Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea triennale in Fisica

Aspetti di tomografia classica e quantistica

Relatori:
Prof. Franco Ventriglia
Prof.ssa Patrizia Vitale

Candidato:
Ludovica Zullo
Matricola N85/579

Indice

Introduzione **3**

1 Meccanica quantistica sullo spazio delle fasi **5**

1.1 Il problema di Pauli 5

1.2 Sistemi di Weyl e funzione di Wigner 8

1.3 Applicazione: la funzione di Wigner dell'oscillatore armonico . . . 11

2 Tomografia **15**

2.1 Tomografia simplettica 16

2.2 Applicazione: tomogrammi dell'oscillatore armonico 20

2.3 Verifica del principio di indeterminazione 21

3 Tomografia di Spin **26**

3.1 Tomografia di spin per i qudits 26

3.2 Le matrici di Pauli ed il gruppo $SU(2)$ 27

3.3 Il qubit 31

Conclusioni **36**

A Sulla funzione di Wigner dell'oscillatore armonico **37**

B Sui tomogrammi dell'oscillatore armonico **39**

C Sui simboli di Weyl **41**

D Sul teorema della Delta di Dirac **43**

Bibliografia **44**

Introduzione

Il termine *tomogramma* viene dal greco $\tau\grave{\epsilon}\mu\nu\omega$, tagliare, o $\tau\grave{o}\mu o\varsigma$, nel senso di "strato", e $\gamma\rho\grave{\alpha}\phi\omega$, scrivere. Lo scopo primario della tomografia [11] è quello di determinare la struttura interna di un oggetto mediante l'uso di un metodo non invasivo, che lasci l'oggetto in esame inalterato e che non lo danneggi. Questi dati possono essere ottenuti dall'esposizione del campione in studio a vari tipi di sonde, come ad esempio raggi X, elettroni, e molti altri. Dopo l'esposizione con l'oggetto in esame, le sonde usate vengono rivelate per poi produrre quello che chiamiamo distribuzione prevista o *tomogramma*. La tomografia costituisce un potenete strumento per qualsiasi problema di ricostruzione, ed è per questo usata per la diagnostica in svariati campi. In radiologia, ad esempio, esiste la TAC, tomografia assiale computerizzata, per lo studio dei singoli piani di spessore di un organo o di un apparato, mediante la quale possono essere evidenziate eventuali lesioni a diversi livelli di profondità.
In meccanica quantistica lo stato del sistema non è noto a priori, ma è analizzabile mediante le sue grandezze caratteristiche chiamate osservabili; di queste, si possono misurare le distribuzioni di probabilità che costituiscono dati sperimentali per la ricostruzione dello stato quantistico.
In questo lavoro di tesi ci occuperemo dello studio del problema di ricostruzione di stati quantistici, mediante pure distribuzioni di probabilità, partendo dall'idea generale di Pauli, che è stata implementata mediante l'introduzione della rappresentazione tomografica della meccanica quantistica [1]. Vedremo che i pregi di tale rappresentazione sono costituiti dalla possibilità di creare un'analogia tra tomogrammi classici, ossia distribuzioni di probabilità classiche usate per lo studio di stati classici, e tomogrammi quantistici, che saranno ancora pure distribuzioni di probabilità, usati per lo studio di stati quantistici. Verrà effettuato un confronto tra i domini di questi due tomogrammi di stato [2], considerando i diversi vincoli a cui devono sottostare. Inoltre, come vedremo, la descrizione tomografica della meccanica quantistica si presta più agevolmente alla considerazione del limite semiclassico, che in altre rappresentazioni costituisce un problema che richiede

calcoli piuttosto laboriosi.
Va sottolineato che in questo lavoro sono stati esaminati gli aspetti cinematici di un sistema, e viene tralasciato qualsiasi aspetto dell'evoluzione temporale dello stesso.
L'utilizzo della tomografia quantistica in ambito sperimentale risale a circa un ventennio fa, quando il gruppo di Raymer [3] applicò la teoria del tomogramma quantistico, all'ottica. Infatti, in ottica quantistica, usando particolari rilevatori, si possono misurare tutte le possibili combinazioni lineari di posizione e momento di un campo elettromagnetico monocromatico, che può essere descritto come un oscillatore armonico unidimensionale e, tramite i dati ottenuti, si può ricostruire lo stato del campo.
Il successo della tomografia in questo contesto, ha stimolato lo sviluppo di metodi di ricostruzione dello stato anche in altri campi, oltre a quello ottico, per esempio [4], [5].
La struttura della tesi è la seguente. Nel capitolo 1 partendo dal problema di Pauli, dopo una breve descrizione dello stato di un sistema in ambito classico ed in ambito quantistico, introdurremo il concetto di meccanica quantistica sullo spazio delle fasi, mediante il formalismo di Weyl-Wigner. Dopo aver introdotto l'oscillatore armonico, seguirà un esempio di funzione di Wigner dello stesso, tramite il quale osserveremo che essa rappresenta una quasi-distribuzione. Il capitolo 2 rappresenta il fulcro del lavoro, nel quale partendo dal concetto di Trasformata di Radon, delineeremo la tomografia simplettica e le sue proprietà in ambito sia classico che quantistico. Seguirà un esempio sul tomogramma dell'oscillatore armonico, il quale risulterà essere una pura distribuzione di probabilità, contrariamente alla funzione di Wigner. Infine mostreremo la verifica del principio di indeterminazione di Heisenberg, ed il limite semiclassico per il tomogramma dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico, e presenteremo i diversi vincoli che un tomogramma deve soddisfare per descrivere uno stato classico o quantistico. Nel capitolo 3 esamineremo gli aspetti della tomografia quantistica nel caso discreto, analizzando come essa si presenti per un sistema ad N-livelli. Per fare questo introdurremo alcuni strumenti matematici fondamentali come le matrici di Pauli ed il gruppo $SU(2)$. Infine affronteremo il problema del qubit in dettaglio e faremo alcune considerazioni sul numero minimo di sistemi di riferimento necessari alla ricostruzione dello stato di tale sistema.

Capitolo 1

Meccanica quantistica sullo spazio delle fasi

1.1 Il problema di Pauli

Stati puri e stati misti in meccanica classica e quantistica

In meccanica classica, nel formalismo Hamiltoniano, gli stati puri di un sistema fisico sono rappresentati dai punti $x_i = (q_i, p_i)$ di uno spazio 2n-dimensionale, chiamato *spazio delle fasi*. In esso le q_i rappresentano le posizioni, le p_i i momenti, e le x_i costituiscono tutti i possibili stati del sistema in considerazione. Generalizzando il concetto di stato del sistema, stati non puri ossia frutto di un'osservazione non massimale, possono essere studiati tramite una densità classica di probabilità $f(q, p)$, normalizzata e non-negativa:

$$\int \prod_{i=1}^{n} dq_i dp_i f(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = 1. \tag{1.1}$$

$$f(q, p) \geq 0 \tag{1.2}$$

Essa esprime la probabilità di trovare, ad un dato istante, lo stato rappresentativo del sistema fisico in un volume infinitesimo dello spazio delle fasi.

In meccanica quantistica uno stato puro è descritto da un vettore di uno *spazio di Hilbert* $\mathcal{H}$. Tale vettore è rappresentato nel formalismo di Dirac come un *ket* $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, dove $|n\rangle$ rappresenta una base ortonormale di $\mathcal{H}$, e $c_n \in \mathbb{C}$ il coefficiente di $|\psi\rangle$ nella base $|n\rangle$. Possiamo introdurre una rappresentazione

equivalente per gli stati puri tramite la *matrice densità* ρ:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \,; \tag{1.3}$$

Il formalismo della matrice densità è particolarmente utile per descrivere le miscele di stati, perché mentre uno stato misto non può essere descritto come una combinazione lineare di stati puri, la sua matrice densità può essere invece descritta come una combinazione convessa[1], che abbia come coefficienti le probabilità dei possibili stati del sistema. Dunque per uno stato misto, la ρ è:

$$\rho = \sum_k \omega_k \, |\psi_k\rangle \langle\psi_k| \,. \tag{1.4}$$

In questo caso gli ω_k rappresentano i pesi, ossia le probabilità di trovare ogni stato della miscela ψ_k. Come mostrato in [6], la ρ è un oparatore limitato, autoaggiunto ($\rho = \rho^\dagger$), non negativo (ossia ammette solo autovalori non negativi), di traccia unitaria ($Tr[\rho]) = 1$). Inoltre la matrice densità per uno stato puro è idempotente ($\rho^2 = \rho$), e dunque se vale ($Tr[\rho^2] = 1$) allora lo stato in esame è uno stato puro.

E' facile vedere che il valor medio di un' osservabile $\hat{A}$ sullo stato puro ψ si ottiene come:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = Tr(\rho\hat{A}). \tag{1.5}$$

Se il sistema si trova in uno stato misto, il valor medio di $\hat{A}$ assumerà una forma più generale, dovuta al fatto che il sistema si può trovare in uno qualsiasi degli stati $[\psi_1, ..., \psi_k]$, con probabilità classica $[\omega_1, ..., \omega_k]$. Introduciamo l'elemento di matrice $A_{m,n}$ di $\hat{A}$ in una data base ortonormale:

$$A_{m,n} = \sum_{m,n} \langle m|\hat{A}|n\rangle \tag{1.6}$$

e l'elemento $\rho_{m,n}$ come:

$$\rho_{m,n} = \langle m|\rho|n\rangle = \sum_k \omega_k \langle m|\psi_k\rangle \langle\psi_k|n\rangle \tag{1.7}$$

[1]Ossia valgono le seguenti relazioni: $\omega_k \in \mathbb{R}$; $\omega_k \geq 0$; $\sum_k \omega_k = 1$

allora si ottiene che il valor medio di $\hat{A}$ sullo stato misto è:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{A} \right\rangle &= \sum_k \omega_k \left\langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \right\rangle \\ &= \sum_k \omega_k \sum_{m,n} \left\langle \psi_k | m \right\rangle \left\langle m | \hat{A} | n \right\rangle \left\langle n | \psi_k \right\rangle \\ &= \sum_{m,n} \left(\sum_k \omega_k \left\langle \psi_k | m \right\rangle \left\langle n | \psi_k \right\rangle \right) \left\langle m | \hat{A} | n \right\rangle \\ &= \sum_{m,n} \rho_{m,n} \hat{A}_{m,n} = Tr[\rho \hat{A}]\end{aligned} \tag{1.8}$$

La formulazione del problema di Pauli

Nel libro *General Principles of Quantum Mechanics* [7], Pauli pose il problema della ricostruzione dello stato quantistico, mediante la conoscenza di distribuzioni di probabilità, come accade in meccanica statistica classica. Più precisamente, Pauli affrontò l'arogmento in modo concreto: è possibile ricostruire la funzione d'onda, mediante la conoscenza della distribuzione di probabilità delle posizioni e dei momenti? Per rispondere a questa domanda introduciamo la funzione d'onda nella rappresentazione delle posizioni come $\psi(\vec{x})$, e la funzione d'onda nella rappresentazione dei momenti come $\phi(\vec{p})$. Le distribuzioni di probabilità associate a quest'ultime sono rispettivamente:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \psi(\vec{x})^* \psi(\vec{x}) \quad ; \quad \mathcal{P}(\vec{p}) = \phi(\vec{p})^* \phi(\vec{p}) \tag{1.9}$$

Pauli afferma che le funzioni $\psi(\vec{x})$ e $\phi(\vec{p})$, che sono anche chiamate *ampiezze di probabilità*, non sono direttamente osservabili; questa condizione, infatti, vale solo per le densità di probabilità $\mathcal{P}(\vec{x})$ e $\mathcal{P}(\vec{p})$. Il problema matematico sollevato da Pauli consiste, nel determinare in modo univoco la finzione ψ, se esiste, una volta note le distribuzioni $\mathcal{P}(\vec{x})$ e $\mathcal{P}(\vec{p})$. La risposta al Problema di Pauli risulta essere negativa, come già mostrato, per esempio, da H. Reichenbach in una nota del suo "*Philosophy of Quantum Mechanics*" [8], attraverso controesempi. Questo ci fa capire che la conoscenza di due sole distribuzioni marginali di probabilità, quelle di posizione e di momento, non è sufficiente alla ricostruzione univoca dello stato del sistema. Il problema della ricostruzione dello stato di un sistema quantistico tramite la conoscenza di distribuzioni di probabilità, può essere risolto introducendo la rappresentazione probabilistica tomografica degli stati quantistici. Quest'ultima si basa sulla trasformata di Radon della funzione di Wigner associata ad uno stato quantistico, e verrà chiarita in seguito tramite degli esempi. Si vedrà

infatti, che è possibile ricostruire lo stato di un sistema quantistico mediante la conoscenza di un'opportuna famiglia di distribuzioni di probabilità tomografiche marginali, ottenuta al variare di due parametri reali.

1.2 Sistemi di Weyl e funzione di Wigner

Mappa di Weyl

Sebbene la meccanica classica e quella quantistica siano due teorie valide in due domini diversi della realtà fisica, esse devono essere consistenti in quanto la meccanica classica deve emergere come limite macroscopico di quella quantistica. Questa sovrapposizione viene fatta innanzitutto introducendo il principio di corrispondenza. Ad esempio nella rappresentazione delle posizioni, le coordinate canoniche di Hamilton (q, p) sono associate ad operatori $(\hat{q}, \hat{p})$ mediante:

$$q \to \hat{q} = q \quad ; \quad p \to \hat{p} = -i\hbar\partial/\partial p. \tag{1.10}$$

Il principio di corrispondenza presenta però delle ambiguità, in quanto ad una funzione classica può far corrispondere diversi operatori quantistici (ad esempio q^2p può corrispondere a $\hat{q}^2\hat{p}, \hat{q}\hat{p}\hat{q}, \hat{p}\hat{q}^2$) L'ambiguità relativa all'ordinamento degli operatori sorge dal fatto che in meccanica quantistica essi non commutano tra loro ($[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$). Infatti una delle difficoltà del passaggio da spazio delle fasi cartesiano $\mathbb{R}^{2n}$ allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, consiste nel passare da funzioni (*osservabili classiche*), che si compongono con un prodotto commutativo, ad operatori (*osservabili quantistiche*) che sono elementi di un'algebra non commutativa. La relazione tra meccanica classica e quantistica si fonda sull'introduzione di opportune mappe di quantizzazione e dequantizzazione. In particolare la mappa di cui ci occuperemo è *la mappa di Weyl*[2]:

$$\Omega \quad : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathcal{U}(\mathcal{H}). \tag{1.11}$$

Possiamo rappresentare la mappa di Weyl, tramite l'introduzione di un operatore chiamato *operatore spostamento*[3] [9]:

$$\hat{\mathcal{D}}(q, p) = e^{i(p\hat{Q} - q\hat{P})} \tag{1.12}$$

[2]Per semplicità ci porremo nel caso bidimensionale

[3]Il nome deriva dalla scrittura $\hat{\mathcal{D}}$ in termini di operatori distruzione e creazione dell'oscillatore armonico $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$: $\hat{\mathcal{D}}(z, \bar{z}) = e^{z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}}$ dove $z \in \mathbb{C}$, $z = q + ip$, $\bar{z} = q - ip$, si ha che $\hat{\mathcal{D}}^\dagger a \hat{\mathcal{D}} = \hat{a} + z\mathbb{1}$, e $\hat{\mathcal{D}} a \hat{\mathcal{D}}^\dagger = \hat{a} - z\mathbb{1}$.

Ora è possibile associare tramite Ω, un operatore $\hat{f}$ ad ogni funzione $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, utilizzando la trasformata di Fourier simplettica $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(\alpha, x) = \int dq\ dp\ f(q,p)\ e^{-i(\alpha q - xp)} \tag{1.13}$$

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha dx \tilde{f}(\alpha, x) e^{i(\alpha \hat{Q} - x\hat{P})}. \tag{1.14}$$

Funzione di Wigner

La mappa inversa a quella di Weyl (Ω^{-1}), ci consente di passare da operatori su $\mathcal{H}$ a funzioni sullo spazio delle fasi, consideriamo l'espressione:

$$\tilde{f}(q', p') = Tr(\hat{f}\hat{U}(q', p')) \tag{1.15}$$

dove l'operatore $\hat{U}$, da determinare, assume il ruolo di operatore di dequantizzazione. Il *simbolo di Weyl* dell'operatore $\hat{f}$ è la funzione $f(q,p)$ sullo spazio delle fasi, ottenuta come antitrasformata di Fourier di $\tilde{f}(q', p')$. Per determinare $\hat{U}$ in modo che la (1.15) sia compatibile con (1.14), sostituiamo la forma di $\hat{f}$ ottenuta nella (1.14), nell'equazione[4] (1.15):

$$\tilde{f}(q', p') = Tr\left[\frac{1}{2\pi} \int d\alpha dx \tilde{f}(\alpha, x) \hat{\mathcal{D}}(\alpha, x) U(q', p')\right] \tag{1.16}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\alpha dx \tilde{f}(\alpha, x) Tr\left[\hat{\mathcal{D}}(\alpha, x) U(q', p')\right]$$

nonché:

$$Tr\left[\hat{\mathcal{D}}(\alpha, x) U(q', p')\right] = \delta(x - q')\delta(\alpha - p') \tag{1.17}$$

condizione che è verificata solo se $\hat{U} = \hat{\mathcal{D}}^\dagger$. Quindi il simbolo di Weyl di un operatore $\hat{f}$ si scrive esplicitamente come:

$$f(q,p) = \frac{1}{2\pi} \int dq' dp' e^{-[i(qp' - pq')]} Tr[\hat{f}\mathcal{D}^\dagger(q', p')] \tag{1.18}$$

Vogliamo adesso in particolare, trovare il simbolo di Weyl per l'operatore densità che descrive lo stato di un sistema quantistico. Possiamo dunque scrivere dalla

[4]Il calcolo si effettua tenendo conto della fondamentale formula di Baker-Campbell-Hausdorff che esprime il prodotto di due operatori di spostamento come un altro operatore di spostamento (a meno di un fattore di fase), con lo spostamento risultante pari alla somma dei due spostamenti: $\hat{\mathcal{D}}(z)\hat{\mathcal{D}}(v) = e^{z\bar{v} - \bar{z}v}\hat{\mathcal{D}}(z + v)$

(1.18), dopo alcuni passaggi:

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int dx e^{ipx}\,\langle q - \frac{x}{2}|\rho|q + \frac{x}{2}\rangle\,. \tag{1.19}$$

Questa funzione sullo spazio delle fasi associata all'operatore densità, è chiamata *funzione di Wigner*. Per uno stato puro ($\rho = |\psi\rangle\,\langle\psi|$), la funzione di Wigner si scrive:

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int dx\; e^{ipx}\;\psi^*\left(q - \frac{x}{2}\right)\psi\left(q + \frac{x}{2}\right) \tag{1.20}$$

Proprietà della funzione di Wigner

Poiché, per una generica miscela quantistica, la matrice densità di probabilità può essere espressa come somma pesata di proiettori, ovvero di singoli stati puri, per la linearità dell'operazione di integrazione, la funzione di Wigner di uno stato qualsiasi può essere espressa come la medesima combinazione convessa delle funzioni di Wigner degli stati puri $W_n(q;p)$, ossia:

$$W(q,p) = \sum_n \omega_n\; W_n(q,p) \tag{1.21}$$

La funzione di Wigner è a valori reali dal momento che ρ è hermitiano; questo ci permette di avere rappresentazioni grafiche di $W(q,p)$, e dunque di cogliere immediatamente le proprietà statistiche di un sistema quantistico. Inoltre, la $W(q,p)$ è normalizzata:

$$\int W(q,p)\; dq\; dp = 1 \tag{1.22}$$

ed integrata sulle sole q o sulle sole p fornisce due marginali:

$$\int W(q,p)\; dq = \phi^*(p)\phi(p) \tag{1.23}$$

$$\int W(q,p)\; dp = \psi^*(q)\psi(q) \tag{1.24}$$

Una relazione davvero fondamentale ed alla base di numerose proprietà risulta poi essere la cosiddetta formula di sovrapposizione, che permette di scrivere la traccia di due operatori quantistici in termini espliciti. Benché, infatti, in questa sezione sia stato introdotto il simbolo di Weyl per l'operatore densità (1.19), ogni operatore $\hat{A}$, nel contesto della quantizzazione alla Weyl, può essere associato ad una funzione sullo spazio delle fasi e ad ognuno di essi corrisponde una rappresentazione di Wigner, che indicheremo con $W_{\hat{A}}$. Detto questo considerando due

operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, vale la formula di sovrapposizione:

$$Tr[\hat{A}\hat{B}] = \int \frac{W_{\hat{A}} W_{\hat{B}}}{2\pi}\, dqdp. \tag{1.25}$$

Infatti:

$$\hat{A} = \int\, dq\ dp\ Tr[\hat{A}\hat{U}(q,p)]\hat{D}(q,p) \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned} Tr[\hat{A}\hat{B}] &= Tr\bigg(\int\, dq\ dp\ Tr[\hat{A}\hat{U}(q,p)]\hat{D}(q,p)\ \hat{B}\bigg) = \\ &= \int Tr[\hat{A}\hat{U}(q,p)]\ Tr[\hat{D}(q,p)\hat{B}] \end{aligned} \tag{1.27}$$

in cui avendosi $\hat{D} = \frac{1}{2\pi}\hat{U}$ abbiamo la (1.25).
Immaginiamo di calcolare la traccia tra l'operatore densità ed un qualsiasi altro operatore $\hat{A}$ associato ad un osservabile fisico (1.8). Con la formula di sovrapposizione questa procedura assume una completa analogia con il calcolo del valore medio di una certa grandezza fisica in meccanica statistica classica, in quanto:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = Tr[\rho\hat{A}] = \int \frac{W(q,p)W_{\hat{A}}}{2\pi}\, dqdp. \tag{1.28}$$

1.3 Applicazione: la funzione di Wigner dell'oscillatore armonico

Richiami sull'oscillatore armonico

L'Hamiltonina dell'oscillatore armonico 1-D è [10]:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\tilde{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\tilde{q}^2 \tag{1.29}$$

passando alle variabili adimensionali q e le p:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}. \tag{1.30}$$

Introduciamo gli operatori $\hat{Q}$ e $\hat{P}$, corrispondenti alle variabili adimensionali q e p, con i quali riscriviamo l'operatore hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}\hat{Q}^2 \tag{1.31}$$

Scriviamo adesso $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ in termini degli operatori di distruzione e creazione $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, e sia $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ l'operatore numero:

$$\hat{Q} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}} \tag{1.32}$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}}. \tag{1.33}$$

Dunque lo spettro dell' $\tilde{\mathcal{H}}$ si ottiene dallo spettro di N osservando che:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \hat{N} + \frac{1}{2}. \tag{1.34}$$

Per trovare gli autovettori che rappresentano gli stati dell'oscillatore armonico, partiamo dallo stato di vuoto ψ_0:

$$(\hat{a}\,|\psi_0\rangle = 0) \tag{1.35}$$

e poi tramite $\hat{a}^\dagger$ otteniamo tutti gli ψ_n. Nella rappresentazione delle posizioni si perverrà all'equazione:

$$\left[q + i\left(-i\frac{d}{dq}\right)\right]\psi_0(q) = 0 \tag{1.36}$$

$$q\psi_0(q) + \frac{d}{dq}\psi_0(q) = 0$$

cioè, normalizzando:

$$\psi_0(q) = \frac{1}{(\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{2}} \tag{1.37}$$

che rappresenta lo stato di vuoto dell'oscillatore armonico 1-D. Il primo stato eccitato sarà dato da:

$$\psi_1(q) = \frac{\sqrt{2}\ q}{(\pi)^{\frac{1}{4}}}\ e^{-\frac{q^2}{2}} \tag{1.38}$$

ed in generale vale la formula in termini di polinomi di Hermite $H_n(q)$:

$$\psi_n(q) = \frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{q^2}{2}}. \tag{1.39}$$

Funzione di Wigner dell'oscillatore armonico

Per esibire un esempio di funzione di Wigner di uno stato quantistico, abbiamo effettuato il calcolo della $W(q,p)$ dello stato di vuoto ψ_0 (1.37), e del primo livello eccitato ψ_1 (1.38), dell'oscillatore armonico. Il procedimento utilizzato per il cal-

colo è mostrato nell'appendice A. Notiamo che nelle nostre unità adimensionali, abbiamo aggiunto un parametro libero λ la cui utilità verrà chiarita nel secondo capitolo quando calcoleremo il limite per $\lambda \to 0$. Infatti, il valore $\lambda = \hbar = 1$, corrisponde al caso quantistico. Risultando dall'equazione (1.20):

$$W_0(q,p) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int dx\ e^{\frac{ipx}{\lambda}}\ \psi_0^*\left(q-\frac{x}{2}\right)\psi_0\left(q+\frac{x}{2}\right) \tag{1.40}$$

$$W_1(q,p) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int dx\ e^{\frac{ipx}{\lambda}}\ \psi_1^*\left(q-\frac{x}{2}\right)\psi_1\left(q+\frac{x}{2}\right) \tag{1.41}$$

si ha:

$$W_{0\lambda}(q,p) = \frac{1}{\pi\lambda}e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})} \tag{1.42}$$

$$W_{1\lambda}(q,p) = \frac{1}{\pi\lambda}(\frac{2q^2+2p^2}{\lambda}-1)\ e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})} \tag{1.43}$$

ed in generale possiamo trovare tutte le funzioni di Wigner associate alle ψ_n tramite i polinomi di Laguerre:

$$W_n(q,p) = \frac{(-1)^n}{\lambda\pi}\ e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})}\mathcal{L}_n(\frac{2q^2+2p^2}{\lambda}) \tag{1.44}$$

I grafici rappresentano $W_0(q,p)$ e $W_1(q,p)$: il primo mostra come $W_0(q,p)$ sia descritta da una gaussiana bidimensionale, dove λ modula l'ampiezza della gaussiana. Dunque la funzione di Wigner dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico è definita positiva $W_0(q,p) \geq 0$; nel secondo caso, invece, notiamo che la funzione di Wigner del primo livello eccitato dell'oscillatore armonico può assumere valori negativi. Questo risultato prova che in generale la funzione di Wigner non può essere considerata una genuina distribuzione di probabilità. Essa viene dunque denominata *quasi-distribuzione*, ed è dunque inadatta a risolvere il problema di Pauli. Vedremo nel prossimo capitolo che abbiamo bisogno di un ulteriore passaggio, che sarà dato dal tomogramma di $W(q,p)$.

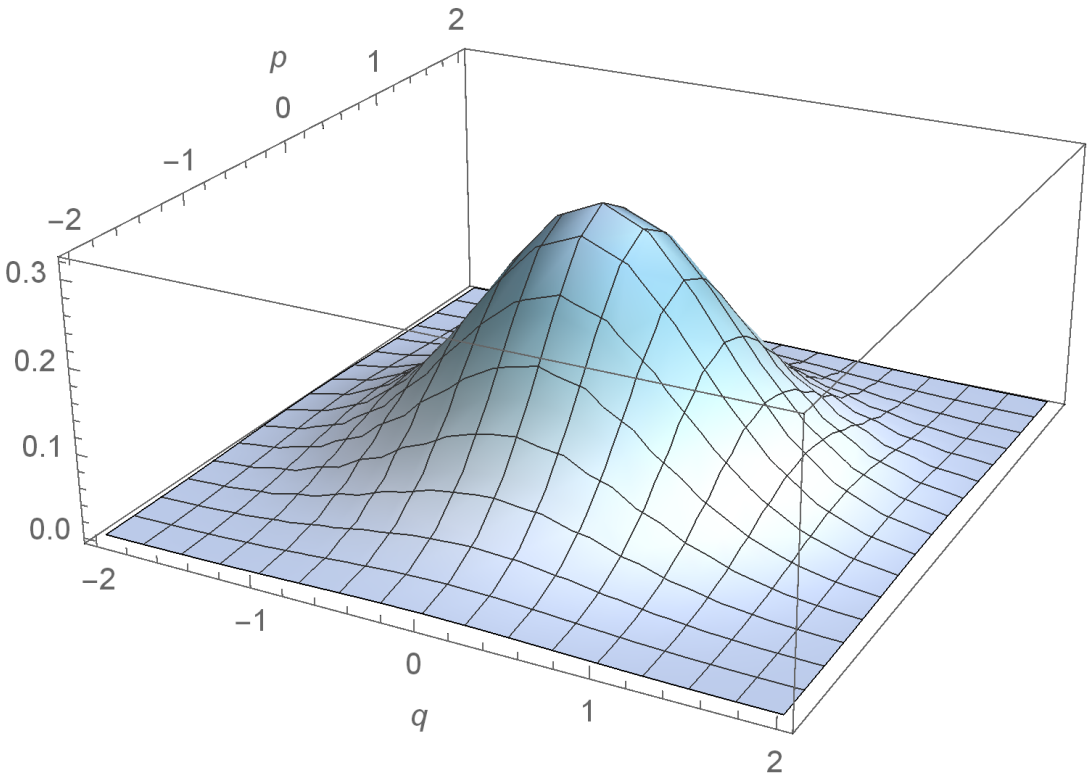


Figura 1.1: Funzione di Wigner $W_0(q,p)$; $\lambda = 1$

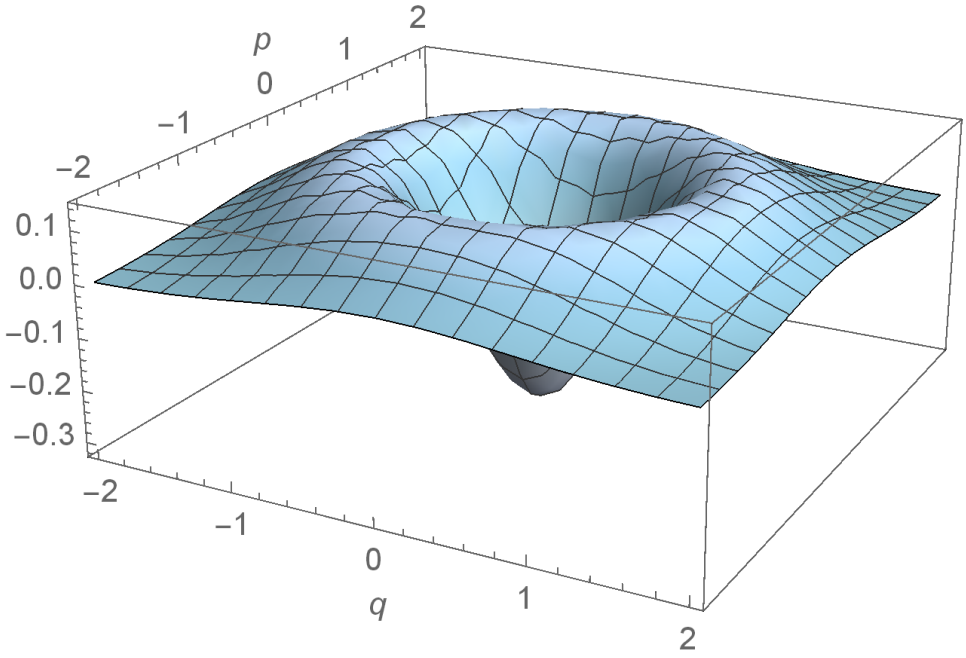


Figura 1.2: Funzione di Wigner $W_1(q,p)$; $\lambda = 1$

Capitolo 2

Tomografia

La trasformata di Radon

Consideriamo un corpo nel piano ($\mathbb{R}^2$) [11], ed un facio di particelle emesso da una sorgente. Assumiamo che l'intensità iniziale del fascio sia I_0. Quando le particelle passano attraverso il corpo, esse vengono assorbite o scatterate, e dunque l'intensità I_0, dopo aver attraversato un tratto ΔS, si è ridotta di una quantità proporzionale alla densità del corpo ρ:

$$\frac{\Delta I}{I} = -\Delta S \rho(S) \tag{2.1}$$

integrando ambo i membri:

$$\int_{I_0}^{I(S)} \frac{dI}{I} = -\int_0^S dS' \rho(S') \tag{2.2}$$

da cui:

$$\ln(\frac{I(S)}{I_0}) = -\int_0^S dS' \rho(S') \tag{2.3}$$

e passando all'esponenziale:

$$I(s) = I_0 e^{-\int_0^S dS' \rho(S')}. \tag{2.4}$$

La $I(S)$ ottenuta è l'intensità finale del fascio che sarà raccolta da un rivelatore posto all'uscita del corpo, mentre dalla relazione (2.3), possiamo ottenere il valore della densità del corpo ρ su quella linea coorispondente alla traiettoria ΔS. Se scegliamo differenti traiettorie, con lo stesso procedimento, troviamo l'integrale della densità su ogni linea, e dunque possiamo ricostruire mediante quest'ultimi la densità dell'oggetto.

Da un punto di vista matematico, la ricostruzione del problema può essere formulata come segue: vogliamo ricavare una funzione sconosciuta tramite la conoscenza di un'appropriata famiglia di trasformazioni integrali. Consideriamo per semplicità il caso bidimensionale, i cui risultati valgono in tutta generalità: data una funzione regolare $f(x)$ sul piano $\mathbb{R}^2$, il suo tomogramma è dato dalla *trasformata di Radon* della funzione $f(x)$, cioè dalla media della funzione lungo un'assegnata retta. Dalla conoscenza di tutte le medie al variare della retta, siamo in grado di ricostruire la forma della funzione $f(x)$. Come mostrato in [12], la trasformata di Radon è stata originariamente introdotta come una trasformazione integrale su $\mathbb{R}^n$ che può essere visto come spazio delle configurazioni del sistema fisico in esame. Se n è pari si può pensare a $\mathbb{R}^n$ come ad uno "spazio delle fasi". Da questa importante osservazione, prende le mosse il concetto di tomogramma simplettico illustrato nel prossimo paragrafo, che risulta essere un ottimo strumento per la ricostruzione di stati classici e quantistici.

2.1 Tomografia simplettica

Tomografia classica

Come visto nel paragrafo (1.1), la descrizione usuale degli stati classici con fluttuazioni (stati misti), è data da una densità di probabilità congiunta non negativa, normalizzata, $f(q,p)$ nello spazio delle fasi. Il tomogramma [13] è la densità di probabilità in un sistema di riferimento scalato e ruotato sullo spazio delle fasi. Il tomogramma classico è costruito a partire da $f(q,p)$, ed è funzione di una coordinata $X \in \mathbb{R}$, che è collegata alla posizione q ed al momento coniugato p di un sistema di riferimento canionico sullo spazio delle fasi dall'equazione:

$$X = \mu q + \nu p \tag{2.5}$$

dove μ e ν sono parametri reali. Esso può essere espresso in termini di un parametro di scala s e di un parametro di rotazione θ:

$$\mu = s\cos(\theta) \quad ; \quad \nu = s^{-1}\sin(\theta) \tag{2.6}$$

Dunque, fissati i parametri μ e ν, si ottiene una retta (2.5) sul piano (q,p), con un'orientazione θ rispetto all'asse delle p. Il significato fisico da attribuire alla variabile X è il seguente: essa rappresenta la posizione, misurata in un sistema di riferimento dello spazio delle fasi, i cui assi sono ruotati di un angolo θ rispetto al

precedente, dopo che, preliminarmente, la precedente posizione ed il precedente momento siano stati scalati canonicamente ($q \to sq$; $p \to s^{-1}p$). La coordinata X dell'equazione (2.5), insieme con la coordianta Y data da:

$$Y = -s^2\mu q + s^{-2}\nu p \tag{2.7}$$

costituiscono una trasformazione canonica[1] che preserva la forma simplettica dello spazio delle fasi. Per questo motivo il tomogramma classico è chiamato "*simplettico*". Si definisce *tomogramma simplettico* della funzione $f(q,p)$, la trasformata di Radon di f:

$$\mathcal{W}(X,\mu,\nu) = \int dqdp\ f(q,p)\ \delta(X - \mu q - \nu p) \tag{2.8}$$

che si può riscrivere nella forma:

$$\mathcal{W}(X,\mu,\nu) = \left\langle \delta(X - \mu q - \nu p) \right\rangle_f. \tag{2.9}$$

dove la media è ottenuta utilizzando la distribuzione di probabilità $f(q,p)$ sullo spazio delle fasi. La coordinata X diviene la nuova variabile casuale su cui poter fare le medie della funzione $f(q,p)$, ossia la (2.9) fornisce la media di $f(q,p)$ sulla retta dall'equazione (2.5), fissata dalla scelta dei parametri μ e ν. Al variare di μ e ν, ci si sposta su tutte le rette, e si costruisce $\mathcal{W}_{\mu,\nu}(X)$.
Dalla formula inversa poi, è possibile ricostruire la f di partenza:

$$f(q,p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dX\ d\mu\ d\nu\ \mathcal{W}(X,\mu,\nu)\ e^{i(X-\mu q-\nu p)} = \tag{2.10}$$

[1]In meccanica classica si chiamano trasformazioni canoniche quelle trasformazioni delle variabili generalizzate usate per descrivere un sistema attraverso le equazioni di Hamilton, che mantengono la forma delle equazioni di Hamilton.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dX\ d\mu\ d\nu\ dp'\ dq'\ f(q',p')\ \delta(X-\mu q'-\nu p')\ e^{i(X-\mu q-\nu p)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int\ dX\ d\mu\ d\nu\ dp'\ dq'\ dk\ f(q',p')\ e^{-ik(X-\mu q'-\nu p')}\ e^{i(X-\mu q-\nu p)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int\ dX\ d\mu\ d\nu\ dp'\ dq'\ dk\ f(q',p')\ e^{iX(1-k)}\ e^{i\mu(q-kq')}\ e^{i\nu(p-kp')} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\ dX\ dk\ dq'\ dp'\ f(q',p')\ e^{iX(1-k)}\ \delta(q-kq')\ \delta(p-kp') = \\
&= \int\ dk\ dq'\ dp'\ \delta(1-k)\ f(q',p')\ \delta(q-kq')\ \delta(p-kp') = \\
&= \int\ dq'\ dp'\ f(q',p')\ \delta(q-q')\ \delta(p-p')
\end{aligned}
$$

Dato che la funzione $f(q,p)$ è normalizzata, anche il tomogramma classico è normalizzato per ogni valore di μ e ν:

$$\int dX\ \mathcal{W}(X,\mu,\nu) = \int\ dX\ dq\ dp\ f(q,p)\delta(X-\mu q-\nu p) = 1 \tag{2.11}$$

ed è definito positivo:

$$\mathcal{W}(X,\mu,\nu) \geq 0. \tag{2.12}$$

Fissati μ e ν, i tomogrammi sono distribuzioni marginali. In particolare, per $\mu = 1$ e $\nu = 0$, il tomogramma fornisce la distribuzione marginale delle posizioni:

$$\mathcal{W}(X,1,0) = \int dq\ dp\ f(q,p)\ \delta(X-q) = \int dp\ f(X,p) \tag{2.13}$$

mentre per $\mu = 0$ e $\nu = 1$, il tomogramma fornisce la distribuzione marginale dei momenti:

$$\mathcal{W}(X,0,1) = \int dq\ dp\ f(q,p)\ \delta(X-p) = \int dq\ f(q,X). \tag{2.14}$$

Tomografia quantistica

Data la matrice densità ρ che descrive lo stato di un sistema quantistico, la funzione di Wigner della ρ è descritta dall'equazione (1.19):

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{ipx}\ \langle q - \frac{x}{2}|\rho|q + \frac{x}{2}\rangle\ . \tag{2.15}$$

Si definisce *tomogramma quantistico* la trasformata di Radon di $W(q,p)$:

$$\mathcal{W}(X,\mu,\nu) = \int\ dqdp\ W(q,p)\ \delta(X-\mu q-\nu p). \tag{2.16}$$

La (2.16), può essere riscritta in una forma simile alla (2.9), ricordando la formula (1.25), e utilizzando il calcolo in appendice C:

$$\mathcal{W}(X,\mu,\nu) = \left\langle \delta(X\hat{\mathbb{1}} - \mu\hat{Q} - \nu\hat{P}) \right\rangle_{\rho} \tag{2.17}$$

con

$$\delta(X\hat{\mathbb{1}} - \mu\hat{Q} - \nu\hat{P}) = \frac{1}{2\pi}\int dk\ e^{i(X\hat{\mathbb{1}} - \mu\hat{Q} - \nu\hat{P})} \tag{2.18}$$

dove la differenza con l'equazione (2.9) è che adesso la posizione e il momento sono sostituiti dagli operatori quantistici $\hat{Q}$ e $\hat{P}$, i quali non commutano. La media nell'equazione (2.17), è stato fatta utilizzando l'operatore densità ρ come mostrato nell'equazione (1.8). In questo modo, il passaggio per la funzione di Wigner può essere rimosso, considerando direttamente il tomogramma della matrice densità che descrive uno stato quantistico.
I tomogrammi di stati quantistici possono essere confrontati con le densità statistiche classiche, in quanto sono entrambe funzioni positive sullo stesso spazio $\mathbb{R}^3$. Inoltre le stesse relazioni dimensionali valgono in entrambi i casi:

$$[X] = [\mu][q] = [\nu][p] \quad ; \quad [\mathcal{W}(X,\mu,\nu)] = [X]^{-1} \tag{2.19}$$

X e $\mathcal{W}$ possono essere rese adimensionali ponendo:

$$[\mu] = [q]^{-1} \quad ; \quad [\nu] = [p]^{-1}. \tag{2.20}$$

L'operatore

$$\hat{X} = \mu\hat{Q} + \nu\hat{P} \tag{2.21}$$

insieme al suo coniugato

$$\hat{Y} = -s^2\mu\hat{Q} + s^{-2}\nu\hat{P} \tag{2.22}$$

preserva le relazioni canoniche di commutazione $[\hat{X},\hat{Y}] = [\hat{Q},\hat{P}]$. L'osservabile $\hat{X}$ rappresenta il nuovo operatore posizione, cioè la posizione, dopo una trasformazione nello spazio delle fasi quantistico $(\hat{Q},\hat{P})$ della particella. La variabile reale X fornisce i possibili risultati di una misura di $\hat{X}$ e descrive lo spettro di $\hat{X}$. Il tomogramma quantistico è di nuovo la distribuzione di probabilità marginale della variabile casuale X, corrispondente alla variabile spettrale dell'operatore quantistico Hermitiano (2.21). Di nuovo $\mathcal{W}(X,1,0)$ e $\mathcal{W}(X,0,1)$, rappresentano le distribuzioni di probabilità marginali di posizione e di momento nel caso quantistico. Naturalmente anche nel caso quantistico la trasformata di Radon si

può invertire come mostrato in (2.10), per ricostruire lo stato caratterizzato dalla matrice densità:

$$\rho = \int dX\ d\mu\ d\nu\ \mathcal{W}(X,\mu,\nu) e^{i(X\hat{\mathbb{1}} - \mu\hat{Q} - \nu\hat{P})}. \tag{2.23}$$

In questo modo, è stata fatta una descrizione dei tomogrammi quantistici in completa analogia con il caso classico. Quindi anche nel caso quantistico, il tomogramma si dice "simplettico". Torniamo al problema di Pauli, che richiedeva se fosse possibile risalire allo stato del sistema quantistico, mediante la conoscenza di due sole distribuzioni di probabilità marginali, quelle di posizione e di momento. La risposta a tale quesito è negativa. Infatti, la conoscenza di $\mathcal{W}(X,1,0)$ e $\mathcal{W}(X,0,1)$ non basta alla ricostruzione dello stato. Dalla formula (2.23), vediamo che la ricostruzione richiede la conoscenza di molte differenti distribuzioni di probabilità marginali $\mathcal{W}_{\mu,\nu}(X)$ fissate ogni volta dalla scelta dei parametri μ e ν, che corrispondono a molti diversi osservabili della famiglia $\hat{X}(\mu,\nu)$.

2.2 Applicazione: tomogrammi dell'oscillatore armonico

Nel paragrafo 1.3 del capitolo precedente, abbiamo esplicitamente calcolato la funzione di Wigner dello stato fondamentale (1.37) e del primo livello eccitato (1.38) dell'oscillatore armonico. Abbiamo constatato che essa rappresenta una quasi-probabilità poichè non è sempre definita positiva. In questo paragrafo esibiamo i risultati del calcolo del tomogramma dello stato fondamentale, e del primo livello eccitato dell'oscillatore armonico. Il procedimento utilizzato per il calcolo è mostrato nell'appendice B. Risultando dall'equazione (2.16):

$$\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu) = \int dqdp\ \frac{1}{\pi\lambda} e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})} \delta(X - \mu q - \nu p) \tag{2.24}$$

$$\mathcal{W}_1(X,\mu,\nu) = \int dqdp\ \frac{1}{\pi\lambda} (\frac{2q^2+2p^2}{\lambda} - 1)\ e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})} \delta(X - \mu q - \nu p) \tag{2.25}$$

si ha:

$$\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}} e^{-\frac{X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}} \tag{2.26}$$

$$\mathcal{W}_1(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\ e^{-\frac{X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}}\ \frac{2X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)} \tag{2.27}$$

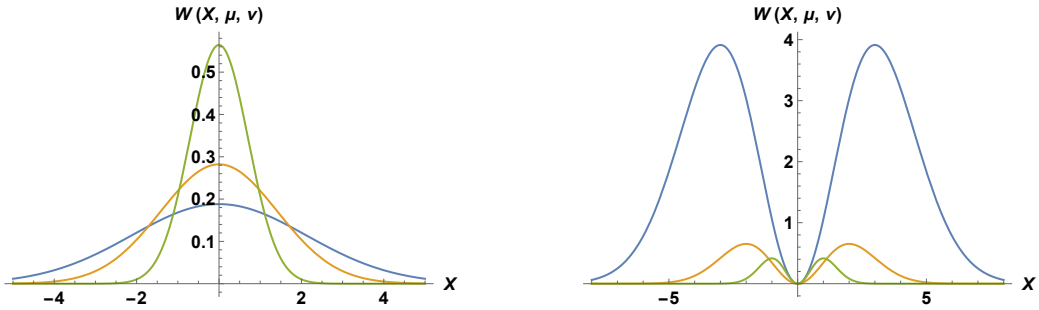


Figura 2.1: $\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu)$ e $\mathcal{W}_1(X,\mu,\nu)$ per alcuni valori di $\mu^2+\nu^2$

Nei grafici sono riportati $\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu)$ e $\mathcal{W}_1(X,\mu,\nu)$ in funzione della variabile casuale X, per i valori di $\mu^2+\nu^2$ pari a $1,4,9$, e sono mostrati in figura (2.1): come vediamo nel primo grafico è illustrato $\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu)$ che è definito positivo, ed è ancora una gaussiana. Vedremo nel prossimo paragrafo a quale particolare classe di tomogrammi appartenga. Nel secondo grafico è illustrato $\mathcal{W}_1(X,\mu,\nu)$, che è ancora definito positivo. Questo risultato è piuttosto rilevante in quanto la funzione di Wigner di partenza $W_1(q,p)$ poteva assumere anche valori negativi. Questo esempio è portato come prova del fatto che il tomogramma è una distribuzione e che può essere usata per risolvere il problema di Pauli.

2.3 Verifica del principio di indeterminazione

In questo paragrafo viene discussa la condizione per considerare un tomogramma come tomogramma di uno stato quantistico, data dal principio di indeterminazione di Heiseberg che, per stati non correlati si scrive:

$$\sigma_{QQ}\sigma_{PP} \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{2.28}$$

Ricordiamo che nelle nostre unità di misura adimensionali $\lambda = \hbar = 1$, la (2.28) viene riscritta come:

$$\sigma_{QQ}\sigma_{PP} \geq \frac{1}{4}. \tag{2.29}$$

Introducendo l'espressione tomografica delle varianze: $\sigma_{QQ} = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2$; $\sigma_{PP} = \langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2$, possiamo scrivere la (2.28) come:

$$\begin{aligned}&\left(\int X^2\mathcal{W}(X,1,0)\,dX - \left[\int X\mathcal{W}(X,1,0)\,dX\right]^2\right)\times\\ &\left(\int X^2\mathcal{W}(X,0,1)\,dX - \left[\int X\mathcal{W}(X,0,1)\,dX\right]^2\right) \geq \frac{1}{4}\end{aligned} \tag{2.30}$$

essendo $\mathcal{W}(X,1,0)$ e $\mathcal{W}(X,0,1)$ rispettivamente la densità di probabilità delle posizioni e dei momenti.

Limitiamoci al caso dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico:

$$\mathcal{W}_{0\lambda}(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}\sqrt{(\mu^2+\nu^2)}}\ e^{-\frac{X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}} \tag{2.31}$$

Osserviamo che $\langle X\rangle = 0$, perché $\mathcal{W}_0$ è pari. Poi risulta:

$$\mathcal{W}_0(X,1,0) = \mathcal{W}_0(X,0,1) = \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}}\ e^{-\frac{X^2}{\lambda}} \tag{2.32}$$

pertanto:

$$\int X^2\ \frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}}\ e^{-\frac{X^2}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2}. \tag{2.33}$$

Allora la relazione di Heisenberg si legge come:

$$\frac{\lambda}{2}\frac{\lambda}{2} \geq \frac{1}{4}. \tag{2.34}$$

Dunque il principio di indeterminazione è soddisfatto per $\lambda \geq 1$ e questo significa che si può ricostruire lo stato quantistico $\psi_0(q)$ a partire dal tomogramma in due passi: prima usando l'antitrasformata di Radon del tomogramma per ottenere la funzione di Wigner sullo spazio delle fasi, e poi da questa riottenere lo stato.

Il problema sorge invece per $\lambda < 1$ cioè per $\lambda \to 0$ poiché il principio di indeterminazione non è più soddisfatto. Ciò comporta che in questo limite, non ci sono più le ipotesi perché il tomogramma $\mathcal{W}_0$ possa corrispondere ad uno stato quantistico. Infatti [13], nel limite semiclassico "$\hbar$" $\to 0$ le fluttuazioni quantistiche di posizione e quantità di moto, in base alla costante di Planck, vengono eliminate, ed in generale i risultati di tale operazione portano ad una delta di Dirac. Ad esempio, considerando lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico:

$$\psi_0(q) = \frac{1}{(\pi\lambda)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{q^2}{2\lambda}} \tag{2.35}$$

il tomogramma della funzione di Wigner (1.37) ad esso associato, come mostrato nel paragrafo precedente sarà:

$$\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}} e^{-\frac{X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}} \tag{2.36}$$

Dato che in generale $\int dX\ \mathcal{W}(X,\mu,\nu) = 1$, per il teorema della delta di Dirac

mostrato in appendice D, ponendo $n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, il limite per $\lambda \to 0$ diviene:

$$\lim_{\lambda->0} \mathcal{W}_0(X, \mu, \nu) = \delta(X) \tag{2.37}$$

Il fatto che il limite semiclassico possa essere ottenuto con tale faciltà utilizzando il tomogramma rappresenta, come detto, uno dei pregi della rappresentazione tomografica della meccanica quantistica.

Confronto tra tomogrammi classici e quantistici

Come abbiamo visto, sullo stesso spazio, un tomogramma simplettico $\mathcal{W}(X, \mu, \nu)$ può determinare uno stato sia nel dominio classico che in quello quantistico. Cerchiamo di discutere alcune differenze che esistono per tomogrammi appartenenti a questi due domini. Questo discorso è stato fatto negli anni '70 riguardo la funzione di Wigner, e viene qui esibito nel contesto della descrizione tomografica.

I tomogrammi di stato in entrambi i domini devono soddisfare i seguenti requisiti comuni:

- Non-negatività $\mathcal{W}(X, \mu, \nu) \geq 0$
- Integrabilità $\int \ dX \ \mathcal{W}(X, \mu, \nu) < \infty$
- Omogeneità $\mathcal{W}(\lambda X, \lambda\mu, \lambda\nu) = \frac{1}{|\lambda|}\mathcal{W}(X, \mu, \nu)$

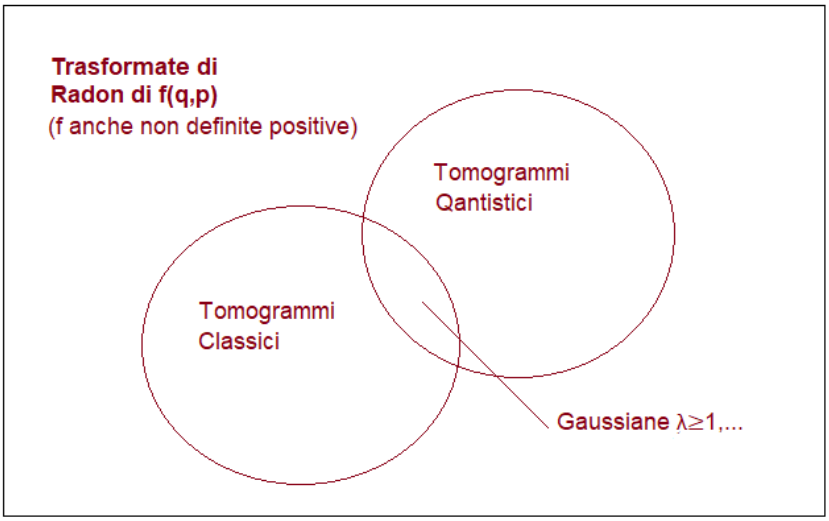
Sono richieste altre proprietà dei tomogrammi simplettici, per distinguere gli stati nei domini quantistici e classici. Un condizione necessaria per un tomogramma classico è, ad esempio, la non-negatività della sua anti-trasformata di Radon, cioè:

$$\frac{1}{2\pi} \int \ dX d\mu d\nu \ \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} \geq 0 \tag{2.38}$$

la violazione di questa disuguaglianza comporta che il tomogrammma non può descrivere uno stato classico. D'altro canto la condizione per descrivere uno stato quantistico per un tomogramma simplettico, può essere scritta in forma analoga:

$$\frac{1}{2\pi} \int \ dX d\mu d\nu \ \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(\hat{X} - \mu\hat{Q} - \nu\hat{P})} \geq 0 \tag{2.39}$$

il che significa che l'operatore ottenuto dalla suddetta antitrasformata di Radon, essendo uno stato rappresentato dall'opertore densità, deve essere un funzionale normalizzato non-negativo su osservabili. Se la disuguaglianza viene violata,



il tomogramma non descrive uno stato quantistico. I tomogrammi che soddisfano entrambe le condizioni appartengono all'intersezione tra dominio quantistico e dominio classico, come nel caso del tomogramma dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico. Vi sono poi dei tomogrammi che violano entrambe queste condizioni, pur soddisfacendo le tre proprietà sopra elencate. Come visto in [2], un esempio di ciò è dato dal tomogramma del primo stato eccitato dell'oscillatore armonico, scalato da un parametro ξ. Un altro vincolo che il tomogramma deve soddisfare per essere nel dominio quantistico è il principio di indeterminazione, come visto nel precedente paragrafo.

Per riassumere, abbiamo visto come sia stati classici, che stati quantistici, possono essere descritti da distribuzioni di probabilità tomografiche. La differenza tra stati classici e quantistici nella descrizione tomografica, è legata ai differenti vincoli che i tomogrammi degli stati devono soddisfare per essere nel dominio classico o quantistico. Come mostrato in figura (2.3), lo spazio ambiente delle trasformate di Radon delle funzoni definite sullo spazio delle fasi, contiene il sottoinsieme dei tomogrammi quantistici (tomogrammi ammisibili nel dominio quantistico), il sottinsieme dei tomogrammi classici (tomogrammi ammissibili nel dominio classico), ed il sottoinsieme dei tomogrammi ammissibili in nessuno dei due domini. Il dominio dei tomogrammi quantistici e il dominio dei tomogrammi classici hanno poi un'intersezione non nulla, in cui va inserito ad esempio il tomogramma dello

stato fondamentale dell'oscillatore armonico, entro limite $\lambda \to 0$.

Capitolo 3

Tomografia di Spin

3.1 Tomografia di spin per i qudits

In questo capitolo ci occuperemo dello studio dal punto di vista tomografico di sistemi quantistici finito dimensionali ad N-livelli [14]. Un esempio di quest'ultimi, sono i sistemi ad N gradi di libertà di spin, chiamati qdits, da cui discende il nome "tomografia di spin". L'idea di base tomografia di spin consiste nello studio tali sistemi, mediante una famiglia di distribuzioni di probabilità discrete. Diamo adesso una breve introduzione generale del problema, che affronteremo poi nel dettaglio per un sistema a due livelli, il qubit. Considerando una base ortonormale $|e_j\rangle$ per lo spazio di Hilbert e la decomposizione dell'identità $\sum_j |e_j\rangle \langle e_j| = \mathbb{1}$. Otteniamo in questo modo un vettore di probabilità $\vec{p}$, che rappresenta una distribuzione discreta, le cui componenti sono $p_j = \langle e_j|\rho|e_j\rangle \geq 0$, con $\sum_j p_j = 1$, associato ad ogni stato e ad ogni risoluzione dell'identità. Usando risoluzioni alternative, possiamo ottenere un'intera famiglia di vettori di probabilità partendo da quello inizialmente definito, attraverso l'azione di un operatore unitario. Tale operatore chiamato u appartiene al gruppo delle rotazioni $SU(N)$, e mediante la sua azione la risoluzione dell'identità divine: $\sum_j u\,|e_j\rangle \langle e_j|\, u^\dagger = \mathbb{1}$.[1] Possiamo dunque scrivere in modo compatto $\mathcal{W}(m|u)$, con $-j \leq m \leq j$, dove m rappresenta la proiezione dello spin sull'asse z, e $j(j+1)$ gli autovaolori del quadrato del momento angolare. Allora possiamo effettuare come sopra detto il passaggio:

$$\hat{\mathbb{1}} = \sum_m |m\rangle \langle m| \tag{3.1}$$

$$\hat{\mathbb{1}}_u = \sum_m u\,|m\rangle \langle m|\, u^\dagger \longrightarrow \hat{\mathbb{1}} = \sum_m |m,u\rangle \langle m,u| \tag{3.2}$$

[1] $\mathcal{SU}(N)$ sarà discusso nel paragrafo 2.3

per ogni $u \in SU(N)$.

Quest'ultima relazione fornisce una base nel sistema di riferimento unitario ruotato nello spazio di Hilbert, in corrispondenza di ciascun u. Ciò significa che la matrice unitaria u classifica il sistema di riferimento nel quale stiamo considerando gli stati di spin. Ad ogni stato quantistico considerato, rappresentato dalla matrice densità ρ, facciamo corrispondere la distribuzione di probabilità tomografica $\mathcal{W}(m|u)$. Questo processo si effettua mediante un operatore di dequantizzazione chiamato operatore di dequantizzazione per la tomografia di spin $\hat{\mathcal{D}}(m,u) = u\,|m\rangle\,\langle m|\,u^\dagger$ secondo la procedura $\rho \to \mathcal{W} = Tr(\rho\hat{\mathcal{D}})$. Il significato fisico di $\mathcal{W}(m|u)$ è che ,dato un sistema ad N gradi di libertà di spin il cui stato è descritto dalla matrice densità ρ, esso fornisca la probabilità di ottenere m come proiezione dello spin nella direzione data da u. La distribuzione di probabilità spin-tomografica è dunque data dagli elementi di matrice diagonali dell'operatore densità ρ, calcolati nel sistema di riferimento scelto, cioè:

$$\mathcal{W}(m|u) = Tr(\rho u\,|m\rangle\,\langle m|\,u^\dagger) = \langle m|u\rho u^\dagger|m\rangle\,. \tag{3.3}$$

Vediamo che $\mathcal{W}(m|u)$ soddisfa la proprietà di non-negatività e la condizione di normalizzazione:

$$\mathcal{W}(m|u) = Tr(\rho u\,|m\rangle\,\langle m|\,u^\dagger) = \langle m|u\rho u^\dagger|m\rangle \geq 0 \tag{3.4}$$

$$\sum_m \mathcal{W}(m|u) = Tr(\rho \sum_m u\,|m\rangle\,\langle m|\,u^\dagger) = Tr(\rho\hat{\mathbb{1}}) = 1 \tag{3.5}$$

e dunque capiamo che $\mathcal{W}(m|u)$ è l'analogo nella tomografia di spin del tomogramma simplettico $\mathcal{W}(X,\mu,\nu)$, dove m gioca il ruolo di X ed u il ruolo di (μ,ν).

L'equazione (3.3) è invertibile se è fornito un numero sufficiente di sistemi di riferimento, chiamato *quorum*. Questa definizione è stata coniata verso la fine degli anni $'50$ da U. Fano [15], il quale chiamò quorum un insieme di osservabili sufficiente per la completa determinazione della matrice densità. Ogni sistema di riferimeto è univocamente determinato da uno specifico elemento del gruppo u_k. Procediamo a chiarire questo concetto con un esempio illustrato nel paragrafo 3.3.

3.2 Le matrici di Pauli ed il gruppo $SU(2)$

In questo paragrafo illustrermo alcuni strumenti matematici [16] che saranno utili per capire il concetto di spin-tomografia come le matrici di Pauli ed il gruppo delle

rotazioni $SU(2)$.

Le matrici di Pauli

Le matrici di Pauli sono un insieme di tre matrici complesse 2×2 Hermitiane ed unitarie che si denotano con σ_i, con $i = 1, 2, 3$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a cui si aggiunge la matrice identità identificandola con σ_0. Insieme ad essa, le matrici di Pauli formano una base per lo spazio vettoriale delle matrici Hermitiane 2×2, dunque ogni matrice di questo tipo si può scrivere come combinazione lineare di σ_i.

Le proprietà delle σ_i sono:

- $det(\sigma_i) = -1$
- $Tr(\sigma_i) = 0$
- autovalori ±1
- autovettori normalizzati $\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si definisce vettore di Pauli $\vec{\sigma} = \sigma_1\hat{x} + \sigma_2\hat{y} + \sigma_3\hat{z}$ un vettore che ha per componenti le tre matrici σ_i e che serve per passare da una base vettoriale qualsiasi ad una base formata dalle matrici di Pauli. Infatti ogni vettore $\vec{a}$ può essere scritto nella base delle σ_i mediante il prodotto scalare:

$$\vec{a} \cdot \vec{\sigma} = (a_i\hat{x}_i) \cdot (\sigma_j\hat{x}_j) = a_i\sigma_j\delta_{ij} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_3 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Inoltre, dato $\vec{a} = a\hat{n}$ con $|\hat{n}| = 1$, si ricava tramite sviluppo in serie che l' esponenziale di un vettore di Pauli si può scrivere come:

$$e^{ia(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})} = \mathbb{1}\cos(a) + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})\sin(a) \quad ; \quad det(e^{ia(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})}) = 1 \tag{3.7}$$

Rotazioni

Dato un ket $|a\rangle$, si definisce un ket ruotato: $|a\rangle_R = \mathcal{R}\,|a\rangle$. $\mathcal{R}$ è un operatore la cui matrice associata ha dimensione che dipende dalla dimensione dello spazio dei

ket considerato. Ad esempio per $N = 2$, particella a spin $\frac{1}{2}$, $\mathcal{R}$ è 2×2. Definiamo adesso l'operatore infinitesimo che caratterizza la rotazione attorno alla direzione del vettore unitario $\hat{n}$, di un angolo $d\phi$:

$$\mathcal{R}(\hat{n}, d\phi) = 1 - (\frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{\hbar})d\phi$$

dove $\vec{J}$ è l'operatore hermitiano associato alla rotazione attorno ad un asse, le cui componenti seguono la seguente regola di commutazione: $[J_i, J_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}J_k$. Ad esempio per rotazioni finite attorno all'asse z di un angolo ϕ si avrà:

$$\mathcal{R}_z(\phi) = e^{-\frac{iJ_z}{\hbar}\phi}. \tag{3.8}$$

Consideriamo adesso un sistema a due livelli costituito da una particella spin $\frac{1}{2}$. Chiameremo spinori a due componenti ψ_+ e ψ_-, gli elementi di base del sistema:

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

I coefficienti di un generico ket $|a\rangle$ nella base di ψ_+ e ψ_- saranno:

$$\begin{pmatrix} \langle +|a\rangle \\ \langle -|a\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$$

ed ogni ket si potrà esprimere come combinazione lineare degli spinori:

$$|a\rangle = \psi_+ c_+ + \psi_- c_-. \tag{3.10}$$

Considerando l'operatore di spin $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, gli elementi di matrice di una qualsiasi sua componente S_k nella base degli spinori, si possono porre uguali, a meno di un fattore $\frac{\hbar}{2}$, alle matrici di Pauli:

$$\langle \pm|S_k|+\rangle = (\frac{\hbar}{2})(\sigma_k)_{\pm,+}$$

$$\langle \pm|S_k|-\rangle = (\frac{\hbar}{2})(\sigma_k)_{\pm,-}$$

e dunque il valore d'aspettazione di S_k in termini di ψ_+ , ψ_- e σ_k è:

$$\langle S_k\rangle = \langle a|S_k|a\rangle = \sum_{a'=+,-}\sum_{a''=+,-}\langle a|a'\rangle\langle a'|S_k|a''\rangle\langle a''|a\rangle = \sum_{a'}\sum_{a''}c^*_{a'}c_{a''}\langle a'|S_k|a''\rangle =$$

$$= (\frac{\hbar}{2})\psi^\dagger_\pm\sigma_k\psi_\pm. \tag{3.11}$$

La rappresentazione matriciale 2×2 dell'operatore rotazione $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\hat{n},\phi)$ sarà in questa notazione:

$$\mathcal{R}(\hat{n},\phi) = e^{-i(\frac{\vec{S}\cdot\hat{n}}{\hbar}\phi)} = e^{-i(\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}\phi)} \tag{3.12}$$

$$e^{-i(\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}\phi)} = \begin{pmatrix}\cos(\frac{\phi}{2}) - in_z\sin(\frac{\phi}{2}) & (-in_x - n_y)\sin(\frac{\phi}{2})\\ (-in_x + n_y)\sin(\frac{\phi}{2}) & \cos(\frac{\phi}{2}) + in_z\sin(\frac{\phi}{2})\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

che non è altro che la forma matriciale della (3.7) in cui $a = \frac{\phi}{2}$.

La matrice (3.13) agisce sullo spinore a due componenti $\psi_\pm$, e dunque per rotazioni, esso cambia nel seguente modo:

$$\psi_{\pm R} = e^{-i(\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}\phi)}\psi_\pm \tag{3.14}$$

Gruppo SU(2)

Definiamo la matrice unitaria $uu^\dagger = \mathbb{1}$ e unimodulare $det(u) = 1$:

$$u(b,c) = \begin{pmatrix} b & c\\ -c^* & b^*\end{pmatrix} \tag{3.15}$$

dove $(b,c) \in \mathbb{C}$ si dicono *parametri di Cayley-Klein*. Questa dipende da soli tre parametri reali indipendenti grazie alla condizione $|b|^2 + |c|^2 = 1$.

Notando che:

- $\mathcal{R}e(b) = \cos(\frac{\phi}{2})$
- $\mathcal{I}m(b) = -n_z\sin(\frac{\phi}{2})$
- $\mathcal{R}e(c) = -n_y\sin(\frac{\phi}{2})$
- $\mathcal{I}m(c) = -n_x\sin(\frac{\phi}{2})$

è chiaro che $u(b,c) = \exp\big(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}\phi\big)$. Quindi $u(b,c)$ è una matrice delle rotazioni. Tale matrice definisce il gruppo $SU(2)$, ossia il gruppo delle matrici unitarie 2×2 con determinante unitario. Inoltre i generatori di $SU(2)$ sono le matrici di Pauli σ_k. Più in generale in matematica, si definisce il gruppo unitario speciale di

grado N, abbreviato con $SU(N)$,come il gruppo delle matrici unitarie $n \times n$ con determinante unitario.

3.3 Il qubit

Consideriamo la matrice densità diagonale ρ_0, caratterizzata in termini di un singolo parametro reale $-1 \leq \omega \leq 1$:

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1-\omega \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

lo spettro degli autovalori di ρ_0 è dunque costituito da $\omega = \pm\frac{1}{2}$. Ora, essendo ρ_0 hermitiana, è sempre possibile sciverla in termini di matrici di Pauli e di identità, le quali formano una base per $SU(N)$:

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \omega\sigma_3). \tag{3.17}$$

Per il Teorema Spettrale[2], l'azione aggiunta di un operatore unitario u su ρ_0 fornisce ancora una matrice hermitiana ρ con lo stesso spettro di ρ_0, ma in un sistema di riferimento ruotato, labellato dalla scelta della rappresentazione di u.

$$\rho = u\rho_0 u^\dagger \tag{3.18}$$

Per un sistema a due livelli, il gruppo che provvede alle trasformazioni unitarie è $SU(2)$, e tutte le possibili rotazioni da ρ_0 a ρ costituiscono le orbite del gruppo.

Dunque ancora una volta possiamo scrivere la generica matrice densità in termini di σ_0 e σ_k:

$$\rho = a_0\sigma_0 + a_i\sigma_i \tag{3.19}$$

Dalla proprietà $Tr(\rho) = 1$ e $Tr(\sigma_i) = 0$ ricaviamo $a_0 = \frac{1}{2}$.

Scegliendo la seguente rappresentazione di u:

$$u = \frac{1}{2}\sigma_0 + i(\vec{x}\cdot\vec{\sigma}) \tag{3.20}$$

con $det(u) = 1$, e $\sum_{j=0}^{3}\ x_j^2 = 1$, ed eguagliando la (3.19) con la (3.18):

$$\rho = u\rho_0 u^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \omega(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})) \tag{3.21}$$

[2]Ogni matrice normale ($A^\dagger A = AA^\dagger$) è simile (cioè ha gli stessi autovalori,rango,determinante e traccia) ad una matrice diagonale tramite una matrice unitaria.

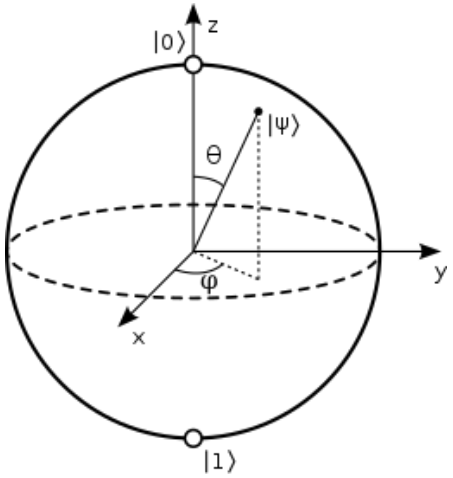


Figura 3.1: Sfera di Bloch

dove i parametri a_i sono funzioni degli elementi della matrice unitaria tramite la relazione:

$$a_i \propto \frac{1}{2} Tr[\sigma_i u \sigma_3 u^\dagger] \tag{3.22}$$

dove

$$Tr(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij} \tag{3.23}$$

In generale le orbite unitarie del gruppo $SU(N)$ sono le sfere in $\mathbb{R}^{N^2-1}$ e, nel caso $N = 2$ (qubit), lo spazio degli stati quantistici coincide geometricamente con lo spazio totale tirdimensionale della sfera di Bloch B^2 (figura 3.1).I punti all'interno della sfera($0 \leq \omega^2 < 1$), coincidono con gli stati misti descritti dalla matrice densità ρ. I punti che si trovano sulla superficie della sfera ($\omega^2 = 1$), coincidono con gli stati quantistici puri.

Applicazione: tomografia di spin per un qubit

Consideriamo la matrice densità associata ad un sistema quantistico a due livelli, come descritta dall'equazione (3.21):

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + y_3 & y_1 - iy_2 \\ y_1 + iy_2 & 1 - y_3 \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

con $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \omega^2 \leq 1$. In questo caso il *quorum* è rappresentato dai tre sistemi di riferimento ruotati ottenuti attraverso le matrici unitarie.

$$u_1 = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_2} \quad u_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_1} \quad u_3 = \mathbb{1} \tag{3.25}$$

che tramite azione aggiunta, generano le rotazioni del sistema di riferimento originale, dove lo spin è parallelo all'asse z, portandolo nel sistema di riferimento dove lo spin è parallelo all'asse x, y e, di nuovo, z. Calcoliamo adesso la probabilità di misurare la proiezione di spin $m = \frac{1}{2}$ oppure $m = -\frac{1}{2}$ in ciascun sistema di riferimento, utilizzando la distribuzione di probabilità spin-tomografica, definita in (3.3). Per effettuare il calcolo abbiamo adoperato la formula (3.7). Otteniamo che la probabilità di misurare la proiezione di spin $m = \frac{1}{2}$ in ciascun sistema di riferimento è data da:

$$\mathcal{W}(\frac{1}{2}|u_1) = \langle\frac{1}{2}|u_1\rho u_1^\dagger|\frac{1}{2}\rangle = \frac{1+y_1}{2} \tag{3.26}$$

$$\mathcal{W}(\frac{1}{2}|u_2) = \langle\frac{1}{2}|u_2\rho u_2^\dagger|\frac{1}{2}\rangle = \frac{1+y_2}{2} \tag{3.27}$$

$$\mathcal{W}(\frac{1}{2}|u_3) = \langle\frac{1}{2}|u_3\rho u_3^\dagger|\frac{1}{2}\rangle = \frac{1+y_3}{2} \tag{3.28}$$

mentre ,analogamente, la probabilità di misurare la proiezione di spin $m = -\frac{1}{2}$ in ciascun sistema di riferimento è data da $\mathcal{W}(u_1|-\frac{1}{2}) = 1 - \mathcal{W}(u_1|\frac{1}{2})$:

$$\mathcal{W}(-\frac{1}{2}|u_1) = \langle-\frac{1}{2}|u_1\rho u_1^\dagger|-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1-y_1}{2} \tag{3.29}$$

$$\mathcal{W}(-\frac{1}{2}|u_2) = \langle-\frac{1}{2}|u_2\rho u_2^\dagger|-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1-y_2}{2} \tag{3.30}$$

$$\mathcal{W}(-\frac{1}{2}|u_3) = \langle-\frac{1}{2}|u_3\rho u_3^\dagger|-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1-y_3}{2} \tag{3.31}$$

il che implica che:

$$y_k = \mathcal{W}(\frac{1}{2}|u_k) - \mathcal{W}(-\frac{1}{2}|u_k) = 2\mathcal{W}(\frac{1}{2}|u_k) - 1. \tag{3.32}$$

Sostituendo questi valori così determinati delle y_k, si ricostruisce lo stato del sistema. Ponendo $\mathcal{W}_k = \mathcal{W}(u_k|\frac{1}{2})$ si perviene a:

$$\rho_{\mathcal{W}} = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sum_k (2\mathcal{W}_k - 1)\sigma_k) \tag{3.33}$$

Questa equazione ci dice che è possibile ricostruire la matrice densità associata a stati arbitrari di un qubit, in termini di probabilità tomografiche $\mathcal{W}(m|u_k)$, il cui numero minimo è specificato dal *quorum* di sistemi di riferimento (che nel nostro caso abbiamo mostrato essere proprio tre). Riferndoci all'equazione (3.32), da un punto di vista geometrico, le componenti $\mathcal{W}_k$ di $\mathcal{W}(u_k|\frac{1}{2})$ determinano le coordinate di punti appartenenti al simplesso 1-dimensionale delle probabilità

tomografiche come mostrato in figura (3.2).

Per riassumere, le (3.3), ed (3.33) producono, per uno stato quantistico generico, misto, a due livelli, la rappresentazione tomografica e la sua formula inversa. Per stati puri sono necessari solo due sistemi di riferimento per ricostruire lo stato, ad esempio u_1 ed u_3, in modo tale che la probabilità $\mathcal{W}_2$ sia determinata a partire dalle altre due:

$$(2\mathcal{W}_2 - 1)^2 = 1 - (2\mathcal{W}_1 - 1)^2 - (2\mathcal{W}_3 - 1)^2. \tag{3.34}$$

La (3.33), ricostruisce effettivamente uno stato quantistico solo se certe condizioni vengono soddisfatte. Infatti, preso sulla diagonale (condotta partendo dall'origine, fino al vertice (1,1,1) del cubo di lato 1) , un punto generico di coordinate $\mathcal{W}_k = (1 - \epsilon_k)$, $(k = 1, 2, 3)$, mostriamo per quali valori di ϵ_k, l'espressione seguente corrisponda ad uno stato ρ:

$$\frac{1}{2}(\sigma_0 + \sum_k (1 - 2\epsilon_k)\sigma_k). \tag{3.35}$$

Calcoliamo:

$$det\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + (1 - 2\epsilon_3) & (1 - 2\epsilon_1) - i(1 - 2\epsilon_2) \\ (1 - 2\epsilon_1) + i(1 - 2\epsilon_2) & 1 - (1 - 2\epsilon_3) \end{pmatrix}\right] \tag{3.36}$$

e per sempilcità poniamo $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$. Si ha che il determinante (3.36), è non-negativo quando l'espressione:

$$6\epsilon^2 - 6\epsilon + 1 \leq 0 \tag{3.37}$$

cioè quando:

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{6} \leq \epsilon \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{6}. \tag{3.38}$$

La (3.38) mostra che i valori di ϵ compresi nell'intervallo corrispondono a punti della sfera di Bloch, e dunque a stati quantistici. I valori esterni all'intervallo, non corrispondono a nessuno stato quantistico.

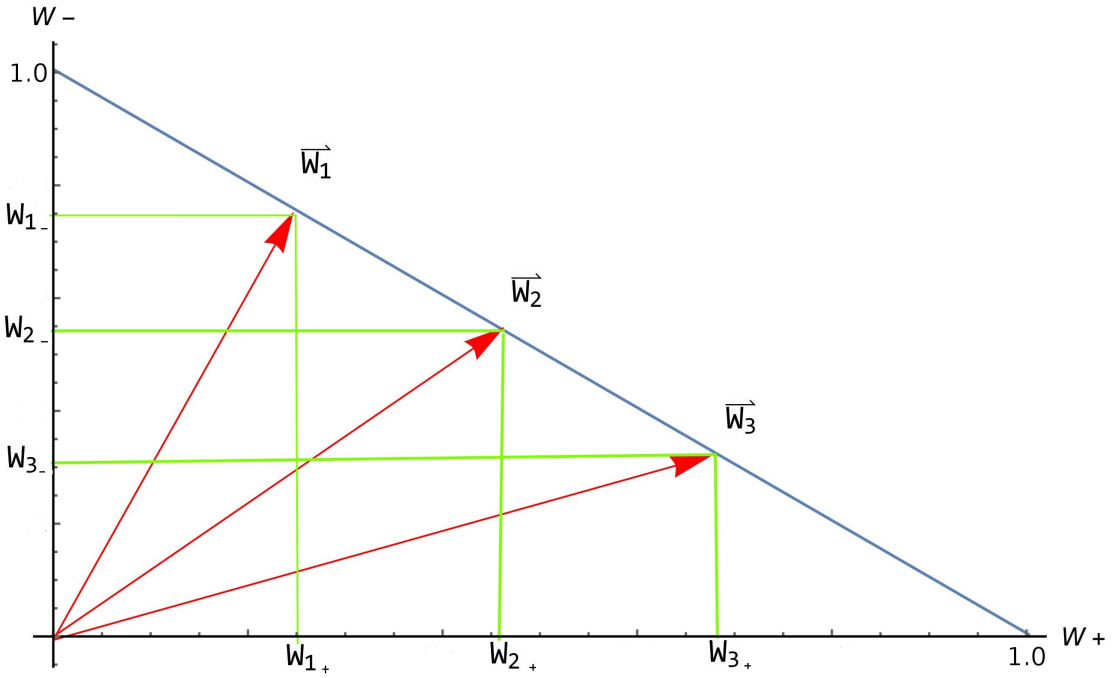


Figura 3.2: Simplesso

Conclusioni

Prendendo spunto dal problema di Pauli, abbiamo descritto la rappresentazione di probabilità degli stati quantistici, in cui matrici densità per stati puri o misti sono associate a distribuzioni di probabilità tomografiche, contenenti la completa informazione sugli stati quantistici. Ci siamo in particolare soffermati sugli aspetti cinematici di tale descrizione, tralasciando qualunque aspetto dell'evoluzione temporale. Abbiamo osservato che nel contesto della tomografia simplettica, il tomogramma quantistico può essere visto come la trasformata di Radon della funzione di Wigner. Il passaggio intermedio attraverso la funzione di Wigner può, tuttavia, essere rimosso, considerando direttamente il tomogramma dell'operatore densità. Quest'ultima considerazione fornisce una corrispondenza uno a uno, tra la rappresentazione tomografica della meccanica quantistica, e quella usuale. Inoltre abbiamo studiato agevolmente, attraverso l'introduzione di un parametro λ, il limite semiclassico della meccanica quantistica. Abbiamo caratterizzato, in termini di disuguaglianze, l'insieme di tutte le funzioni tomografiche che descrivono gli stati quantistici, gli stati classici o nessuno stato, e abbiamo ricavato un vincolo fondamentale per il tomogramma quantistico, utilizzando le relazioni di indeterminazione di Heisenberg. Un discorso analogo è stato presentato nella descrizione di un sistema discreto ad N-livelli di spin, per il quale abbiamo definito una tomografia di spin discreta. In questo contesto abbiamo discusso il concetto di *quorum*, ossia di numero minimo di tomogrammi necessari alla ricostruzione dello stato. Anche in quel caso, abbiamo mostrato come il tomogramma ricostruisca lo stato del sistema solo rispettando certi vincoli, di cui si è discussa la rappresentazione geometrica.

Appendice A

Sulla funzione di Wigner dell'oscillatore armonico

In questa appendice ci proponiamo di mostrare lo svolgimento esplicito degli integrali (1.37) e (1.38). Per fare ciò, ricordiamo i risultati di alcuni integrali gaussiani. Si definisce integrale gaussiano fondamentale:

$$\int e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}. \tag{A.1}$$

Generalizziamo il risultato inserendo un parametro α:

$$\int e^{-\alpha y^2}\, dy = \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}. \tag{A.2}$$

infatti derivando ambo i membri della (A.2) rispetto al parametro α si ottiene:

$$\begin{aligned} \int y^2\, e^{-\alpha y^2}\, dy = \sqrt{\pi} &= -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Considerando le nostre variabili adimensionali, ed il parametro libero λ, la funzione di Wigner dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico è:

$$\begin{aligned} W_0(q,p) &= \frac{1}{2\pi\lambda}\int dx\; e^{\frac{ipx}{\lambda}}\; \psi_0^*\left(q-\frac{x}{2}\right)\psi_0\left(q+\frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}}\int dx\; e^{-\frac{1}{2\lambda}(q+\frac{x}{2})^2} e^{-\frac{1}{2\lambda}(q-\frac{x}{2})^2} \end{aligned} \tag{A.4}$$

svolgendo il quadrato negli esponenti della (A.4), e manipolando gli esponenzioali tramite il metodo del completamento del quadrato, si perviene a:

$$W_0(q,p) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}}\ e^{-\frac{q^2}{\lambda}} e^{-\frac{p^2}{\lambda}} \int\ dx\ e^{\left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}}+\frac{ix}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2} \tag{A.5}$$

dove effettuando la seguente sostituzione[1]: $iz = \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} + \frac{ix}{2\sqrt{\lambda}}\right)$; $\quad dx = 2\sqrt{\lambda}dz$, e integrando le gaussiane così ottenute, si ha:

$$W_0(q,p) = \frac{1}{\pi\lambda} e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})}. \tag{A.6}$$

Per il calcolo della funzione di Wigner del primo stato eccitato dell'oscillatore armonico, il procedimento è analogo al caso precedente, ed il risultato a cui si perviene è:

$$W_1(q,p) = \frac{1}{\pi\lambda}(\frac{2q^2+2p^2}{\lambda} - 1)\ e^{-(\frac{q^2+p^2}{\lambda})}. \tag{A.7}$$

[1]Qui si è usato il concetto di integrale di Fresnel generalizzato, che permette di sfruttare l'analisi complessa per pervenire a risultati analoghi agli integrali gaussiani.

Appendice B

Sui tomogrammi dell'oscillatore armonico

In questa appendice ci proponiamo di mostrare lo svolgimento esplicito degli integrali (2.24) e (2.25). Per prima cosa ricordiamo la rappresentazione di Fourier della delta di Dirac:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk\ e^{ikx} \tag{B.1}$$

E riscriviamo la formula (2.16) esplicitanto la δ:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int dq\ dp\ dk\ W(q, p)\ e^{ik(X - \mu q - \nu p)} \tag{B.2}$$

Il tomogramma dello stato fondamentale dell'oscillatore armonico è:

$$\mathcal{W}_0(X, \mu, \nu) = \int dq\ dp\ dk\ \frac{1}{2\pi}\ e^{ik(X - \mu q - \nu p)}\ \frac{e^{-\frac{q^2}{\lambda}} e^{-\frac{p^2}{\lambda}}}{\pi\lambda} \tag{B.3}$$

Inizieremo integrando in dq ed in dp, provvedendo quindi ad isolare gli esponenti contenenti le q e le p:

$$\mathcal{W}_0(X, \mu, \nu) = \int \frac{dk}{2\pi^2\lambda}\ e^{ikX}\ e^{-\frac{k^2\mu^2\lambda}{4} - \frac{k^2\nu^2\lambda}{4}} \int dq dp\ e^{-\left(\frac{q}{\sqrt{\lambda}} + \frac{ik\mu\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2}\ e^{-\left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} + \frac{ik\nu\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2} \tag{B.4}$$

effettuando le sostituzioni:

- $a = \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda}} + \frac{ik\mu\sqrt{\lambda}}{2}\right)$
- $dq = da\sqrt{\lambda}$

- $b = \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} + \frac{ik\nu\sqrt{\lambda}}{2} \right)$
- $dp = db\sqrt{\lambda}$

ed integrando, otteniamo l'integrale di dk:

$$\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}}\, e^{-\left(\frac{k\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{2} - \frac{iX}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}} \right)^2} \tag{B.5}$$

in cui effettuando la sostituzione:

- $y = \left(\frac{k\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{2} - \frac{iX}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}} \right)$
- $dk = \frac{dy\ 2}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$

da cui integrando la gaussiana così ottenuta, perveniamo al risultato:

$$\mathcal{W}_0(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}} e^{-\frac{X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}} \tag{B.6}$$

Per il calcolo della funzione del tomogramma del primo stato eccitato dell'oscillatore armonico, il procedimento è analogo al caso precedente, ed il risultato a cui si perviene è:

$$\mathcal{W}_1(X,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\, e^{-\frac{X^2}{\lambda\sqrt{\mu^2+\nu^2}}}\ \frac{2X^2}{\lambda(\mu^2+\nu^2)}. \tag{B.7}$$

Appendice C

Sui simboli di Weyl

Consideriamo il simbolo di Weyl di un operatore $\hat{A}$:

$$W_{\hat{A}} = \frac{1}{2\pi} \int du\ e^{ipu}\ \langle q + \frac{u}{2}|\hat{A}|q - \frac{u}{2}\rangle \tag{C.1}$$

Il simbolo di Weyl di un operatore espresso solo nella base delle q o solo nella base delle p è particolarmente semplice da calcolare, in quanto:

$$\begin{aligned} W_{\hat{A}} &= \frac{1}{2\pi} \int du\ e^{ipu}\ \langle q + \frac{u}{2}|\hat{A}(q)|q - \frac{u}{2}\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int du\ e^{ipu} A\big(q + \frac{u}{2}\big)\delta(u) = A(q) \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} W_{\hat{A}} &= \frac{1}{2\pi} \int du\ e^{iqv}\ \langle p + \frac{v}{2}|\hat{A}(p)|p - \frac{v}{2}\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int du\ e^{iqv} A\big(p + \frac{v}{2}\big)\delta(v) = A(p) \end{aligned} \tag{C.3}$$

inoltre simbolo di Weyl dell'identità è 1.

Per calcolare il simbolo di Weyl di $W_{e^{i(X\hat{\mathbb{1}} - \mu\hat{Q} - \nu\hat{P})}}$, tramite la (C.1), ricorriamo alla formula di Baker–Campbell–Hausdorff:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}\ e^{\hat{B}}\ e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{C.4}$$

$$
\begin{aligned}
&W_{e^{i(X\hat{\mathbb{1}}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})}} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int du\ e^{ip'u}\ \langle q+\frac{u}{2}|e^{i(X\hat{\mathbb{1}}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})}|q-\frac{u}{2}\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\ e^{iX}\ e^{-i\frac{\mu\nu}{2}}\int du\ e^{ip'u}\ \langle q+\frac{u}{2}|e^{-i\mu\hat{Q}}e^{-i\nu\hat{P}}|q-\frac{u}{2}\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\ e^{iX}\ e^{-i\frac{\mu\nu}{2}}\int du\ e^{ip'u}\int dp\ e^{-i\mu\left(q+\frac{u}{2}\right)}\ e^{-i\nu p}\ \langle q+\frac{u}{2}|p\rangle\ \langle p|q-\frac{u}{2}\rangle
\end{aligned}
$$

da cui, ricordando che:

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{iqp}}{\sqrt{2\pi}} \tag{C.5}$$

e la definizione di trasformata di Fourier della delta, si perviene al risultato:

$$W_{e^{i(X\hat{\mathbb{1}}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})}} = e^{i(X-\mu q-\nu p)}. \tag{C.6}$$

Analogamente:

$$W_{\delta(X\hat{\mathbb{1}}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})} = \delta(X-\mu q-\nu p) \tag{C.7}$$

perché:

$$
\begin{aligned}
&W(\delta(X\hat{\mathbb{1}}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})) = \\
&W\big(\frac{1}{2\pi}\int dk\ e^{ik(X\mathbb{1}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})}\big) = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int dk\ W(e^{ik(X\mathbb{1}-\mu\hat{Q}-\nu\hat{P})}) = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\int dk\ e^{ik(X-\mu q-\nu p)} = \\
&\quad = \delta(X-\mu q-\nu p)
\end{aligned}
\tag{C.8}
$$

Appendice D

Sul teorema della Delta di Dirac

Diamo una dimostrazione del teorema della Delta di Dirac che abbiamo usato per dimostrare la (2.37).

Enunciato: sia f una funzione sommabile sulla retta reale tale che:

$$\int dx f(x) = N \tag{D.1}$$

allora $nf(n(x-x')) \to N\delta(x-x')$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione: consideriamo una funzione test ϕ. Allora per il Teorema di Lesbegue:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n \int f(n(x-x'))\phi(x)\ dx = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f(s)\phi(\frac{s}{n}+x')ds = \\
&= \int \lim_{n\to\infty} f(s)\phi(\frac{s}{n}+x')ds = \\
&= \phi(x') \int f(s)\ ds = \\
&= N\phi(x').
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Bibliografia

[1] G. Esposito, G. Marmo, G. Miele, G. Sudarshan, *Advanced Concepts in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom 2015.

[2] A. Ibort, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia, *An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics*, Phys. Scr. **79** pag. 065013, 2009;

[3] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, *Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244, 1993.

[4] T. J. Dunn, I. A. Walmsley, S. Mukamel, *Experimental Determination of the Quantum-Mechanical State of a Molecular Vibrational Mode Using Fluorescence Tomography* Phys. Rev. Lett. **74**, 884, 1995.

[5] C. Kurtsiefer, T. Pfau, J. Mlynek, *Measurement of the Wigner function of an ensemble of helium atoms*, Nature **386**, 150, 1997.

[6] P. Caldirola, R. Cirelli, G. M. Prosperi, *Introduzione alla Fisica Teorica*, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1982.

[7] W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics*, translated by P. Achuthan and K. Venkatesan page 17, (Allied Publishers Private Limited, Bombay 1980).

[8] H. Reichenbach, *Philosophy of Quantum Mechanics*, (University of California Press, LA 1942).

[9] V. I. Man'ko, G. Marmo, and P. Vitale, *Phase space distribution and duality symmetry for star products*, Phys. Lett. A **334**, 2005.

[10] Albert Messiah, *Quantum mechanics*, North-Holland Publishing Company, 1967.

[11] Paolo Facchi, Marilena Ligabò, Sergio Solimini, *Tomography: mathematical aspects and applications*, Phys. Scr. Vol. **90** N.7, 2015;

[12] P. Facchi, M. Ligab'o, S. Pascazio, *On the inversion of the Radon transform: standard vs M2 approach*, Journal of Modern Optics **57**, issue 3, p. 239-243, (2010)

[13] V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, A. Stern, F. Ventriglia, *Tomograms in the Quantum-Classical transition*, Phys. Lett.A Vol. **343**, pag. 251, 2005.

[14] Vladimir I. Man'ko, Giuseppe Marmo, Franco Ventriglia, e Patrizia Vitale, *Metric on the space of quantum states from relative entropy. Tomographic reconstruction*, J. Phys. A: Math. Teor. Vol. **50** pag. 335302, 2017.

[15] U. Fano, *Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques*, Rev. Mod Phys. **29**, 74, Sec. 6, 1957.

[16] Jun John Sakurai, *Meccanica quantistica moderna*, Zanichelli, 2000.