



**Università degli Studi di Napoli Federico II**

---

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE AREA DIDATTICA DI SCIENZE  
MATEMATICHE FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**La Teoria Della Misura Secondo l'Interpretazione di  
Copenaghen  
tra Paradossi ed Esperimenti**

Candidato:

**Antonio Ambrosone**

Matricola N85000834

Relatore:

**Ch.mo Prof. Gennaro Miele**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La Teoria Della Misura</b>	<b>2</b>
2.1	Assiomi . . . . .	2
2.2	Misura Ideale Secondo Von Neumann . . . . .	5
2.3	Principio Di Indeterminazione Di Heisenberg . . . . .	6
2.4	Un Apparente Paradosso . . . . .	7
2.5	Ipotesi Del Collasso . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Collasso Della Funzione D'onda</b>	<b>11</b>
3.1	Effetto Zenone Quantistico . . . . .	11
3.2	Luce <i>Congelata</i> . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Entanglement</b>	<b>18</b>
4.1	Definizione . . . . .	18
4.2	Paradosso EPR . . . . .	19
4.3	Entanglement e Principio di Complementarietà . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Gatto di Schrödinger</b>	<b>23</b>
5.1	Gerarchia di Von Neumann . . . . .	23
5.2	Gedankenexperiment . . . . .	25
5.3	Decoerenza Quantistica . . . . .	26
5.4	Topolino Quantistico . . . . .	27
5.4.1	Costruzione del Gatto . . . . .	27
5.4.2	Costruzione del topo . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>32</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Il ventesimo secolo è stato segnato da moltissime rivoluzioni scientifiche e culturali. Due esempi importanti sono la teoria della relatività e la meccanica quantistica. Come spiega Aharonov [1], entrambe le teorie contraddicono il senso comune della realtà, ma, mentre la prima riformula concetti di *spazio* e *tempo*, *massa* ed *energia*, la seconda, al contrario, ridefinisce il concetto di *determinismo*, come se non esistesse alcuna realtà oggettiva. In particolare, attraverso il principio di indeterminazione di Heisenberg, essa impedisce di definire concetti, come la posizione, la velocità e la traiettoria di una particella. Pertanto, sorge una domanda spontanea: perchè gli scienziati si affannano a studiarla? Perchè continuano ad utilizzarla? La risposta sta nel fatto che una teoria deve essere validata attraverso il confronto tra i risultati sperimentali e quelli previsti dalla teoria stessa. Da questo punto di vista la meccanica quantistica, per quanto strana, controintuitiva e paradossale è compatibile con gli esperimenti fino ad ora effettuati. Tuttavia, ci sono questioni non risolte, come per esempio il problema della misura. Infatti, come precisato in [1], mentre in meccanica classica si può supporre che il processo di misurazione non influisca sul sistema, o meglio che si possa far in modo che l'influenza sia arbitrariamente piccola, in meccanica quantistica non è possibile a causa del principio di indeterminazione. Definire un processo di misurazione teorico è, pertanto, un problema molto delicato. Questo lavoro di tesi mira ad indagare la natura di tale problema. Essa è suddivisa in quattro capitoli. Nel primo è esposto il modello della misura secondo Von Neumann, nel secondo e terzo, rispettivamente, il concetto di collasso della funzione d'onda e di entanglement e nel quarto capitolo è presentato uno dei più importanti *esperimenti mentali* riguardante la meccanica quantistica: il gatto di Schrödinger.

## Capitolo 2

# La Teoria Della Misura

Effettuare una misurazione significa far interagire uno strumento di misura con un sistema fisico qualunque di cui si vuole conoscere qualche proprietà. Prima di esporre come la meccanica quantistica descriva questa interazione, è doveroso richiamare in che modo essa descriva un sistema fisico qualsiasi, cioè i suoi assiomi.

### 2.1 Assiomi

La meccanica quantistica si basa su concetti radicalmente differenti rispetto a quella classica ed è costituita da molti assiomi, alcuni dei quali vengono riportati di seguito (Caldirola [2]).

- **Assioma 1** *Ad ogni sistema fisico è associato uno spazio vettoriale di Hilbert  $H_d$ . Ad ogni stato del sistema è associato un opportuno elemento  $\psi(t) \in H_d$  con norma uguale a 1 (detto anche vettore di stato) che contiene tutte le informazioni riguardanti il sistema. L'evoluzione temporale del vettore di stato è regolata da un'equazione, detta di Schrödinger, della forma*

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = \hat{H}\psi(t) \quad (2.1)$$

dove  $\hat{H}$  è un operatore autoaggiunto, chiamato Hamiltoniano del sistema, che deve essere definito di volta in volta. È opportuno aggiungere che, dal momento che ogni stato del sistema è rappresentato da un vettore di uno spazio vettoriale e che quest'ultimo è chiuso per combinazioni lineari, l'assioma 1 contiene in sé il fondamentale principio di sovrapposizione: se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono possibili stati del sistema, lo è anche una loro qualsiasi combinazione lineare (Bohm [3]). Inoltre, come dettagliatamente spiegato in [2], "la natura delle informazioni contenute nel vettore di stato deve essere esplicitata con un ulteriore postulato".

- **Assioma 2** *Ad ogni grandezza osservabile  $A$  è associato un operatore autoaggiunto  $\hat{A}$  operante in  $H_d$ . Lo spettro discreto  $\sigma_d(\hat{A})$  e quello continuo  $\sigma_c(\hat{A})$  di  $\hat{A}$  costituiscono il campo dei valori possibili (misurabili) della grandezza. Scritte le equazioni agli autovalori, rispettivamente per lo spettro discreto*

$$\hat{A}\varphi_{ru} = a_r\varphi_{ru} \quad (2.2)$$

e per lo spettro continuo

$$\hat{A}\varphi_{\alpha u} = a\varphi_{\alpha u} \quad (2.3)$$

(Dove  $\varphi_{ru}$  e  $\varphi_{\alpha u}$  sono gli autovettori rispettivamente propri ed impropri opportunamente ortonormalizzati) e decomposto lo stato del sistema in:

$$\varphi(t) = \sum_{ru} c_{ru}(t)\varphi_{ru} + \sum_u \int_{\sigma_c} da C_u(a, t)\varphi_{\alpha u} \quad (2.4)$$

le probabilità che, una misura dell'osservabile  $A$  ad un determinato istante di tempo  $t$  fornisca il valore  $a_r \in \sigma_d$  o un valore compreso nell'intervallo  $(a, a + da) \subset \sigma_c$  sono:

$$P(A = a_r | t) = \sum_u |c_{ru}(t)|^2 \quad (2.5)$$

$$P(a \leq A \leq a + da | t) = \sum_u |c_u(t)|^2 da \quad (2.6)$$

Si noti che questo postulato, mette in chiara evidenza quale sia il ruolo del vettore di stato, in particolare risulta lapalissiano che esso abbia una valenza probabilistica. Ovvero non si può predire un risultato di una misura, analogamente alla meccanica classica, bensì la probabilità dei possibili valori attesi. Questa interpretazione di  $\psi(t)$  fu introdotta per la prima volta da Born e non va assolutamente confusa con la visione probabilistica che si ha in meccanica classica. In quest'ultima la probabilità entra in gioco come "mancanza di conoscenza da parte dell'osservatore", in meccanica quantistica, al contrario, è legata alla natura intrinseca delle cose. Un semplice esempio di ciò [4] può essere fatto come segue: si supponga di avere una mole di gas chiuso in un recipiente. Secondo la fisica classica, non si possono conoscere posizioni e velocità delle singole molecole con esattezza a causa di due motivazioni principali. La prima dovuta all'immenso numero di particelle contenute del gas ( $\sim 6 \times 10^{23}$ ) che renderebbe materialmente impossibile risolvere il sistema di equazioni di Hamilton associate al sistema; la seconda legata alla difficoltà di conoscere sperimentalmente le velocità e posizione di ogni molecola all'istante iniziale. Tali problemi rendono difficile, se non impossibile, la soluzione del problema di Cauchy associato. Dunque l'utilizzo di distribuzioni di probabilità per le velocità delle molecole, risulta conseguenza della *mancanza di conoscenza* riguardo al sistema. Dal punto di vista quantistico, al contrario, è assiomaticamente errato pensare di adottare un approccio deterministico, in quanto, in primo luogo, il principio di indeterminazione impedisce di conoscere contemporaneamente con precisione illimitata posizione e momento delle molecole, secondo perchè, è errato modellizzare le molecole come se fossero punti materiali con una determinata velocità e posizione [2]. Dunque, l'interpretazione probabilistica è una necessità! Si noti che l'assioma 2 è relativo ad una sola osservabile, ed è importante generalizzarlo a misure contemporanee di più osservabili, cioè importante definire il concetto di operatori compatibili. Tuttavia, per ragioni di semplicità si ometterà questo assioma e si rimanda a [2] per una trattazione completa ed esaustiva. Ciò che è importante richiamare, invece, è che due operatori sono compatibili, ovvero si possono misurare contemporaneamente, quando il loro commutatore è nullo:  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ . Nel caso quest'ultima relazione non fosse rispettata, gli operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  sono incompatibili e vale la seguente relazione (principio di indeterminazione di Heisenberg generalizzato):

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (2.7)$$

Dove  $\Delta A$  e  $\Delta B$  rappresentano, rispettivamente gli scarti quadratici medi dei valori di aspettazione di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  e il secondo membro rappresenta il valore di aspettazione del commutatore calcolato su un generico stato  $\psi$ .

- **Assioma 3** *La misura di un'osservabile  $A$  su uno stato generico  $\psi$ , supponendo di aver ottenuto  $\alpha$  come risultato, proietta  $\psi$  sull'autospazio di  $\alpha$  [5].*

Quest'ultimo postulato è detto del collasso e per illustrare in modo semplice le sue conseguenze si supponga di avere un sistema fisico il cui operatore Hamiltoniano ha come autovettori le funzioni  $\varphi_n$  relative tutte ad autovalori differenti  $E_n$  (caso non degenere). Lo stato del sistema in un dato istante sarà dato dalla soluzione dell'equazione di Schrödinger:

$$\psi(t) = \sum_n C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \varphi_n \quad (2.8)$$

Dove i coefficienti  $C_n$  sono coefficienti di normalizzazione della condizione iniziale. Adesso si supponga di aver effettuato, ad un istante arbitrario  $\bar{t}$ , una misura dell'energia e di aver ottenuto il Valore  $E_N$ . Ciò, per il postulato del collasso, implica che subito dopo la misura, all'istante  $\bar{t} + \Delta t$ , la funzione d'onda ha subito una discontinuità [2], ed è diventata

$$\psi(\bar{t} + \Delta t) = \varphi_N \quad (2.9)$$

Ciò significa che il processo di misurazione modifica drammaticamente lo stato di un sistema. Per tale motivo, le misure in meccanica quantistica vengono, generalmente, definite distruttive [6]. Ma è davvero fondamentale questo assioma? Per cercare di rispondere a questa domanda si può schematizzare un generale processo di misurazione. Si supponga che il sistema precedentemente illustrato si trovi nell'autostato  $|n\rangle$  relativo all'autovalore  $E_n$ . Si supponga, inoltre, di voler misurare l'energia del sistema tramite un particolare strumento di misura. Esso, ovviamente, si troverà prima dell'interazione con il *sistema misurando* in uno stato iniziale arbitrario  $|d_0\rangle$ . Dopo l'interazione con il sistema, dopo un certo periodo di tempo, lo strumento di misura si porterà in un nuovo stato  $|d_n\rangle$  che deve essere in corrispondenza biunivoca con lo stato del sistema, altrimenti non si potrebbe effettuare alcuna misura, in quanto non si leggerebbe un singolo numero sullo strumento di misura [7]. Pertanto, il sistema quantistico complessivo, sistema misurando + strumento di misura, è caratterizzato dal sistema  $|n, d_n\rangle$ . Ma, data la validità del principio di sovrapposizione, il sistema misurando può trovarsi, inizialmente, anche in una sovrapposizione di stati:

$$|\psi\rangle = \sum_m a_m |\varphi_m\rangle \quad (2.10)$$

Quindi in quale stato andrà a trovarsi alla fine della misura il sistema complessivo (strumento + sistema misurando)? Anch'esso sarà in una sovrapposizione di stati:

$$|\psi_{\bar{t}}\rangle = \sum_m a_m |\varphi_m\rangle |d_m\rangle \quad (2.11)$$

Tale equazione implica che anche lo strumento di misura è in una sovrapposizione di stati. Il problema, però, è che non ci sarebbe *univocità* nel risultato della misura ed uno sperimentatore non potrebbe effettuarla affatto; sicché è resa necessaria l'introduzione "del collasso" della funzione d'onda, o in altre parole, il concetto della riduzione dei pacchetti d'onda [7]. Si potrebbe obiettare che, poichè si sta supponendo che la riuscita della misurazione sia classica, è come se si stesse trattando lo strumento di misura *contemporaneamente* sia in modo *quantistico* sia *classico*, il che è assurdo. Tale problema non è stato

ancora completamente risolto e rappresenta il limite dell'interpretazione di Copenaghen, anche perchè la teoria non riesce ad indagare ulteriormente questo processo, bensì solo postularlo. Il punto chiave è dovuto al fatto che non può esistere una formulazione della meccanica quantistica che prescindendo totalmente da quella classica [8]. Sebbene esistano altri modelli che tentano di rispondere a tale domanda, nel seguito di tale lavoro di tesi ci si concentrerà sull'interpretazione di Copenaghen.

## 2.2 Misura Ideale Secondo Von Neumann

Per approfondire il problema discusso alla fine del paragrafo (2.1) si deve comprendere cosa è veramente essenziale per una *misura quantistica* [1]. A tal proposito John Von Neumann sviluppò un importante modello di misura basato sulle seguenti ipotesi:

1. l'operazione di misura dura un tempo finito  $T$ .
2. La misura produce un effetto sul dispositivo di misurazione, ossia lega un'osservabile del dispositivo con l'osservabile misurando.
3. L'operazione di misura non cambia l'osservabile.
4. Il tempo di interazione  $T$  può essere piccolo a piacere (ovvero, almeno dal punto di vista teorico, è possibile considerare  $T$  molto più piccolo rispetto al tempo di evoluzione del sistema).
5. La misura è un processo quantistico basato sull'interazione con lo strumento di misura, pertanto deve essere introdotto un operatore Hamiltoniano di interazione  $\hat{H}_{\text{int}}$ .

Sia  $\hat{A}_s$  un operatore autoaggiunto associato ad un'osservabile  $A_s$  del sistema. Affinchè valga il punto 3,  $\hat{A}_s$  e  $\hat{H}_{\text{int}}$  devono essere operatori compatibili, pertanto deve valere  $[\hat{A}_s, \hat{H}_{\text{int}}] = 0$ . Per la validità del punto 2, bisogna accoppiare l'osservabile  $\hat{A}_s$  con un'osservabile  $\hat{P}_d$  del dispositivo. L'accoppiamento più semplice realizzabile è  $\hat{A}_s \hat{P}_d$  [1] (si noti che la somma non sarebbe accettabile poichè non rappresenterebbe una vera interazione, dato che renderebbe *fattorizzabile* il problema; ovvero renderebbe possibile scrivere la soluzione totale dell'equazione di Schrödinger come un prodotto tra una funzione dipendente solo da variabili del sistema e una solo dello strumento di misura, violando il punto 2). Inoltre per introdurre un'hamiltoniana di interazione è necessario introdurre una funzione  $g(t)$  che normalizzi le unità di misura e in virtù del punto 1 differisce da zero solo per  $0 \leq t \leq T$ . Inoltre, poichè la misura di un'osservabile deve essere indipendente dal tempo impiegato ad osservarla, deve valere la relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_0^T g(t) dt = g_0 \quad (2.12)$$

L'operatore hamiltoniano di interazione, pertanto, è:  $\hat{H}_{\text{int}} = g(t) \hat{A}_s \hat{P}_d$  e di conseguenza l'hamiltoniana totale è  $\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_d + \hat{H}_{\text{int}}(t)$ , dove  $\hat{H}_s$  e  $\hat{H}_d$  rappresentano, rispettivamente, gli operatori separati Hamiltoniani del sistema e del dispositivo di misura [1]. Per comprendere come funziona tale modello, si consideri l'operatore  $\hat{Q}_d$  coniugato a  $\hat{P}_d$ . È importante fare due osservazioni: la prima è che  $\hat{Q}_d$  e  $\hat{P}_d$  non dipendono esplicitamente dal tempo, poichè gli stati di uno strumento devono variare solo attraverso l'interazione con il sistema, la seconda è che vale la relazione  $[\hat{Q}_d, \hat{P}_d] = i\hbar$ . Si supponga, ora, di aver

preparato lo strumento di misura in uno stato iniziale ben definito con  $Q_d(0) = 0$  e il sistema in uno stato definito di  $\hat{A}_s$ , ovvero in un suo autostato [1]. Secondo le equazioni del moto nella rappresentazione di Heisenberg:

$$Q_d(T) = \int_0^T dt \frac{dQ_d}{dt} = \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H, Q_d] = \quad (2.13)$$

$$= \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} ([H_d, Q_d] + [H_s, Q_d] + [g(t)A_s P_d, Q_d]) \quad (2.14)$$

il che, per la regola di Leibniz, è uguale ad:

$$\int_0^T dt \frac{i}{\hbar} ([H_d, Q_d] + [H_s, Q_d] + g(t)A_s [P_d, Q_d] + g(t) [A_s, Q_d] P_d) \quad (2.15)$$

I commutatori  $[H_s, Q_d]$  e  $[A_s, Q_d]$  sono nulli, poichè, a causa del punto 2, in questo modello il valore dell'osservabile  $Q_d$  è univocamente legato a quello dell'osservabile  $A_s$  e proprio la possibilità di conoscere contemporaneamente il valore dei due osservabili a rendere possibile la misura [1]. Pertanto se gli operatori non fossero compatibili, tutto ciò sarebbe incongruente. Ciò implica che:

$$Q_d(T) = \int_0^T dt \frac{i}{\hbar} [H_d, Q_d] + g_0 A_s \quad (2.16)$$

che nel limite di misura impulsiva ( $T \rightarrow 0$ ) diventa:

$$Q_d(T) = g_0 A_s \quad (2.17)$$

dunque  $\hat{Q}_d$  è biunivocamente legato ad  $\hat{A}_s$ . Il valore di  $Q_d$  fornisce il valore della misura, pertanto, può essere identificato con la posizione di un *pointer* sul dispositivo [1]. Si noti che le equazioni su scritte hanno carattere operatoriale e l'ipotesi che il sistema si trovi inizialmente in un autostato di  $\hat{A}_s$  è stata fondamentale, perchè così facendo nella (2.17) all'operatore si può sostituire il corrispondente autovalore, che restituisce appunto il risultato della misura.

### 2.3 Principio Di Indeterminazione Di Heisenberg

Affinchè il modello di Von Neumann sia coerente con i postulati della meccanica quantistica, è di primaria importanza che le *misure quantistiche* rispettino il principio di indeterminazione di Heisenberg [1]. Si noti, innanzitutto, che l'Hamiltoniana di interazione contiene  $\hat{A}_s$ , pertanto ciò *disturberà* la misura di ogni operatore che non commuta con esso [1]. Per quanto spiegato nel paragrafo precedente, considerando l'Hamiltoniana di interazione  $\hat{H}_{\text{int}} = g(t)\hat{A}_s\hat{P}_d$ , per una misura impulsiva, vale la relazione  $Q_d(T) = g_0 A_s$ , sicchè l'indeterminazione di  $A_s$  è legata a quella di  $Q_d$  tramite la relazione:

$$\Delta A_s = \frac{\Delta Q_d}{g_0} \quad (2.18)$$

In tale formula i valori di aspettazione sono calcolati sullo stato complessivo del sistema (dispositivo + osservabile)  $|\Psi_s, \Phi_d\rangle = |\Psi_s\rangle \otimes |\Phi_d\rangle$  che caratterizza totalmente il sistema [1]. Durante la misura, ogni altro operatore autoaggiunto  $\hat{B}_s$ , relativo al sistema misurando,

che non commuta con  $\hat{A}$  evolverà [1]. Il teorema di Ehrenfest (nell'ipotesi che  $\hat{B}_s$  non dipende esplicitamente dal tempo) implica che:

$$\frac{d\langle \hat{B}_s \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}_{\text{int}}, \hat{B}_s] \rangle \quad (2.19)$$

Si noti che nella (2.19) compare solo un termine dell'Hamiltoniana, quello di interazione, poichè  $\hat{B}$  varia essenzialmente perchè si sta misurando il valore di  $A_s$ ; in altre parole la variazione è dovuta proprio alla parte di interazione dell'Hamiltoniana. Sostituendo l'espressione dell'Hamiltoniana nella (2.19) si ottiene:

$$\frac{d\langle \hat{B}_s \rangle}{dt} = g(t) \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{A}_s, \hat{B}_s] \hat{P}_d \rangle \quad (2.20)$$

Il commutatore tra  $\hat{B}_s$  e  $\hat{P}_d$  è nullo. Si noti che il valore di aspettazione presente nel secondo membro della (2.20) è uguale al prodotto tra il valore medio del commutatore calcolato sullo stato  $|\Psi_s\rangle$  e quello di  $\hat{P}_d$  calcolato sullo stato  $|\Psi_d\rangle$ . Si noti inoltre che il momento dello strumento non varia durante l'esperimento e poichè è inizialmente nullo, il valore di aspettazione è nullo. Dunque anche il valore medio di  $\hat{B}_s$  non varia nel tempo, così come non varia il valore di aspettazione di  $[\hat{A}_s, \hat{B}_s]$ . Tuttavia, vi è comunque un'indeterminazione sul valore di  $\hat{B}_s$  che può essere stimata tramite il seguente ragionamento: è vero che nella (2.20) il valore di aspettazione di  $\hat{P}_d$  è nullo, ma la misura di quest'ultimo deve avere almeno un'indeterminazione pari ad  $\Delta P_d$ , cosicchè ci devono essere delle fluttuazioni nei valori assunti dal primo membro della (2.20) e conseguentemente l'indeterminazione  $\Delta B_s$  deve essere almeno pari a:

$$\Delta B_s \geq \left| \frac{i\Delta P_d}{\hbar} \langle [\hat{A}_s, \hat{B}_s] \rangle \int_0^T g(t) dt \right| \quad (2.21)$$

insomma si deve avere che:

$$\Delta B_s \geq g_0 \frac{\Delta P_d}{\hbar} \left| \langle [\hat{A}_s, \hat{B}_s] \rangle \right| \quad (2.22)$$

Moltiplicando dunque la (2.22) per la (2.18) si ottiene esattamente il principio di indeterminazione di Heisenberg generalizzato, ovvero:

$$\Delta A_s \Delta B_s \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}_s, \hat{B}_s] \rangle \right| \quad (2.23)$$

dove si è tenuto conto che  $\Delta Q_d \Delta P_d \geq \frac{\hbar}{2}$ . Tutto ciò dimostra che il modello di misura di Von Neumann mantiene invariato il principio di indeterminazione.

## 2.4 Un Apparente Paradosso

Il modello di misura appena esposto è molto potente in quanto permette di definire con rigore, in meccanica quantistica, cosa significhi effettuare una misura. Però, si supponga di avere una particella di massa  $m$  vincolata a muoversi lungo una sola direzione, che per semplicità si indicherà con  $x$  [1]. Essa, ovviamente, avrà momento lineare  $p$  e quindi velocità  $v = p/m$ . Allora, per misurare la velocità, si potrebbe pensare di applicare il modello di Von Neumann utilizzando come Hamiltoniana di interazione  $\hat{H}_{\text{int}} = g(t)\hat{P}_d\frac{\hat{p}}{m}$

[1]. Tuttavia, ci si rende immediatamente conto che così facendo la particella non sarebbe più libera e la velocità non più soltanto  $p/m$  [1]. Infatti la velocità, risulterebbe:

$$\hat{v} = \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}] = \quad (2.24)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + g(t)\hat{P}_d \frac{\hat{p}}{m}, \hat{x} \right] = \quad (2.25)$$

$$= \frac{\hat{p}}{m} + g(t) \frac{\hat{P}_d}{m} \quad (2.26)$$

ovvero diversa dalla sua espressione originale. Si deve ricordare che all'inizio del paragrafo 2.2 si è assunto che la misura non avrebbe dovuto cambiare il valore dell'osservabile misuranda, pertanto si dovrebbe abbandonare il modello? No, perchè, il modello del matematico ungherese funziona se applicato a quantità canoniche, poichè, generalmente, una misura di una variabile non canonica, come la derivata temporale di una variabile canonica, modifica la stessa [1]. Non è possibile, infatti, scrivere una Hamiltoniana di interazione con accoppiamento di variabili non canoniche. Per analizzare questo problema conviene utilizzare l'analogo classico attraverso la meccanica Lagrangiana, per poi tornare al quantistico tramite le regole di corrispondenza [1]. In prima approssimazione, si può scrivere:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{2} \dot{Q}_d^2 + g(t) \dot{x} Q_d \quad (2.27)$$

dove  $M$  rappresenta la massa del dispositivo e l'ultimo termine del secondo membro rappresenta il termine di interazione [1]. In questo caso i momenti coniugati rispettivamente di  $x$  e  $Q_d$  diventano:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + g(t)Q_d \\ P_d = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_d} = M\dot{Q}_d \end{cases} \quad (2.28)$$

Si noti che il sistema (2.28) implica che le equazioni del "moto" risultano:

$$\begin{cases} \frac{d(m\dot{x} + g(t)Q_d)}{dt} = 0 \\ \frac{d(M\dot{Q}_d)}{dt} = g(t)\dot{x} \end{cases} \quad (2.29)$$

Il sistema di equazioni (2.29) mostra che la variazione di  $P_d$  è legata alla misura della velocità della particella, però essa non è più la velocità della particella libera, bensì  $V = V(0) - g(t) \frac{Q_d}{m}$ , dove  $V(0)$  rappresenta la velocità all'inizio della misura. È importante a questo punto fare alcune osservazioni: da un lato è vero che la *variazione* della velocità non impedisce la misura in quanto il termine  $g(t) \frac{Q_d}{m}$  contribuisce solo all'incertezza sulla velocità, anche perchè, essendo  $g(T) = 0$ , la velocità della particella alla fine della misura torna al suo valore iniziale [1]. Dal l'altro lato, il sistema (2.29) mostra come  $\dot{x}$  sia intimamente legato a  $Q_d$  e alle variazioni di  $P_d$ . Cosicchè, solo se si riuscisse a misurare  $Q_d$  e  $P_d$  si risolverebbe il problema della misura della velocità. Tuttavia, per il principio di indeterminazione, nella meccanica quantistica, essi non possono essere misurati contemporaneamente con precisione adeguata per effettuare una misura di  $v$ . Allora per risolvere questo problema senza alcuna ambiguità si può aggiungere, come mostrato da Aharonov [1], un termine aggiuntivo alla Lagrangiana:

$$L' = L + \frac{1}{2m} [Q_d g(t)]^2 \quad (2.30)$$

il che corrisponde alle equazioni del "moto":

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [M\dot{Q}_d] = g(t) \left[ \dot{x} + g(t) \frac{Q_d}{m} \right] \\ \frac{d}{dt} [m\dot{x} + g(t)Q_d] = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Come se si fosse aggiunto una forza di compensazione agente sul dispositivo di misurazione in maniera tale da compensare le variazioni non controllabili della velocità della particella durante la misura [1]. Infatti, ricordando che  $g(T) = 0$  e integrando la prima equazione del sistema (2.31) si ottiene che la variazione del momento dello strumento è proporzionale alla velocità della particella. È doveroso far notare che  $L'$  corrisponde ad un'Hamiltoniana:

$$H = \frac{P_d^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} - g(t) \frac{p}{m} Q_d \quad (2.32)$$

$H$ , dunque, corrisponde sostanzialmente alla stessa Hamiltoniana di interazione definita all'inizio del paragrafo (2.2), tranne per il fatto di aver sostituito  $Q_d$  a  $P_d$  [1]. Inoltre, si noti che  $g(t)$  nei due casi, nonostante indicata allo stesso modo, rappresenta due funzioni differenti a causa delle diverse dimensioni fisiche. Inoltre, il segno meno nella (2.32) è ininfluente in quanto può essere inglobato nella funzione  $g(t)$  stessa. Ciò mostra che avendo aggiunto la forza di compensazione, misurare  $v$  corrisponde a misurare  $p/m$  [1]. L'esempio su riportato sottolinea che, nonostante l'osservabile vari durante la misura, alla fine della misurazione essa torna al suo valore originario [1]. Infine, si osservi che esso rappresenta soltanto un esempio per la teoria della misura delle variabili non canoniche.

## 2.5 Ipotesi Del Collasso

Per estendere il ragionamento effettuato alla fine del paragrafo (2.1) si supponga di avere una particella di spin  $\hbar/2$  e di volerne misurare la componente  $z$ . L'Hamiltoniana di interazione è  $\hat{H}_{\text{int}} = g(t)\hat{P}_d\hat{S}_z$ . Si supponga, inoltre, che lo stato iniziale dello strumento  $|0\rangle$  sia tale che  $Q_d = 0$  e che la misura sia impulsiva in modo tale da avere che  $\hat{Q}_d(T) = g_0\hat{S}_z$  [1]. Nella rappresentazione di Schrödinger l'operatore di evoluzione temporale, durante la misura, è:

$$\hat{U}(T, 0) = e^{-i \int_0^T dt \frac{\hat{H}_{\text{int}}}{\hbar}} = e^{-ig_0\hat{P}_d\hat{\sigma}_z} \quad (2.33)$$

dove  $\hat{\sigma}_z$  rappresenta la terza matrice di Pauli. Supponendo che la particella si trovi inizialmente in una particolare sovrapposizione di stati di spin alto  $|\uparrow\rangle$  e basso  $|\downarrow\rangle$  come per esempio  $\varphi(0) = \frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ , lo stato del sistema complessivo (particella + dispositivo di misura) inizialmente si troverà nello stato dato dal prodotto tensoriale, ovvero:

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle] \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow, 0\rangle + |\downarrow, 0\rangle] \quad (2.34)$$

Dopo la misura il nuovo stato del sistema sarà dato dall'applicazione dell'operatore di evoluzione sullo stato iniziale (si noti che  $\hat{P}_d$  e  $\hat{\sigma}_z$  commutano)

$$|\Psi(T)\rangle = e^{-ig_0\hat{P}_d\hat{\sigma}_z} \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow, 0\rangle + |\downarrow, 0\rangle] \quad (2.35)$$

Considerando che  $\hat{P}_d$  rappresenta il generatore delle traslazioni e che l'applicazione della matrice di Pauli su un autostato dello spin restituisce lo stesso inalterato, lo stato finale del sistema sarà:

$$|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow, g_0\hbar/2\rangle + |\downarrow, -g_0\hbar/2\rangle] \quad (2.36)$$

Come è stato già fatto notare alla fine del paragrafo (2.1), al termine della misura lo strumento viene a trovarsi, come l'osservabile, in una sovrapposizione di stati. Ciò renderebbe, impossibile effettuare una qualsiasi misura. Il problema, spiega Aharonov [1], è dovuto al fatto che la linearità dell'operatore di evoluzione conserva la sovrapposizione di stati. Ma d'altro canto, ciò violerebbe l'evidenza sperimentale, in quanto ogni volta che si effettua un esperimento, il risultato, a meno dell'incertezza, è un singolo valore. A tal proposito Bohr postulò, senza darne alcuna dimostrazione, che ogni rivelatore macroscopico non potesse trovarsi in una sovrapposizione di stati [9]. Pertanto, Von Neumann postulò che al termine della misura la sovrapposizione di stati *collassi* in un determinato stato [1]. Ciò, tuttavia, per quanto possa spiegare le evidenze sperimentali, mette in chiara evidenza anche i limiti di tale modello, infatti Aharonov [1] precisa che ci sono domande ancora senza risposte, come per esempio: Quando una misura è davvero completa? Cosa può essere considerato uno strumento di misura? In fondo uno strumento potrebbe anche non essere macroscopico, bensì un singolo atomo. Ma allora perchè un atomo può trovarsi in una sovrapposizione di stati ed invece uno strumento macroscopico, come per esempio un metro, no? Non si sa, anche perchè non si riesce a comprendere quale sia la *linea di transizione* tra il quantistico e il classico, ovvero non si riesce a scoprire quando iniziano a valere le leggi della meccanica classica e quando deve essere utilizzata la meccanica quantistica. Sta di fatto, però, che nonostante tutti i problemi, la meccanica quantistica riesce, tramite il postulato del collasso, a rispondere a molte se non a tutte le domande che sono *fuoriuscite* dagli esperimenti a partire dall'inizio del secolo scorso, pertanto se c'è una teoria che possa attecchirsi a *teoria del tutto* non può che essere lei. Ma allora la vera questione non sarebbe: "perchè dopo una misura emerge un risultato particolare?" [9] Cioè non sarebbe più corretto ribaltare il punto di vista scientifico incentrandolo più sulla meccanica quantistica che non su quella classica? Forse il postulato del collasso mette in evidenza quale sia il vero limite di tutta la conoscenza umana, come se mostrasse che sia la percezione a creare la realtà e non viceversa.

## Capitolo 3

# Collasso Della Funzione D'onda

Tutte le osservazioni discusse nel paragrafo precedente hanno dato vita ad un intenso ed acceso dibattito scientifico per comprendere le conseguenze teoriche dell'introduzione del postulato del collasso e contemporaneamente per verificare sperimentalmente se esso fosse una legge naturale oppure solo un effetto introdotto *ad hoc* per giustificare i risultati sperimentali. In tale contesto, nel 1977 Misra e Sudarshan elaborarono quello che battezzarono come l'effetto Zenone quantistico o all'inglese *quantum Zeno paradox* [6].

### 3.1 Effetto Zenone Quantistico

Per il filosofo greco Zenone di Elea, il concetto di moto era una nozione paradossale. In ogni istante durante il volo, una freccia si trova sempre nella stessa posizione, dunque non potrebbe muoversi affatto. Dopo circa 2500 anni, i fisici scoprono una situazione analoga in meccanica quantistica: l'effetto Zenone quantistico. Misure ripetute su un sistema quantistico possono *congelarne* l'evoluzione.<sup>1</sup> Si supponga, di avere un sistema quantistico caratterizzato principalmente da uno stato eccitato  $\Psi_2$  e dallo stato fondamentale  $\Psi_1$  e che esso si trovi inizialmente nello stato  $\Psi_2$ . Se il sistema viene *eccitato* da un'onda elettromagnetica monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$  e pulsazione  $\omega$ , esso risponderà principalmente alla componente elettrica [6] e subirà *perturbazioni* dipendenti dal tempo tramite una Hamiltoniana del tipo:

$$H'(\vec{r}, t) = V(\vec{r})\cos(\omega t) \quad (3.1)$$

si noti che tale Hamiltoniana vale nell'ipotesi che la lunghezza d'onda della radiazione *eccitante* sia molto più grande delle dimensioni *tipiche* del sistema in esame, poichè ciò permette di trascurare la variazione spaziale del campo elettromagnetico [6]. Si può, infatti, dimostrare tramite la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo che la probabilità che il sistema transisca da uno stato all'altro (per esempio dallo stato  $\Psi_2$  allo stato  $\Psi_1$ , che sono autostati dell'Hamiltoniana *imperturbata*) è uguale, con buona approssimazione, a [6]:

$$P_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{|V_{1,2}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} \quad (3.2)$$

dove  $V_{1,2} = \langle \Psi_1 | V(\vec{r}) | \Psi_2 \rangle$  e  $\omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$  essendo  $E_2$  ed  $E_1$  le energie associate rispettivamente agli stati  $\Psi_2$  e  $\Psi_1$ . È importante, a questo punto, fare alcune osservazioni. Innanzitutto si deve notare che  $V_{1,2}$  è proporzionale all'ampiezza del campo elettrico e che

---

<sup>1</sup>Citazione tratta da [http://www.lkb.upmc.fr/cqed/non-local-quantum-states/#QND\\_zeno](http://www.lkb.upmc.fr/cqed/non-local-quantum-states/#QND_zeno).

quindi la probabilità  $P_{2 \rightarrow 1}(t)$  è proporzionale alla densità del campo elettromagnetico. La seconda osservazione da fare è che in generale, un'onda elettromagnetica con cui il sistema interagisce non è mai completamente monocromatica, sicchè la densità di energia  $u$  si può sostituire con  $\rho(\omega)d\omega$  dove  $\rho(\omega)$  rappresenta la densità di energia del campo elettromagnetico per unità di pulsazione. La probabilità di transizione è, pertanto, data dalla somma di tutti i contributi provenienti dalle singole armoniche:

$$P_{2 \rightarrow 1}(t) = c \int_0^{+\infty} \rho(\omega) \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega \quad (3.3)$$

essendo  $c$  un coefficiente di proporzionalità. Si noti che la (3.3) vale solo nell'ipotesi che le perturbazioni a frequenze differenti siano non coerenti, in modo che la probabilità totale sia la somma delle singole probabilità [6]. Generalmente, per  $t \geq 4\pi/|\omega_0 - \omega|$  il termine  $\frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2}$  esibisce un *picco* centrato a  $\omega_0$ , mentre  $\rho(\omega)$  può considerarsi costante, pertanto, almeno in prima approssimazione,  $\rho(\omega) = \rho(\omega_0)$  [6]. Tutto ciò implica che la (3.3) diventa:

$$P_{2 \rightarrow 1}(t) \simeq c\rho(\omega_0) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)^2} d\omega \quad (3.4)$$

Ponendo  $x = (\omega_0 - \omega)t/2$  si ottiene:

$$P_{2 \rightarrow 1}(t) \simeq c\rho(\omega_0) \frac{t}{2} \int_{-\infty}^{\omega_0 t/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \simeq \quad (3.5)$$

$$\simeq c\rho(\omega_0) \frac{t}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = c\rho(\omega_0) \pi \frac{t}{2} \quad (3.6)$$

Si noti che l'approssimazione di aver *esteso* il dominio di integrazione è dovuta al fatto che la funzione  $\text{sinc}^2 x$  presenta un *picco* molto stretto attorno a  $x = 0$ . Il termine  $\tau = \frac{2}{\pi c\rho(\omega_0)}$  ha le dimensioni di un tempo e prende il nome di *tempo di vita naturale* dello stato  $\Psi_2$  per la transizione dello stato  $\Psi_1$  [6]. Pertanto, per la (3.6), si deve avere che per  $4\pi/|\omega_0 - \omega| < t < \tau$  la probabilità di transizione è:

$$P_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{t}{\tau} \quad (3.7)$$

il che vuol dire che effettuando una misura all'istante  $t$  (che significa far interagire lo strumento di misura con il sistema attraverso dei quanti di luce) la probabilità che il sistema dopo la misura si trovi nello stato  $\Psi_2$  è  $P_1(t) = 1 - \frac{t}{\tau}$  [6]. Ipotizzando che dopo la prima misura il sistema si trovi ancora nello stato iniziale, la probabilità che, effettuando una seconda misura (all'istante  $2t$ ), esso si trovi ancora nello stesso è:

$$P_2(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \simeq 1 - 2\frac{t}{\tau} \quad (3.8)$$

come si vede dalla (3.8), ciò equivale ad effettuare la prima misura all'istante  $2t$  [6]. Tuttavia, per  $t \ll 4\pi/|\omega_0 - \omega|$  la probabilità di transizione non è più proporzionale a  $t$  [6]. Essendo  $|\omega_0 - \omega|t/2 \ll 1$ , nella (3.3) la funzione  $\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]$  può essere sviluppata in serie di Taylor e troncata al primo ordine:

$$P_{2 \rightarrow 1}(t) \simeq ct^2 \int_0^{+\infty} \rho(\omega) d\omega = \alpha t^2 \quad (3.9)$$

dove  $\alpha$  è una nuova costante [6]. Ora, la probabilità che, dopo la seconda misura, il sistema si trovi ancora nello stato  $\Psi_2$  è [6]:

$$P(t) = (1 - \alpha t^2)^2 \approx 1 - 2\alpha t^2 \quad (3.10)$$

Però, se non si fosse effettuata alcuna misura all'istante  $t$ , bensì direttamente all'istante  $2t$  si sarebbe ottenuto:

$$P(t) = 1 - \alpha(2t)^2 = 1 - 4\alpha t^2 \quad (3.11)$$

Come si vede, la (3.11) è diversa dalla (3.10), ciò significa che ripetendo la misura dopo un tempo  $t$  la probabilità che il sistema transisca in uno stato di energia inferiore, diminuisce [6]. In particolare, se si *esamina* il sistema a partire da  $t = 0$  fino a  $t = T$  ad intervalli di tempi regolari ( $T/n, 2T/n, \dots, T$ ), la probabilità che il sistema si trovi ancora nello stato  $\Psi_2$  è:

$$P_f(t) = \left(1 - \alpha \left(\frac{T}{n}\right)^2\right)^n \approx 1 - \frac{\alpha T^2}{n} \quad (3.12)$$

che tende a 1 per  $n \rightarrow +\infty$  [6]. In altre parole, misure continue su un sistema *instabile* impediscono che esso decada [6]. Alcuni scienziati pensano che questa conclusione provi che il postulato del collasso sia fallace, asserendo che una particella che si muove in una camera a nebbia non dovrebbe mai decadere a causa dell'interazione *continua* con le particelle della camera stessa, ma in realtà il decadimento si osserva [6]. Il problema di tale asserzione è che le interazioni con le particelle della camera a nebbia non sono affatto continue, bensì intermittenti e per *vedere* l'effetto Zenone quantistico è necessario che le misure successive siano effettuate tanto rapidamente da far in modo che il *sistema* sia in *regime* non lineare [6].

### 3.2 Luce Congelata

Per quanto l'effetto Zenone quantistico sia molto strano, esso è stato osservato su sistemi a *due livelli* come molecole, ioni intrappolati e atomi [10]. Nel 2008 S.Haroche, J.M. Raimond ed altri colleghi, al Laboratoire Kastler Brossel, hanno osservato l'effetto Zenone quantistico su un oscillatore armonico [10]. I ricercatori congelarono l'evoluzione *coerente* di un campo elettromagnetico intrappolato in una cavità superconduttrice mediante misure ripetute del numero di fotoni presenti [10]. Essi sfruttarono, un'idea molto semplice: utilizzarono una sorgente pulsata *classica* di microonde che *iniiettava* un campo elettromagnetico coerente in una cavità risonante superconduttrice, inizialmente vuota.<sup>2</sup> La sorgente e la cavità erano accoppiate per risonanza [10]. L'evoluzione del campo è descritta, al tempo  $T$ , dall'*operatore di spostamento* (Displacement operator [10])

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}} \quad (3.13)$$

dove  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^+$  sono rispettivamente gli operatori di annichilazione e distruzione ed  $\alpha = \lambda T$ , essendo  $\lambda$  l'ampiezza complessa della sorgente ed  $\alpha^*$  il complesso coniugato di  $\alpha$  [10]. Considerando  $T \ll T_c$ , dove  $T_c$  è il tempo di smorzamento in cavità, l'evoluzione del campo, all'istante  $T$ , è data dallo stato coerente:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (3.14)$$

<sup>2</sup>[http://www.lkb.upmc.fr/cqed/non-local-quantum-states/#QND\\_zeno](http://www.lkb.upmc.fr/cqed/non-local-quantum-states/#QND_zeno)

dove  $|0\rangle$  è lo stato della cavità vuota (rappresenta sostanzialmente lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico corrispondente). Non effettuando misure, tra due impulsi successivi, il numero medio  $\bar{n}$  dei fotoni presenti in cavità è dato:  $\bar{n} = |\alpha|^2 = |\lambda|^2 T^2$  [10]. Gli sperimentatori analizzarono, anche, l'evoluzione del campo alternando *iniezioni* di impulsi e misure; fecero in modo che  $|\lambda| \Delta t \ll 1$  cosicchè dopo un singolo impulso in cavità era presente, con ottima approssimazione, lo stato  $|\lambda \Delta t\rangle \approx |0\rangle + \lambda \Delta t |1\rangle$  dove  $|1\rangle$  rappresenta lo stato di *un singolo fotone* (gli stati  $|n\rangle$  sono autostati della Hamiltoniana di oscillatore armonico che descrive il sistema e l'espressione appena scritta vale perchè uno stato coerente può essere sviluppato in serie di autostati della Hamiltoniana  $\hat{H}$ ) [10]. Dopo una prima misura, la probabilità che il campo decada nello stato  $|0\rangle$  è  $p_0 = 1 - (|\lambda| \Delta t)^2$  [10]. Dunque, dopo  $N$  *iniezioni-misure* il campo è ancora nello stato fondamentale con una probabilità:

$$P_0^N \approx \left(1 - (|\lambda| \Delta t)^2\right)^N \approx \quad (3.15)$$

$$\approx 1 - |\lambda|^2 T \Delta t \quad (3.16)$$

tenendo conto che  $T = N \Delta t$  [10]. Si noti che la (3.16) vale nell'ipotesi che  $|\lambda|^2 T \Delta t \ll 1$ . Inoltre le espressioni delle probabilità su scritte valgono perchè secondo gli assiomi illustrati nel paragrafo (2.1) quando un sistema si trova in una sovrapposizione di autostati dell'Hamiltoniana, la probabilità che effettuando una misura esso si trovi in uno specifico di questi è data dal modulo quadro del coefficiente di Fourier relativo allo stesso ed in questo caso pari ad  $|\lambda| \Delta t$ . Ciò significa che, nel limite di misure *continue*, il numero medio di fotoni in cavità  $\bar{n} = |\lambda|^2 T \Delta t$  cresce linearmente col tempo [10]. Inoltre il numero di misure  $N$  può essere reso, almeno in linea teorica, grande a piacere facendo aumentare arbitrariamente il rapporto  $T/\Delta t$ , per  $T$  costante [10]. Si deve far notare che tale trattazione trascura completamente il tempo di smorzamento in cavità  $T_c$ . Tuttavia, all'aumentare del tempo  $T$ , lo smorzamento *agirà* in modo tale da *saturare* il numero di fotoni in cavità raggiungendo un equilibrio tra il numero di fotoni *iniettati* e quelli *fuoriusciti* (vedi<sup>3</sup> fig.3.1). la fig.3.1 mostra gli andamenti qualitativi di  $\bar{n}$  vs  $t$  (si noti che in figura  $\bar{n}$  è indicato con il

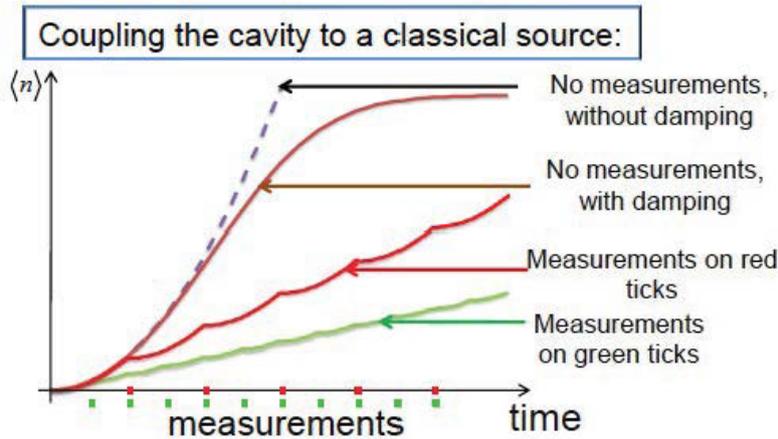


Figura 3.1: Effetto di  $T_c$  sul numero medio di fotoni presenti in cavità.

simbolo  $\langle n \rangle$ ) per due diverse *frequenze* di misurazione. In particolare, la figura mostra

<sup>3</sup>Si noti che la fonte da cui è tratta la fig.3.1 è [http://www.lkb.upmc.fr/cqed/non-local-quantum-states/#QND\\_zeno](http://www.lkb.upmc.fr/cqed/non-local-quantum-states/#QND_zeno).

come effettuando più misure in un tempo minore l'andamento si avvicina sempre di più a quello rettilineo che nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  tende a diventare sempre di più orizzontale. Per quanto riguarda l'apparato sperimentale si veda la fig.3.2. La figura mostra la cavità superconduttrice C costituita da due specchi di niobio affacciati l'uno all'altro raffreddati ad una temperatura  $T = 0.8k$  avente  $T_c = 0.13s$ . La sorgente classica pulsata S, il cui spettro in frequenza è raffigurato nell'inset di fig.3.2, è sintonizzata per risonanza con i

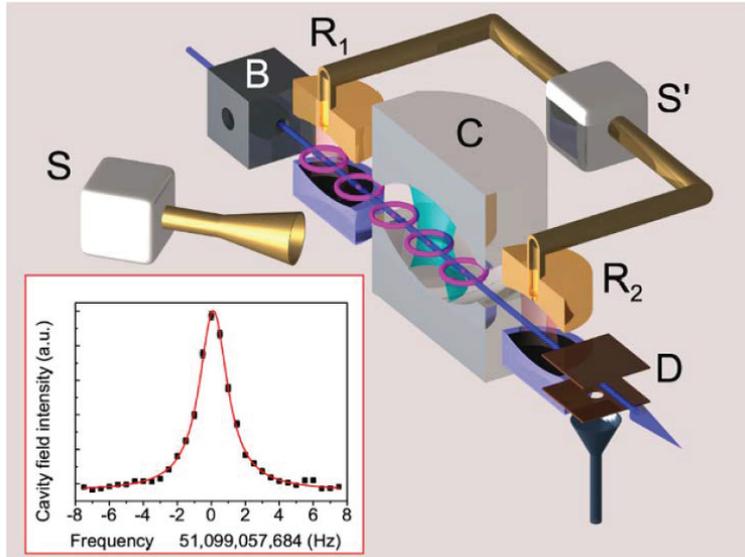


Figura 3.2: Il razionale dell'esperimento di S. Haroche [10].

*modi* in cavità alla frequenza  $\nu = 51.099$  GHz [10]. Le misure erano effettuate tramite atomi di Rydberg circolari opportunamente selezionati in velocità ( $v = 250 \pm 1$  m/s) tramite la scatola B (fig.3.2) [10]. Questi sono atomi alcalini eccitati con l'elettrone di valenza prossima all'ionizzazione, il cui stato è caratterizzato dal numero quantico principale molto grande e con i massimi valori assumibili da  $l$  e da  $m$  [11]. Essi, in particolare, in cavità si comportavano come un sistema con un due livelli energetici: quello fondamentale  $|g\rangle$  con numero quantico principale  $n = 50$  ed  $l = m = 49$  ed uno stato eccitato  $|e\rangle$  il cui numero quantico principale era  $n = 51$  [10, 11]. Un siffatto sistema a due livelli può essere pensato come una particella a spin semintero che evolve in uno spazio astratto (i cui stati corrispondono ai punti della sfera di Bloch come quelli di un qubit) con un campo magnetico diretto lungo uno degli assi cartesiani (per semplicità lo si può indicare con X) che tiene conto della differenza di energia tra i due stati [11]. L'interazione tra i fotoni in cavità e un atomo di Rydberg ha un duplice effetto: da un lato il campo è responsabile di uno spostamento della frequenza di transizione tra lo stato  $|g\rangle$  e lo stato  $|e\rangle$  proporzionale al numero dei fotoni in cavità (proprietà molto importante sfruttata per eseguire misure non distruttive) e dall'altro l'atomo reagisce facendo shiftare di un angolo  $\pm\Phi$  la fase del campo elettrico a seconda che l'atomo si trovi nello stato  $|e\rangle$  o  $|g\rangle$  (ciò vale con buona approssimazione) [10, 11]. Prima dell'ingresso in cavità, in  $R_1$  (vedi fig. 3.2), mediante opportuni impulsi laser risonanti alla frequenza di transizione  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  ( $\pi/2$  pulse [10]), gli atomi erano portati nella sovrapposizione di stati  $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ . Durante l'attraversamento della cavità, quando erano presenti  $n$  fotoni, l'interazione con il campo produceva un cambiamento della fase relativa tra gli stati  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$  e corrispondentemente la rotazione dello pseudospin dell'atomo di un angolo  $n\Phi_0$  nel piano equatoriale della sfera di Bloch.

Gli sperimentatori fecero in modo che  $\Phi_0 \approx \pi/4$ . All'uscita dalla cavità, in R2 (vedi fig. 3.2), l'atomo era sottoposto ad un nuovo impulso laser ( $\pi/2$  pulse) sfasato di un angolo  $\varphi$  rispetto a quello a cui era sottoposto in  $R_1$  [10]. Infine, attraverso il detector D (vedi fig. 3.2) si misurava lo stato dell'atomo e ciò equivaleva a misurare il suo pseudospin [10]. Inviando un insieme di atomi in un tempo inferiore a  $T_c$  i ricercatori poterono dedurre lo spin degli atomi (e da questo il numero di fotoni presenti in cavità) attraverso il *processo di topografia quantistica* (le misurazioni erano ripetute dalle 500 alle 2000 volte). Le misure sono riportate in fig.3.3 che mostra l'andamento sperimentale del numero medio di fotoni in funzione del numero di impulsi iniettati in cavità. La curva in rosso nella fig.3.3(a) mostra, in particolare, l'andamento del campo senza le misure intermedie tra gli impulsi. Si noti che ogni impulso aveva una durata di  $50 \mu s$  e che ognuno di essi era separato temporalmente dal successivo di  $5.04 ms$ . Vi è un completo accordo con l'andamento atteso anche perchè riuscirono a stimare quale fosse l'ampiezza del campo all'interno della cavità appena dopo un solo impulso:  $\bar{n}_1 = |\alpha_1^2| = 0.00223 \pm 0.00012$  [10]. I punti blu di fig. 3.3 mostrano come eseguendo misure tra i vari impulsi si *congela* l'evoluzione del campo ( $\bar{n} < 0.2$ ). Infatti, per *piccoli* valori di  $N$  l'andamento di  $\bar{n}$ , per i punti rosso è parabolico, al contrario, per i punti blu, è lineare. Inoltre, l'evoluzione del campo, in questo ultimo caso, può essere trattata come random walk quantistico supponendo completamente casuale la fase del campo tra due impulsi successivi. La curva tratteggiata, in fig.3.3(b), mostra il *fit* con l'andamento teorico (senza parametri aggiustabili). Come si vede, l'andamento che

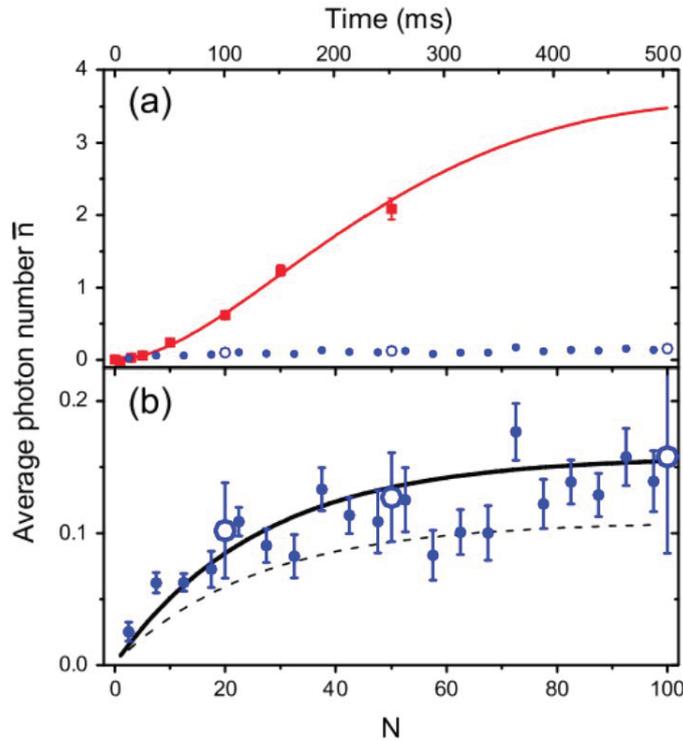


Figura 3.3: (a) il numero medio di fotoni presenti in cavità in funzione del numero di iniezioni di impulsi. La curva in rosso mostra l'andamento del campo senza misure intermedie tra gli impulsi. I punti in blu sono il risultato del processo di topografia quantistica effettuato tra gli impulsi. La *crescita* del campo elettromagnetico è inibita dall'effetto Zenone quantistico. (b) I punti in blu con una scala allargata [10].

si ottiene sperimentalmente è maggiore di quello teorico; ciò è dovuto al fatto che la fase

del campo, tra i due impulsi, non varia completamente in maniera casuale [10]. Infine, i ricercatori effettuarono una simulazione della variazione della fase del campo, mediante il metodo Monte Carlo, indotta dagli atomi che attraversavano la cavità [10]; il risultato ottenuto è riportato come curva continua in fig.3.3(b) e, come si vede, è in completo accordo con i dati sperimentali. L'esperimento appena illustrato, dunque, mostra come la conclusione raggiunta nel paragrafo precedente sia corretta. Ma come è possibile che i campi elettromagnetici che entrano in gioco nell'interazione tra il sistema misurando e lo strumento di misura siano da un lato *responsabili* del collasso dunque della possibilità di effettuare una misura e dall'altro impediscano al sistema di evolvere? La risposta consiste nel fatto che *subito* dopo una misura la particella viene trovata in uno stato ben preciso; dopodichè, se essa viene *continuamente* osservata risulta *ovvio* che lo stato, non avendo *tempo* di evolvere, rimanga sempre lo stesso. Tuttavia, per quanto questo effetto sia compatibile con i postulati della meccanica quantistica e sembri validare l'ipotesi del collasso, mette, però, anche in evidenza un'altra questione delicata: quando *l'azione* dei campi elettromagnetici, dunque della interazione con lo strumento è trascurabile? Poichè ogni particella per quanto *libera* è *sempre* soggetta ad interazione con altre particelle o campi esterni. Ma allora si dovrebbe concludere che il *moto* non è possibile? Ovviamente, il moto è possibile e, purtroppo, la risposta alla domanda precedente dipende anche dalla natura specifica del problema che si sta affrontando e non può essere data in generale. Infatti, a tal proposito, Bohr [8], definì strumento di misura un qualsiasi oggetto che rispetti *con approssimazione sufficiente* le leggi della meccanica classica. Tuttavia, non va confusa la *classicità* di uno strumento con la sua *macroscopicità* perchè la locuzione "con approssimazione sufficiente" dipende in maniera drammatica dalla natura del problema che si sta affrontando [8]. In particolare, con riferimento alla camera a nebbia citata alla fine del paragrafo precedente, la traccia rilasciata da una particella come un elettrone ha uno spessore *molto più grande* delle dimensioni atomiche, sicchè esso in tale contesto può essere considerato come un oggetto classico [8].

# Capitolo 4

## Entanglement

Le conclusioni raggiunte nel paragrafo precedente rispondono, anche se in maniera parziale, ad alcune questioni poste alla fine del paragrafo 2.5. In particolare, esse consentono di comprendere come il concetto di strumento di misura dipende strettamente dal tipo di problema che si analizza, pertanto non se ne può dare una definizione matematica *a priori*. Ciò è messo in risalto anche dal fatto che l'interazione tra lo strumento e il sistema misurando impedisce, alla *fine* della misura, di poter trattare questi due sistemi separatamente. Infatti, la seconda ipotesi del modello di Von Neumann correla le diverse osservabili. Con riferimento al paragrafo 2.5 dopo la misurazione, la particella può trovarsi nello stato  $|\uparrow\rangle$  e conseguentemente lo strumento nello stato  $|g_0\hbar/2\rangle$  oppure la particella può trovarsi nello stato  $|\downarrow\rangle$  e conseguentemente lo strumento in  $|-g_0\hbar/2\rangle$ . Non si verificano altre *possibilità*, ovvero gli stati del sistema non si possono ulteriormente *mischiare*. In tal caso lo stato del sistema totale (strumento + particella) si dice *entangled* poichè la conoscenza dello stato di una sua parte, fa automaticamente (istantaneamente) conoscere in quale stato si trovi l'altra.

### 4.1 Definizione

Per quanto discusso nel paragrafo 2.1 ad ogni sistema fisico sono associati degli stati appartenenti ad uno spazio vettoriale di Hilbert  $|\psi\rangle \in H$ . Quando, però, il sistema  $S$  è composto da più *parti*, come per esempio da  $S_1$  con  $|\psi\rangle_1 \in H_1$  e da  $S_2$  con  $|\psi\rangle_2 \in H_2$ , il suo spazio vettoriale è dato dal prodotto tensoriale  $H = H_1 \otimes H_2$  ed il suo generico stato si può scrivere come [11]:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} |\psi_i\rangle_1 \otimes |\psi_j\rangle_2 \quad (4.1)$$

- Uno stato  $|\psi\rangle \in H$  è detto *entangled* se esso non può essere scritto come prodotto tensoriale tra uno stato  $|\psi_A\rangle \in H_1$  ed uno stato  $|\psi_B\rangle \in H_2$ . Ovvero:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (4.2)$$

Si può mostrare [12] che, applicando la (4.2) allo stato del sistema analizzato nel paragrafo 2.5, esso, dopo la misura, è *entangled*. Infatti, se si suppone, per assurdo, di poter scrivere  $|\Psi(T)\rangle = |\alpha\rangle_1 |\beta\rangle_2$  Allora, considerando che gli stati  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  e  $|g_0\hbar/2\rangle$ ,  $|-g_0\hbar/2\rangle$  sono basi ortonormali dei rispettivi spazi di Hilbert, si deve avere che gli stati rispettivamente  $|\alpha\rangle_1$  e  $|\beta\rangle_2$  possano essere scritti:

$$|\alpha\rangle_1 = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \quad \text{con } |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (4.3)$$

$$|\beta\rangle_2 = c|g_0\hbar/2\rangle + d|-g_0\hbar/2\rangle \quad \text{con } |c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (4.4)$$

moltiplicando la (4.3) e la (4.4) membro a membro, si ottiene

$$|\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2 = a \cdot c|\uparrow\rangle|g_0\hbar/2\rangle + a \cdot d|\uparrow\rangle|-g_0\hbar/2\rangle + b \cdot c|\downarrow\rangle|g_0\hbar/2\rangle + b \cdot d|\downarrow\rangle|-g_0\hbar/2\rangle \quad (4.5)$$

Affinchè la (4.5) coincida con  $|\Psi(T)\rangle$  si deve avere che

$$\begin{cases} a \cdot c = b \cdot d = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a \cdot d = b \cdot c = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

il sistema (4.6) non è compatibile in quanto  $a \cdot d = 0 \rightarrow a = 0 \vee d = 0$ . Nel primo caso  $a \cdot c$  non può essere uguale ad  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  nel secondo, non può esserlo  $b \cdot d$ :  $|\Psi(T)\rangle$  è uno stato *entangled*. Ciò implica che lo stato *globale* non può essere *diviso* nello stato delle singole parti, dunque non è possibile associare a ciascuno di questi un vettore di stato *individuale* [12]. Tuttavia, una eventuale misurazione su una parte del sistema, non solo consentirebbe di conoscere lo stato di quella parte, ma anche quello dell'altra [12]. Dunque, il collasso della funzione d'onda può avvenire anche senza l'interazione *diretta* tra lo strumento e il sistema misurando? A tal proposito nel 1935 Einstein, Podolsky e Rosen pubblicarono un famoso paradosso (denominato paradosso EPR) minando le basi teoriche della fisica quantistica [6].

## 4.2 Paradosso EPR

Gli scienziati presero come punto di partenza le seguenti osservazioni [6, 12]:

- Come può la meccanica quantistica essere una teoria completa se essa predice che sia il processo di misurazione, in accordo con l'ipotesi del collasso e la visione probabilista della funzione d'onda, a *creare* le proprietà di un sistema (*visione ortodossa*)? Esso non dovrebbe avere proprietà indipendentemente dalla presenza dell'osservatore e più in generale dal processo di misura (*visione realista*)?
- Come è possibile che la teoria predica l'esistenza di stati Entangled, ovvero di stati in cui la misurazione dello stato di una parte del sistema, faccia collassare lo stato dell'altra indipendentemente dalla distanza? Non dovrebbe valere il principio di località secondo il quale ogni interazione non può superare la velocità della luce nel vuoto? Come è possibile che oggetti distanti si *influenzino* istantaneamente?

Per spiegare in dettaglio le loro osservazioni si prenda in considerazione la versione di David Bohm del paradosso EPR, la quale considera il decadimento di un mesone Pi in un elettrone e in un positrone:  $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+$ . Assumendo che il Pione sia inizialmente fermo, l'elettrone si muoverà in direzione opposta a quella del positrone [6]. Inoltre, avendo il Pione spin nullo, per la conservazione del momento angolare,  $e^-$  ed  $e^+$  devono assumere la configurazione di singoletto:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_-, \downarrow_+\rangle - |\downarrow_-, \uparrow_+\rangle) \quad (4.7)$$

$|\Psi\rangle$  è uno stato entangled e di conseguenza, misurando lo spin di una delle due particelle si conoscerà, lo spin dell'altra a prescindere dalla distanza che li separa [6]. Ovvero, il fenomeno del collasso dovrebbe avvenire istantaneamente senza che l'altra particella abbia interagito direttamente con lo strumento di misura. Ciò, tuttavia, è in contrasto con il principio di località. Di qui i tre scienziati conclusero che la meccanica quantistica non

poteva essere una teoria completa e che la funzione d'onda contenesse tutte le informazioni inerenti al sistema. Essi conclusero, quindi, che dovessero esistere delle variabili *nascoste*, ovvero dei parametri che qualora conosciuti consentirebbero la caratterizzazione di un qualsiasi sistema fisico, dunque la possibilità di conoscere in modo preciso il valore di qualsiasi osservabile del sistema. Nel 1964 Bell dimostrò che una qualsiasi teoria locale a variabili nascoste è incompatibile con la meccanica quantistica (disuguaglianza di Bell) [6]. Ma la natura è *locale*? A tal proposito, nel 1981 Aspect, Dalibard e Ronger condussero un esperimento riguardante misure di correlazione quantistica di stati entangled di fotoni emessi per fluorescenza [1, 11]. L'esperimento mostrò un completo accordo con le previsioni della meccanica quantistica, violando la disuguaglianza di Bell dimostrando che "nature itself is fundamentally nonlocal" [6]. È importante notare che, sebbene non locale, l'entanglement non permette l'invio di *informazioni* a velocità superluminali (principio di causalità) [12]. Invero, si supponga che due osservatori (A, B) eseguano misure di  $\hat{S}_z$  rispettivamente sull'elettrone e sul positrone. Essi otterranno una serie casuale di 1 e -1 (in unità di  $\hbar/2$ ) con *media* nulla. Soltanto quando A e B confrontano le loro *liste* troveranno la correlazione tra le misure [12]. Se, invece, A vuole misurare  $\hat{S}_x$  (senza avvisare l'altro), i nuovi risultati saranno completamente non correlati tra loro e B osserverà una sequenza di valori totalmente analoga alla precedente, pertanto non può sapere della *vera* misura eseguita da A [12]. Dunque non vi è modo che egli sappia, tramite i suoi dati, ciò che ha fatto l'altro osservatore [12]. Dunque, la *correlazione quantistica* obbedisce al principio di causalità [1].

### 4.3 Entanglement e Principio di Complementarietà

Secondo il principio di complementarietà di Bohr, in un dato esperimento, il comportamento ondulatorio e quello corpuscolare della luce o di una qualsiasi particella, sono *complementari* [11]: si osserva l'uno oppure l'altro. La natura corpuscolare di una particella si evidenzia solo se un esperimento è in *grado* di misurare la posizione con precisione tale da far rivelare il percorso che essa ha effettuato; altrimenti, si manifesta il suo comportamento ondulatorio [11]. Tale principio è correlato al processo di misurazione e al fenomeno dell'entanglement. Per analizzare meglio tale tipo di relazione è conveniente analizzare l'esperimento condotto nel novembre 1995 da Pritchard et al. del MIT [9]. L'apparato sperimentale è rappresentato in fig.4.1, Come si vede, mediante un'opportuna sorgente, si generano sottili fasci di atomi di sodio (Na), che attraversando le due fenditure di collimazione, sono inviati ad un interferometro. Qui il fascio è diviso in due tramite un reticolo di diffrazione e successivamente i due raggi si ricombinano mediante altri reticoli di diffrazione, generando una figura di interferenza. I ricercatori modificarono, poi, l'esperimento, indirizzando un raggio laser su una delle due traiettorie verificando la scomparsa della figura di interferenza [9]. Per giustificare, almeno qualitativamente, dal punto di vista quanto-meccanico tali osservazioni è utile considerare una versione semplificata dell'esperimento con due sole fenditure di diffrazione. In tale contesto, la funzione d'onda degli atomi di sodio è data da  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , dove  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono le funzioni d'onda dei fasci diffratti dalla prima e dalla seconda fenditura, rispettivamente. Ciò implica che la corrente totale è data da

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2m \cdot i} \left[ (\psi_1^* + \psi_2^*) \vec{\nabla} (\psi_1 + \psi_2) - (\psi_1 + \psi_2) \vec{\nabla} (\psi_1^* + \psi_2^*) \right] \quad (4.8)$$

dove  $m$  è la massa di un singolo atomo. Quando, invece, il raggio laser viene puntato sulla prima o sulla seconda fenditura, per il postulato del collasso, la funzione d'onda è data da

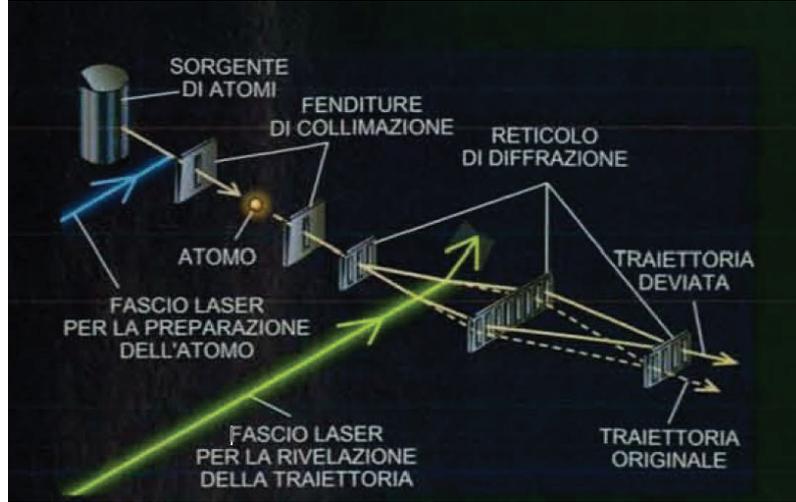


Figura 4.1: Il razionale dell'esperimento di Pritchard [9].

$\psi_1$  e da  $\psi_2$ , rispettivamente. Le correnti  $\vec{J}_1$  e  $\vec{J}_2$  che si ottengono sono:

$$\vec{J}_1 = \frac{\hbar}{2m \cdot i} \left[ \psi_1^* \vec{\nabla} \psi_1 - \psi_1 \vec{\nabla} \psi_1^* \right] \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

$$\vec{J}_2 = \frac{\hbar}{2m \cdot i} \left[ \psi_2^* \vec{\nabla} \psi_2 - \psi_2 \vec{\nabla} \psi_2^* \right] \quad (4.11)$$

La corrente totale  $\vec{J} \neq \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ; il che significa che la distribuzione di atomi che si osserva non è semplicemente la somma di quelle che si osserverebbero se si puntasse il raggio laser prima su una e poi sull'altra traiettoria, in altre parole  $\vec{J}$  contiene anche dei termini di *interferenza*. Dunque, la diffusione del raggio laser da parte degli atomi, rivelando quale percorso essi abbiano *compiuto*, è causa del collasso della funzione d'onda e della scomparsa della figura di interferenza [9]. Ciò sembra indicare che la radiazione si comporti come strumento di misura *costringendo* gli atomi a *prendere una decisione* su quale traiettoria percorrere. Gli sperimentatori mostrarono anche che, riducendo la distanza di separazione fra le traiettorie dei due fasci ad un quarto della lunghezza d'onda dei fotoni, si recuperava la figura di interferenza. Su distanze così piccole non è possibile stabilire da quale traiettorie vengano diffusi gli atomi, indicando che lo stato dell'atomo si sia entangled con quello dello strumento di misura (fotone) [9]. L'esperimento evidenzia quanto possano essere ambigui concetti come *misura* e *strumento di misura* [9]. Inoltre, mostra come il concetto di complementarietà sia legato strettamente alla *quantità* di informazioni *disponibili* del percorso seguito dalle particelle [11]. Quando quest'informazione non è *ambigua*, ovvero quando l'entanglement tra fotoni e atomi è massimo, la figura di interferenza svanisce. Si noti che l'entanglement tra lo strumento di misura che rivela il percorso delle particelle e le particelle stesse è analogo all'entanglement nel paradosso EPR analizzato precedentemente, infatti, lo strumento e la particella evolvono in uno stato di Bell del tipo  $|\psi\rangle = (|\psi_a(1)\rangle|\psi_p(1)\rangle + |\psi_a(2)\rangle|\psi_p(2)\rangle) / \sqrt{2}$ , essendo  $|\psi_a(1)\rangle$  e  $|\psi_a(2)\rangle$  stati ortogonali della particella e  $|\psi_p(1)\rangle$ ,  $|\psi_p(2)\rangle$  stati dello strumento che restituiscono l'informazione sul percorso [11]. Per spiegare ancora più approfonditamente la natura delle informazioni che lega l'entanglement al principio di complementarietà si può fare il seguente esempio: si supponga che gli osservatori Alice e Bob, analizzino le frange di interferenza e lo strumento di misura, rispettivamente. Si supponga, inoltre, che Bob voglia "cambiare le regole del

gioco” ovvero, anzichè misurare un’osservabile correlata al percorso delle particelle, scelga di misurare un’ osservabile (sempre relativo allo strumento di misura) che ammette come autostati la sovrapposizione di stati  $(|\psi_p(1)\rangle \pm |\psi_p(2)\rangle)/\sqrt{2}$  [11]. Per comprendere la situazione conviene riscrivere lo stato entangled particella-strumento in una nuova base

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} [(|\psi_a(1)\rangle + |\psi_a(2)\rangle)(|\psi_p(1)\rangle + |\psi_p(2)\rangle) + (|\psi_a(1)\rangle - |\psi_a(2)\rangle)(|\psi_p(1)\rangle - |\psi_p(2)\rangle)] \quad (4.12)$$

Se Alice osserva le particelle indipendentemente da Bob misura la somma di due pattern di interferenza con fase opposta e, dunque, osserverà la cancellazione dell’interferenza [11]. Se, al contrario, Bob rileva lo strumento in uno dei due stati  $(|\psi_p(1)\rangle \pm |\psi_p(2)\rangle)/\sqrt{2}$ , le particelle di Alice si trovano negli stati  $(|\psi_a(1)\rangle \pm |\psi_a(2)\rangle)/\sqrt{2}$ . Effettuando le misure *in coincidenza con* Bob, Alice troverà una particolare sovrapposizione di stati e pertanto la figura di interferenza rimarrà preservata [11]. Tale ripristino della figura di interferenza viene detto *quantum eraser effect* [11], a significare che Bob, *mescolando* gli stati osservati nelle sue misure, è in grado di cancellare e ristabilire la figura di interferenza nelle misure di Alice [11]. Il quantum eraser, basandosi sul fenomeno dell’entanglement, richiede un determinato modo di *comportarsi* da parte di Bob, infatti se Alice non *correla* le sue misure con un particolare risultato di Bob non osserva alcuna figura di interferenza [11]. Allora, come tali esempi evidenziano, è davvero il processo di misura a *creare* le proprietà di un sistema? Schrödinger non accettava tale visione affermando che ”non è possibile che la teoria predica che un qualunque sistema possa essere *pilotato* in un particolare stato da un osservatore, indipendentemente se esso abbia o meno accesso ad esso” [12]. La difficoltà nel rispondere alla domanda precedente consiste nel fatto che da un lato, i postulati quanto-meccanici *pretendono* di affermare che ”il mondo quantistico” sia indipendente dalla presenza degli osservatori, dall’altro si basa su asserzioni che interpretano i risultati sperimentali. La verità è che non esiste un ”mondo quantistico” indipendente dalle *nostre* misure [1].

## Capitolo 5

# Gatto di Schrödinger

È stato fatto notare più volte che il limite più grande dell'interpretazione di Copenaghen è la profonda frattura che vi è tra il *mondo* quantistico e quello classico. Il problema, secondo Bell [12], consiste nel fatto che, dal punto di vista teorico, nessuno sa *dove* debba collocarsi il *confine* tra il mondo quantistico e quello classico, mentre da quello *pratico* è sempre possibile sceglierlo *giudiziosamente*. Coseguentemente si ottiene una distinzione netta e arbitraria tra due *modi* divergenti di descrivere il mondo. Ma, in che *punto* il mondo quantistico lascia il passo a quello classico [9]?

### 5.1 Gerarchia di Von Neumann

Per rispondere all'interrogativo posto, è importante, innanzitutto, far notare che in fin dei conti, anche uno strumento di misura è un sistema fisico osservabile, sicchè per rilevare in quale tra i suoi autostati si trova si deve, in linea di principio, utilizzare un altro strumento. In altre parole, dati un sistema (S) caratterizzato dagli stati  $|\psi_m\rangle$  ed uno strumento (A) caratterizzato dagli stati  $|d_m\rangle$ , per quanto discusso nel paragrafo 2.1, il sistema S + A, dopo l'interazione, sarà nella sovrapposizione di stati

$$|\psi_f\rangle = \sum_m a_m |\psi_m\rangle |d_m\rangle \quad (5.1)$$

Adesso, per rilevare lo stato dello strumento A, è necessario un altro strumento di misura (B). Si supponga, inoltre, che gli stati di quest'ultimo siano  $|e_m\rangle$ , ciò implica che dopo l'interazione di B con il sistema composto da A + S, il sistema B + A + S andrà a posizionarsi nella sovrapposizione di stati

$$|\Psi\rangle = \sum_m a_m |\psi_m\rangle |d_m\rangle |e_m\rangle \quad (5.2)$$

Il *processo* non è ancora finito! Infatti, si ha bisogno di un nuovo strumento (C) per rilevare gli stati dello strumento B, poi di un altro ancora e così via... Invero, si viene a creare una *gerarchia* (o catena di Von Neumann [7]) di "strumenti" il cui sistema complessivo andrà a *posizionarsi* nella sovrapposizione di stati

$$|\Psi\rangle = \sum_m a_m |\psi_m\rangle |d_m\rangle |e_m\rangle \dots |z_m\rangle \quad (5.3)$$

Ma, tale catena è finita o infinita? Nel caso sia finita, quando finisce? Come fa ad emergere, se emerge, il comportamento classico dalla (5.3)? Per affrontare tali domande si può

prendere spunto dal seguente esempio [7, 13]. Si supponga di voler misurare la temperatura di un liquido. La si può ottenere mettendo il fluido a contatto con un termometro a mercurio e poi "affermare": tale temperatura è "misurata" dal termometro. Oppure, si può calcolare, in termini cinetici e molecolari, la lunghezza della colonnina di mercurio e poi "affermare" che tale lunghezza è vista dall'osservatore e prendere in considerazione la luce riflessa dalla colonna di mercurio e il suo percorso fino all'entrata negli occhi dell'osservatore. Si potrebbe, in linea di principio, tener in conto anche dell'ulteriore riflessione della luce dovuta alla retina ed infine andare ancora più in fondo tracciando le reazioni chimiche all'interno del cervello. Tuttavia, ad un certo punto, non potendo tenere in conto di tutti i processi ci sarà il vincolo di "affermare" che tali reazioni vengono *percepite* dall'osservatore. In altre parole, non importa, fino a che punto della gerarchia i calcoli vengono perseguiti, ad un certo punto "l'universo" verrà diviso, arbitrariamente, in sistemi *osservati* ed *osservatori*. Secondo Von Neumann [12, 13], infatti, tale catena infinita può terminare solo con l'osservatore, *l'unico strumento* in grado di misurare se stesso. Però, è importante notare che le *percezioni soggettive* conducono alla *vita interna* dell'osservatore che è per sua natura, extrasensoriale [13]. Per tale ragione, secondo Von Neumann, era necessario introdurre un postulato, chiamato principio di parallelismo psico-fisico, secondo il quale è sempre possibile descrivere ogni processo relativo alle percezioni soggettive come se fossero proprietà del "mondo fisico" ovvero dello spazio ordinario [13]. La teoria di Von Neumann è come se stesse sopperendo ad una mancanza che non può essere colmata, affermando che dovunque si *tagli* la catena, il risultato non verrà inficiato [7]. Non di meno, tale discussione non spiega come possa dalla (5.3) emergere il comportamento classico, ovvero come può avvenire il fenomeno della riduzione dei pacchetti d'onda. Von Neumann e Wigner ipotizzarono che esso potesse essere causato dalla coscienza dell'osservatore [12]. Ma può il processo di misurazione dipendere da un'entità *enigmatica* come la *coscienza dell'osservatore*? Il principio di parallelismo psico-fisico afferma che il risultato della misura sia indipendente dalla coscienza dell'osservatore, però, non risponde direttamente alla domanda. Ovviamente, molti autori hanno fatto notare, che tale domanda attiene alla metafisica piuttosto che alla fisica. Tuttavia, è interessante notare che essa è, in qualche modo, correlata con la domanda: quando una misura può dirsi compiuta? Per comprendere tale collegamento, si supponga di voler misurare, tramite uno strumento macroscopico, in quale tra i suoi autostati si trovi un atomo. Si supponga, inoltre, che la misura possa essere considerata istantanea, in modo tale che valga  $\hat{Q}_d(T) = g_0 \hat{A}_s$  (vedi paragrafo 2.2) essendo  $Q_d$  la posizione del pointer che restituisce il valore della misura ed  $A_s$  l'operatore associato all'osservabile relativa all'atomo. Affinchè lo strumento rilevi senza ambiguità l'atomo è necessario che la sua risoluzione ( $\delta Q$ ) *risolva* le differenze tra i gli autovalori dell'operatore  $\hat{A}_s$  [11]. Detta  $\delta A$  la più piccola differenza tra gli autovalori di  $\hat{A}_s$  si deve avere

$$g_0 \delta A \gg \delta Q \implies g_0 \gg \frac{\delta Q}{\delta A} \quad (5.4)$$

Un qualsiasi lettore potrebbe obiettare che in questa relazione non c'entra per nulla la coscienza dell'osservatore. Tuttavia, se la risoluzione dello strumento  $\delta Q$  non è fissata ad un valore "macroscopico", l'osservatore non potrà effettuare alcuna misura (semplicemente perchè non potrebbe capire se il pointer si sia mosso o meno dalla posizione nulla)! D'altro canto se così non fosse, in virtù dell'effetto Zenone quantistico, si potrebbe affermare che il moto non sarebbe possibile perchè una particella risulterebbe sempre "misurata" per mezzo di qualche interazione. In altre parole, è come se parlando di "misura", si facesse sempre riferimento ad uno sperimentatore che effettui le osservazioni. Il punto cruciale, come già intuito da Von Neumann, è che gli esseri umani sono parte integrante della natura

e, conseguentemente, non la possono conoscere indipendentemente da come interagiscono con essa.

## 5.2 Gedankenexperiment

Scienziati del calibro di Einstein e Schrödinger erano convinti che una teoria del *tutto* dovesse *spiegare* il comportamento degli oggetti dalle scale subatomiche a quelle galattiche. Partendo da questo punto di vista, Schrödinger si accorse che l'applicazione *tout court* al mondo macroscopico della meccanica quantistica comportava dei paradossi. Nel 1935 egli pubblicò, a tal proposito, un articolo contenente un esperimento mentale (gedankenexperiment) che rimase immediatamente nell'immaginario collettivo come paradosso del gatto di Schrödinger. L'esperimento pensato dal teorico tedesco era [14]:

- *It is also possible to construct very burlesque cases. Imagine a cat locked up in a room of steel together with the following hellish machine (which has to be secured from direct attack by the cat): A tiny amount of radioactive material is placed inside a Geiger counter, so tiny that during one hour perhaps one of its atoms decays, but equally likely none. If it does decay then the counter is triggered and activates, via a relais, a little hammer which breaks a container of prussic acid. After this system has been left alone for one hour, one can say that the cat is still alive provided no atom has decayed in the mean time. The first decay of an atom would have poisoned the cat. In terms of the  $\psi$ -function of the entire system this is expressed as a mixture of a living and a dead cat.*

Dal punto di vista formale, lo stato iniziale del sistema complessivo è [1]:

$$|\Psi(0)\rangle = |\text{non decaduto}\rangle \otimes |\text{non innescato}\rangle \otimes |\text{non attivato}\rangle \otimes |\text{non rotto}\rangle \otimes |\text{vivo}\rangle$$

dove i ket rappresentano, partendo da sinistra, gli stati dell'atomo, del contatore geiger, del relè elettrico, della fiala di cianuro ed infine del gatto. Invece, Come spiegato da Schrödinger stesso, lo stato del sistema, dopo la prima ora è dato da:

$$|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{non decaduto}\rangle \otimes |\text{non innescato}\rangle \otimes |\text{non attivato}\rangle \otimes |\text{non rotto}\rangle \otimes |\text{vivo}\rangle + \\ \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{decaduto}\rangle \otimes |\text{innescato}\rangle \otimes |\text{attivato}\rangle \otimes |\text{rotto}\rangle \otimes |\text{morto}\rangle$$

Il *gedankenexperiment* mette in chiara evidenza che dal punto di vista quanto-meccanico, dopo la prima ora, il gatto dovrebbe trovarsi in una sovrapposizione di stati "vivo" e "morto", il che da un punto di vista classico è assurdo. Inoltre, una qualsiasi osservazione in quell'istante di tempo, per il postulato del collasso, *forzerebbe* il gatto ad essere "vivo" o "morto" e, dunque, se fosse trovato morto, sarebbe stato l'osservatore stesso a causarne la morte [6]. È come se si fosse ripresentata, in qualche maniera, la stessa domanda del paragrafo precedente inerente al fatto se un'osservazione potesse o meno dipendere direttamente dall'osservatore. La "soluzione" principalmente accettata è che sia il contatore Geiger lo strumento di misura, ovvero che sia il *trigger* del contatore Geiger a fornire la "misura" e che, in generale, essa non dipenda *dall'intervento umano* [6]. Si noti che il paradosso evidenzia un'ulteriore questione che sorse nel discutere l'ipotesi del collasso (vedi paragrafo 2.5): ma perchè oggetti microscopici come atomi ed elettroni posso "stare" in una sovrapposizione di stati, mentre un oggetto macroscopico come un gatto, no? La risposta a tale domanda, rimanendo nell'ambito dell'interpretazione di Copenaghen, non può essere data perchè, sulla base del postulato del collasso, ciò è preso come ipotesi. Dunque, Come si può andare oltre l'interpretazione ortodossa?

### 5.3 Decoerenza Quantistica

Per affrontare questo l'argomento è utile fare diverse osservazioni. Innanzitutto, si deve ricordare che durante la discussione dell'esperimento di Young (della doppia fenditura) è stato fatto notare che lo stato entangled delle particelle con lo strumento che ne rivela le particelle è dato da relazione (vedi paragrafo 4.3)

$$|\psi\rangle = (|\psi_a(1)\rangle|\psi_p(1)\rangle + |\psi_a(2)\rangle|\psi_p(2)\rangle) / \sqrt{2} \quad (5.5)$$

che può essere, equivalentemente, riscritta in una base differente, per esempio:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} [(|\psi_a(1)\rangle + |\psi_a(2)\rangle)(|\psi_p(1)\rangle + |\psi_p(2)\rangle) + (|\psi_a(1)\rangle - |\psi_a(2)\rangle)(|\psi_p(1)\rangle - |\psi_p(2)\rangle)] \quad (5.6)$$

Come Haroche e Raimond hanno notato [11], dalle (5.5) e (5.6) scaturiscono diverse ambiguità: lo strumento sta misurando un'osservabile relativa al percorso delle particelle, come la (5.5) implica, oppure un'osservabile con autostati  $(|\psi_a(1)\rangle \pm |\psi_a(2)\rangle) / \sqrt{2}$  come indica la (5.6)? Possono gli sperimentatori scegliere, dopo che l'accoppiamento atomi-strumento sia avvenuto, quale osservabile misurare? Ciò sarebbe davvero strano in quanto non solo vorrebbe dire che con un solo strumento si possano misurare osservabili che non commutano, contro il principio di complementarità (e contro le ipotesi del modello di misura di Von Neumann!). Inoltre, sarebbe ancora più strano osservare una sovrapposizione di stati come  $(|\psi_p(1)\rangle + |\psi_p(2)\rangle) / \sqrt{2}$  che rappresenta la sovrapposizione di due posizioni diverse nello spazio, dello strumento di misura. Vi è una differenza concettuale con il *quantum eraser* giacché in quel contesto "Bob decise a priori di cambiare osservabili", qui, al contrario, ci si chiede se sia possibile misurare una qualsiasi osservabile dopo che sia avvenuta l'interazione (domanda legittima, dal momento che lo stato che il sistema raggiunge dopo l'interazione è indipendente dalla base scelta per la sua rappresentazione). È come se ci fosse una base "naturale" (data dalla (5.5)) descrivente il processo di misurazione in quanto implica l'osservazione di una posizione finale di un oggetto macroscopico, mentre un'altra "innaturale" (data dalla (5.6)) che descrive l'interazione tra stati atomici e uno strumento del tipo gatto di Schrödinger (che nessuno, finora, ha mai osservato)! [11]. Un'ulteriore osservazione da fare è che, in realtà, gli oggetti macroscopici "rispettano" le leggi della meccanica quantistica, ma essendo costituiti da un numero elevato di particelle ( $\sim 10^{24}$ ), è complicato scrivere la funzione d'onda in termini dei suoi costituenti elementari [6]. Ma come è possibile, allora, che essi non si trovino mai una sovrapposizione di stati? Perché, i sistemi macroscopici non sono mai totalmente isolati dall'ambiente, pertanto non posso rispettare l'equazione di Schrödinger, che vale solo per i sistemi chiusi [15]. Zurek, suppose che le correlazioni quantistiche potessero disperdere informazioni attraverso gradi di libertà, che sono di fatto, inaccessibili all'osservatore. Essi sono esterni al sistema e possono essere riferiti all'ambiente [15]. In altre parole, secondo tale modello l'ambiente non è solo un "rumore", bensì uno strumento che osserva costantemente il sistema e che rapidamente si entangled con lo strumento di misura [9, 11]. Per spiegare brevemente come funziona tale modello [11, 15], si supponga di avere un sistema generico (S), uno strumento (D) e l'ambiente (E). Si supponga, inoltre, che l'ambiente sia, inizialmente, in un dato stato puro e che l'interazione con gli stati dello strumento (rispettivamente  $|\psi_p(1)\rangle$  e  $|\psi_p(2)\rangle$ ), porti, velocemente, l'ambiente rispettivamente negli stati  $|E_1\rangle$ ,  $|E_2\rangle$ , con  $\langle E_1|E_2\rangle = 0$ . Con queste ipotesi, lo stato finale del sistema sarà

$$|\psi_{S+D+E}\rangle = [|\psi_a(1)\rangle|\psi_p(1)\rangle|E_1\rangle + |\psi_a(2)\rangle|\psi_p(2)\rangle|E_2\rangle] / \sqrt{2} \quad (5.7)$$

La decoerenza, dunque, implica che il sistema evolva, per mezzo della propria dinamica, nella base "naturale" (base del pointer) senza che nessuno l'abbia dovuto imporre a priori

[15]. Inoltre, la (5.7) può essere pensata, in virtù dell'entanglement, come uno stato di Bell tra il sistema (S + D) ed E, che quindi faccia sparire i termini di "interferenza" [11]. Ciò risolve il paradosso del gatto di Schrödinger, in quanto, esso, *molto velocemente* "diventa" vivo o morto e non vivo e morto [15]. Zurek ha mostrato [15] che per un corpo di massa  $m = 1 \text{ g}$ , alla temperatura  $T = 300 \text{ K}$  (temperatura ambiente) il tempo di decoerenza  $t_D$  è dell'ordine di  $10^{-23} \text{ s}$ . Per gli oggetti "microscopici" i tempi di decoerenza possono essere anche molto più lunghi [15].

## 5.4 Topolino Quantistico

Fino a pochi anni fa, sarebbe stato impensabile verificare sperimentalmente il modello della decoerenza a causa delle limitazioni tecnologiche [11]. Tuttavia, l'alto sviluppo, negli ultimi decenni, ha permesso di utilizzare strumenti sofisticati basati su singoli fotoni e atomi [9] (in particolare le cavità QED, ovvero le cavità che sfruttano l'elettrodinamica quantistica) e la messa appunto di esperimenti reali del tipo gatto di Schrödinger. In particolare, nel dicembre 1996 da M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond e altri colleghi dell'Ecole Normale Supérieure di Parigi [11] per comprendere meglio in che modo la sovrapposizione degli stati collassasse, cioè per comprendere se il gatto fosse vivo o morto, fecero oscillare un *topolino quantistico* di fronte al *felino* [9]. L'apparato sperimentale è riprodotto in fig.5.1. Il gatto consisteva in un campo elettromagnetico coerente che era iniettato nella

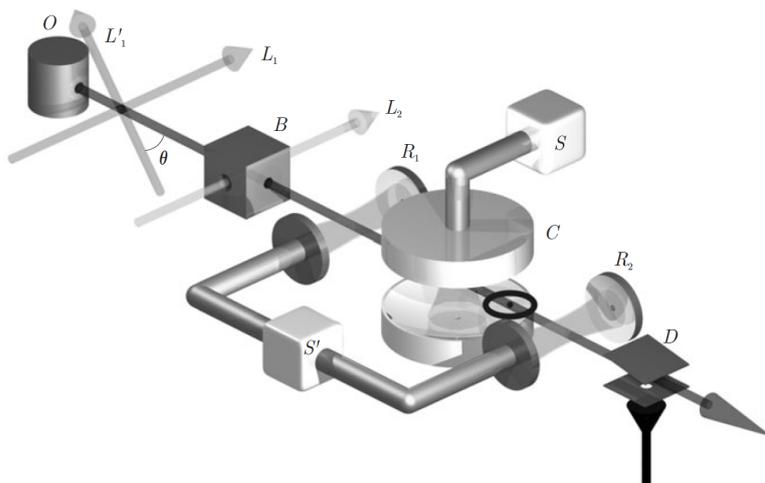


Figura 5.1: L'esperimento di M. Brune, S. Haroche et al. [11].

cavità superconduttrice (C) tramite il suo accoppiamento con una sorgente classica (S') (i fotoni erano alla lunghezza d'onda delle microonde). Il tempo di smorzamento in cavità era  $t_d = 160 \mu\text{s}$ . L'idea che sfruttarono gli sperimentatori era la seguente: un primo atomo preparava il campo in uno stato di gatto di Schrödinger, poi un secondo era utilizzato per misurare in quale stato esso si trovava [11].

### 5.4.1 Costruzione del Gatto

lo stato iniziale dei fotoni era uno stato coerente di ampiezza  $\beta$ . La sorgente O (oven) effondeva atomo di rubidio, che mediante i fasci laser  $L_1, L_1'$  venivano opportunamente selezionati in velocità. Nella scatola B, invece, essi erano eccitati ad atomi di Rydberg che in cavità si comportavano come un sistema a due livelli:  $|g\rangle$  (stato fondamentale),  $|e\rangle$

(stato eccitato) (cfr. 3.2). È importante ricordare che in cavità, gli atomi di Rydberg si comportano come dei pezzetti di materiale dielettrico trasparente, che con buona approssimazione non fanno cambiare l'ampiezza del campo, bensì shiftare la sua fase di un angolo  $\pm\Phi$  (portandolo quindi negli stati  $|\beta e^{\pm i\Phi}\rangle$ ) a seconda che l'atomo si trovi in  $|e\rangle$  o  $|g\rangle$  [11]. L'interferometro di Ramsey  $R_1$ , consentiva tramite impulsi laser, di portare gli atomi nella sovrapposizione di stati:

$$|\phi\rangle = \frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.8)$$

Dopo l'attraversamento della cavità, e quindi dopo l'interazione, lo stato entangled del sistema è:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{e^{-i\Phi}|e\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\beta e^{-i\Phi}\rangle + \frac{|g\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\beta e^{i\Phi}\rangle \quad (5.9)$$

dove il coefficiente  $e^{-i\Phi}$  è dovuto al fatto che l'interazione tra il campo e gli atomi fa *cambiare* la fase relativa tra gli stati  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . Se si misurasse (tramite il detector D) lo stato dell'atomo, collasserebbero anche gli stati del campo facendo perdere "l'ambiguità quantistica" [11]. Pertanto, prima della misura, tramite un secondo interferometro di Ramsey ( $R_2$ ), gli stati dell'atomo venivano ulteriormente modificati e trasformati in:

$$|e\rangle \rightarrow \frac{|e\rangle + e^{i\phi}|g\rangle}{\sqrt{2}}; \quad |g\rangle \rightarrow \frac{|g\rangle - e^{-i\phi}|e\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.10)$$

essendo  $\phi$  un parametro aggiustabile tramite le fasi relative dei fasci  $R_1$  e  $R_2$  [11]. Gli sperimentatori fecero in modo che  $\phi = \Phi$ . Lo stato finale che si ottiene, è quello in cui, formalmente, si sostituiscono le nuove espressioni date dalla (5.10) nella (5.9), cioè [11]:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{e^{-i\Phi}}{2}|e\rangle \otimes [|\beta e^{-i\Phi}\rangle - |\beta e^{i\Phi}\rangle] + \frac{1}{2}|g\rangle \otimes [|\beta e^{-i\Phi}\rangle + |\beta e^{i\Phi}\rangle] \quad (5.11)$$

La (5.11) mostra che un'eventuale misura sullo stato dell'atomo avrebbe dato, con uguale probabilità, le sovrapposizioni  $[|\beta e^{-i\Phi}\rangle \pm |\beta e^{i\Phi}\rangle] / \sqrt{2}$  [11]. Prima di spiegare come l'equipe *costruì il topolino*, è importante far notare che l'espressione data dalla (5.9) è solo un'approssimazione in quanto la  $|\Psi_1\rangle$  non è opportunamente normalizzata, poichè gli stati coerenti  $|\beta e^{i\Phi}\rangle$  e  $|\beta e^{-i\Phi}\rangle$  non sono ortogonali. Infatti, si deve ricordare che uno stato coerente generico ( $|\alpha\rangle$ ) di un oscillatore armonico può essere sviluppato, in termini degli autostati dell'operatore Hamiltoniana ( $|n\rangle$ ), nella forma

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(\alpha)|n\rangle \quad (5.12)$$

essendo  $c_n(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ . Dunque, si deve avere

$$\langle \beta e^{-i\Phi} | \beta e^{i\Phi} \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} c_n^*(\beta e^{-i\Phi}) c_m(\beta e^{i\Phi}) \langle n | m \rangle \quad (5.13)$$

tenendo conto delle espressioni dei coefficienti  $c_n$ ,  $c_m$  e che  $\langle n | m \rangle = \delta_{nm}$ , si ottiene:

$$\langle \beta e^{-i\Phi} | \beta e^{i\Phi} \rangle = e^{-|\beta|^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\beta|^{2n} e^{i2n\Phi}}{n!} = e^{-|\beta|^2} e^{|\beta|^2 e^{2i\Phi}} = e^{-|\beta|^2(1-e^{2i\Phi})} \quad (5.14)$$

Tutto ciò implica che la norma del vettore  $(|\beta e^{i\Phi}\rangle + |\beta e^{-i\Phi}\rangle) / \sqrt{2}$  non è 1, bensì

$$(1 + e^{-|\beta|^2} \operatorname{Re}(e^{|\beta|^2 e^{2i\Phi}})) = 1 + e^{-|\beta|^2(1-\cos(2\Phi))} \cos(|\beta|^2 \sin(2\Phi)) \quad (5.15)$$

La (5.15), però, è circa 1 nell'approssimazione  $|\beta|^2 \gg 1$  (tale approssimazione equivale a considerare il prodotto scalare tra i due stati coerenti, nullo. In altre parole si trascurano, per semplicità, i termini di interferenza).

#### 5.4.2 Costruzione del topo

Gli scienziati, successivamente, introdussero nella cavità un secondo atomo di Rydberg. Il campo elettromagnetico trasferì a quest'ultimo informazioni sulle proprie fasi sovrapposte e confrontando lo stato del secondo atomo con il primo, essi ricavarono informazioni relative alla sovrapposizione del campo elettromagnetico. In particolare, essi misurarono la funzione di correlazione temporale  $\eta(t)$ , tra i due atomi che è definita come [11]:

$$\eta(t) = P_{g|g} - P_{e|g} \quad (5.16)$$

dove  $P_{g|g}$  e  $P_{e|g}$  sono rispettivamente le probabilità condizionali di trovare il secondo atomo negli stati  $|g\rangle$  o  $|e\rangle$  a condizione che il primo sia nello stato  $|g\rangle$ . Questa è un'ottima funzione per lo studio per la decoerenza del gatto nell'ipotesi che  $2\Phi \neq \pi$  [11]. Infatti, si supponga che il primo atomo, dopo l'attraversamento della cavità, venga trovato nello stato  $|g\rangle$ ; ciò implica che il gatto si trovi nello stato  $(|\beta e^{-i\Phi}\rangle + |\beta e^{i\Phi}\rangle) / \sqrt{2}$ . Quando il secondo atomo entra in cavità, il campo ha interagito con l'ambiente, portandosi nello stato

$$|\Psi^{AE}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\beta e^{-i\Phi}\rangle \otimes |E^-(t)\rangle + |\beta e^{i\Phi}\rangle \otimes |E^+(t)\rangle] \quad (5.17)$$

essendo  $|E^-(t)\rangle$ ,  $|E^+(t)\rangle$  gli stati dell'ambiente. Si noti che essi non sono stati ortogonali, infatti l'entanglement dato dalla (5.17) è soltanto parziale [11]. Tenendo presente che il secondo atomo ( $A_2$ ) interagisce con il campo (E), allo stesso modo del primo atomo (A), lo stato finale del sistema deve essere necessariamente

$$\begin{aligned} |\Psi^{AEA_2}(t)\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} [e^{-i\Phi}|e_2\rangle \otimes (|\beta e^{-2i\Phi}\rangle - |\beta\rangle) + |g_2\rangle \otimes (|\beta e^{-2i\Phi}\rangle + |\beta\rangle)] \otimes |E^-(t)\rangle \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} [e^{-i\Phi}|e_2\rangle \otimes (|\beta\rangle - |\beta e^{2i\Phi}\rangle) + |g_2\rangle \otimes (|\beta\rangle + |\beta e^{2i\Phi}\rangle)] \otimes |E^+(t)\rangle \end{aligned}$$

Adesso, nell'approssimazione che  $|\Psi^{AEA_2}(t)\rangle$  sia normalizzata,  $P_{g|g} = |\langle G|\Psi^{AEA_2}(t)\rangle|^2$ , con

$$|G\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} |g_2\rangle \otimes (|\beta e^{-2i\Phi}\rangle + |\beta\rangle) \otimes |E^-(t)\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |g_2\rangle \otimes (|\beta\rangle + |\beta e^{2i\Phi}\rangle) \otimes |E^+(t)\rangle \quad (5.18)$$

Dopo l'interazione con il campo, gli stati  $|e_2\rangle$  e  $|g_2\rangle$  sono correlati, e quindi, non più ortogonali. Tuttavia, nell'approssimazione  $\Phi \gg 1/\sqrt{\bar{n}}$ , con  $\bar{n}$  il numero medio di fotoni in cavità, i termini di correlazione (interferenza) possono essere trascurati, e dunque,  $\langle e_2|g_2\rangle \approx 0$ . Di qui,  $|\langle G|\Psi^{AEA_2}(t)\rangle|^2 \approx \|G\|^2$ . Per stimare l'andamento temporale della norma di  $|G\rangle$ , si deve tener presente che nelle approssimazioni utilizzate vale:

$$\langle\langle \beta e^{-2i\Phi} | + \langle\beta | | \beta\rangle + |\beta e^{2i\Phi}\rangle \rangle \approx \langle\beta|\beta\rangle = 1 \quad (5.19)$$

Pertanto,  $P_{g|g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\langle E^-(t)|E^+(t)\rangle)$  e  $P_{e|g} = 1 - P_{g|g} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\langle E^-(t)|E^+(t)\rangle)$ . Come modellizzare l'ambiente? Un modello tracciabile è quello di collezione di oscillatori

armonici [11, 15], linearmente accoppiati con i modi in cavità. Sviluppando gli stati di tali oscillatori, in termini di stati coerenti, prima dell'interazione con il campo all'interno della cavità, si trova che [11]:

$$|E(t)\rangle = \prod_i |\epsilon_i(t)\rangle \quad (5.20)$$

con  $|\epsilon_i(t)\rangle$  lo stato dell'iesimo oscillatore (che in prima approssimazione ha ampiezza piccola). Sotto le condizioni sperimentali, l'ambiente è dato dai fotoni persi dal campo, cosicché, Quando esso si *entangle* con lo stato  $|\beta(t)\rangle$ , in virtù del principio di conservazione dell'energia, si deve avere  $\sum_i |\epsilon_i(t)|^2 = n_{persi}(t)$  essendo  $n_{persi}(t)$  il numero di fotoni persi dal campo elettromagnetico. Inoltre, anche  $\beta$  è una funzione del tempo, poichè, il suo modulo quadro rappresenta il numero di fotoni presenti in cavità. Quest'ultimo, ovviamente, decade esponenzialmente con un tempo caratteristico pari al tempo di smorzamento in cavità ( $t_d$ ). In particolare  $\beta(t) = \beta e^{-\frac{kt}{2}}$  con  $kt_d = 1$  e  $\beta^2 = \bar{n}$ , essendo  $\bar{n}$  il numero medio di fotoni presenti in cavità (supponendo  $\beta \in \mathfrak{R}$ ). Dunque si deve avere che

$$\sum_i |\epsilon_i(t)|^2 = \bar{n} - \beta(t)^2 = \bar{n} - \bar{n}e^{-kt} = \bar{n}(1 - e^{-kt}) \quad (5.21)$$

Se, però, il campo si trovi nella sovrapposizione di stati  $(|\beta e^{-i\Phi}\rangle + |\beta e^{i\Phi}\rangle) / \sqrt{2}$ , in prima approssimazione, anche gli stati dell'ambiente non cambieranno l'ampiezza, bensì solo le fasi. Sicchè, lo stato raggiunto dal sistema A + E sarà dato dalla (5.17) dove

$$|E^-(t)\rangle = \prod_j |\epsilon_j(t)e^{-i\Phi}\rangle; |E^+(t)\rangle = \prod_j |\epsilon_j(t)e^{i\Phi}\rangle \quad (5.22)$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \langle E^-(t)|E^+(t)\rangle &= \prod_i \langle \epsilon_i(t)e^{-i\Phi} | \epsilon_i(t)e^{i\Phi} \rangle = \\ &= \prod_i e^{-|\epsilon_i|^2(1-e^{2i\Phi})} = e^{-\sum_i |\epsilon_i|^2(1-e^{2i\Phi})} = e^{-\bar{n}(1-e^{-kt})(1-e^{2i\Phi})} \end{aligned}$$

ne consegue che

$$\eta(t) = \frac{1}{2} e^{-2\bar{n}(1-e^{-kt}) \cdot \sin^2\Phi} \cos[\bar{n}(1-e^{-kt}) \sin(2\Phi)] \quad (5.23)$$

Con l'approssimazione  $kt \ll 1$  la (5.23) si trasforma in

$$\eta(t) \approx \frac{1}{2} e^{-2\bar{n}kt \cdot \sin^2\Phi} \cos(\bar{n}kt \cdot \sin(2\Phi)) \quad (5.24)$$

Si noti che per ottenere la (5.24) si è trascurato il tempo impiegato dagli atomi ad attraversare la cavità, e, quindi, si è considerato che l'interazione tra il campo e l'ambiente avveniva solo nell'intervallo di tempo di "uscita" del primo e di "entrata" del secondo atomo in cavità. Gli sperimentatori, variando l'intervallo di tempo tra l'introduzione di  $A_1$  e  $A_2$  in cavità, nel range 30 a 250  $\mu s$ , e per ciascuno di esso misurarono la funzione  $\eta(t)$ ; i risultati sperimentali sono visibili in fig. 5.2. La figura mostra l'andamento di  $\eta(t)$  in funzione di  $t/t_d$  (si noti che in figura  $t_d$  è indicato con  $T_c$ ). Le curve rappresentate in fig. 5.2 sono i *fit* dell'andamento dato dalla (5.24) con i punti sperimentali (gli sperimentatori per riuscire a misurare il valore di  $\eta(t)$  effettuarono moltissime misure). *L'adattamento è abbastanza* buono, però ci sono delle discrepanze tra i valori teorici e quelli sperimentali. Esse sono dovute alle tante approssimazioni che sono state effettuate, in particolare si noti

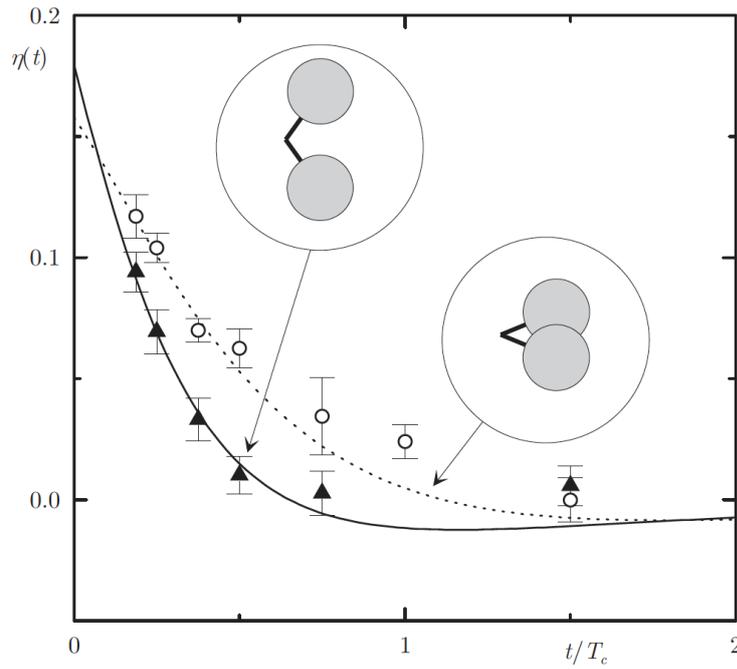


Figura 5.2: Misure sperimentali ottenute con differenza di fase ( $2\Phi$ ) di  $50^\circ$  (punti vuoti) e  $100^\circ$  (triangoli pieni) [11].

che il valore sperimentale di  $\bar{n} = \beta^2$  era pari ad 3.3, il che non permette rigorosamente di trascurare i termini di interferenza tra i diversi stati coerenti. Inoltre, data la piccolezza di  $\bar{n}$ , gli sperimentatori definirono il campo, *micino di Schrödinger* (Schrödinger's kitten) anziché un *gatto* vero e proprio [11]. Questo esperimento consentì, per la prima volta, l'osservazione del passaggio progressivo e continuo dal mondo quantistico al classico [9].

## Capitolo 6

# Conclusioni

Con tale lavoro di tesi si è voluto approfondire il problema della misura, sia dal punto di vista teorico che sperimentale. Dal punto di vista teorico, tramite le ipotesi di Von Neumann e i postulati quanto-meccanici, si è costruito un modello con cui definire rigorosamente cosa si intende per *effettuare un'osservazione*. Il problema, che immediatamente emerge, da questo approccio, è di natura pratica: i risultati delle misure sono singoli valori e non possono quindi rispettare l'evoluzione unitaria e lineare della meccanica quantistica che conserverebbe la sovrapposizione degli stati. Per risolvere tale problema, Von Neumann propose il fenomeno del collasso. Per molti anni, tale visione della fisica quantistica (interpretazione ortodossa) è stata accettata per la maggior parte dei fisici, anche perché da un punto di vista tecnologico risultava molto difficile *montare* esperimenti in grado di indagare la natura ontologica di tale problema. Dal lato sperimentale, invece, negli ultimi anni, lo sviluppo di nuovi materiali e di strumenti innovativi ha permesso la messa a punto di esperimenti, che da un lato hanno messo in evidenza la potenza predittiva della meccanica quantistica (l'esperimento sull'effetto Zenone quantistico, l'esperimento di Aspect, il quantum eraser effect ecc...), dall'altro hanno mostrato che l'interpretazione di Copenhagen, per quanto compatibile con gli esperimenti, sia intellettualmente inadeguata in quanto sono stati sviluppati strumenti come una versione criogenica della barra di Weber che deve essere trattata come un oscillatore armonico quantistico nonostante essa possa pesare una tonnellata [15]. Da questo punto di vista, un passo avanti è stato effettuato dal modello della decoerenza, secondo il quale l'ambiente esterno funge da strumento di misura ed impedisce ad oggetti macroscopici di *mantenere* la sovrapposizione di stati per *molto tempo*. Ovviamente tale modello non risponde a tutte le domande. Infatti, con riferimento all'esperimento del "topolino quantistico", perché il gatto è vivo, o perché è morto? Si continua a non sapere, in quanto il modello garantisce soltanto che il gatto decada in vivo o morto, senza la possibilità di predire con certezza in quale tra i due stati decada. In conclusione, il problema della misura, sia teoricamente che sperimentalmente, mette in discussione il concetto di *realtà fisica* e il *senso comune* della realtà, infatti esso lascia intravedere una sorta di *substrato universale* che connette tra loro le particelle, indipendentemente dallo spazio e dal tempo. Dunque, si deve ulteriormente indagare per avere informazioni sulle diverse correnti di pensiero, infatti gli stessi autori S. Haroche e J.M. Raimond stanno sognando di mettere a punto esperimenti in grado di intrecciare (entangle) gli stati di due o più cavità spazialmente separate, contenenti molti fotoni, combinando la *stranezza* della non località con quella del gatto di schrodinger.

# Bibliografia

- [1] Yakir Aharonov; Daniel Ronrlich. *Quantum Paradoxes*. WILEY-VCH, 2005.
- [2] P. Caldirola; R. Cirelli; G.M. Prosperi. *Introduzione Alla Fisica Teorica*. UTET, 1982.
- [3] David Bohm. *Quantum Theory*. DOVER PUBLICATIONS, INC., New York, 2015.
- [4] Antonio Coniglio. Elementary course in statistical mechanics. Available on line, 2008.
- [5] Wikipedia. Collasso della funzione d'onda — wikipedia, l'enciclopedia libera. [https://it.wikipedia.org/wiki/Collasso\\_della\\_funzione\\_d%27onda](https://it.wikipedia.org/wiki/Collasso_della_funzione_d%27onda), 2018. [Online; in data 9-marzo-2018].
- [6] David J. Griffiths. *Introduction To Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2017.
- [7] Bernard D'Espagnat. *I Fondamenti Concettuali Della Meccanica Quantistica*. BIBLIOPOLIS, 1980.
- [8] L.D. Landau; E.M. Lifshits. *Meccanica Quantistica Teoria Non Relativistica*. Editori Riuniti, 1982.
- [9] Philip Yam. Il Gatto di Schrödinger resuscita. *Le Scienze*, 1997.
- [10] J. Bernu; S. Deléglise; C. Sayrin; S. Kuhr; I. Dotsenko; M. Brune; J.M. Raimond; S. Haroche. Freezing Coherent Field Growth in a Cavity by the Quantum Zeno Effect. *Physical Review Letters*, 2008.
- [11] Serge Haroche; Jean-Michel Raimond. *Exploring the Quantum Atoms, Cavities and Photons*. Oxford University Press, 2006.
- [12] Fabrizio Logiurato. Fondamenti e interpretazioni della teoria quantistica. <http://www-phys.science.unitn.it/lcosfi/fondint.pdf>, 2004. available online.
- [13] John Von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1955.
- [14] Erwin Schrödinger. The present status of quantum mechanics. *Die Naturwissenschaften*, 23, 1935.
- [15] Wojciech H. Zurek. Decoherence and the transition from quantum to classical—revisited. *Los Alamos Science*, (27), 2002.