

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Precessione di Thomas e applicazioni

Relatori:

Prof. Gennaro Miele

Candidato:

Simone Morviducci

Matricola N85000443

A.A. 2017/2018

Sommario

Sommario.....	2
Introduzione	3
Ringraziamenti	3
Rotazione di Wigner	4
Precessione di Thomas	11
Interazione spin-orbita	14
Confronto con l'equazione di Dirac	17
Spettro di un atomo idrogenoide:	18
Accoppiamento L-S	20
Effetto Zeeman	23
Effetto Zeeman normale.....	23
Effetto Zeeman anomalo:	24
Appendice.....	26
1. Paradosso di Mocanu	26
2. Ugualianza del modulo di $\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$ con il modulo di $\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v}$	26
3. Dimostrazione della formula: $\mathbf{v} \oplus d\mathbf{v}' \simeq \mathbf{v} + d\mathbf{v}' \perp \gamma$ e della formula $d\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v} = d\mathbf{v} \perp ' + \mathbf{v}$	27
4. Mostriamo che vale: $\boldsymbol{\omega T} = \mathbf{a} \times \mathbf{v} v^2 \gamma - 1 = \gamma^2 \mathbf{1} + \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{v} c^2$	28
5. Mostriamo che al primo ordine: $\mathbf{a} \times \mathbf{v} v^2 \gamma - 1 \simeq \gamma^2 \mathbf{1} + \gamma \mathbf{a} \times \mathbf{v} c^2$	28
6. L'espressione dell'energia potenziale di Thomas	28
7. La derivata temporale di un vettore in un sistema di riferimento ruotante in meccanica classica	29
8. La derivata temporale di un vettore in un sistema di riferimento ruotante in relatività ristretta	29
9. Espressione dell'ampiezza del doppietto:	30
Bibliografia	31

Introduzione

La precessione di Thomas è una correzione relativistica che si applica allo spin di una particella (per esempio un elettrone) e aggiunge una velocità angolare allo spin della particella che si muove lungo un'orbita curvilinea legata alla velocità angolare orbitale.

Nel 1924 Wolfgang Pauli per giustificare lo spettro di emissione dei metalli alcalino-terrosi introdusse lo spin come un "grado di libertà quantico a due valori" associato agli elettroni del guscio esterno.

Nel 1925 George Uhlenbeck e Samuel Goudsmit in un articolo sulla rivista *Naturwissenschaften* [1] interpretando lo spin come "un'auto rotazione degli elettroni" riuscirono a spiegare in modo qualitativo l'effetto Zeeman anomalo e lo spettro fine degli atomi idrogenoidi ma come osservato in un successivo articolo su *Nature* [2] non c'era accordo quantitativo: in particolare la separazione dello spettro dei doppietti di spin dovuto all'effetto Zeeman era la metà di quanto previsto teoricamente.

Nell'anno 1926 Thomas riuscì a risolvere tale disaccordo tramite l'uso di un effetto relativistico, già noto a Ludwik Silberstein [3], in un articolo pubblicato sulla rivista *Nature* [4]. Tale effetto relativistico sarà poi noto come rotazione di Thomas o Wigner essendo stata derivata da quest'ultimo nel 1939 [5]. L'accordo con i dati sperimentali contribuì ad un'interpretazione dello spin come momento angolare e contemporaneamente chiari il significato dell'effetto relativistico tanto che l'applicazione di tale effetto al moto di una particella con spin venne in seguito chiamata Precessione di Thomas.

Viceversa Ludwik Silberstein aveva erroneamente commentato, una volta spiegata l'intima connessione tra l'applicazione di due trasformazioni di Lorentz pure ("boost", spinte) e la non commutatività della composizione relativistica delle velocità (che analizzeremo brevemente anche qui), che una trasformazione di Lorentz pura, senza rotazione degli assi sarebbe stata sufficiente in ogni caso fisico.

In questa tesi dopo aver ricavato l'espressione della rotazione di Wigner (nel caso di rotazione infinitesima) e la precessione di Thomas, procederemo a ricavare la correzione al termine relativistico dell'interazione spin-orbita che va inserita nell'equazione di Schrödinger che non è relativistica. Storicamente questo è proprio il modo in cui si è proceduto per trovare l'accordo quantitativo con dati sperimentali.

Nel 1928 Dirac ha sviluppato l'equazione, che ha poi preso il suo nome, che prevede naturalmente l'esistenza dello spin di una particella e descrive correttamente il comportamento dell'elettone e di tutte le particelle a spin $1/2$ ed è quindi lo strumento più adatto per analizzare tali particelle.

Noteremo che nel limite di velocità $v \ll c$ tale equazione si riduce a quella di Schrodinger non relativistica con 3 termini aggiuntivi (che saranno dunque relativistici) uno dei quali è proprio il termine di interazione spin-orbita: in altre parole si può dire che la "precessione di Thomas" è un effetto incluso *naturalmente* nell'equazione di Dirac.

Citeremo poi alcune applicazioni in cui il termine di spin-orbita si mostra rilevante giustificando così l'introduzione della correzione di tale termine.

Ringraziamenti

Ringrazio il mio relatore, professore Gennaro Miele, per avermi proposto questo interessante argomento e per avermi guidato nella sua stesura. Ringrazio inoltre i professori Vittorio Cataudella e Giulio De Filippis per i preziosi spunti di riflessione e suggerimenti.

Rotazione di Wigner

La rotazione di Wigner è un effetto puramente cinematico proprio della relatività ristretta che può essere così enunciato:

Due boost¹ (o spinte) non collineari sono equivalenti ad un boost ed una rotazione degli assi.

Tale rotazione, nota come Rotazione di Thomas-Wigner, è “statica” e cioè non implica un moto rotazionale tra i due sistemi di riferimento (d'altronde sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema inerziale sono inerziali e quindi non è possibile un moto rotazionale).

Eseguiamo un conto semplicistico che ci porterà agevolmente alla formula esatta per la precessione di Thomas come riportato in una lezione di G.F.SMOOT [6]

Innanzitutto restringiamoci alle trasformazioni di Lorentz omogenee e cioè tali che all'evento $(x = 0, y = 0, z = 0, ct = 0)$ in un sistema di riferimento inerziale corrisponda all'evento $(x' = 0, y' = 0, z' = 0, ct' = 0)$ in un altro sistema di riferimento inerziale.

In altre parole ogni sistema di riferimento deve avere origine coincidente con gli altri allo 0 dei tempi.

Prendiamo un sistema di riferimento S ed eseguiamo due boost consecutivi; il primo lungo l'asse x con una velocità $\mathbf{v}$ che ci porta in S' e il secondo lungo l'asse y' con una velocità $\mathbf{v}'$ (rispetto al sistema S') che ci porta in S'' .

Avremo quindi tre sistemi di riferimento inerziali che si muovono a velocità costante l'uno rispetto all'altro.

Ora abbiamo detto che dal sistema S si vedono gli assi di S'' ruotati.

Per avere comunque un supporto grafico possiamo pensare di tracciare quello che viene detta una “World-map”² dal sistema S' :

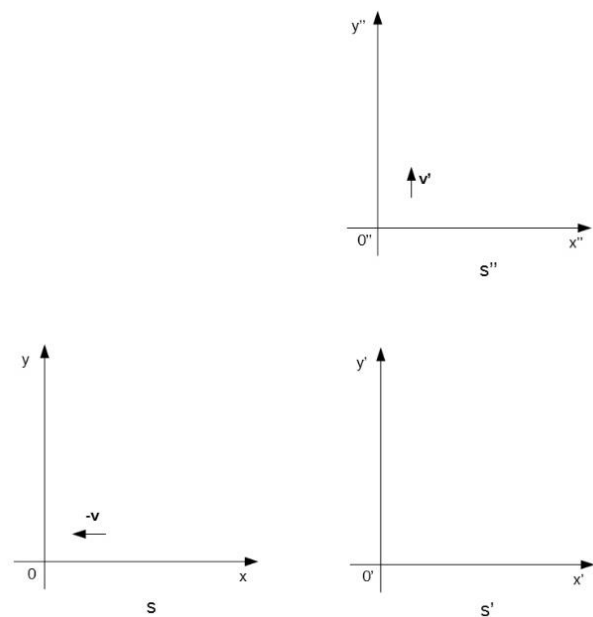
Esso vede il sistema S con velocità $-\mathbf{v}$ per principio reciprocità della velocità di Einstein (EPVR) e il sistema S'' con velocità $\mathbf{v}'$ e quindi non ci sono boost consecutivi per lui.

Dunque da S' vedremo gli assi del sistema S e del sistema S'' paralleli tra loro e con S' .

Il sistema S invece vedrà gli assi del sistema S' paralleli ai suoi mentre quelli di S'' saranno in generale ruotati.

Anticipiamo che la rotazione che si osserva è perpendicolare al piano determinato dalle due velocità $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ (e dunque il suo versore è il prodotto vettoriale dei versori delle due velocità).

Dunque possiamo concentrarci sul piano individuato dagli assi x e y essendo la rotazione lungo l'asse z .



World map dal sistema S'

¹ Si dice boost la trasformazione che fa passare da un sistema di riferimento ad un altro che si muove di moto uniforme rispetto al primo e tale che abbiano origini coincidenti all'istante iniziale e assi paralleli.

² Per “World map” si intende l'insieme degli eventi accaduti ad uno stesso istante di tempo. Per “World pictures” si intende una foto che quindi registra oggetti distanti in momenti differenti. [14]

Possiamo valutare la rotazione del terzo sistema di riferimento rispetto al primo sfruttando il principio EPVR e l'omogeneità della trasformazione.

L'origine O'' del sistema S'' visto dal sistema S avrà coordinate $x_{0''} \neq 0, y_{0''} \neq 0, z_{0''} = 0$ ad un istante $t \neq 0$ che individuano anche la direzione della velocità $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$ del sistema di riferimento S'' rispetto ad S dove $\oplus$ rappresenta la composizione relativistica delle velocità.

Dunque posso valutare l'angolo θ che tale velocità $\mathbf{v}^*$ forma con l'asse delle x a partire dalle coordinate $x_{0''}, y_{0''}, z_{0''}$.

Posso poi valutare l'angolo θ'' che la velocità del sistema S vista dal sistema S'' forma con l'asse x'' a partire dalle coordinate $x_{0''}, y_{0''}, z_{0''}$.

Per il principio di reciprocità quest'ultima velocità sarà $-\mathbf{v}^*$ e quindi se S'' non avesse gli assi ruotati rispetto S , θ'' coinciderebbe con θ a meno di π . Difatti dall'EPVR:

$$\mathbf{v}_{0''} = -\mathbf{v}_0''$$

Un angolo diverso deve essere quindi interpretato come una rotazione degli assi di S'' rispetto ad S .

Possiamo comunque accertarci che il piano xy e il piano $x''y''$ coincidano (e quindi l'asse z risulta parallelo all'asse z'') valutando l'angolo che le velocità $-\mathbf{v}^*$ e $-\mathbf{v}'$ del sistema S e del sistema S' rispetto al sistema S'' formano con l'asse z'' .

Questi angoli valgono $\pi/2$ e quindi l'asse z'' è perpendicolare alle due velocità.

Anche $\mathbf{v}^*$ e $\mathbf{v}'$ sono perpendicolari all'asse z e quindi l'asse z e l'asse z'' coincidono (come mostrato in seguito).

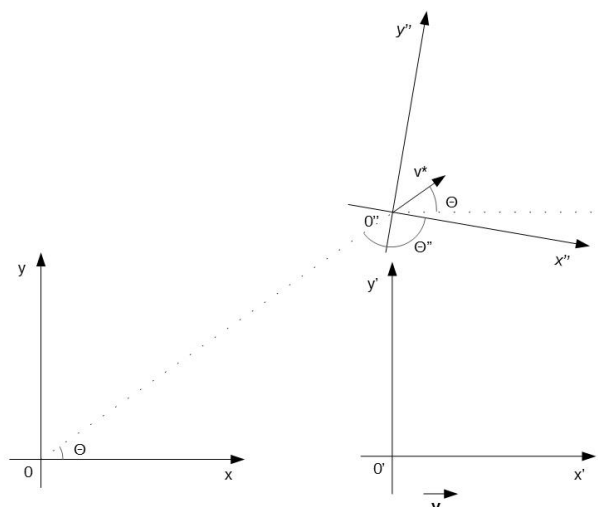
Svolgiamo ora i conti scrivendo le trasformazioni di Lorentz tra i vari sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'' &= x' \\ y'' &= \gamma'(y' - v't') \\ z'' &= z' \\ t'' &= \gamma'(t' - v'y'/c^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= x'' \\ y' &= \gamma'(y'' + v't'') \\ z' &= z'' \\ t' &= \gamma'(t'' + v'y''/c^2) \end{aligned}$$



Le trasformazioni da S a S'' sono dunque:

$$\begin{aligned}x'' &= \gamma(x - vt) \\ y'' &= \gamma'(v' \gamma vx/c^2 + y - v' \gamma t) \\ z'' &= z \\ t'' &= \gamma'(-\gamma vx/c^2 - v' y/c^2 + \gamma t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x'' + v \gamma' v' y''/c^2 + v \gamma' t'') \\ y &= \gamma'(y'' + v' t'') \\ z &= z'' \\ t &= \gamma(v x''/c^2 + \gamma' v' y''/c^2 + \gamma' t'')\end{aligned}$$

Riportiamo anche le corrispondenti trasformazioni Galileiane:

$$\begin{aligned}x'' &= x - vt \\ y'' &= y - v' t \\ z'' &= z \\ t'' &= t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= x'' + vt'' \\ y &= y'' + v' t'' \\ z &= z'' \\ t &= t''\end{aligned}$$

Dalla uguaglianza tra le componenti z capiamo subito che le velocità dei sistemi di riferimento formano sempre angoli di $\pi/2$ con gli assi z (le origini hanno tutte coordinata z pari a 0, dunque tutte le velocità hanno componente nulla lungo gli assi z, z', z'' e quindi sono ortogonali rispetto tali assi) e quindi i piani $xy, x'y'$ e $x''y''$ coincidono.

Cioè: $z_{0''} = z_{0'''} = 0$; $z_{0'} = z_{0'}' = 0$; $z_0'' = z_0 = 0$; $z_{0'}'' = z_{0'}' = 0$

Ora poiché non ci interessa una differenza di π tra gli angoli θ e θ'' , ne prenderemo la tangente che è periodica di π .

$$\tan(\theta) = \frac{y_{0''}}{x_{0''}} = \frac{\gamma'(y_{0'''} + v' t'')}{\gamma(x_{0'''} + v \gamma' v' y_{0'''} / c^2 + v \gamma' t'')} = \frac{\gamma' v' t''}{\gamma v \gamma' t''} = \frac{v'}{\gamma v}$$

$$\tan(\theta'') = \frac{y_0''}{x_0''} = \frac{\gamma'(v' \gamma v x_0 / c^2 + y_0 - v' \gamma t)}{\gamma(x_0 - vt)} = \frac{-\gamma' v' \gamma t}{-\gamma vt} = \frac{\gamma' v'}{v}$$

Dunque in effetti gli angoli sono diversi e il sistema S'' risulta ruotato rispetto al sistema S.

Questo risultato può essere così espresso: due trasformazioni di Lorentz pure non formano un gruppo, poiché non sono chiuse rispetto l'operazione di composizione.

Costituiscono invece un sottogruppo le trasformazioni di Lorentz pure a velocità parallele.

Inoltre risulta che il gruppo delle trasformazioni di Lorentz pure con una rotazione e con le origini non necessariamente coincidenti (gruppo di Poincaré) forma un gruppo.

Notiamo che è valido quanto abbiamo detto all'inizio:

Tali angoli sono gli stessi che formano le velocità di tali origini con gli assi x e x'', difatti dalla regola di composizione delle velocità relativistica per velocità ortogonali ottengo:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \oplus \mathbf{v}' = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}} \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}'}{\gamma} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v} \right) = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}'}{\gamma}$$

E quindi:

$$\tan'(\theta) = \frac{v_{y_{o''}}}{v_{x_{o''}}} = \frac{v'}{\gamma v} = \tan(\theta)$$

Analogamente per $\tan(\theta'')$ difatti:

$$\mathbf{v}^{**} = (-\mathbf{v}') \oplus (-\mathbf{v}) = -(\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v}) = -\left(\mathbf{v}' + \frac{\mathbf{v}}{\gamma'}\right)$$

$$\tan'(\theta'') = \frac{v_{y_0''}}{v_{x_0''}} = \frac{-v'}{-\frac{v}{\gamma'}} = \frac{\gamma' v'}{v} = \tan(\theta'')$$

Notiamo che abbiamo commesso un piccolo abuso di notazione chiamando con $-\mathbf{v}'$ e $-\mathbf{v}$ le velocità di S' rispetto ad S'' e di S rispetto a S' infatti, a rigore, tali vettori non sono uguali ai $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}$ usati in precedenza perché hanno pari componenti ma rispetto ad assi diversi. Solo ciò rende possibile che $\mathbf{v}^{**} = -\mathbf{v}^* = -\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$ (e dunque che venga soddisfatto il principio di reciprocità delle velocità).

Questo breve ragionamento è alla base della risoluzione di quello che viene chiamato “paradosso di Mocanu” [7]:

Sostanzialmente non tenendo in considerazione la rotazione di Thomas si giunge a due velocità distinte per il sistema S rispetto al sistema S'' a seconda che si applichi la composizione relativistica delle velocità oppure il principio di reciprocità delle velocità. Il punto è che gli assi di S'' e di S sono ruotati e quindi non si possono confrontare le componenti delle due velocità su assi “omologhi” differenti.

Nella nostra discussione abbiamo invece assunto che $\mathbf{v}^{**} = -\mathbf{v}^* = -\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$ e quindi è chiaro che non possiamo mostrare che le componenti del vettore $-\mathbf{v}^*$ si trasformano nelle componenti del vettore $\mathbf{v}^{**}$ ³ tramite la rotazione dell'angolo del sistema S'' rispetto il sistema S : Sarebbe un ragionamento circolare.

Nonostante ciò quest'angolo di rotazione risulta identico a quello trovato tramite altri ragionamenti (per esempio Il Goldstein esegue due trasformazioni di Lorentz pure “matriciali” e poi mostra che sono equivalenti ad una trasformazione di Lorentz pura (con velocità pari alla composizione relativistica delle velocità) seguita da una rotazione (la rotazione di Thomas).

In questo senso allora la correttezza dei nostri risultati costituisce una prova indiretta della correttezza delle nostre assunzioni che possono essere verificate tramite il metodo sopracitato (vedere appendice: **Errore. L'origine iferimento non è stata trovata.**)

Detto questo, è chiaro che effettuando “proprio” $-(\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v})$ (partendo cioè sempre dal sistema S) otterremo un risultato analogo dove però in effetti: $-(\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}') \neq -(\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v})$. Dunque abbiamo capito un'altra cosa:

la rotazione di Thomas Wigner è all'origine della non commutatività della somma relativistica delle velocità.

In altre parole:

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}' = \mathbf{gyr}[\mathbf{v}, \mathbf{v}'] (\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v})$$

dove $\mathbf{gyr}[\mathbf{v}, \mathbf{v}']$ è la rotazione (di Thomas) pari ad un angolo $\theta - \theta''$ che porta $\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v}$ a coincidere con $\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$.

A riprova di ciò possiamo mostrare (conti in appendice: 2) che il modulo di $\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$ è pari al modulo di $\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v}$.

In particolare la rotazione del sistema di riferimento in tal caso è in senso orario poiché

$$\tan(\theta'') \geq \tan(\theta)$$

Dove in luogo di θ'' utilizziamo $\pi - \theta''$, ma per evitare pesantezza nella notazione continueremo a scrivere θ'' . La tangente è monotona, quindi:

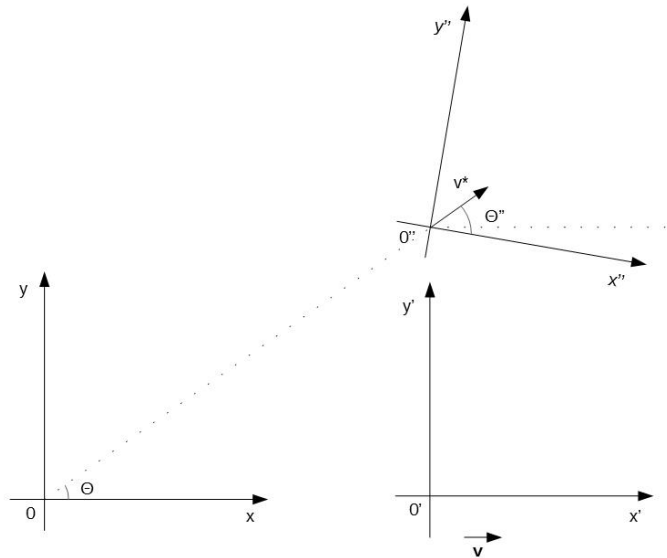
$$\theta'' \geq \theta$$

³ $\mathbf{v}^{**}$ e $-\mathbf{v}^*$, come già detto, sono in realtà lo stesso vettore decomposto in due basi diverse, ruotate.

Dunque la rotazione che sperimenta il terzo sistema di riferimento rispetto al primo è pari a:

$$\begin{aligned}\theta - \theta'' &= \tan^{-1}(\tan(\theta)) - \tan^{-1}(\tan(\theta'')) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{v'}{\gamma v}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\gamma' v'}{v}\right) \\ &< 0\end{aligned}$$

Questa è una possibile espressione della rotazione di Thomas. Essa è un fenomeno puramente cinematico e la rotazione tra un sistema di riferimento ed un altro è "statica" e cioè non vi è un moto rotatorio di un sistema di riferimento rispetto ad un altro.



Le trasformazioni galileiane non prevedono tale effetto e prevedono angoli diversi, infatti:

$$\begin{aligned}\tan(\theta) &= \frac{y_{o''}}{x_{o''}} = \frac{y_{o''}'' + v' t''}{x_{o''}'' + v t''} = \frac{v' t''}{v t''} = \frac{v'}{v} \\ \tan(\theta'') &= \frac{y_o''}{x_o''} = \frac{y_o - v' t}{x_o - v t} = \frac{-v' t}{-v t} = \frac{v'}{v}\end{aligned}$$

La differenza negli angoli previsti si può spiegare tramite la dilatazione del tempo difatti possiamo calcolare velocemente la rotazione di Thomas in quest'altro modo:

$$\begin{aligned}y_{o''} &= \Delta y_{o''} = \Delta y_{o''}' = v' \Delta t' \\ x_{o''} &= \Delta x_{o''} = \Delta x_{o'} = v \Delta t\end{aligned}$$

La seconda equazione si può ottenere da:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t)$$

$$\text{Poiché } \Delta x_{o''}' = 0$$

Per cui la formula è sia per trasformazioni di Lorentz che di Galileo:

$$\tan(\theta) = \frac{y_{o''}}{x_{o''}} = \frac{v' \Delta t'}{v \Delta t} = \frac{v'}{v} \frac{\Delta t'}{\Delta t}$$

Dove per la dilatazione dei tempi:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Come si può ottenere anche da:

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

Che diventa:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v \Delta x'/c^2)$$

$$\text{E per } \Delta x' = 0 \text{ si ottiene } \Delta t = \gamma \Delta t'$$

Mentre per Galileo:

$$\Delta t = \Delta t'$$

Lo stesso vale per $\tan(\theta'')$:

$$y_o'' = \Delta y_o'' = \Delta y_o' = -v' \Delta t''$$

$$x_o'' = \Delta x_o'' = \Delta x_o' = -v \Delta t'$$

Dove la prima si può ottenere da:

$$\Delta y' = \gamma'(\Delta y'' + v' \Delta t'')$$

$$\tan(\theta'') = \frac{y_o''}{x_o''} = \frac{-v' \Delta t''}{-v \Delta t'} = \frac{v'}{v} \frac{\Delta t''}{\Delta t'}$$

Dove per la dilatazione dei tempi $\Delta t'' = \gamma' \Delta t'$

Come si può ottenere anche da:

$$t'' = \gamma'(t' - v'y'/c^2)$$

Che diventa:

$$\Delta t'' = \gamma'(\Delta t' - v' \Delta y'/c^2)$$

E per $\Delta y' = 0$ si ottiene $\Delta t'' = \gamma' \Delta t'$

È particolarmente utile la formula esplicita della rotazione nel caso di due boost perpendicolari di cui il secondo sia infinitesimo che è bastevole per ottenere l'espressione esatta della precessione di Thomas.

In tal caso avrei:

$$\tan(\theta) = \frac{dv'}{\gamma v}$$

$$\tan(\theta'') = \frac{\gamma' dv'}{v}$$

E quindi entrambi gli angoli sono infinitesimi.

In tal caso posso approssimare la tangente dell'angolo con l'angolo stesso ed ottenere:

$$\theta = \frac{dv'}{\gamma v}$$

$$\theta'' = \frac{\gamma' dv'}{v}$$

Dunque avrei:

$$d\theta = \theta - \theta'' = \frac{dv'}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma' \right)$$

E approssimando all'ordine zero γ' , ottengo:

$$d\theta = \frac{dv'}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)$$

Notiamo che nel caso di due boost non necessariamente perpendicolari di cui il secondo è infinitesimo vale una relazione molto simile.

Ce ne si può convincere facilmente a partire dalla formula $\tan(\theta) = \frac{v_{y0''}}{v_{x0''}}$ e dalla relazione: $\mathbf{v} \oplus \mathbf{dv}' = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{dv}'_{\perp}}{\gamma}$

(tale formula vale nel caso in cui $dv' \ll v$) difatti la componente lungo x e quindi $\mathbf{v}$ del secondo secondo boost essendo infinitesimo può essere trascurata rispetto al primo boost e rimane solo la componente verticale, mentre per

$\tan(\theta'') = \frac{v''_y}{v''_x}$ si ha $\mathbf{dv}' \oplus \mathbf{v} = \mathbf{dv}'_{\perp} + \mathbf{v}$ e dunque i due casi sono sostanzialmente analoghi. (Per i conti vedi appendice 3)

Precessione di Thomas

La precessione e la rotazione sono connesse tra loro. Riportiamo quasi integralmente la spiegazione presente in Classical Mechanics [8]:

Se una particella si muove di moto accelerato rispetto un sistema di riferimento inerziale (sistema laboratorio) è evidente che non possiamo connettere il sistema del laboratorio col sistema in cui la particella è a riposo da un'unica Trasformazione di Lorentz per tutto il suo moto (perché questo significherebbe che anche il sistema di riposo della particella è inerziale). Questo è un problema se vogliamo scrivere equazioni che valgano in un sistema di riferimento in cui la particella è a riposo.

Possiamo aggirare questo problema considerando infiniti sistemi di riferimento inerziali ognuno dei quali è il sistema di riposo per la particella ad un dato istante. Non possiamo fermarci qui: bisogna descrivere come si passa da un sistema di riferimento a riposo ad un certo istante t ad un sistema di riferimento a riposo all'istante $t+dt$.

Così possiamo connettere il sistema del laboratorio con un sistema a riposo con la particella ad un istante t tramite infinite trasformazioni di Lorentz infinitesime che portano con sé rotazioni infinitesime e quindi l'effetto globale è che il primo sistema di riferimento (quello del laboratorio) vedrà ruotare il sistema a riposo con una certa velocità angolare; quest'effetto è detto precessione di Thomas.

La precessione di Thomas è un effetto puramente cinematico ma verificandosi quando una particella è in moto curvilineo, deve essere presente una forza esterna come il campo elettromagnetico.

Ora consideriamo una particella con una traiettoria curvilinea:

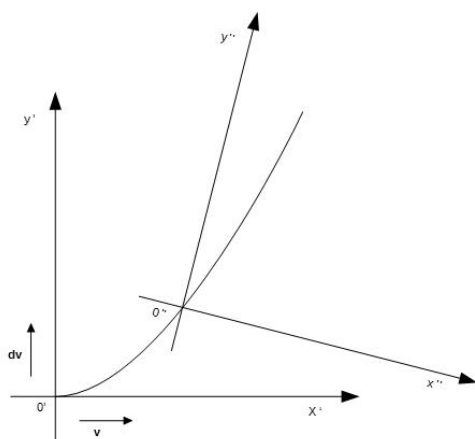
Prendiamo un sistema di riferimento S tale che all'istante iniziale la particella abbia la velocità diretta lungo l'asse x .

Prendiamo il sistema di riferimento S' tale che all'istante iniziale $t=t'=0$ abbia origine coincidente con l'origine del sistema S e che si muova rispetto ad S con la velocità v della particella; in S' all'istante $t=t'=0$ la particella è in quiete.

Ora per un intervallo di tempo infinitesimo assumiamo che il moto sia circolare uniforme.

Quindi dopo un dt possiamo prendere come sistema di riferimento in quiete il sistema S'' che ha una componente verticale diretta lungo l'asse y (e cioè verso il centro di curvatura) rispetto il sistema S' .

Questo non è il caso generale poiché non prevedendo variazioni di velocità in modulo non permette di collegare con la massima libertà il sistema di laboratorio con quello a riposo della particella.



World map dal sistema S che all'istante iniziale coincide con il sistema S'

Per far ciò dovremmo supporre un moto approssimativamente circolare ma non necessariamente uniforme (in altre parole oltre all'accelerazione centripeta ci sarebbe anche quella tangenziale).

In questo caso dovremmo effettuare due boost non perpendicolari di cui il secondo infinitesimo; abbiamo già visto che quest'ultimo caso è sostanzialmente analogo al caso di boost perpendicolari. Alla fine di questo capitolo discuteremo brevemente le analogie e le differenze.

A questo punto abbiamo che la velocità del sistema S'' rispetto il sistema S ha come componenti:

$$\begin{aligned} v_x &= v \\ v_y &= dv \end{aligned}$$

$$d\theta = \frac{dv'}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)$$

Ora dv' è la velocità di S'' rispetto a S' ma noi vogliamo misurare la componente della velocità y e x di S'' rispetto a S .

Quindi possiamo usare la formula della composizione relativistica delle velocità perpendicolari:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \oplus d\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}'}{\gamma}$$

Dunque ottengo:

$$v_y = dv = \frac{dv'}{\gamma}$$

$$d\theta = \frac{\gamma dv}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) = \frac{dv}{v} (1 - \gamma)$$

Notiamo che dv è dovuto all'accelerazione centripeta (e difatti è perpendicolare alla velocità v) che è l'unica presente in tale caso. Si ha:

$$dv = a dt$$

$$d\theta = \frac{a}{v} dt (1 - \gamma)$$

Da cui:

$$\omega_T = \frac{a}{v} (1 - \gamma) = \frac{av}{v^2} (1 - \gamma)$$

Vettorialmente:

$$\boldsymbol{\omega}_T = -(1 - \gamma) \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2} = (\gamma - 1) \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2}$$

Il sistema di riferimento con tale scelta del prodotto vettoriale ruota in senso orario come volevamo poiché

$(\gamma - 1) > 0$. Questa è l'espressione corretta per la precessione di Thomas dove $\mathbf{a}$ può anche essere l'accelerazione totale della particella (essendo moltiplicata vettorialmente per la velocità).

Inoltre possiamo legare la precessione di Thomas con la velocità angolare "orbitale" della particella. L'accelerazione centripeta è:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = (\gamma - 1) \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}}{v^2} = (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{v^2} = -(\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{\omega} v^2}{v^2} = -(\gamma - 1) \boldsymbol{\omega}$$

Dunque la precessione di Thomas ha sempre segno opposto rispetto il moto orbitale della particella, con espressione:

$$\boldsymbol{\omega}_T = -(\gamma - 1) \boldsymbol{\omega}$$

Un'altra forma equivalente spesso riportata è (conti in Appendice: **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}$$

Notiamo che la seconda formula, per velocità v della particella molto minori di quelle della luce ($v \ll c$), dà sviluppando γ all'ordine zero ($\gamma \simeq 1$):

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{2c^2}$$

Mentre la prima all'ordine zero mi dà zero e al secondo ordine mi dà naturalmente lo stesso risultato. (Appendice: **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**)

In genere per calcolare la correzioni dovute alla precessione di Thomas a velocità molto minori della luce si utilizza l'espressione precedente per la precessione di Thomas.

Dunque il sistema del laboratorio vedrà un sistema solidale all'elettrone (che quindi si muove di moto accelerato nei suoi confronti) ruotare con velocità angolare ω_T .

La formula della precessione di Thomas è valida in generale non solo in caso di moto curvilineo uniforme. Difatti basterebbe ripercorrere i conti appena svolti con l'accortezza di sostituire a dv' , $dv'_\perp$ nell'espressione di $d\theta$ e di $\mathbf{v} \oplus d\mathbf{v}'$ come si evince dalla discussione alla fine del capitolo precedente: i conti sono praticamente identici.

Notiamo che in linea puramente teorica erano possibili due vie come sottolinea il testo di elettrodinamica classica di Jackson [9]:

La prima è quella di descrivere il sistema di riferimento solidale all'elettrone all'istante t come composizione di boost puri (diciamo dall'istante 0 fino all'istante t), che risultano poi essere equivalenti ad un unico boost e una rotazione. Questa è la strada che abbiamo scelto.

La seconda via è quella di considerare, come sistema di riferimento a riposo dell'elettrone, il sistema che mi fa andare dal sistema del laboratorio al sistema che si muove con la velocità $\mathbf{v}$ dell'elettrone, ad ogni istante. Questa sembrerebbe la scelta più naturale ma dobbiamo ugualmente connettere il sistema di riferimento a riposo della particella all'istante t con quello all'istante $t+dt$. Si può mostrare che per effettuare tale connessione sono necessarie un boost puro infinitesimo ed una rotazione infinitesima.

Otterremmo risultati diversi con i due metodi.

Il primo metodo è quello corretto poiché si assume che le equazioni del moto non relativistiche, come quella che considereremo per lo spin, continuino ad essere valide solo nel caso in cui l'evoluzione temporale del sistema a riposo sia descritta da boost puri, senza rotazioni. Per questo motivo si è scelto il primo metodo.

Interazione spin-orbita

Vediamo ora gli effetti della precessione di Thomas sull'hamiltoniana di un atomo; useremo il sistema internazionale di unità di misura (SI).

Sappiamo che il momento magnetico intrinseco dell'elettrone e il suo spin sono legati dalla relazione:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_e} \mathbf{S}$$

Dove $\mathbf{S}$ è lo spin dell'elettrone ed e è la carica (negativa) dell'elettrone.

L'effetto del momento sul momento magnetico è:

$$\mathbf{M}' = \frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'$$

Dove la prima uguaglianza vale perché lo spin è una forma di momento angolare e $\mathbf{B}'$ è il campo magnetico nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è a riposo. Questa equazione determina l'evoluzione temporale dello spin e quindi può essere chiamata equazione del moto dello spin. Gli apici indicano che la relazione è valida in un sistema di riferimento solidale all'elettrone. Dall'equazione riportata risulta che lo Spin non varia in modulo ma solo in direzione, come deve essere, quindi abbiamo un moto rotatorio, difatti:

$$\frac{d(S')^2}{dt'} = \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{S}'}{dt'} = 2 \frac{d\mathbf{S}'}{dt'} \cdot \mathbf{S}' = 0$$

poiché $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{S}'$ hanno pari direzione e $\mathbf{M}'$ è perpendicolare a $\boldsymbol{\mu}$. Possiamo quindi esprimere la variazione temporale dello spin in funzione della rotazione dello stesso:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{S}'$$

Inoltre possiamo associare al sistema una energia potenziale responsabile del momento.

Essendoci una analogia formale tra dipolo elettrico e dipolo magnetico e tra dipolo magnetico e il sistema che stiamo trattando poiché quest'ultimo ha un momento di dipolo magnetico intrinseco $\boldsymbol{\mu}$ e un momento angolare intrinseco $\mathbf{S}$ possiamo usare la formula seguente, analoga a quella derivata in elettrostatica:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}'$$

Questo termine è spesso indicato come termine di interazione di Larmor.

Il sistema del nucleo e il sistema solidale all'elettrone possono essere connessi istante per istante da una trasformazione di Lorentz. Quindi possiamo connettere il campo magnetico $\mathbf{B}'$ con il campo magnetico $\mathbf{B}$ e il campo elettrico $\mathbf{E}$ sperimentati nel sistema solidale con il nucleo tramite la seguente relazione:⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_{//} &= \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E}) \end{aligned}$$

dove la relazione di parallelismo e perpendicolarità si deve intendere rispetto alla velocità dell'elettrone $\mathbf{v}_e$.

Per $v_e \ll c$, $\gamma \approx 1$ e quindi:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E}$$

⁴ Notiamo comunque che il campo magnetico eventualmente presente nel sistema solidale al nucleo non è dovuto all'interazione tra nucleo ed elettroni.

Dunque:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = \boldsymbol{\mu} \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = \frac{e}{m_e} \mathbf{S}' \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{S}'$$

$$U' = -\boldsymbol{\mu} \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S}' \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = \mathbf{S}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$$

Con $\boldsymbol{\omega}' = -\frac{e}{m_e} \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right)$

Se $\mathbf{E}$ è generato da una distribuzione di carica simmetrica come in un atomo ad un singolo elettrone o in un atomo con una shell esterna chiusa, allora il potenziale dipenderà solo dalla distanza dal nucleo:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr}$$

Quindi:

$$\boldsymbol{\omega}' = -\frac{e}{m_e} \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = -\frac{e}{m_e} \left(\mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{e}{m_e} \mathbf{B} + \frac{e}{m_e c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}_e \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{B} + \frac{e}{m_e^2 c^2} \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

Dunque :

$$U' = \mathbf{S}' \cdot \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{S}' = -\frac{e}{m_e} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}' + \frac{e}{m_e^2 c^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}' \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

dove l'inversione del prodotto scalare è possibile anche operatorialmente poiché gli operatori $\mathbf{S}$ e $\mathbf{L}$ commutano e quindi $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. L'ultimo termine è detto termine di interazione di spin-orbita ed è quello a cui si giunge seguendo le considerazioni avanzate da Uhlenbeck e Goudsmit ma non è in accordo con i dati sperimentali dello spettro fine degli atomi idrogenoidi. Il problema di questa espressione è che è valida per il sistema di riposo dell'elettrone. Dobbiamo invece ricondurci al sistema del nucleo nel quale l'elettrone è in moto.

Sappiamo che il sistema del nucleo vede il sistema solidale con l'elettrone che ruota per effetto della precessione di Thomas dunque dobbiamo rendere conto nel sistema del nucleo di questa rotazione aggiuntiva che lo spin sperimenta tramite un momento aggiuntivo e quindi un'energia potenziale aggiuntiva che giustifica tale momento.

Stiamo quindi agendo in questo modo:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{d\mathbf{S}'}{dt'} + \mathbf{k}^* = \mathbf{M}' + \mathbf{M}^*$$

$$U = U' + U^*$$

Dove come al solito gli apici indicano grandezze osservate nel sistema di riferimento solidale all'elettrone. Per ottenere la forma dell'energia potenziale nel sistema del nucleo devo passare dalla derivata temporale dello spin vista dal sistema di riposo dell'elettrone alla derivata temporale dello spin vista dal sistema del nucleo.

Per un vettore $\mathbf{f}$ invariante sotto trasformazioni di Lorentz ho (Appendice: 7) operando come in meccanica classica (dunque ponendo $t' = t$) :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{fisso}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{ruotante}} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{f}$$

Quindi:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{\text{fisso}} = \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right|_{\text{ruotante}} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{S}$$

Notiamo che usando le trasformazioni di Lorentz avrei ottenuto invece (Appendice: 8)

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{fisso}} = \frac{1}{\gamma} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{ruotante}} + \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{f}$$

Che si riduce comunque all'espressione classica approssimando γ all'ordine 0.

Dunque dobbiamo trovare il termine nell'energia potenziale che tenga conto di un momento aggiuntivo pari a $\mathbf{M}^* = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{S}$.

Seguendo il calcolo effettuato dal libro di Elettromagnetismo di Silvestrini Mencuccini a pag. 47 [10], sappiamo che:

$$\mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} = -\frac{\partial U^*}{\partial \theta} d\theta = -dU^*$$

Con dU che rappresenta una variazione infinitesimale dell'energia potenziale dovuta alla rotazione del sistema di un angolo $d\boldsymbol{\theta}$ e cioè di una rotazione dello Spin $\mathbf{S}$ di un angolo $d\boldsymbol{\theta}$.

L'energia potenziale appropriata sarà allora (Appendice: 6) :

$$U^* = \boldsymbol{\omega}_T \cdot \mathbf{S}$$

Questo termine viene anche detto termine di interazione di Thomas.

Usando la formula della precessione di Thomas per $v_e \ll c$ ho:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}$$

Dove $\mathbf{a}$ è l'accelerazione centripeta dell'elettrone che è dovuta solo al campo elettrico del nucleo e quindi:

$$e\mathbf{E} = m_e \mathbf{a}$$

Dunque:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{1}{2} \frac{e\mathbf{E} \times \mathbf{v}}{m_e c^2} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E}$$

Dunque seguendo i conti fatti in precedenza per $\boldsymbol{\omega}'$:

$$U^* = \boldsymbol{\omega}_T \cdot \mathbf{S} = -\frac{1}{2} \frac{e}{m_e c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

Quindi:

$$U = U' + U^* = (\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}_T) \cdot \mathbf{S} = -\frac{e}{m_e c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{2} \frac{e}{m_e c^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

Ora davanti il termine di interazione spin-orbita abbiamo il fattore $\frac{1}{2}$.

Ciò può essere anche visto come un dimezzamento di un termine della rotazione dello spin vista dal sistema del laboratorio rispetto al sistema di riposo della particella, difatti:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}_T = -\frac{e}{m_e} \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} \right) - \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{B} + \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E}$$

Includendo tale fattore le spazature nello spettro fine degli atomi idrogenoidi, dovuti allo spin dell'elettrone, risultano in maggior accordo coi dati sperimentali.

In particolare in assenza di campo magnetico nel sistema del laboratorio:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \frac{\mathbf{v}_e}{c^2} \times \mathbf{E} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'$$

La variazione dello spin, cioè la sua velocità angolare, è la metà di quella prevista senza tener conto dell'effetto relativistico della precessione di Thomas. Quindi anche l'energia di interazione del termine spin-orbita sarà dimezzata una volta tenuto in considerazione la precessione di Thomas.

È sulla base di un conto e una considerazione come questa che Thomas affermò nel suo articolo che la previsione teorica della separazione degli spettri del "doppioetto" si sarebbe dimezzata e sarebbe quindi stata in accordo coi dati sperimentali allora disponibili. [4]

Confronto con l'equazione di Dirac

L'equazione di Dirac per una particella di spin 1/2 in un campo elettromagnetico è:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - cq\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A} + q\phi + \beta mc^2) \Psi$$

Dunque per un elettrone in un atomo idrogenoide ottengo:

$$q = e ; \mathbf{A} = 0 ; e\phi = U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} ; m = m_e$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \beta m_e c^2 \right) \Psi$$

Con hamiltoniana:

$$H = -i\hbar c \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \beta m_e c^2$$

Usando il principio di corrispondenza:

$$H = c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \beta m_e c^2$$

⁵ È comunque interessante poichè $v_e \ll c$, vederne l'approssimazione al secondo ordine di infinitesimo (cioè $\frac{v^2}{c^2}$).

Si ottiene così:

$$H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{p^4}{8m_e^3 c^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{\pi\hbar^2}{2m^2 c^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\mathbf{r})$$

dove $-\frac{p^4}{8m_e^3 c^2}$ è una correzione relativistica sull'energia cinetica, $\frac{1}{2} \frac{1}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr}$ è il termine di interazione spin-orbita e $\frac{\pi\hbar^2}{2m^2 c^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\mathbf{r})$ è detto termine di Darwin.

Dunque il termine di interazione spin-orbita

$$\frac{1}{2} \frac{e}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

è compreso naturalmente nell'hamiltoniana relativistica di un atomo ad un elettrone in approssimazione $v \ll c$ al secondo ordine di infinitesimo com'è giusto che sia essendo l'equazione di Dirac relativistica e quindi comprendendo automaticamente l'effetto della precessione di Thomas che noi abbiamo invece dovuto inserire opportunamente nella nostra hamiltoniana non relativistica.

⁵ Questa equazione può essere risolta esattamente e questa circostanza fu molto importante in quanto permise un confronto diretto tra dati teorici e sperimentali dello spettro di atomi idrogenoidi. Fino al 1940 nonostante numerose prove sperimentali supportassero la teoria, le misure eseguite da W.V. Houston nel 1937 e quelle eseguite da R.C. Williams nel 1938 furono interpretate nel 1938 da S. Pasternack come uno shift verso l'alto del livello $2s_{1/2}$ rispetto al livello $2p_{1/2}$ che secondo la teoria di Dirac avrebbero dovuto coincidere (come vedremo).

Solo nel 1947 W.E. Lamb e R.C. Retherford dimostrarono con un esperimento che tale shift era presente. Esso fu in seguito chiamato Lamb shift e furono necessarie opportune modifiche alla teoria di Dirac (dette "correzioni radiative")

Spettro di un atomo idrogenoide:

Vogliamo analizzare lo spettro di un atomo idrogenoide con le correzioni relativistiche fino al secondo ordine. L'hamiltoniana da prendere in considerazione sarà quindi:

$$H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{p^4}{8m_e^3 c^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{\pi \hbar^2}{2m_e^2 c^2} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\mathbf{r})$$

Le correzioni relativistiche dovute all'equazione di Dirac sono responsabili dello spettro fine della materia ma sono anche correzioni piccole se Z non è molto grande e quindi è spesso possibile una trattazione perturbativa per i termini relativistici della hamiltoniana [11].

Il problema è che i termini relativistici del secondo ordine in $\frac{v}{c}$ per gli atomi idrogenoidi sono tutti di intensità paragonabile e quindi è necessario tenerli in considerazioni tutti e tre per ricavare le correzioni energetiche.

L'energia di uno stato risulta dipendere esclusivamente dal numero quantico principale n e dal numero quantico del momento angolare totale che risulta $j = l \pm 1/2$ (per $l \neq 0$) nella forma:

$$E_{nj} = E_n \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

dove $E_n = -\frac{1}{2} mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2}$ è l'energia dell'atomo idrogenoide imperturbata, α è la costante di struttura fine e m è la massa dell'elettrone.

Dunque fissato il numero quantico n si assiste ad uno split energetico in n livelli essendo n i valori che j può assumere ($1/2 \leq j \leq n - 1/2$). Lo spettro fine dell'atomo di idrogeno ($Z = 1$) è quello riportato in figura (dove non si è usata la stessa scala per n differenti).

Per quanto riguarda le linee spettrali supponiamo che le dimensioni caratteristiche dell'atomo (che sono dell'ordine dell'angstrom) siano molto minori della lunghezza d'onda della radiazione e quindi usiamo l'approssimazione di dipolo elettrico.

Possiamo vedere dalla figura di fianco che le lunghezze d'onda caratteristiche delle transizioni in esame sono in effetti molto minori di un Angstrom.

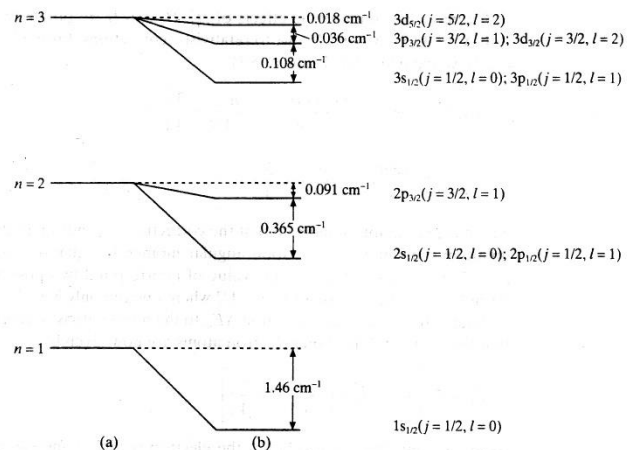


Figure 5.1 Fine structure of the hydrogen atom. The non-relativistic levels are shown on the left in column (a) and the split levels on the right in column (b), for $n = 1, 2$ and 3 . For clarity, the scale in each diagram is different.

Figura tratta dal Bransden [11]

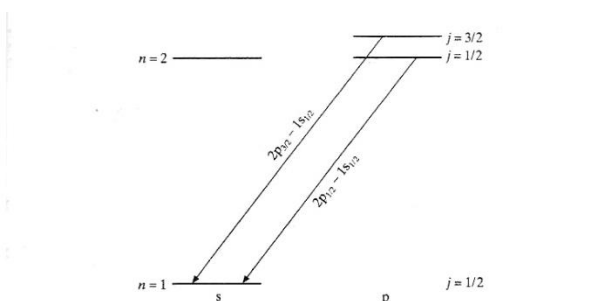


Figure 5.4 Allowed transitions between the $n = 2$ and $n = 1$ levels of atomic hydrogen giving rise to the Lyman alpha doublet (L_α).

Figura tratta dal Bransden [11]

Per le transizioni di dipolo elettrico le regole di selezione sono: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta j = 0, \pm 1$

Prendendo ad esempio la serie di Lyman (transizioni in cui lo stato più basso è pari a $n = 1$), ogni sua linea spettrale è divisa in due linee (chiamate doppietto) corrispondenti alle transizioni $np_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$; $np_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$.

E' da notare che la separazione tra $np_{1/2}$ e $np_{3/2}$ dipende esclusivamente dalla correzione al termine di spin orbita, difatti è possibile mostrare che il termine di Darwin apporta una correzione solo agli orbitali s (che dipende da n)

⁶ Vale: $|l - s| \leq j \leq l + s$ dalla regola di somma dei momenti angolari e poiché $s = 1/2$, per $l \neq 0$ si ha: $l - 1/2 \leq j \leq l + 1/2$

mentre la correzione all'energia cinetica dipende solo da n e da l dove l è il numero quantico associato ad L^2 . Quindi fissando n ed l nella serie di Lyman possiamo verificare la correttezza del termine di spin-orbita dall'ampiezza della separazione del doppietto che risulta pari alla differenza dell'energia dello spettro corrispondente.

Le correzioni all'energia dovute al termine di spin-orbita sono:

$$\Delta E_{n,l,j} = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2n(l+1/2)(l+1)} \quad \text{per } j = l + 1/2$$

$$\Delta E_{n,l,j} = E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2nl(l+1/2)} \quad \text{per } j = l - 1/2$$

Dunque (conti in Appendice: 9)

$$|\Delta E| = \frac{|E_1|(Z\alpha)^2}{n^3} \left| \frac{1}{(l+1)l} \right|$$

Da questa espressione risulta chiaro che l'ampiezza del doppietto decresce rapidamente all'aumentare di l e di n e quindi noi calcoliamo tale ampiezza per $l = 1$ ed $n = 2$. Otterremo così l'ampiezza maggiore tra tutte.

Per l'atomo di idrogeno otteniamo:

$$|\Delta E| = \frac{|E_1|\alpha^2}{8} \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{|E_1|\alpha^2}{16} = 4,53 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

L'ampiezza del doppietto sperimentalmente trovata, come è possibile notare dalla figura dello spettro fine dell'atomo di idrogeno, è $0,365 \text{ cm}^{-1}$ dove si è espressa un'energia in queste unità grazie alla relazione che lega energia e lunghezza d'onda di un fotone:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

Quindi l'energia risulta:

$$|\Delta E| = 4,52 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

che risulta in buon accordo con i dati sperimentali, come osservato da Thomas nel suo articolo [4], almeno entro la terza cifra significativa (essendo l'ultima cifra significativa la terza per nostra scelta).

Naturalmente avendo agito per via perturbativa e quindi tramite un'approssimazione è lecito aspettarsi che all'aumentare delle cifre significative ci sia una discrepanza tra dati sperimentali e teorici.

Possiamo calcolare la separazione del doppietto anche per $l = 1$; $n = 3$; $Z = 1$ ottenendo:

$$|\Delta E| = \frac{|E_1|\alpha^2}{54} = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

E sperimentalmente sempre dalla figura dello spettro fine dell'idrogeno $|\Delta E| = 0,108 \text{ cm}^{-1}$ e quindi in eV:

$$|\Delta E| = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

che risulta in buon accordo con i dati sperimentali. Valgono le considerazioni svolte in precedenza.

Si sono usati i seguenti valori numerici per le grandezze coinvolte nei calcoli presi direttamente dal 2014 Committee on Data for Science and Technology (CODATA) dove si è ritenuto opportuno tenere solo 4 cifre significative (e quindi assumere l'errore sull'ultima cifra significativa pari ad 1) coerentemente con la misura dell'ampiezza del doppietto che ne ha solo 3.

In ogni caso non è necessario considerare molte cifre significative poiché abbiamo effettuato un calcolo di tipo perturbativo e quindi non avrebbe senso aspettarsi un accordo completo con i dati sperimentali attualmente disponibili.

$$hc = 1,239 \text{ eV } \mu\text{m} = 1,239 \cdot 10^{-4} \text{ eV cm}$$

$$E_1 = -13,60 \text{ eV}$$

$$\alpha = 0,007297$$

Accoppiamento L-S

Per atomi a molti elettroni ci sono molti effetti da tenere in considerazione che rendono molto complicata la trattazione di tale caso, come interazioni spin-spin, correzioni relativistiche, correzioni nucleari (che tengono conto della massa finita dei nuclei, della loro estensione, del loro momento magnetico e in generale delle caratteristiche del nucleo).

In tale trattazione consideriamo il nucleo infinitamente massivo rispetto agli elettroni e trascuriamo i termini di correzione relativistici all'energia cinetica e quelli di Darwin ma non quello di spin orbita (che spiega qualitativamente lo spettro fine degli atomi). Questa nostra scelta dettata da motivi di semplicità dell'esposizione si ripercuoterà irrimediabilmente nel disaccordo quantitativo con i dati sperimentali, ma ci fa capire quanto importante sia stato che atomi idrogenoidi siano risolvibili esattamente con la teoria di Dirac.

Per atomi a molti elettroni l'hamiltoniana che si considera è quindi (Nel SI):

$$H = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r_i}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \sum_{i < j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \sum_i \frac{1}{2} \frac{1}{m_e^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{L}_i$$

Dove il termine di spin orbita può essere sommato anche solo sugli elettroni al di fuori delle sottoshell chiuse poiché i contributi da sottoshell chiuse sono pari a 0.

L'hamiltoniana viene in genere riscritta in termini dell'hamiltoniana di Hartree-Fock e del termine di interazione elettrostatica residua e del termine di interazione spin-orbita.

$$H_{HF} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r_i}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} + V_{\lambda}^d(\mathbf{r}_i) - V_{\lambda}^{ex}(\mathbf{q}_i)$$

Dove la dipendenza da λ è dovuta al fatto che la scrittura di tale hamiltoniana dipende dalle soluzioni della stessa (dunque si ricorre a metodi iterativi per la sua soluzione), $V_{\lambda}^d(\mathbf{r}_i)$ è un termine che rappresenta il potenziale medio di tutti gli elettroni meno l'i-esimo e $V_{\lambda}^{ex}(\mathbf{q}_i)$ tiene conto dell'effetto "di scambio" tra lo stato u_{λ} e gli altri stati occupati dai rimanenti elettroni.

Il termine di interazione elettrostatica residua è l'Hamiltoniana dell'atomo escluso il termine di spin-orbita meno l'hamiltoniana di Hartree-Fock.

$$H_{er} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r_i}^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \sum_{i < j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} - H_{HF}$$

A questo punto viene fatta una trattazione perturbativa per il termine elettrostatico residuo e quello di interazione spin-orbita, mentre l'hamiltoniana imperturbata è quella di Hartree Fock.

Nel caso in cui il termine elettrostatico residuo sia molto più grande di quello di spin orbita (condizione che si verifica per atomi e ioni con piccoli e intermedi valori di Z) si ha l'accoppiamento LS dove L e S sono momento angolare orbitale e di spin totali :

Si applica la teoria perturbativa al termine di interazione elettrostatico residuo tramite la scelta di un'opportuna base in cui tale termine risulta già diagonale, tale base è quella dei numeri quantici corrispondenti agli operatori che commutano con H_{er} e sarebbero L^2 , L_z , S^2 , S_z , L_i^2 .

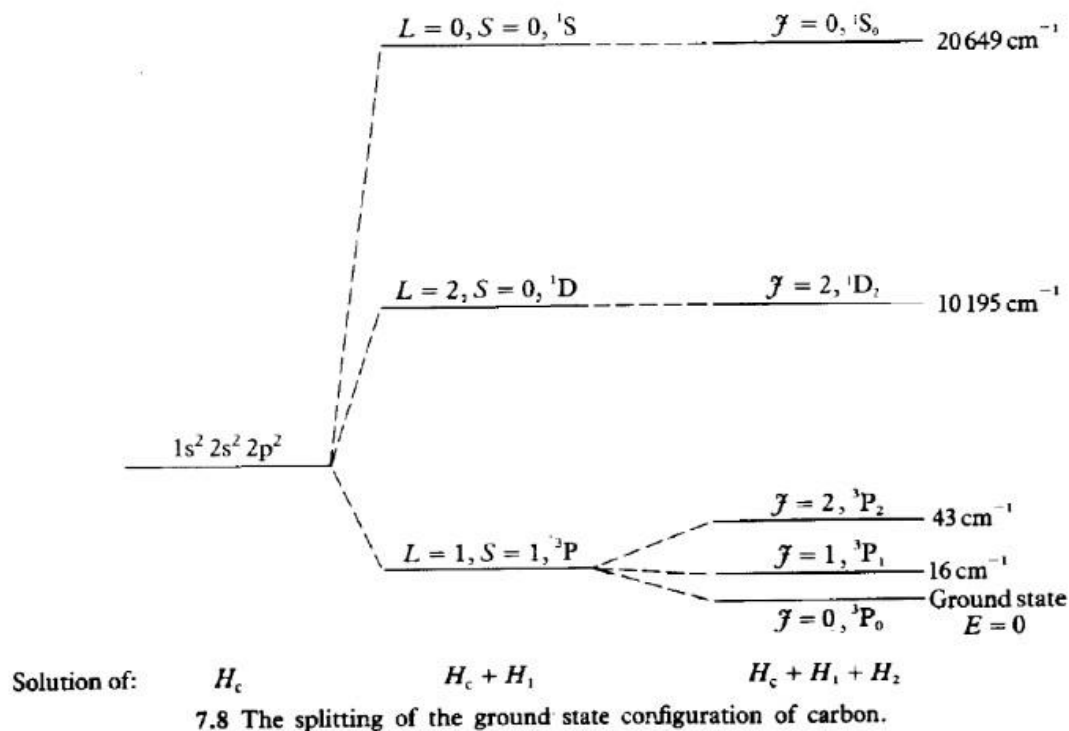
Abbiamo una degenerazione energetica degli stati pari a $(2L+1)(2S+1)$ corrispondenti ai valori che, fissati L e S, possono assumere M_L e M_S .

Applicando ora la teoria perturbativa al termine di interazione spin-orbita seguendo lo stesso procedimento possiamo diagonalizzare tale termine rispetto J^2 .

Si può mostrare che le correzioni energetiche dovute al termine di interazione spin-orbita sono pari a

$$E_{so}(J) = \frac{1}{2} \gamma_{LS} \xi_{nl} \hbar^2 [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]$$

Osserviamo allora che, considerato uno stato dove S ed L sono fissati, abbiamo una diversificazione dei livelli energetici al variare di J da $|L - S|$ ad $L + S$. In questo modo la degenerazione è eliminata, seppur parzialmente, poiché irrimediabilmente si introduce la degenerazione di $2J + 1$ dovuta al variare di M_J da $-J$ a J . Questi livelli energetici sono detti di *struttura fine* e sono dovuti all'interazione di spin-orbita con la correzione relativistica dovuta alla precessione di Thomas.

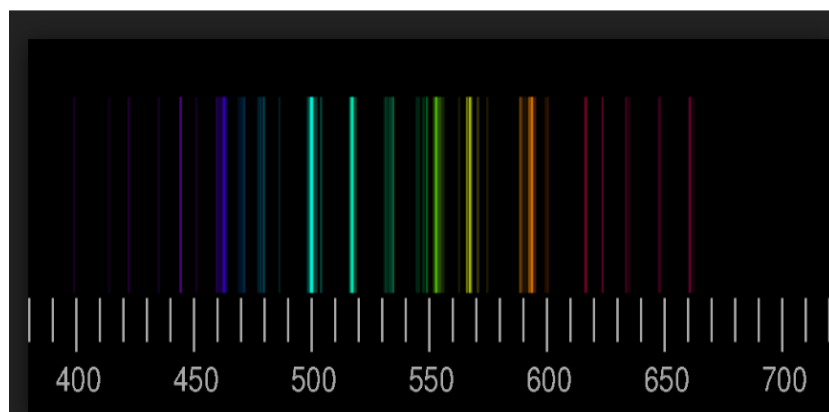


In Figura (presa dal Bransden [11]) la differenza tra livelli energetici è riportata in centimetri alla meno uno in base alla relazione che lega l'energia di un fotone emesso con la sua lunghezza d'onda

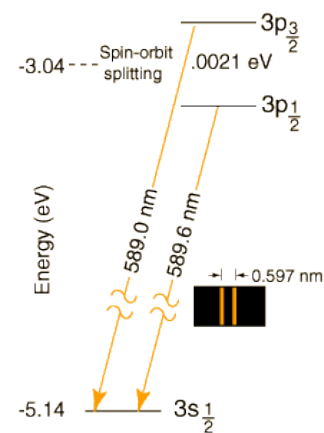
In particolare per stati a S e L fissati:

$$E_{so}(J) - E_{so}(J - 1) = AJ$$

Questa legge è chiamata regola dell'intervallo di Landè, ben verificata sperimentalmente nel caso in cui siano verificate le ipotesi dell'accoppiamento LS, una volta introdotto il fattore $\frac{1}{2}$ nel termine di interazione spin-orbita [11].



spettro di emissione del sodio



Split dello stato $3p$ con emissione verso lo stato $3s$ del Sodio

Questo split energetico è osservabile anche per i metalli alcalini in cui l'elettrone di valenza non è nell'orbitale s, infatti in tal caso $l = 0$ e quindi necessariamente $J = S = \frac{1}{2}$ e non c'è splitting mentre per $l \neq 0$ poiché abbiamo un unico elettrone di valenza esterno, $S = \frac{1}{2}$ e quindi abbiamo come possibili valori $J = l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}$ e quindi osserviamo uno split in due livelli (doppietto).

L'accordo quantitativo con i dati in tal caso non è buono.

I dati sperimentali con cui fare il confronto sono spettri di emissione o assorbimento dove la frequenza della radiazione è legata all'energia dei fotoni, pari a sua volta alla variazione energetica dello stato nella transizione.

Lo split di alcuni livelli è stato uno dei motivi dell'introduzione dello spin che tramite il termine di interazione di spin orbita spiegò lo spettro fine di alcuni atomi.

Effetto Zeeman

Atomi idrogenoidi soggetti ad un campo magnetico costante nel tempo, se si trascurano tutti gli effetti relativistici meno l'interazione spin-orbita, hanno un'hamiltoniana nella seguente forma:

$$H = -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} \frac{e}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8m} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2$$

Notiamo però che negli atomi idrogenoidi sono rilevanti anche gli altri due termini relativistici dal punto di vista quantitativo che trascuriamo nella nostra trattazione per semplicità.

Il termine $\frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}$ è il termine di interazione tra il campo magnetico e tra il momento di dipolo magnetico intrinseco e quello dovuto al moto orbitale che ha l'espressione:

$$U = - \left(\frac{e}{2m} \right) \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} - \left(\frac{e}{m} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$$

Il termine quadratico del campo magnetico può essere trascurato rispetto al termine lineare se i campi magnetici sono poco intensi e se il numero quantico principale n non è molto grande.

Noi lo trascureremo nelle seguenti considerazioni ottenendo dunque la seguente equazione agli autovalori:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} \frac{e}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{e}{2m\hbar} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \right) \Psi(q) = E\Psi(q)$$

Dove in q ci sono sia le variabili spaziali che quelle relative allo spin.

Ora la soluzione dipenderà dall'intensità relativa del termine di spin orbita e dell'interazione magnetica che dipende a sua volta dall'intensità del campo magnetico.

Effetto Zeeman normale

Quando il campo magnetico è molto forte (maggiore di Z^4 Tesla) l'interazione spin-orbita è di intensità molto minore rispetto l'interazione magnetica e quindi in prima approssimazione trascuriamo l'effetto dell'interazione spin-orbita.

Questo caso è molto raro anche per atomi idrogenoidi con basso Z , a causa della grande intensità richiesta per il campo magnetico.

Orientando per semplicità il campo magnetico, lungo l'asse z otteniamo la seguente equazione agli autovalori:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{eB}{2m\hbar} (L_z + 2S_z) \right) \Psi(q) = E\Psi(q)$$

Ora trattiamo l'interazione magnetica come perturbazione.

Notiamo che essa commuta con L_z e S_z e quindi con l'hamiltoniana imperturbata. In tal caso le soluzioni trovate per l'atomo di idrogeno rendono già diagonale tale perturbazione e la correzione alle energie di tali stati sarà facilmente data da:

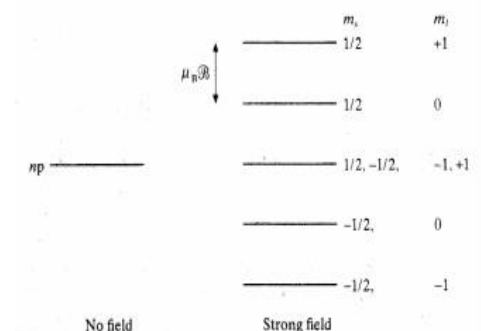
$$\begin{aligned} \Delta E_{n,l,m_s} &= \frac{eB}{2m} \langle nlm m_s | L_z + 2S_z | nlm m_s \rangle = \frac{eB}{2m} (\hbar(m + 2m_s)) \\ &= \frac{e\hbar B}{2m} (m + 2m_s) = \mu_B B (m + 2m_s) = \Delta E_{m,m_s} \end{aligned}$$

Dove μ_B è il magnetone di Bohr.

Dunque le correzioni dipendono solo dal valore di m e di m_s

L'introduzione di tale campo magnetico non rimuove la degenerazione in l ma introducendo una direzione privilegiata rimuove parzialmente la degenerazione in m_l e m_s , splittando ogni livello ad un fissato n , in livelli equamente spazati.

Per $l = 1$ otteniamo il grafico accanto:



Split del livello p in 5 livelli equispaziati (presa dal Bransden [11])

Come si vede la degenerazione non è risolta completamente in m_s e m_l .

Per quanto concerne le linee spettrali supponiamo possibile l'approssimazione di transizione di dipolo elettrico.

Le regole di selezione di dipolo elettrico richiedono che: $\Delta l = \pm 1$
 $\Delta m_s = 0, \quad \Delta m_l = 0, \pm 1$

Dunque le transizioni $n \rightarrow n'$ sono splittate in 3 componenti difatti:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta E_n + \Delta(\mu_B B(m_l + 2m_s)) = \Delta E_n + \mu_B B(\Delta m_l + 2\Delta m_s) \\ &= \Delta E_n + \mu_B B(0, \pm 1) \end{aligned}$$

Notiamo che queste transizioni energetiche sono pari a quelle che si otterrebbero senza considerare lo spin e quindi da queste transizioni non è possibile evincere la presenza dello spin. Fu così possibile elaborare un modello semi-classico che non includeva lo spin che fosse in accordo con i dati sperimentali. Per tale motivo questo effetto fu chiamato "effetto Zeeman normale".

Le linee a $\Delta m_l = 0$ sono identiche alle frequenze imperturbate $\nu_{n,n'}$, mentre quelle a $\Delta m_l = \pm 1$ sono chiamate linee σ e corrispondono alle frequenze:⁷

$$\nu_{n,n'}^{\pm} = \nu_{n,n'} \pm \nu_L = \nu_{n,n'} \pm \frac{\mu_B B}{h}$$

ν_L è anche detta frequenza di Larmor e lo split energetico viene anche detto split di Lorentz.

L'interazione spin-orbita dà origine all'effetto Paschen-Back che dà una correzione alle energia pari a:

$$\Delta E = \lambda_{nl} m_l m_s$$

con:

$$\lambda_{nl} = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n} E_n \frac{1}{l(l + \frac{1}{2})(l + 1)}$$

Con α costante di struttura fine circa pari a $1/137$, la degenerazione in l è rimossa.

Quindi per le linee spettrali di dipolo elettrico ottengo tenendo conto dell'energia complessiva degli stati:

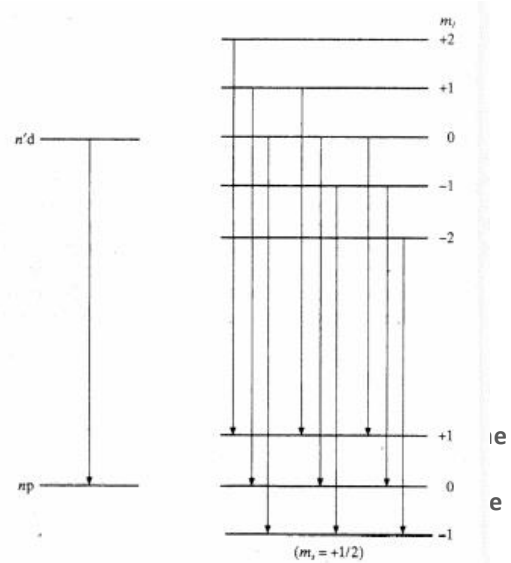
$$\Delta E = E'_n - E_n + \mu_B B(m'_l - m_l) + (\lambda_{n'l'} m'_l - \lambda_{nl} m_l) m_s$$

Effetto Zeeman anormale:

Questo è il caso che si verifica con maggior frequenza ed è chiamato anormale poiché prima che lo spin fosse scoperto era stato predetto sulla base di considerazioni classiche l'effetto Zeeman normale ma i dati sperimentali non coincisero con i risultati teorici e quindi il caso preso in considerazione negli esperimenti fu chiamato "anormale".

Quando il campo magnetico è abbastanza debole il termine di spin orbita ha intensità molto maggiore rispetto al termine magnetico e quindi possiamo in prima approssimazione trascurare quest'ultimo termine

Dunque trattiamo l'hamiltoniana:



⁷ Ricordiamo che l'energia di un fotone è legata alla sua frequenza dalla relazione $E = h\nu$

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} \frac{e}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}$$

Il termine di interazione spin orbita sarà una perturbazione sulla nostra hamiltoniana imperturbata:

$$H = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Tale perturbazione deve essere diagonalizzata e gli operatori che lo fanno sono L^2 , S^2 , J^2 e J_z .

Le correzioni all'energia sono:

$$\Delta E_{n,l,j} = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2n(l+1/2)(l+1)} \quad \text{per } j = l + 1/2$$

$$\Delta E_{n,l,j} = E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2nl(l+1/2)} \quad \text{per } j = l - 1/2$$

Queste sono le correzioni dovute al solo termine di spin-orbita che ha circa la stessa intensità degli altri termini relativistici; includendoli si ha stessa energia dei livelli ottenuta quando abbiamo analizzato lo spettro di un atomo idrogenoide poiché le hamiltoniane coincidono. In tal caso le correzioni all'energia dipendono solo da n e j .

In questo senso l'effetto Zeeman anomalo è strettamente connesso con gli atomi idrogenoidi e il loro studio fino a questo punto risulta identico.

Dunque, come prima, per un fissato valore di n , si osserva uno split per gli n diversi valori che j può assumere.

Aggiungendo la perturbazione del campo magnetico, trattandola come un'ulteriore perturbazione, troviamo che l'ulteriore correzione alle energie è:

$$\Delta E_{m_j} = \frac{2l+2}{2l+1} \mu_B B m_j \quad (\text{Per } j = l + 1/2)$$

$$\Delta E_{m_j} = \frac{2l}{2l+1} \mu_B B m_j \quad (\text{Per } j = l - 1/2)$$

Dunque la correzione totale alle energie sarebbe:

$$E = \Delta E_n + \Delta E_{n,j} + \Delta E_{m_j}$$

In tal caso vi saranno più linee spettrali rispetto al tripletto di Lorentz poiché lo split dei livelli non è lo stesso per stati con j diversi, tenendo conto che le regole di transizione di dipolo elettrico sono: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta m_j = 0, \pm 1$, come da figura (presa dal Bransden [11]).

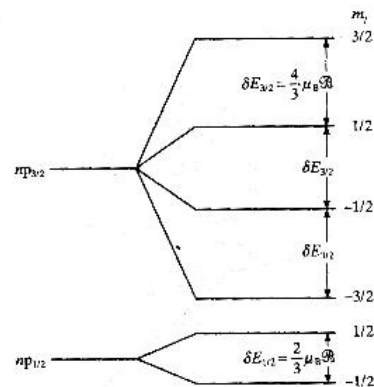


Figure 6.9 Splitting of $np_{3/2}$ and $np_{1/2}$ levels of atomic hydrogen in a weak magnetic field.

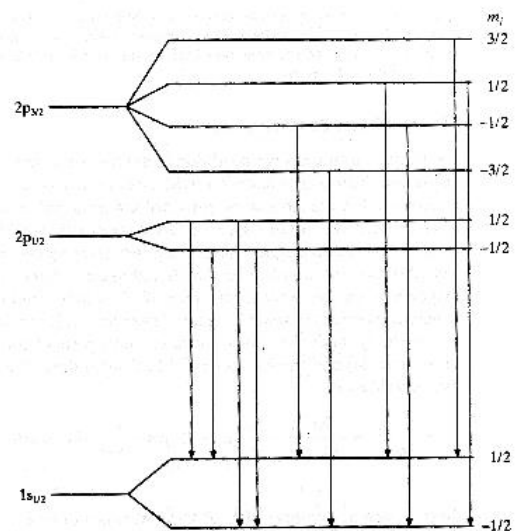


Figure 6.10 In electric dipole transitions between the $n=2$ and $n=1$ levels of atomic hydrogen, in a weak magnetic field, four lines result from the $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ transitions and six lines from the $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ transitions.

Appendice

1. Paradosso di Mocanu

Abbiamo accennato precedentemente ad una difficoltà nel conciliare il principio di reciprocità delle velocità e la composizione relativistica delle velocità e a come la rotazione di Thomas può risolvere tale problema:

Verifichiamo dunque che le componenti di $\mathbf{v}^*$ si trasformano in quelle di $\mathbf{v}^{**}$ tramite la matrice di rotazione di Thomas nel caso di rotazione infinitesima che è il caso che più ci interessa poiché è quello richiesto per ottenere la precessione di Thomas:

Sappiamo che se $d\theta$ è l'angolo che il sistema S'' forma con il sistema S^* ottenuto da S tramite un semplice boost con velocità pari a $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$, allora le componenti di un qualunque vettore si trasformano secondo la seguente regola (le componenti non apicate sono quelle del sistema S , quelle apicate del sistema S''):

$$\begin{aligned}x'' &= x \cos d\theta + y \sin d\theta = x + y d\theta \\y'' &= -x \sin d\theta + y \cos d\theta = -x d\theta + y\end{aligned}$$

Dove l'asse di rotazione è l'asse z^* e si è usata l'approssimazione al primo ordine in θ e la matrice di rotazione è:

$$Rot_{Th} = \begin{bmatrix} 1 & d\theta \\ -d\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque confrontiamo ora le componenti trasformate di $-\mathbf{v}^*$ lungo gli assi x'' e y'' con le componenti di $\mathbf{v}^{**}$ ricordando che $-\mathbf{v}^* = -\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}'}{\gamma}$ e $\mathbf{v}^{**} = -\mathbf{v}' - \frac{\mathbf{v}}{\gamma'}$

$$\begin{aligned}-v_{x''}^* &= -v_x^* - v_y^* d\theta = -v - \frac{dv}{\gamma} d\theta = -v = v_{x''}^{**} \\-v_{y''}^* &= v_x^* d\theta + v_y^* = -v d\theta - \frac{dv}{\gamma} = -v \frac{dv'}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) - \frac{dv}{\gamma} = dv' \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) - \frac{dv}{\gamma} = dv' = v_{y''}^{**}\end{aligned}$$

Dunque in definitiva $-\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{**}$ come richiesto dal principio di reciprocità della velocità.

2. Ugualianza del modulo di $\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'$ con il modulo di $\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v}$

La formula generale per la composizione di velocità è:

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}' = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}} \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}'}{\gamma} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v} \right)$$

Usando però la relazione:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}' \\ \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v} &= \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}') = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} v^2 \mathbf{v}' \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{v}'\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è giustificato da queste uguaglianze: $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$; $\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{\gamma^2}$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}' &= \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}} \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}'}{\gamma} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{v}' \right) = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}} \left(\mathbf{v} + \mathbf{v}' + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') \right) \\ |\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'|^2 &= \frac{1}{\left| 1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2} \right|^2} \left(|\mathbf{v} + \mathbf{v}'|^2 + \left| \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') \right|^2 + 2(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') \right)\end{aligned}$$

Analizziamo gli ultimi due termini separatamente:

$$\left| \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') \right|^2 = \frac{1}{c^4} \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2} v^2 |\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\gamma-1}{1+\gamma} |\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2$$

Dove abbiamo sempre utilizzato: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{\gamma^2}$

L'altro è:

$$(2(\mathbf{v} + \mathbf{v}')) \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') = 2\mathbf{v}' \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}')$$

Ma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}')) &= \mathbf{v}' \cdot ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}') = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'|^2 - |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{v}'|^2 = |\mathbf{v}|^2 |\mathbf{v}'|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = -|\mathbf{v}|^2 |\mathbf{v}'|^2 \sin^2 \varphi \\ &= -|\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$2\mathbf{v}' \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}') = -\frac{2}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} |\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2$$

Dunque:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} \oplus \mathbf{v}'|^2 &= \frac{1}{\left|1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}\right|^2} \left(|\mathbf{v} + \mathbf{v}'|^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma-1}{1+\gamma} |\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2 - \frac{2}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} |\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\left|1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}\right|^2} \left(|\mathbf{v} + \mathbf{v}'|^2 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{v} \times \mathbf{v}'|^2 \right) = |\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

3. Dimostrazione della formula: $\mathbf{v} \oplus d\mathbf{v}' \simeq \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma}$ e della formula $d\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v} = d\mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}$

La formula generale per la composizione relativistica delle velocità è:

$$\mathbf{v} \oplus d\mathbf{v}' = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}} \left(\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}'}{\gamma} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}') \mathbf{v} \right)$$

Scompongo $d\mathbf{v}'$ in una parte parallela a $\mathbf{v}$ ed una perpendicolare.

$$d\mathbf{v}' = d\mathbf{v}'_{//} + d\mathbf{v}'_{\perp}$$

Dovrò trascurare qualunque termine infinitesimo sulla direzione di $\mathbf{v}$ (e quindi anche $d\mathbf{v}'_{//}$) mentre su $d\mathbf{v}'_{\perp}$ devo tenere tutti i termini di ordine 1 all'interno della parentesi.

In virtù di ciò elimino immediatamente $\frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{1+\gamma} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}') \mathbf{v}$.

Il fattore $\frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}}$ all'ordine zero è pari ad 1 mentre agli ordini superiori darebbe termini di infinitesimo superiori per $\mathbf{v}$ e per $d\mathbf{v}'$ e quindi prendiamo la sua approssimazione all'ordine più basso.

Scriviamo quindi:

$$\mathbf{v} \oplus d\mathbf{v}' \simeq \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma}$$

Mostrare che vale $d\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v} = d\mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}$ è più immediato, difatti:

$$d\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}} (d\mathbf{v}' + \frac{\mathbf{v}}{\gamma'} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma'}{1 + \gamma'} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}') d\mathbf{v}'))$$

Ancora una volta il fattore $\frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}'}{c^2}}$ è approssimato all'ordine più basso per avere i termini di infinitesimo minore su $d\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}$, per lo stesso motivo anche $\frac{1}{\gamma'}$ viene approssimato all'ordine 0 e $(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}') d\mathbf{v}'$ si trascura perché rappresenta un termine del secondo ordine per $d\mathbf{v}'$ che è già presente al primo ordine, otteniamo:

$$d\mathbf{v}' \oplus \mathbf{v} = d\mathbf{v}' + \mathbf{v} = d\mathbf{v}'_{\perp} + \mathbf{v}$$

La componente di $d\mathbf{v}'$ parallela a $\mathbf{v}$ si trascura perché è un ordine di infinitesimo 1 rispetto a $\mathbf{v}$ non infinitesimo.

4. Mostriamo che vale: $\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}$

Abbiamo:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1)$$

Vale:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

$$v^2 = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) c^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} c^2 = \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{\gamma^2} c^2$$

Quindi:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{\frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{\gamma^2} c^2} (\gamma - 1) = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}$$

5. Mostriamo che al primo ordine: $\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) \simeq \frac{1}{2} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}$

$$\gamma = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \gamma(\beta^2)$$

$$\gamma(\beta^2 = 0) = 1$$

$$\frac{d\gamma}{d\beta^2}(0) = \left(-\frac{1}{2}(1 - \beta^2)^{-3/2}(-1)\right)_{\beta=0} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma(\beta^2) \simeq \gamma(0) + \frac{d\gamma}{d\beta^2}(0) \beta^2 = 1 + \frac{1}{2} \beta^2$$

Per cui:

$$\boldsymbol{\omega}_T = (\gamma - 1) \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{v^2} \simeq \frac{1}{2} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{v}}{c^2}$$

6. L'espressione dell'energia potenziale di Thomas

Possiamo trovare l'energia potenziale che ci restituisca l'espressione corretta per il momento aggiuntivo $\mathbf{M}^*$ nota anche col nome di energia di interazione di Thomas; essa risulta:

$$U^* = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Difatti:

$$dU^* = d(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}) = (d\mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{S} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{S} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

La relazione: $d(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}) = (d\mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ è giustificata dal fatto che una rotazione del sistema di un angolo $d\boldsymbol{\theta}$ fa variare solo lo spin che è una quantità del sistema e non la rotazione angolare alla quale è sottoposto.

La relazione: $(d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{S} \times \boldsymbol{\omega})$ è una nota proprietà del prodotto triplo

Da cui:

$$\mathbf{M}^* = -\mathbf{S} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}$$

7. La derivata temporale di un vettore in un sistema di riferimento ruotante in meccanica classica

Sia $\mathbf{f}$ un vettore generico uguale per il sistema fisso e il sistema ruotante e cioè:

$$\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i = f'_i \mathbf{e}'_i$$

Allora:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{fisso}} &= \frac{\partial f_i}{\partial t} \mathbf{e}_i = \frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i + f'_i \frac{\partial \mathbf{e}'_i}{\partial t} = \frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i + f'_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i = \frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times f'_i \mathbf{e}'_i = \frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f} \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{ruotante}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f} \end{aligned}$$

Dunque operatorialmente:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\text{fisso}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\text{ruotante}} + \boldsymbol{\omega} \times$$

È da notare che l'espressione ricavata vale in ambito della meccanica classica difatti il tempo del sistema ruotante e del sistema fisso è stato assunto uguale.

8. La derivata temporale di un vettore in un sistema di riferimento ruotante in relatività ristretta

Sia $\mathbf{f}$ un vettore generico che sia invariante sotto trasformazioni di Lorentz :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_i \mathbf{e}_i = f'_i \mathbf{e}'_i \\ \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right|_{\text{fisso}} &= \frac{\partial f_i}{\partial t} \mathbf{e}_i = \frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i + f'_i \frac{\partial \mathbf{e}'_i}{\partial t} \end{aligned}$$

Ora dobbiamo esprimere $\frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i$ come derivata nel sistema di riferimento apicato e quindi:

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}'/c^2)$$

Dove $\mathbf{v}$ è la velocità della particella e $\mathbf{r}'$ è la posizione dell'evento che si sta considerando che in tal caso è la rotazione dello spin dell'elettrone in un sistema di riferimento in cui è fermo.

Considerando una variazione infinitesimale di tempo ottengo:

$$dt = \gamma \left(dt' + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}'}{c^2} \right) = \gamma dt'$$

poiché $d\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ essendo l'elettrone in quiete in questo sistema di riferimento all'istante considerato.

E otteniamo la dilatazione dei tempi per cui:

$$\frac{\partial f'_i}{\partial t} \mathbf{e}'_i + f'_i \frac{\partial \mathbf{e}'_i}{\partial t} = \frac{\partial f'_i}{\gamma \partial t'} \mathbf{e}'_i + f'_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f'_i}{\partial t'} \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \times f'_i \mathbf{e}'_i = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \Big|_{ruotante} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{f}$$

Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{fisso} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{ruotante} + \boldsymbol{\omega} \times$$

Notiamo che sviluppando all'ordine zero γ riotteniamo la usuale formula della meccanica classica

9. Espressione dell'ampiezza del doppietto:

Le correzioni dovute al solo spin orbita sono:

$$\Delta E_{n,l,j} = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2n(l+1/2)(l+1)} \quad \text{per } j = l + 1/2$$

$$\Delta E_{n,l,j} = E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2nl(l+1/2)} \quad \text{per } j = l - 1/2$$

Dunque la differenza energetica tra stati a pari n ed l è:

$$\begin{aligned} |\Delta E| &= \left| -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2n(l+\frac{1}{2})(l+1)} - E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2nl(l+1/2)} \right| = \frac{|E_n|(Z\alpha)^2}{2n} \left| \frac{1}{(l+\frac{1}{2})(l+1)} + \frac{1}{l(l+\frac{1}{2})} \right| \\ &= \frac{|E_n|(Z\alpha)^2}{2n} \left| \frac{2l+1}{(l+\frac{1}{2})(l+1)l} \right| = \frac{|E_n|(Z\alpha)^2}{2n} \left| \frac{2(l+\frac{1}{2})}{(l+\frac{1}{2})(l+1)l} \right| = \frac{|E_1|(Z\alpha)^2}{n^3} \left| \frac{1}{(l+1)l} \right| \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si è esplicitata l'energia imperturbata di un atomo idrogenoide $E_n = \frac{|E_1|}{n^2}$

Bibliografia

- [1] G. E. UHLENBECK e S. GOUDSMIT, «Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons,» *Naturwissenschaften*, vol. 13, n. 47, pp. 953-954, 1925.
- [2] G. E. UHLENBECK e S. GOUDSMIT, «Spinning Electrons and the Structure of Spectra,» *Nature*, vol. 117, n. 2938, p. 264, 1926.
- [3] L. Silberstein, *The Theory of Relativity*, London: Macmillan Publishers, 1914.
- [4] L. H. Thomas, «The Motion of the Spinning Electron,» *Nature*, vol. 117, n. 2945, p. 514, 10 April 1926.
- [5] E. Wigner, «On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group,» *Annals of Mathematics*, vol. 40, n. 1, pp. 149-204, 1939.
- [6] G. F. Smoot, «Physics 139 Relativity,» Thomas precession February 1998. [Online]. Available: [https://jila.colorado.edu/arey/sites/default/files/files/seven\(1\).pdf](https://jila.colorado.edu/arey/sites/default/files/files/seven(1).pdf).
- [7] C. I. Mocanu, «Some difficulties within the framework of relativistic electrodynamics,» *Archiv für Elektrotechnik*, vol. 69, n. 2, pp. 97-110, 1986.
- [8] H. Goldstein, C. P. Poole e J. Safko, *Classical Mechanics*, Pearson, third edition, 2011.
- [9] J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, Zanichelli, traduzione basata sulla seconda edizione del 1975, 1984.
- [10] C. Mencuccini e V. Silvestrini, *Fisica II Elettromagnetismo e Ottica*, Napoli: Liguori Editore, 1999.
- [11] B. H. Bransden e C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, Pearson Education, second edition, 2003.
- [12] «Thomas precession,» 7 Aprile 2018. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_precession.
- [13] «Wigner rotation,» 28 Aprile 2018. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Wigner_rotation.
- [14] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*, Oxford: Oxford University Press, 2001.