una serie di infiniti oscillatori armonici disaccoppiati a cui va aggiunta, inoltre, la somma sull'indice  $\lambda$ . Tenendo in considerazione quanto detto, è possibile a questo punto implementare la (3.1.24) e ottenere, dal punto di vista quantistico, lo spettro energetico del campo elettromagnetico nella cavità :

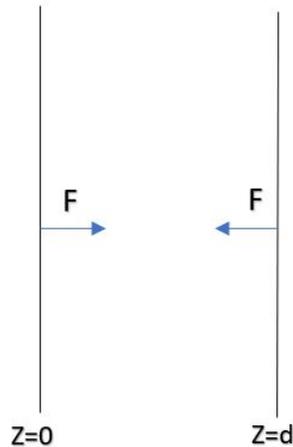
$$E_N = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{\vec{n}} \hbar \omega_{\vec{n}} \left( N_{\vec{n}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.2.1)$$

Notiamo che per  $N = 0$  otteniamo l'energia di punto zero associata al campo elettromagnetico:

$$E_0 = \sum'_{\vec{n}} (2) \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{n}} = \sum'_{n_x, n_y, n_z} \pi \hbar c \left[ \frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2} \right]^{1/2}; \quad (3.2.2)$$

il fattore 2 proviene dal fatto che vi sono due modi di polarizzazione indipendenti, e il primo sopra la sommatoria vuol dire che occorre inserire il fattore  $\frac{1}{2}$  quando uno degli interi  $(n_x, n_y, n_z)$  è nullo per cui si ha un solo modo di polarizzazione indipendente.

Una conseguenza dell'energia di punto zero del campo elettromagnetico è l'esistenza di una forza attrattiva tra due piastre parallele, perfettamente conduttrici e scariche [9]. Per porci in questa situazione, riprendiamo la cavità analizzata nel secondo capitolo e facciamo tendere due delle tre facce a infinito:  $L_x, L_y \rightarrow \infty$ .



Tutto ciò implica che

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L_x} \longrightarrow dk_x = dn_x \frac{\pi}{L_x}, \quad (3.2.3)$$

$$k_y = n_y \frac{\pi}{L_y} \longrightarrow dk_y = dn_y \frac{\pi}{L_y}. \quad (3.2.4)$$

Nella situazione fisica che stiamo analizzando,  $L_x$  e  $L_y$  sono così grandi rispetto a  $L_z = d$  che è lecito rimpiazzare nella (3.2.2) la somma su  $n_x$  e  $n_y$  con un integrale<sup>3</sup>:

$$E_0(d) = \sum'_{\vec{n}} (2) \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{n}} \rightarrow \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \sum'_{n_z} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2} \right)^{1/2}. \quad (3.2.5)$$

E' immediato notare che tale quantità sia infinita; l'energia di punto zero del vuoto è infinita in qualsiasi volume finito.

Se adesso rendiamo anche  $d$  arbitrariamente grande<sup>4</sup>, la somma su  $n_z$  potrebbe essere rimpiazzata da un altro integrale, e l'energia di punto zero diventerebbe

$$E_0(\infty) = \frac{L^2}{\pi^2} (\hbar c) \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}; \quad (3.2.6)$$

notiamo che anche questa quantità risulta infinita.

In questo modo è possibile introdurre l'energia potenziale  $U(d)$  del sistema, cioè l'energia richiesta per portare le piastre dall'infinito alla distanza  $d$ :

$$\begin{aligned} U(d) &= E_0(d) - E_0(\infty) = \\ &= \frac{L^2}{\pi^2} \hbar c \left[ \sum'_{n_z} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left( k_x^2 + k_y^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Sebbene quest'equazione rappresenti la differenza tra due quantità infinite, vedremo che da essa è possibile comunque estrarre un valore finito fisicamente accettabile.

In coordinate polari  $u, \theta$  nel piano  $k_x, k_y$  ( $dk_x dk_y = u du d\theta$ ) abbiamo

$$U(d) = \frac{L^2}{\pi^2} \hbar c \left( \frac{\pi}{2} \right) \left[ \sum'_{n_z} \int_0^\infty du u \left( u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2} \right)^{1/2} \right] \quad (3.2.8)$$

$$- \left( \frac{d}{\pi} \right) \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty du u (u^2 + k_z^2)^{1/2}, \quad (3.2.9)$$

poichè l'intervallo di  $\theta$  è  $[0, \pi/2]$  dato che  $k_x, k_y > 0$ . Introduciamo adesso una funzione di «cutoff»  $f(k) = f([u^2 + k_z^2]^{1/2})$  tale che  $f(k) = 1$  per  $k \ll k_m$  e  $f(k) = 0$  per  $k \gg k_m$ . Fisicamente ci si può convincere della necessità di  $f(k)$  poichè l'assunzione di pareti perfettamente conduttrici viene meno a piccole lunghezze

<sup>3</sup>Per semplicità supporremo che  $L_x = L_y = L$ .

<sup>4</sup>Fisicamente, rendere  $d$  infinita, significa semplicemente allontanare le piastre.

d'onda, in particolare, per lunghezze d'onda piccole comparate con le dimensioni atomiche. Potremmo supporre che  $k_m \sim \frac{1}{a_0}$ , dove  $a_0$  è il raggio di Bohr ( $\sim 0,53$  ångstrom). Quello che stiamo qui assumendo è che l'effetto Casimir è principalmente un effetto a basse frequenze. Inserendo il cutoff nella (3.2.8), si ottiene:

$$U(d) = \frac{L^2}{\pi^2} \hbar c \left( \frac{\pi}{2} \right) \left[ \sum'_{n_z} \int_0^\infty du u \left( u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2} \right)^{1/2} f \left( \left[ u^2 + \frac{n_z^2 \pi^2}{d^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right) - \left( \frac{d}{\pi} \right) \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty du u \left( u^2 + k_z^2 \right)^{1/2} f \left( \left[ u^2 + k_z^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (3.2.10)$$

Definendo delle nuove variabili di integrazione  $x = u^2 d^2 / \pi^2$  e  $\kappa = k_z d / \pi$ , la (3.2.10) diventa

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c}{4\pi} \left( \frac{\pi^3}{d^3} \right) \left[ \sum'_{n_z} \int_0^\infty dx (x + n_z^2)^{1/2} f \left( \frac{\pi}{d} [x + n_z^2]^{\frac{1}{2}} \right) - \int_0^\infty d\kappa \int_0^\infty dx (x + \kappa^2)^{1/2} f \left( \frac{\pi}{d} [x + \kappa^2]^{\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (3.2.11)$$

Riscriviamo il tutto in maniera più "pulita":

$$U(d) = \left( \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} \right) L^2 \left[ \frac{1}{2} F(0) + \sum_{n_z=1}^\infty F(n_z) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) \right], \quad (3.2.12)$$

dove

$$F(\kappa) \equiv \int_0^\infty dx (x + \kappa^2)^{1/2} f \left( \frac{\pi}{d} [x + \kappa^2]^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3.2.13)$$

Sfruttiamo a questo punto un potente risultato ottenuto dall'analisi matematica, ossia la formula di Euler-Maclaurin:

$$\sum_{n_z=1}^\infty F(n_z) - \int_0^\infty d\kappa F(\kappa) = -\frac{1}{12} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) + \dots, \quad (3.2.14)$$

per  $F(\infty) \rightarrow 0$ . Per calcolare la derivata n-esima  $F^{(n)}(0)$  notiamo che

$$F(\kappa) = \int_{\kappa^2}^\infty dt \sqrt{t} f \left( \frac{\pi}{d} \sqrt{t} \right) = - \int_\infty^{\kappa^2} dt \sqrt{t} f \left( \frac{\pi}{d} \sqrt{t} \right) \equiv - \int_\infty^{\kappa^2} dt G(t); \quad (3.2.15)$$

ricordando il teorema fondamentale del calcolo e la derivazione delle funzioni composte<sup>5</sup>, otteniamo infine

$$F'(\kappa) = -2\kappa^2 f \left( \frac{\pi}{d} \kappa \right). \quad (3.2.16)$$

---

<sup>5</sup>  $F(x) = \int_{x_0}^{g(x)} dt f(t) \Rightarrow F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

Quindi  $F'(0) = 0$ ,  $F'''(0) = -4$ , e tutte le derivate di ordine superiore  $F^{(n)}(0)$  le si considerano nulle a patto di assumere che tutte le derivate della funzione di cutoff si annullino per  $\kappa = 0$ . In questo modo  $\sum_{n_z=1}^{\infty} F(n_z) - \int_0^{\infty} d\kappa F(\kappa) = -\frac{1}{12}F(0) - \frac{4}{720}$ , allora

$$U(d) = \left( \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} \right) L^2 \left( -\frac{4}{720} \right) = - \left( \frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} \right) L^2, \quad (3.2.17)$$

che è una quantità finita e indipendente dalla funzione di cutoff. Ricordando che, in generale,  $\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$ ; la forza attrattiva per unità d'area tra le due piastre è quindi

$$F_c(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} \quad (\text{Forza di Casimir}). \quad (3.2.18)$$

I cambiamenti nell'energia infinita di punto zero del vuoto elettromagnetico possono essere finiti e osservabili.

# Capitolo 4

## Conclusioni

### 4.1 Cenni alle verifiche sperimentali

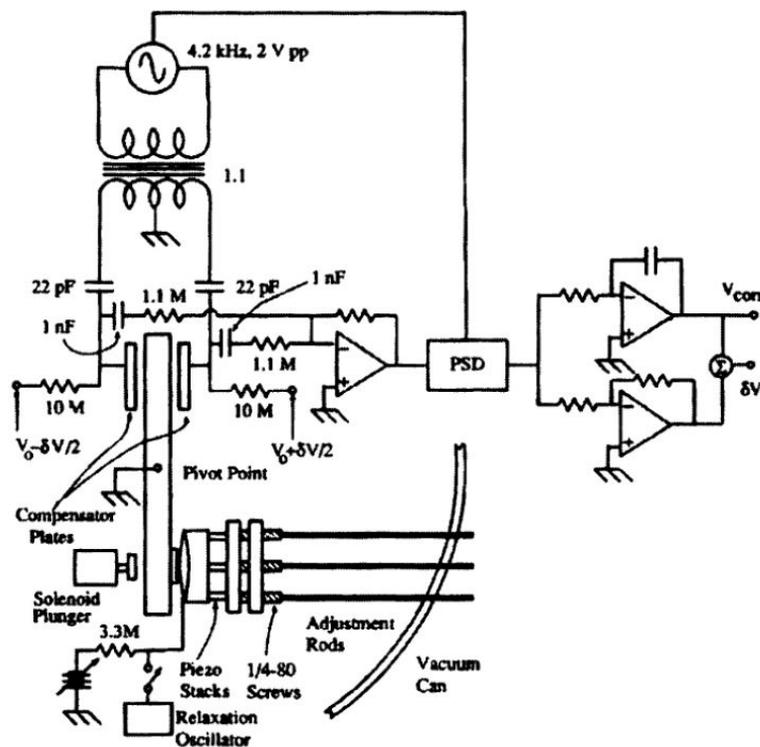
La forza di Casimir è tipicamente molto piccola, anche nel caso di due piastre perfettamente conduttrici. Per esempio, per due piastre di area  $1 \times 1 \text{ cm}^2$  separate da una distanza di  $1 \text{ }\mu\text{m}$ , l'equazione (3.2.17) predice una forza di  $1,3 \times 10^{-7} \text{ N}$ . Questa è comparabile alla forza di Coulomb che agisce su un elettrone in un atomo di idrogeno. Non ci meraviglia, quindi, che sono stati necessari parecchi anni prima di poter realizzare buone misurazioni prive di ambiguità.

Nei primi cinquant'anni dopo la sua formulazione teorica, vennero fatti pochi tentativi per misurare la forza di Casimir. Il primo tentativo rilevante venne eseguito dal fisico olandese Marcus Sparnaay nel 1958 [10]; nel suo esperimento la forza era dedotta dalla deflessione di una molla attaccata tramite un'asta di alluminio a una delle due piastre metalliche. Per una separazione tra le piastre di  $2 - 10 \text{ }\mu\text{m}$ , Sparnaay misurò una forza attrattiva per unità di superficie compresa tra  $1$  e  $4 \times 10^{-18} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2/d^4$ , comparata con  $1,3 \times 10^{-18} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^2/d^4$  calcolata dalla formula della forza di Casimir<sup>1</sup>. Prima dei più recenti lavori, questo esperimento è spesso citato come la prima verifica sperimentale dell'effetto Casimir. Sebbene lo stesso Sparnaay avesse concluso che questa forza osservata «non contraddiceva la predizione teorica», tuttavia non era una prova sufficiente a causa della forte incertezza sui dati sperimentali (pari al 100%). Solo circa 50 anni dopo, nel 1997, l'effetto Casimir fu dimostrato sperimentalmente con un'incertezza tale da confermare le predizioni teoriche grazie all'esperimento guidato da Steven Lamoreaux presso l'università di Washington [10]. Venne utilizzato un pendolo a torsione posto in una camera sotto vuoto. Il pendolo era fatto di un filo di tungsteno con una barretta perpendicolare attaccata a esso. Attaccata alla barretta c'era una lente sferica di silicio di raggio  $R = 2 \text{ cm}$  coperta con dell'oro. La distanza tra la lente e una piastra di quarzo ricoperta anch'essa da una patina d'oro veniva modificata tramite degli attuatori piezoelettrici. La deviazione angolare indotta nel pendolo a torsione dovuta al momento torcente di Casimir veniva usata come

---

<sup>1</sup>1 dyne =  $10^{-5}$ Newton.

segnale di errore in un ciclo di controllo di risposta. Il ciclo di controllo applicava una forza nota di contrasto alla lente per bilanciare il momento torcente. L'uso di una sfera in presenza della piastra permetteva a Lamoreaux di risolvere i problemi di allineamento, tuttavia sorgevano ulteriori problemi. La complicazione sperimentale era che l'intensità della forza veniva ridotta a causa della riduzione dell'area di interazione tra i due corpi. Dal punto di vista teorico, l'uso di una sfera richiede la modifica dell'espressione della forza di Casimir (3.2.17). Nel limite in cui  $d \ll R$ , viene utilizzata una correzione detta *proximity force approximation*: nel caso dell'interazione fra una sfera perfettamente conduttrice e una piastra perfettamente conduttrice,  $F_c = -\frac{\pi^3 R \hbar c}{360 d^3}$ . Riportiamo schematicamente in figura l'apparato sperimentale utilizzato.



La barretta può oscillare attorno al filo di tungsteno che definisce il punto di rotazione (pivot point). L'interazione Casimir si verifica in basso, e la posizione della barretta viene aggiustata dalla forza elettrostatica fornita dalle due piastre di compensazione, insieme alla risposta del ciclo di controllo mostrato. Tramite gli attuatori piezoelettrici si modificava di poco la distanza tra i due corpi e, tramite la forza necessaria a mantenere fisso l'angolo di torsione (data dalle piastre di compensazione), fu determinato che l'intensità della forza di Casimir, in un range compreso tra  $0,6 - 6 \mu\text{m}$ , si accordava al 5% con le previsioni teoriche nel caso di conduttori ideali.

L'unico esperimento recente che ha usato la configurazione originale delle due piastre parallele è stato eseguito dai fisici italiani Giacomo Bressi, Giovanni Carugno,

Roberto Onofrio e Giuseppe Ruoso presso l'università di Padova nel 2002 [8]. Come piastre sono state utilizzate una microleva di silicio e una piastra spessa rigidamente connessa a una base, entrambe coperte da uno strato di cromo. La distanza di separazione veniva aggiustata tramite un motore DC e i piccoli ritocchi venivano eseguiti tramite un trasduttore piezoelettrico lineare attaccato alla base. La calibrazione veniva eseguita usando una forza elettrostatica. Piccole oscillazioni indotte nella base tramite l'applicazione di una tensione sinusoidale al trasduttore piezoelettrico inducevano oscillazioni della microleva attraverso la forza di Casimir. Il moto del risonatore, posto nel vuoto, è stato misurato tramite un interferometro a fibra ottica. Dopo aver sottratto il contributo delle forze elettrostatiche, la variazione di frequenza residua è data da  $\Delta\nu_{expt}^2(d) = \nu^2 - \nu_0^2 = -\alpha \frac{\partial P(d)}{\partial d}$ . In questa formula  $\nu_0 = 138,275 \text{ Hz}$ , e rappresenta la frequenza naturale in assenza della pressione  $P$  di Casimir, mentre  $\alpha = S/(4\pi^2 m_{eff}) \approx 0,0479 \text{ m}^2/\text{Kg}$  (dove  $S$  è l'area delle due piastre, e  $m_{eff}$  la massa effettiva). La variazione di frequenza era collegata al gradiente della pressione di Casimir, quindi, sebbene l'esperimento usasse la configurazione teorica di Casimir, si otteneva una misurazione indiretta della pressione tra le due piastre. I fisici italiani non hanno puntato a ricavare la pressione a partire dal suo gradiente; venne eseguito un fit dei dati sperimentali per  $\Delta\nu_{expt}^2(d)$  rispetto a  $\Delta\nu_{theor}^2(d)$ , calcolato dalla dipendenza teorica della forza di Casimir per unità di superficie tra due piastre metalliche ideali. Riprendendo la (3.2.17),  $F_c(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} = -K_c/d^4$ , si scelse come parametro libero  $K_c$ . Il fit migliore risultò essere  $K_c = (1,22 \pm 0,18) \times 10^{-27} \text{ N} \cdot \text{m}^2$ . Tale risultato è stato quindi comparato con il risultato teorico  $K_c = \pi^2 \hbar c / 240 = 1,3 \times 10^{-27} \text{ N} \cdot \text{m}^2$ . In conclusione, il coefficiente legato alla forza di Casimir è stato calcolato con un livello di precisione del 15%.

## 4.2 L'effetto Casimir e la cosmologia

Come abbiamo avuto modo di notare, l'effetto Casimir è una manifestazione fisicamente osservabile del vuoto quantistico che diventa particolarmente importante a livello nanometrico. Sembra, però, che ci sia un'altra manifestazione del vuoto quantistico su scale cosmologiche [10]. Nella moderna era della cosmologia ci sono evidenze sperimentali a favore di uno strano effetto: in aggiunta alla familiare forza gravitazionale attrattiva della materia esiste una forza repulsiva gravitazionale dovuta a quella che oggi è chiamata *energia oscura* che, insieme a una misteriosa materia, detta *materia oscura*, costituisce la maggior parte dell'energia totale dell'Universo (si pensi che la materia ordinaria costituisce meno del 5% dell'Universo). Matematicamente essa appare nelle equazioni di campo di Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (4.2.1)$$

dove  $g_{\alpha\beta}$  è il tensore metrico,  $R_{\alpha\beta}$  il tensore di curvatura di Ricci,  $R$  la curvatura scalare,  $\Lambda$  rappresenta la costante cosmologica,  $G$  la costante gravitazionale di

Newton e  $T_{\alpha\beta}$  è il tensore energia-impulso. Il tensore  $T_{\alpha\beta}$  è formato dalla densità di energia  $H$ , dalla densità di impulso  $\vec{p}$  e dal tensore degli sforzi  $\sigma$ ; in un sistema di riferimento locale galileiano assume la seguente forma matriciale:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} H & -c\vec{p} \\ -c\vec{p} & \sigma \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

La densità di energia  $H$  contiene la densità della massa a riposo  $\rho c^2$  che normalmente domina la gravità, di gran lunga superiore agli altri contributi del tensore  $T_{\alpha\beta}$ . Si potrebbe "trasformare" la costante cosmologica nell'energia oscura se semplicemente spostassimo il termine  $\Lambda g_{\alpha\beta}$  sul lato destro dell'equazione (4.2.1):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\alpha\beta} - \frac{c^4}{8\pi G} \Lambda g_{\alpha\beta} \right). \quad (4.2.3)$$

Notiamo che la densità di energia ottiene un contributo proporzionale a  $\Lambda$  con un segno opposto rispetto alla densità a riposo; questo significa che stiamo considerando un contributo che porta a una forza gravitazionale repulsiva. E' possibile trovare una soluzione esatta dell'equazione (4.2.3) nel caso di annullamento del tensore  $T_{\alpha\beta}$ . Tale soluzione è nota come spazio di de Sitter e descrive un'espansione esponenziale dell'universo guidata dalla costante cosmologica, cioè l'energia oscura. Le evidenze astronomiche mostrano che attualmente siamo in una tale fase, dove l'energia oscura domina l'evoluzione cosmologica.

A questo punto ci si interroga sulla natura dell'energia oscura. Essa pare che riempia tutto l'universo, proprio come l'energia del vuoto quantistico. E' risultato naturale per i fisici associare la costante cosmologica alla densità di energia del vuoto poichè, in relatività generale, qualsiasi contributo energetico produce effetti gravitazionali:

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_{vac}. \quad (4.2.4)$$

Sperimentalmente è stato verificato che il corrente limite superiore di densità energetica del vuoto è dell'ordine di  $10^{-9} J \cdot m^{-3}$ . Vediamo che cosa si ottiene se si prova a calcolare la densità energetica del vuoto utilizzando le nozioni della teoria quantistica dei campi; in particolare sfruttando l'energia di punto zero ricavata nel capitolo III. Riprendiamo l'espressione (3.2.2) e supponiamo per semplicità di avere due modi di oscillazione indipendenti:

$$E_0 = \sum_{\vec{n}} \hbar \omega_{\vec{n}}. \quad (4.2.5)$$

Per il calcolo della densità di energia del vuoto rimpiazzeremo la sommatoria con un integrale in una maniera simile a quanto visto per l'effetto Casimir; si ottiene quindi:

$$\rho_{vac}^{th} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{n}} \hbar \omega_{\vec{n}} = \frac{1}{8\pi^2} \int d^3k \hbar \omega_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int d\omega \omega^3. \quad (4.2.6)$$

Notiamo che, in linea di principio, il risultato dell'ultimo integrale sarebbe infinito; tuttavia si potrebbe pensare di introdurre un cutoff per lunghezze d'onda più piccole della lunghezza d'onda di Planck ( $1,616252 \times 10^{-35}$  m) dove si ritiene che le leggi della fisica siano ancora sconosciute. Di conseguenza

$$\rho_{vac}^{th} = \frac{\hbar}{8\pi^2 c^3} \omega_{max}^4, \quad (4.2.7)$$

dove  $\omega_{max} = \frac{2\pi c}{\lambda_P} = 11,7 \times 10^{43} s^{-1}$ . Dai calcoli si ottiene che  $\rho_{vac}^{th} \simeq 9 \times 10^{114} J \cdot m^{-3}$ . Il disaccordo con il valore verificato sperimentalmente è di oltre 120 ordini di grandezza! Il valore della densità di energia del vuoto è davvero molto più piccolo di quello teorico. Questo è quello che viene chiamato «*il problema della costante cosmologica*».

Un calcolo del genere fu eseguito per la prima volta da Pauli attorno al 1920 per stimare il raggio dell'universo statico di Einstein [12]. Supponendo di lavorare con le unità naturali  $\hbar = c = 1$ , le equazioni di campo (4.2.1) implicano, nella situazione statica, la seguente uguaglianza:

$$8\pi G\rho = \frac{1}{a^2} = \Lambda, \quad (4.2.8)$$

dove  $\rho$  è la densità di massa del pulviscolo che riempie l'universo ed  $a$  è il raggio di curvatura. Considerando l'energia di punto zero del campo di radiazione, Pauli giunse alla conclusione che il raggio dell'universo non poteva nemmeno raggiungere quello della Luna. Infatti, riprendendo il risultato ottenuto nella (4.2.7) e scegliendo come cutoff il raggio classico dell'elettrone ( $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,818 \times 10^{-15} m$ ), si ottiene, in unità naturali, che  $\omega_{max} = \frac{2\pi}{\lambda_{max}} = \frac{2\pi m_e}{\alpha}$ , dove  $m_e$  rappresenta la massa dell'elettrone ed  $\alpha$  è la costante di struttura fine. Il corrispondente raggio dell'universo di Einstein, ottenuto dalla (4.2.8), sarebbe quindi ( $M_{Pl} \equiv 1/\sqrt{G}$ )

$$a = \frac{\alpha^2 M_{Pl}}{(2\pi)^{\frac{2}{3}} m_e^2} \sim 31 km. \quad (4.2.9)$$

Chiaramente, per risolvere questo grosso problema, c'è bisogno di capire meglio come rinormalizzare l'energia dello stato di vuoto. Le possibilità di riuscita potranno essere maggiori se iniziamo con quello che sappiamo meglio: la fisica dell'effetto Casimir.

# Bibliografia

- [1] C. Mencuccini, V. Silvestrini. *Fisica I, Meccanica e Termodinamica*. Liguori editore.
- [2] Max Born. *Fisica Atomica*. Boringhieri.
- [3] Enrique F. Borja. *Il vuoto e il nulla: Che cosa c'era prima del Big Bang?* RBA Italia.
- [4] F. K. Kennard, E. H. Cooper, John N. Richtmyer. *Introduction to Modern Physics*. McGraw Hill.
- [5] P. Caldirola, G. Prosperi, R. Cirelli. *Introduzione alla Fisica Teorica*. UTET.
- [6] N. Zettili. *Quantum Mechanics. Concepts and Applications*. Wiley.
- [7] C. Mencuccini, V. Silvestrini. *Fisica II, Elettromagnetismo e Ottica*. Liguori editore.
- [8] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko. *Advances in the Casimir Effect*. Oxford science publications.
- [9] Peter W. Milonni. *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Academic Press, Inc.
- [10] William M. R. Simpson, Ulf Leonhardt. *Forces of the Quantum Vacuum. An Introduction to Casimir Physics*. World scientific.
- [11] Annibale D'Ercole. <http://www.bo.astro.it/sait/spigolature/spigo404base.html>. *L'Effetto Casimir*.
- [12] Norbert Straumann. *The history of the cosmological constant problem*. Institute for Theoretical Physics University of Zurich.

# Ringraziamenti

*Tutte le persone citate in questa pagina hanno svolto un ruolo fondamentale nella stesura della tesi, ma desidero precisare che ogni errore o imprecisione è imputabile soltanto a me.*

*A conclusione di questo primo ciclo di studi, mi sento in dovere di ricordare e ringraziare tutte quelle persone che hanno contribuito al raggiungimento di questo mio importante traguardo.*

*Ringrazio innanzitutto il professore Luigi Rosa, persona eccellente e affabile come poche; la sua grande disponibilità, la sua allegria e, soprattutto, le sue enormi competenze scientifiche messe continuamente a mia disposizione sono risultati fondamentali nella stesura di questo lavoro, e non solo.*

*Inoltre, voglio ringraziare sentitamente il mio amico Lello, persona rara, fonte inesauribile di conoscenza nonchè vero Maestro delle scienze matematiche e fisiche, senza il quale probabilmente non avrei mai preso la decisione di iscrivermi al corso di laurea in fisica.*

*Un ringraziamento particolare per il supporto o per il tempo speso a chiarire i miei tanti dubbi va ai miei amici e colleghi: Francesco, Giovanni, Flavio, Emanuele, Davide, Giorgia, Mery, Rebecca, Manuela.*

*Vorrei ringraziare inoltre tutti i miei cari: Lucio, Lusy, Sabrina, Ada, Mario, Ciro, Sasha, Imma, Ciro, Mario, Francesco, Ludovico, Fritz, Luisa, Mariangela.*

*Infine, il ringraziamento più grande va a una persona che mi è sempre stata accanto in questi anni non sempre facili, a lei devo molti dei miei successi: il mio amore Lilla, a cui questo lavoro è dedicato.*

*Grazie di tutto.*

**Claudio**