

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

---

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



*Laurea triennale in Fisica*

## Sistemi integrabili, matrici $R$ e gruppi quantistici

**Relatore:**

Prof. Francesco D'Andrea

**Candidato:**

Giuseppe Fabiano

Matricola: N85000797

Anno Accademico 2017-2018



# Prefazione

I gruppi quantistici vennero introdotti per la prima volta per studiare sistemi integrabili attraverso il metodo dello scattering inverso quantistico. Successivamente venne alla luce la loro applicazione a domini diversi della fisica e della matematica, in particolare la loro connessione alle algebre di Hopf. In questa tesi vogliamo analizzare gli aspetti fondamentali dei gruppi quantistici ed evidenziare la loro connessione con la fisica dei sistemi integrabili.

Nella prima parte richiameremo alcuni concetti di meccanica classica e li utilizzeremo per introdurre le matrici  $r$  classiche attraverso le cosiddette coppie di Lax, ovvero coppie di matrici utili a formalizzare il problema della dinamica in maniera compatta. Calcolando le parentesi di Poisson tra gli elementi di matrice delle coppie di Lax, ricaveremo una condizione da imporre sulle matrici  $r$ , la cosiddetta equazione di Yang-Baxter classica (CYBE) che garantisce che gli integrali del moto costruiti a partire dalla matrice di Lax siano in involuzione, e quindi il sistema sia integrabile.

Passeremo poi, nella seconda parte, allo studio di un particolare sistema quantistico, la catena di spin di Heisenberg, che ci servirà come esempio per introdurre il concetto di matrice  $R$  quantistica. Tale matrice soddisfa una equazione detta equazione di Yang-Baxter quantistica (QYBE), di cui la CYBE si può interpretare come opportuno limite classico. Il fatto che  $R$  soddisfi tale equazione garantisce l'integrabilità del sistema. Discuteremo brevemente il problema della quantizzazione di sistemi integrabili tramite matrici  $R$ , e illustreremo un teorema di Drinfel'd che garantisce, per ogni matrice  $r$  classica, l'esistenza di una quantizzazione (in un senso che verrà reso matematicamente preciso nel capitolo 2.3).

Infine, motivati dall'esempio del piano quantistico, daremo una definizione generale di gruppo quantistico, come l'algebra delle funzioni sul gruppo che si vuole "quantizzare". La "quantizzazione" consisterà nel deformare l'algebra suddetta introducendo la noncommutatività tra i suoi generatori, controllata da una matrice  $R$ , soluzione della QYBE.

# Indice

<b>1</b>	<b>Sistemi integrabili classici e CYBE</b>	<b>3</b>
1.1	Richiami di Meccanica Classica . . . . .	3
1.2	Coppie di Lax . . . . .	5
1.3	Equazione di Yang-Baxter classica . . . . .	7
1.4	Esempio: l'oscillatore armonico . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Sistemi integrabili quantistici e QYBE</b>	<b>10</b>
2.1	Catena di spin di Heisenberg . . . . .	10
2.2	Esempi di soluzione della QYBE . . . . .	17
2.3	Quantizzazione di matrici R . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Gruppi Quantistici</b>	<b>21</b>
3.1	Piano Quantistico . . . . .	21
3.2	Definizione formale di gruppo quantistico . . . . .	23
3.3	Gruppi quantistici e QYBE . . . . .	28
<b>A</b>	<b>Notazioni</b>	<b>30</b>

# Capitolo 1

## Sistemi integrabili classici e CYBE

In questo capitolo richiameremo alcuni concetti della fisica dei sistemi integrabili e vedremo come il problema del moto possa essere posto in una forma più compatta tramite l'utilizzo delle coppie di Lax e delle matrici  $r$  seguendo [1].

### 1.1 Richiami di Meccanica Classica

Richiamiamo alcune nozioni di dinamica Hamiltoniana. In meccanica classica, lo stato di un sistema è individuato da un punto che descrive una curva nello spazio delle fasi  $M$ , di dimensione  $2n$ , dove  $n$  è il numero di gradi di libertà del sistema. Nel caso in esame considereremo  $M = \mathbb{R}^{2n}$ . Le coordinate del punto sono quelle di posizione  $q_i$  e quelle del momento cinetico associato  $p_i$ . La funzione Hamiltoniana è una funzione sullo spazio delle fasi  $H(p_i, q_i)$ , a valori in  $\mathbb{R}$ , che nel caso indipendente dal tempo rappresenta l'energia del sistema, e da cui scaturiscono le equazioni del moto:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1.1)$$

Un osservabile classico è una qualsiasi funzione  $F(p, q)$  definita sullo spazio delle fasi ed a valori in  $\mathbb{R}$ . Date due funzioni  $F$  e  $G$  che siano almeno  $C^1(M)$ , è ben definita la parentesi di Poisson  $\{F, G\}$  :

$$\{F, G\} \equiv \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad (1.2)$$

È immediato verificare che sono soddisfatte le seguenti relazioni:

- $\{F, G\} = -\{G, F\}$     anticommutazione
- $\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H$     regola di Leibnitz

- $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$  identità di Jacobi

per ogni  $F, G, H \in C^1(M)$ .

In particolare, per le coordinate  $p_i, q_i$ , valgono le seguenti:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad (1.3)$$

Si può trattare il problema della dinamica in maniera più generale, facendo uso delle varietà di Poisson.

**Definizione 1.** *Sia  $M$  una varietà differenziabile liscia di dimensione finita  $m$ . Sia inoltre  $C^\infty(M)$  l'insieme delle funzioni lisce definite su  $M$  ed a valori in  $\mathbb{R}$ .*

*Una struttura di Poisson è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -bilineare  $\{, \}_M : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , detta parentesi di Poisson, che soddisfa le seguenti condizioni*

- $\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\}$
- $\{f_1, f_2 f_3\} = f_2 \{f_1, f_3\} + \{f_1, f_2\} f_3$
- $\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\}$

per ogni  $f_1, f_2, f_3 \in C^\infty(M)$ . La varietà  $M$  con tale struttura aggiuntiva viene detta varietà di Poisson.

In coordinate locali  $(x_1, \dots, x_m)$ , la parentesi di Poisson si scrive come:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^m \omega_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

Inoltre, le proprietà sopra elencate pongono le seguenti restrizioni sui coefficienti  $\omega_{ij}$

1.  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  per l'antisimmetria
2.  $\sum_{r=1}^m (\omega_{ri} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x_r} + \omega_{rj} \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x_r} + \omega_{rk} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_r}) = 0$  per l'identità di Jacobi

Nell'esempio 1.2, la matrice  $\omega_{ij}$  assume la seguente forma:

$$\omega_{ij} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array} \right) \quad (1.5)$$

dove  $I$  indica la matrice identica  $n \times n$ . A partire dalla definizione di varietà di Poisson si può quindi dare la definizione di sistema dinamico classico:

**Definizione 2.** *Un sistema dinamico classico è una terna  $(M, \{, \}, H)$ , dove  $M$  è una varietà di Poisson,  $\{, \}$  è la parentesi di Poisson associata, e  $H \in C^\infty(M)$  è l'Hamiltoniana del sistema. Un osservabile classico  $f \in C^\infty(M)$  ammette inoltre la seguente equazione di evoluzione temporale:*

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} \quad (1.6)$$

Dalla definizione di parentesi di Poisson si evince che la quantità  $H(p, q)$  è un'integrale primo del moto in quanto  $\frac{d}{dt}H(p, q) = \{H, H\} = 0$ . Di conseguenza il punto è vincolato a muoversi nell'insieme di livello dello spazio delle fasi definito dall'equazione  $H = E$ . La ricerca di integrali primi del moto risulta di particolare interesse nel contesto della dinamica Hamiltoniana, in quanto essi sono il punto di partenza per risolvere completamente il problema della dinamica di un sistema. Diamo quindi la definizione di sistema integrabile secondo Liouville.

**Definizione 3.** *Un sistema si dice integrabile secondo Liouville se possiede  $n$  integrali primi del moto  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{H, F_j\} = 0$ , che sono tra loro in involuzione:  $\{F_i, F_j\} = 0$  ed indipendenti, ovvero che in ogni punto i  $dF_i$  risultano linearmente indipendenti.*

Dati gli  $n$  integrali primi  $F_i$ , si può far vedere che esiste una trasformazione canonica  $(p_i, q_i) \rightarrow (F_i, \psi_i)$ . Di conseguenza, le equazioni del moto diventano:

$$\dot{F}_j = \{H, F_j\} = 0 \quad (1.7)$$

$$\dot{\psi}_j = \{H, \psi_j\} = \frac{\partial H}{\partial F_j} = \Omega_j = \text{cost} \quad (1.8)$$

che sono quindi di facile risoluzione. Una trasformazione canonica che riveste un ruolo fondamentale nella teoria dei sistemi integrabili è quella nelle variabili angolo azione che possono essere sempre definite, almeno localmente, nel seguente modo. Gli  $n$  integrali primi in involuzione definiscono un insieme di livello  $M_f$ , la cui definizione è la seguente

$$M_f = \{p \in M : F_i(p) = f_i \ \forall i\} \quad f_i \text{ costanti} \quad (1.9)$$

Sotto opportune condizioni di regolarità, compattezza e connessione, è diffeomorfo ad un toro  $n$ -dimensionale  $T_n$ , il quale a sua volta è il prodotto cartesiano di  $n$  cerchi  $C_i$ . Dati gli  $F_i$  che rispettano le condizioni della definizione appena enunciata, si dimostra che esistono sempre coppie di variabili  $(I_i, \theta_i)$  dette variabili angolo-azione, definite su  $T_n$ , in modo tale che le equazioni del moto si scrivono nella seguente forma:

$$\dot{I}_i = 0 \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} \quad (1.10)$$

## 1.2 Coppie di Lax

Utilizzando le variabili angolo azione, è possibile porre le equazioni del moto in una forma equivalente che coinvolge due matrici, che prendono il nome di coppia di Lax. Introdotte  $H_i, E_i \in M_{2n}(\mathbb{C}), i = 1, \dots, n$ , linearmente indipendenti, che soddisfano le relazioni di commutazione

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_j] = 2\delta_{ij}E_j, \quad [E_i, E_j] = 0 \quad (1.11)$$

e definite inoltre le matrici

$$L = \sum_{j=1}^n I_j H_j + 2I_j \theta_j E_j, \quad M = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial I_j} E_j \quad (1.12)$$

l'equazione (1.10) si può scrivere nella forma  $\dot{L} = [M, L]$ . Si può dimostrare che le matrici  $H_i, E_i$  soddisfacenti (1.11) possono sempre essere trovate, e ne diamo un esempio per il caso  $n = 2$ .

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa costruzione ha importanza più teorica che pratica, in quanto, note le variabili angolo azione, la coppia di Lax non è necessaria alla risoluzione del moto. In generale, una coppia di Lax  $L, M$  è una coppia di matrici, funzioni sullo spazio delle fasi, tali che le equazioni di Hamilton per l'evoluzione temporale siano equivalenti a

$$\dot{L} = [M, L] \quad (1.13)$$

Si può osservare che una soluzione può essere espressa nella forma

$$L(t) = g(t)L(0)g(t)^{-1} \quad (1.14)$$

dove  $g(t)$  è determinata da  $M = \dot{g}g^{-1}$ .

L'interesse principale della ricerca di una coppia di Lax consiste nel fatto che essa genera facilmente integrali primi del moto, infatti vale la

**Proposizione 1.** *Data  $L(t) = g(t)L(0)g(t)^{-1}$  si ha che  $Tr(L^m)$  è una costante del moto  $\forall m$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $I_m := Tr(L^m)$ , allora

$$\dot{I}_m = (m-1)Tr(L^{m-1}\dot{L}) = -Tr([L^m, M]) = 0 \quad (1.15)$$

□

Notiamo che, per le proprietà della traccia, si ha

$$Tr(L^m) = \lambda_1^m + \lambda_2^m + \dots + \lambda_n^m \quad (1.16)$$

dove i  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  sono gli autovalori di  $L$ . Quindi, se i termini  $Tr(L^m)$  sono costanti, invertendo le relazioni si ottiene che i  $\lambda_i$  sono costanti. La nozione delle coppie di Lax ci permette di caratterizzare un sistema integrabile senza fare riferimento ad una struttura di Poisson. Tuttavia, tramite la scrittura delle parentesi di Poisson tra gli elementi della matrice di Lax, vogliamo assicurarci che gli integrali primi siano in involuzione, e che quindi il sistema sia effettivamente integrabile secondo Liouville.

### 1.3 Equazione di Yang-Baxter classica

Fissiamo ora alcune notazioni che saranno utili in seguito.

Sia  $E_{ij}$  la generica matrice della base canonica di  $M_n(\mathbb{C})$ , con  $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ . Qualsiasi matrice di Lax è quindi esprimibile come  $L = \sum_{ij} L_{ij}E_{ij}$ , dove  $L_{ij}$  sono funzioni scalari sullo spazio delle fasi. Ricordiamo:

$$L_1 \equiv L \otimes 1 = \sum_{ij} L_{ij}(E_{ij} \otimes 1), \quad L_2 \equiv 1 \otimes L = \sum_{ij} L_{ij}(1 \otimes E_{ij}) \quad (1.17)$$

Con questa notazione, l'indice in basso denota in quale posizione del prodotto tensoriale è inserita la matrice  $L$ . Riportiamo in appendice le altre notazioni utilizzate. Definiamo la parentesi di Poisson di elementi di  $L$  come segue:

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{ij,kl} \{L_{ij}, L_{kl}\} E_{ij} \otimes E_{kl} \quad (1.18)$$

**Proposizione 2.** *La proprietà di involuzione di  $Tr(L^m)$ ,  $m = 1 \dots, n$  di  $L$  è equivalente all'esistenza di una funzione  $r_{12}$ , definita sullo spazio delle fasi, tale che:*

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2] \quad (1.19)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo dapprima che gli autovalori di  $L$  soddisfino  $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$ . Supponiamo che  $L$  sia diagonalizzata da una matrice  $U$ , anch'essa funzione sullo spazio delle fasi. Allora possiamo calcolare la parentesi di Poisson  $\{L_1, L_2\} = \{U_1 \Lambda_1 U_1^{-1}, U_2 \Lambda_2 U_2^{-1}\}$  utilizzando la regola di Leibnitz. Il termine  $\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$  sarà nullo in virtù della proprietà di involuzione degli autovalori. Utilizzando la relazione  $\{U^{-1}, A\} = -U^{-1}\{U, A\}U^{-1}$ , si ottengono quattro termini che contengono la parentesi  $\{U_1, U_2\}$ . Detti  $k_{12} := \{U_1, U_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}$  e  $q_{12} := U_2\{U_1, \Lambda_2\}U_1^{-1}U_2^{-1}$ , la parentesi iniziale si scrive come:

$$\{L_1, L_2\} = L_1 L_2 k_{12} - L_1 k_{12} L_2 - L_2 k_{12} L_1 + k_{12} L_1 L_2 + [q_{12}, L_1] - [q_{21}, L_2] \quad (1.20)$$

Se ora definiamo  $r_{12} = q_{12} + \frac{1}{2}[k_{12}, L_2]$ , otteniamo l'espressione della parentesi nella forma:

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]$$

Viceversa, supposta vera la 1.19, si può scrivere

$$\{L_1^n, L_2^m\} = [a_{12}^{n,m}, L_1] + [b_{12}^{n,m}, L_2] \quad (1.21)$$

dove

$$a_{12}^{n,m} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} L_1^{n-p-1} L_2^{m-q-1} r_{12} L_1^p L_2^q$$

$$b_{12}^{n,m} = - \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} L_1^{n-p-1} L_2^{m-q-1} r_{21} L_1^p L_2^q$$

che si può verificare con un calcolo diretto utilizzando la regola di Leibnitz. In definitiva, usando il fatto che la traccia di un commutatore è nulla, verifichiamo che le quantità  $Tr(L^m)$  sono in involuzione, che è equivalente alla condizione che siano in involuzione gli autovalori di  $L$ , ovvero i  $\lambda_k$ .  $\square$

Se ora si applica l'identità di Jacobi alle parentesi di Poisson tra matrici  $L$ , si ottiene il seguente risultato:

$$[L_1, [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] + \{L_2, r_{13}\} - \{L_3, r_{12}\}] + perm.cicl. = 0 \quad (1.22)$$

Nel caso particolare in cui  $r$  abbia elementi di matrice costanti, si ottiene la condizione sufficiente

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{32}, r_{13}] = 0 \quad (1.23)$$

Se  $r$  è antisimmetrica, ovvero  $r_{12} = -r_{21}$ , la (1.23) prende il nome di equazione di Yang-Baxter classica (CYBE). La risoluzione di quest'equazione presenta notevole interesse in quanto permette di caratterizzare sistemi Hamiltoniani integrabili.

## 1.4 Esempio: l'oscillatore armonico

Concludiamo questa sezione con il classico esempio dell'oscillatore armonico, che ci permetterà di mettere in evidenza come utilizzare la tecnica delle coppie di Lax. Si consideri lo spazio delle fasi  $M = \mathbb{R}^2$  con coordinate  $(p, q)$  e l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico di massa unitaria,  $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ . Poichè  $H$  rappresenta l'energia del sistema, e questa è costante, si osserva che il moto si svolge sull'ellisse di equazione  $H = E$ , per cui si suppone  $E \neq 0$ . Si può considerare la seguente trasformazione canonica:

$$p = \rho \cos(\theta), \quad q = \frac{\rho}{\omega} \sin(\theta) \quad (1.24)$$

per cui la parentesi di Poisson delle nuove coordinate diventa  $\{\rho, \theta\} = \frac{\omega}{\rho}$ . Utilizzando la 1.6 :

$$\rho = \sqrt{2E}, \quad \theta = \omega t + \theta_0 \quad (1.25)$$

A questo punto è immediato generalizzare il risultato ad un'Hamiltoniana del tipo  $H = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$ , ovvero la somma di  $n$  oscillatori armonici. Le  $n$  quantità in involuzione sono date chiaramente da  $F_i = \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$  e la varietà di livello  $M_f$  è un  $n$ -toro. Avremo  $n$  variabili angolari  $\theta_i$  che evolvono linearmente nel tempo con frequenza  $\omega_i$ . Nonostante il problema dell'oscillatore armonico sia completamente risolto, è interessante analizzarlo dal punto di vista delle coppie di Lax. Nel caso di un singolo oscillatore armonico, si

può introdurre la coppia di Lax:

$$L = \begin{pmatrix} p & \omega q \\ \omega q & -p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\omega}{2} \\ \frac{\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Si verifica che l'equazione di Lax è equivalente alle equazioni  $\dot{q} = p$ ,  $\dot{p} = -\omega^2 p$ . Inoltre, possiamo notare che l'Hamiltoniana del sistema si può scrivere come  $H = \frac{1}{4} \text{Tr} L^2$  che rappresenta proprio l'integrale primo del moto per la proposizione 1. Costruiamo la matrice  $r$  per l'oscillatore armonico. Consideriamo la matrice di Lax scritta in precedenza ed utilizziamo le variabili angolo-azione  $(\rho, \theta)$ . Con un po' di algebra, si ottiene che le matrici diagonalizzanti sono

$$U = U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Evidentemente si ha  $\{U_1, U_2\} = 0$  e di conseguenza  $r_{12} = q_{12}$ , che assume a forma

$$r_{12} = \frac{\omega}{2\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes L \quad (1.28)$$

Notiamo che questa matrice  $r$  dipende esplicitamente dalle variabili dinamiche del sistema, pertanto viene denominata matrice  $r$  dinamica; essa soddisfa una generalizzazione della (1.23) detta CYBE dinamica. Esiste un'equazione ancora più generale denominata CYBE dinamica con parametro spettrale (tratta in [2]), usata nel metodo dello scattering inverso, di cui vedremo un'applicazione quantistica con la matrice  $R(\lambda)$ , dove  $\lambda$  è il cosiddetto parametro spettrale.

# Capitolo 2

## Sistemi integrabili quantistici e QYBE

Le matrici  $r$  introdotte nel capitolo precedente permettono di caratterizzare sistemi integrabili classici, pertanto sono uno strumento molto potente. Ci chiediamo se sia possibile ricavare una costruzione simile per caratterizzare i sistemi integrabili quantistici. In meccanica quantistica, in cui gli osservabili fisici sono rappresentati da operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert, l'integrabilità del sistema si ottiene trovando un set massimale di operatori "indipendenti" che commutano tra loro. Per illustrare il problema, tratteremo un sistema in particolare, quello della catena di spin di Heisenberg ([3]), che ci permetterà di far luce sul significato di sistema integrabile quantistico, e tramite il quale sarà possibile definire oggetti simili alle matrici  $r$ , che soddisfano un'equazione analoga a quella di Yang-Baxter classica.

### 2.1 Catena di spin di Heisenberg

Quello della catena di spin di Heisenberg è uno dei modelli fondamentali in fisica, utilizzato per descrivere il fenomeno del ferromagnetismo. Il modello consiste nel considerare il magnetismo di alcuni materiali come un fenomeno emergente dall'allineamento o anti-allineamento (in base al tipo di magnetismo considerato) degli spin delle particelle che compongono il materiale. Nella sua formulazione più generale, l'energia associata a tale accoppiamento può dipendere dalla particolare direzione dello spazio scelta. Per semplicità, tratteremo la catena di spin 1/2 isotropa (XXX).

Gli operatori di cui avremo bisogno sono le matrici di Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

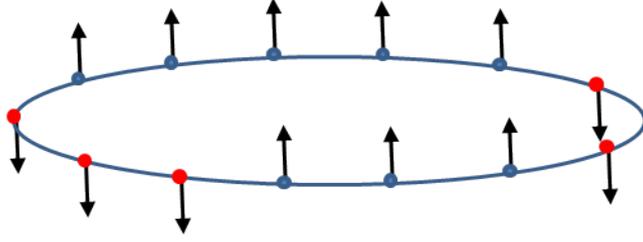


Figura 2.1: Rappresentazione pittorica di una catena di spin chiusa.

che spesso scriveremo come terna di matrici  $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ . Questi sono operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert  $V = \mathbb{C}^2$ .

In prima analisi consideriamo il caso di due particelle per cui gli operatori rilevanti divengono  $\vec{\sigma}_1 \equiv \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}$  e  $\vec{\sigma}_2 \equiv \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}$  dove con  $\mathbb{I}$  si intende l'identità. Questi sono operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert  $V \otimes V$  e per cui, evidentemente, si ha che

$$[\sigma_1^i, \sigma_2^j] = 0 \quad \forall i, j \in \{x, y, z\} \quad (2.2)$$

Un altro operatore che sarà utile definire è l'operatore di permutazione, che agisce come:

$$P(x \otimes y) = y \otimes x \quad \forall x, y \in V \otimes V \quad (2.3)$$

Dalla definizione si evince che  $P^2 = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ . Inoltre, sono verificate le seguenti identità:

$$P\vec{\sigma}_1 P = \vec{\sigma}_2, \quad P\vec{\sigma}_2 P = \vec{\sigma}_1 \quad (2.4)$$

che si possono dimostrare facendo agire gli operatori sui vettori di base di  $V \otimes V$ . Possiamo quindi introdurre l'Hamiltoniana associata alla catena di spin formata da due particelle.

$$H = \frac{J}{4}(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \quad (2.5)$$

Nell'Hamiltoniana in esame, il segno di  $J$  indica che tipo di fenomeno magnetico stiamo trattando, ed il fatto di aver sottratto  $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$  sarà utile per i calcoli successivi. Si può notare inoltre, dalla scrittura esplicita degli operatori, che l'Hamiltoniana può essere riscritta come:

$$H = \frac{J}{2}(P - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \quad (2.6)$$

A questo punto ci poniamo il problema di diagonalizzare l'Hamiltoniana, ovvero di risolvere l'equazione agli autovalori  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ . Introdotto l'operatore spin totale

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}(\vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}) \quad (2.7)$$

e valutando il suo quadrato,

$$\begin{aligned}\vec{S}^2 &= \frac{1}{4}(\vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma})^2 \\ &= \frac{1}{4}(\vec{\sigma}^2 \otimes \mathbb{I} + 2\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma} + \mathbb{I} \otimes \vec{\sigma}^2) \\ &= \frac{1}{2}\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma} + \frac{3}{2}\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}\end{aligned}$$

si può scrivere l'Hamiltoniana in termini dell'operatore  $\vec{S}^2$  nel seguente modo:

$$H = \frac{J}{4}(\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma} - \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) = \frac{J}{2}(\vec{S}^2 - 2\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}) \quad (2.8)$$

dove, nella derivazione, abbiamo utilizzato il fatto che  $\vec{\sigma}^2 = 3\mathbb{I}$ . Quindi, a meno di un fattore costante, l'Hamiltoniana coincide con l'operatore spin totale al quadrato. Come è noto, questo, assieme all'operatore  $S^z = \sigma_1^z \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \sigma_2^z$  è diagonale nella base degli stati di singoletto ( $S = 0$ ) e tripletto ( $S = 1$ ), definiti nel seguente modo:

$$|\psi_{(1,1)}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad |\psi_{(1,0)}\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \quad (2.9)$$

$$|\psi_{(1,-1)}\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle / \sqrt{2} \quad |\psi_{(0,0)}\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle / \sqrt{2} \quad (2.10)$$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

I primi tre stati hanno l'autovalore di  $\vec{S}^2, S = 1$  e autovalori di  $S^z$  rispettivamente uguali a 1, 0, -1 e pertanto costituiscono gli stati di tripletto. L'ultimo stato è quello di singoletto ed è relativo a  $S = 0, S^z = 0$ . Gli stati sono quindi del tipo  $|S, S^z\rangle$ . Ricordando che  $\vec{S}^2 |S, S^z\rangle = S(S+1) |S, S^z\rangle$ , si ha che

$$H |S, S^z\rangle = \frac{J}{2}(S(S+1) - 2) |S, S^z\rangle \quad S = 0, 1 \quad (2.12)$$

In particolare, per  $S = 1, E = 0$  e per  $S = 0, E = -J$ .

Passiamo ora ad analizzare il caso più complesso, in cui sono presenti  $N$  particelle di spin. Gli operatori che ci interessano,  $\vec{\sigma}_n, n = 1, 2, \dots, N$  definiti da

$$\vec{\sigma}_n = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{n-1 \text{ volte}} \otimes \vec{\sigma} \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{N-n \text{ volte}} \quad (2.13)$$

sono operatori definiti su

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{N \text{ volte}} \quad (2.14)$$

che agiscono in maniera non banale sull' $n$ -esimo spazio ed in maniera banale sugli altri. Siamo interessati a trattare la catena di spin chiusa. Quindi, l'Hamiltoniana del sistema sarà del tipo

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} H_{n,n+1} + H_{N,1} \quad (2.15)$$

ovvero la somma di Hamiltoniane di interazione per due particelle del tipo

$$H_{ij} = \frac{J}{4}(\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j - \mathbb{I}^{\otimes N}) \quad (2.16)$$

Nel modello introdotto, si considera solo l'interazione tra particelle successive. Nonostante si possa, in linea di principio, diagonalizzare l'Hamiltoniana e trovarne gli autovalori calcolandoli direttamente, seguiremo un approccio alternativo, che ci permetterà di introdurre la matrice  $R(\lambda)$  quantistica, dipendente da un parametro spettrale. Vedremo come l'Hamiltoniana possa essere scritta in termini della matrice  $R(\lambda)$  e come il fatto che questa soddisfi un'equazione analoga a quella di Yang-Baxter classica, porti all'integrabilità del sistema.

Consideriamo la  $R$  matrice

$$R(\lambda) = \lambda \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + iP \quad (2.17)$$

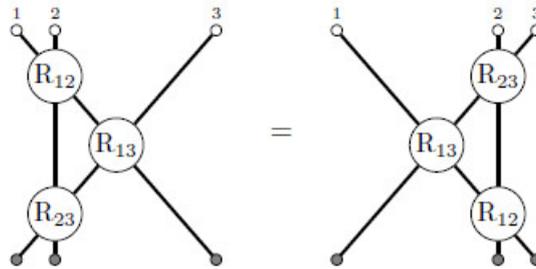
che possiamo vedere come un operatore che agisce sullo spazio  $V \otimes V$ . Utilizzando la notazione del capitolo precedente, poniamo

$$R_{12}(\lambda) = R(\lambda) \otimes \mathbb{I} \quad R_{23}(\lambda) = \mathbb{I} \otimes R(\lambda) \quad R_{13}(\lambda) = P_{23}R_{12}(\lambda)P_{23} \quad (2.18)$$

che sono operatori che agiscono su  $V \otimes V \otimes V$ . I pedici indicano su quali spazi gli operatori agiscono in maniera non banale. Nel caso di  $R_{12}$  ed  $R_{23}$  la definizione è banale, mentre per  $R_{13}$  c'è bisogno di utilizzare l'operatore di permutazione per agire sugli spazi 1 e 2 e poi spostare il risultato sugli spazi 1 e 3. Con qualche passaggio algebrico si può verificare che la matrice  $R(\lambda)$  così definita soddisfa

$$R_{12}(\lambda - \lambda')R_{13}(\lambda)R_{23}(\lambda') = R_{23}(\lambda')R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda - \lambda') \quad (2.19)$$

che prende il nome di equazione di Yang-Baxter quantistica (QYBE) con parametro spettrale.



L'equazione di Yang-Baxter quantistica è strettamente collegata al gruppo delle trecce, la cui rappresentazione è data dalla figura sopra. Nel caso in cui la matrice  $R$  rappresenti l'operatore di permutazione, l'equazione ci dice che le permutazioni rappresentate a destra e a sinistra dell'uguaglianza sono equivalenti.

A questo punto, a partire dalla matrice  $R$ , costruiremo la matrice di trasferimento, che in effetti sarà una famiglia di operatori dipendenti da un parametro che commutano con l'Hamiltoniana. Introduciamo gli operatori  $L$

$$L_{0n}(\lambda) = R_{0n}(\lambda - \frac{i}{2}) \quad (2.20)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.21)$$

che agiscono in maniera non banale sullo spazio  $n$  e sullo spazio 0. Lo spazio 0 è detto spazio ausiliario mentre i restanti  $N$  sono detti spazi quantistici. Gli elementi di matrice di  $L_{0n}$  sono operatori che agiscono in maniera non banale sullo spazio  $n$ , definiti nel seguente modo

$$\chi_n = \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \otimes \chi \otimes \dots \otimes \mathbb{I}, \quad \chi \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \quad (2.22)$$

ed inoltre

$$\alpha = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Gli operatori che agiscono in maniera non banale sullo spazio  $n$  commutano con quelli che agiscono in maniera non banale sullo spazio  $n'$ , con  $n' \neq n$ .

Se si considera la QYBE, sostituendo  $1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 0', 3 \rightarrow n$  e  $\lambda \rightarrow \lambda - \frac{i}{2}, \lambda' \rightarrow \lambda' - \frac{i}{2}$ , si ottiene

$$R_{00'}(\lambda - \lambda') L_{0n}(\lambda) L_{0'n}(\lambda') = L_{0'n}(\lambda') L_{0n}(\lambda) R_{00'}(\lambda - \lambda'), \quad (2.23)$$

dove  $0'$  indica un ulteriore spazio ausiliario. Introduciamo ora la matrice di monodromia  $T_0(\lambda)$

$$T_0(\lambda) = L_{0n}(\lambda) \dots L_{01}(\lambda) \quad (2.24)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_N & \beta_N \\ \gamma_N & \delta_N \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Si può verificare che la matrice di monodromia soddisfa la seguente relazione

$$R_{00'}(\lambda - \lambda') T_0(\lambda) T_{0'}(\lambda') = T_{0'}(\lambda') T_0(\lambda) R_{00'}(\lambda - \lambda'). \quad (2.26)$$

Infatti, a partire dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}
& R_{00'}(\lambda - \lambda')T_0(\lambda)T_{0'}(\lambda') \\
&= R_{00'}(\lambda - \lambda')L_{0N}(\lambda) \cdots L_{01}(\lambda)L_{0'N}(\lambda') \cdots L_{0'1}(\lambda') \\
&= R_{00'}(\lambda - \lambda')L_{0N}(\lambda)L_{0'N}(\lambda') \cdots L_{01}(\lambda)L_{0'1}(\lambda') \\
&= L_{0'N}(\lambda')L_{0N}(\lambda) \cdots L_{0'1}(\lambda')L_{01}(\lambda)R_{00'}(\lambda - \lambda') \\
&= T_{0'}(\lambda')T_0(\lambda)R_{00'}(\lambda - \lambda')
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $[L_{0n}, L_{0'n'}] = 0 \quad \forall n \neq n'$  e la (2.23). La matrice di trasferimento  $t(\lambda)$  è definita come la traccia sullo spazio ausiliario della matrice di monodromia

$$t(\lambda) = \text{tr}_0 T_0(\lambda) \quad (2.27)$$

Moltiplicando la (2.26) per l'inversa della matrice  $R$  a destra e calcolando la traccia su entrambi gli spazi ausiliari si ottiene

$$\text{tr}_{00'} R_{00'}(\lambda - \lambda')T_0(\lambda)T_{0'}(\lambda')R_{00'}(\lambda - \lambda')^{-1} = \text{tr}_{00'} T_{0'}(\lambda')T_0(\lambda) \quad (2.28)$$

da cui, usando la proprietà ciclica della traccia, si ha

$$\text{tr}_{00'} T_0(\lambda)T_{0'}(\lambda') = \text{tr}_{00'} T_{0'}(\lambda')T_0(\lambda) \quad (2.29)$$

e quindi

$$[t(\lambda), t(\lambda')] = 0. \quad (2.30)$$

Quindi, i  $t(\lambda)$  costituiscono una famiglia di operatori ad un parametro che commutano tra loro. A questo punto siamo pronti a mostrare come l'Hamiltoniana dipenda esplicitamente dall'operatore  $t(\lambda)$ , e che quindi commuti con esso. Calcoliamo innanzitutto  $t(\frac{i}{2})$ . Dalla definizione si ha che:

$$\begin{aligned}
t\left(\frac{i}{2}\right) &= \text{tr}_0 [R_{0N}(0) \cdots R_{01}(0)] \\
&= i^N \text{tr}_0 [P_{0N} \cdots P_{01}].
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'argomento della traccia, esso può essere riscritto come

$$\begin{aligned}
& P_{0,N}P_{0,N-1} \cdots P_{0,1} \\
&= P_{N,N-1}P_{0,N}P_{0,N-2} \cdots P_{0,1} \\
&= P_{N-1,N}P_{N-2,N} \cdots P_{1,N}P_{0,N} \\
&= P_{N-1,N-2}P_{N,N-1} \cdots P_{1,N}P_{0,N} \\
&= P_{1,2}P_{2,3} \cdots P_{N-1,N}P_{0,N}
\end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso delle seguenti identità

$$P_{a,b}P_{a,c} = P_{b,c}P_{a,b} = P_{a,c}P_{b,c} \quad P_{a,b} = P_{b,a} \quad (2.31)$$

Calcolando la traccia sullo spazio ausiliare, e sfruttando il fatto che  $tr_0 P_{0,N} = \mathbb{I}_N$ , si ottiene che

$$t\left(\frac{i}{2}\right) = i^N P_{1,2}P_{2,3} \cdots P_{N-1,N} \quad (2.32)$$

che non è altro che l'operatore di shift. Dato qualsiasi operatore  $X$  su  $V$ , l'azione dell'operatore di shift è la seguente

$$t\left(\frac{i}{2}\right)X_n t\left(\frac{i}{2}\right)^{-1} = X_{n+1} \quad n = 1, \dots, N \quad (2.33)$$

dove con  $X_n$  si intende che l'operatore  $X$  agisce sullo spazio  $n$ -esimo, lasciando gli altri invariati, e  $t\left(\frac{i}{2}\right)^{-1}$  è dato da

$$t\left(\frac{i}{2}\right)^{-1} = i^{-N} P_{N-1,N} \cdots P_{23}P_{12}. \quad (2.34)$$

Calcolando la derivata della matrice di trasferimento e valutandola in  $\lambda = \frac{i}{2}$  si ottiene

$$\begin{aligned} t'\left(\frac{i}{2}\right) &= tr_0[R'_{0N}(0) \cdots R_{01}(0) + \cdots + R_{0N}(0) \cdots R'_{01}(0)] \\ &= i^{N-1} tr_0[P_{0,N-1} \cdots P_{0,1} + P_{0,N}P_{0,N-2} \cdots P_{0,1} + \cdots + P_{0,N} \cdots P_{0,2}] \\ &= i^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} P_{1,2} \cdots P_{k-1,k} \widehat{P}_{k,k+1} P_{k+1,k+2} \cdots P_{N-1,N} \end{aligned}$$

dove con  $\widehat{P}_{k,k+1}$  si intende che manca il termine  $P_{k,k+1}$  nel prodotto. Mettendo insieme i risultati ottenuti, si ha

$$t^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)t'\left(\frac{i}{2}\right) = -i\left(\sum_{n=1}^{N-1} P_{n,n+1} + P_{N,1}\right) \quad (2.35)$$

in cui abbiamo fatto nuovamente uso delle identità (2.31). A questo punto, ricordando la (2.15) e la (2.6), notiamo che possiamo scrivere l'Hamiltoniana del sistema nella seguente forma

$$H = \frac{J}{2} (it^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)t'\left(\frac{i}{2}\right) - N\mathbb{I}^{\otimes N}) \quad (2.36)$$

Notiamo inoltre che da (2.30) discende che

$$[t\left(\frac{i}{2}\right), t'\left(\frac{i}{2}\right)] = 0. \quad (2.37)$$

Infatti

$$\begin{aligned} [t\left(\frac{i}{2}\right), t'\left(\frac{i}{2}\right)] &= [t\left(\frac{i}{2}\right), \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{t\left(\frac{i}{2} + \epsilon\right) - t\left(\frac{i}{2}\right)}{\epsilon}] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [t\left(\frac{i}{2}\right), \frac{t\left(\frac{i}{2} + \epsilon\right) - t\left(\frac{i}{2}\right)}{\epsilon}] = 0 \end{aligned}$$

Utilizzando quest'ultimo risultato, si ottiene finalmente

$$[H, t(\lambda)] = 0 \quad (2.38)$$

L'esistenza di una famiglia di integrali primi dipendente da un parametro spettrale garantisce l'integrabilità del sistema. E' possibile, tramite una tecnica chiamata Bethe Ansatz, trovare autovalori e autostati dell'Hamiltoniana a partire da  $t(\lambda)$ . Una discussione di tale tecnica va oltre gli scopi della tesi.

## 2.2 Esempi di soluzione della QYBE

Le matrici  $R$ , analogamente al caso classico, costituiscono un potente strumento per lo studio di sistemi quantistici. Pertanto, a partire dalla loro introduzione, si è analizzato a fondo il problema di trovare soluzioni della QYBE. In questa sezione ne presentiamo alcune ([4]), che saranno utili in seguito. Ricordiamo innanzitutto che possiamo pensare  $R$  come una matrice  $4 \times 4$  usando l'identificazione in (A.9).

Analizziamo una particolare matrice  $R$ , detta soluzione trigonometrica della QYBE. Introdotta la seguente matrice  $R$

$$R_q(x) = \frac{1}{xq - x^{-1}q^{-1}} \begin{pmatrix} xq^{-1} - x^{-1}q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1}(q^{-1} - q) & x - x^{-1} & 0 \\ 0 & x - x^{-1} & x(q^{-1} - q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & xq^{-1} - x^{-1}q \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

con un po' di algebra si può verificare che essa soddisfa la seguente equazione

$$R_{12}(x)R_{13}(xy)R_{23}(y) = R_{23}(y)R_{13}(xy)R_{12}(x). \quad (2.40)$$

Posto  $R = \lim_{x \rightarrow 0} R_q(x)$ , si ottiene la matrice  $R$  costante

$$R = \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 - 1 & q & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

che soddisfa la QYBE senza parametro spettrale, che richiamiamo

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (2.42)$$

Se si effettua la sostituzione  $x = e^\lambda$  e  $q = e^\theta$ , tutti gli elementi di matrice divengono seni iperbolici e la matrice  $R$  così ottenuta viene detta soluzione trigonometrica della QYBE.

Un altro esempio interessante richiede l'utilizzo della funzione ellittica di Jacobi, che introduciamo brevemente.

Sia  $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$  l'equazione di un'ellisse, con  $b > 1$ . Allora, in coordinate polari  $(r, \phi)$ , possiamo ottenere una relazione che lega la coordinata radiale ai punti dell'ellisse, ovvero  $r(\phi, k) = \frac{1}{\sqrt{1-k \sin^2(\phi)}}$ , da cui possiamo calcolare la lunghezza d'arco dell'ellisse in funzione dell'angolo:

$$s(\phi, k) = \int_0^\phi r(\theta, k) d\theta \quad (2.43)$$

dove  $k = 1 - \frac{1}{b^2}$   $0 < k < 1$ . A questo punto la definizione di funzioni ellittiche di Jacobi di prima specie può essere data in modo analogo alla trigonometria. Sia  $P(x, y)$  un punto sull'ellisse associato alla lunghezza d'arco  $s(\phi, k)$  e  $P'(x', y')$  un punto sulla circonferenza unitaria di lunghezza d'arco  $\phi$ .

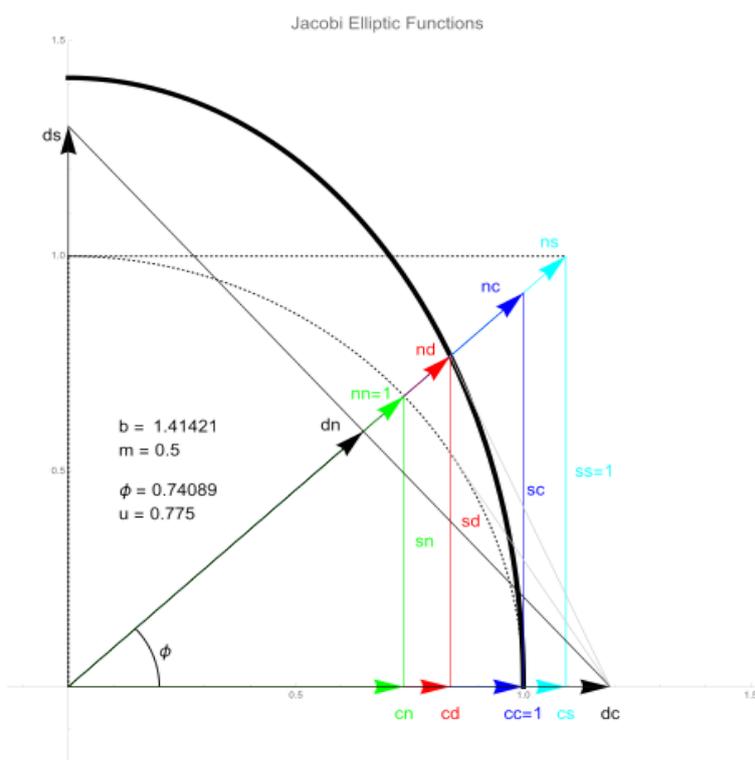


Figura 2.2: Funzioni ellittiche di Jacobi ed il loro legame con le funzioni trigonometriche

Allora, si definiscono:

$$cn(s, k) = \frac{x(s, k)}{r(s, k)} = \cos(\phi) \quad sn(s, k) = \frac{y(s, k)}{r(s, k)} = \sin(\phi) \quad (2.44)$$

per cui si ritrova l'analogia con la definizione data in trigonometria. Possiamo quindi

considerare la matrice  $R$  ellittica:

$$R_\tau(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{sn(\theta\tau+\tau)}{sn(\tau)} & 0 & 0 & ksn(\theta\tau)sn(\theta\tau + \tau) \\ 0 & \frac{sn(\theta\tau)}{sn(\tau)} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{sn(\theta\tau)}{sn(\tau)} & 0 \\ ksn(\theta\tau)sn(\theta\tau + \tau) & 0 & 0 & \frac{sn(\theta\tau)}{sn(\tau)} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

In questa matrice,  $\tau$  è un parametro complesso mentre  $k$  è il parametro della funzione ellittica. Questa matrice  $R$  descrive il cosiddetto modello a 8 vertici (o modello XYZ). Inoltre, facendo il limite per  $k \rightarrow 0$  si ha  $sn(\tau) \rightarrow \sin(\tau)$  e la matrice  $R(\theta)$  descrive il modello trigonometrico a 6 vertici (o modello XXZ). Questi ultimi sono generalizzazioni del modello della catena di spin esposto nella prima sezione di questo capitolo in quanto si considera l'anisotropia delle interazioni nelle tre direzioni dello spazio. Il risultato per il modello isotropo, denominato XXX, si ottiene facendo il limite per  $\tau \rightarrow 0$  di  $R_\tau(\theta)$ .

## 2.3 Quantizzazione di matrici $R$

Fino a questo punto abbiamo analizzato il legame tra le matrici  $r$  ed i sistemi integrabili classici, e quello tra le matrici  $R$  ed i sistemi integrabili quantistici. Sorge quindi spontanea la domanda: esiste qualche legame tra matrici  $r$  e matrici  $R$ , in modo che, sotto opportune condizioni, quella associata al sistema integrabile quantistico, sia la quantizzazione di quella associata al sistema integrabile classico? La risposta è affermativa. Nell'ultima sezione di questo capitolo, riporteremo alcuni risultati dovuti a V.G. Drinfel'd, i quali mettono in risalto quest'aspetto. Per fare ciò, introduciamo lo spazio delle serie formali di parametro  $\hbar$ .

Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Una serie formale di vettori di  $V$  è una successione  $v := (v_0, v_1, v_2, \dots)$  che scriviamo solitamente nella forma

$$v = v_0 + v_1\hbar + v_2\hbar^2 + \dots \quad v_i \in V \quad (2.46)$$

in cui  $\hbar$ , detto in questo contesto "parametro formale", è un simbolo che indica la posizione di ciascun vettore nella successione. L'insieme di tutte le serie formali è indicato con  $V[[\hbar]]$ , ed è anch'esso uno spazio vettoriale. Inoltre, si verifica che se  $V$  è un'algebra, allora  $V[[\hbar]]$  è un'algebra, con prodotto definito come segue

$$(v \cdot w)_i = \sum_{j=0}^i v_j w_{i-j} \quad \forall v, w \in V[[\hbar]] \quad (2.47)$$

dove  $(v \cdot w)_i$  è l' $i$ -esimo termine del prodotto.

Consideriamo il caso di matrici  $r$  ed  $R$  costanti e mettiamole in relazione cercando soluzioni della QYBE

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (2.48)$$

nella forma di serie formali  $R = 1 + r\hbar + s\hbar^2 + \dots$ , per cui, nella definizione data sopra, consideriamo  $V = M_n(\mathbb{R}) \otimes M_n(\mathbb{R})$ . Arrestandoci al secondo ordine in  $\hbar$ , otteniamo

$$(1 + r_{12}\hbar + s_{12}\hbar^2)(1 + r_{13}\hbar + s_{13}\hbar^2)(1 + r_{23}\hbar + s_{23}\hbar^2) = \quad (2.49)$$

$$(1 + r_{23}\hbar + s_{23}\hbar^2)(1 + r_{13}\hbar + s_{13}\hbar^2)(1 + r_{12}\hbar + s_{12}\hbar^2) + O(\hbar^4) \quad (2.50)$$

Svolgendo i prodotti si ottiene che i termini di ordine zero ed uno in  $\hbar$  si semplificano, mentre quelli di ordine 2 danno

$$r_{13}r_{23} + r_{12}r_{23} + r_{12}r_{13} = r_{13}r_{12} + r_{23}r_{12} + r_{23}r_{13} \quad (2.51)$$

Riarrangiando i termini, si ha

$$[r_{13}, r_{23}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{12}, r_{13}] = 0 \quad (2.52)$$

che è proprio l'equazione di Yang-Baxter classica. Vediamo quindi che, se una matrice  $R$  scritta come serie formale risolve la QYBE, arrestandoci al secondo ordine, la matrice  $r$  che compare come coefficiente del termine in  $\hbar$  soddisfa la CYBE. Possiamo pensare  $r$  come "limite semiclassico" di  $R$ , ed  $R$  come "quantizzazione"(formale) di  $r$ . Viceversa, è naturale chiedersi se per ogni  $r$  soluzione di CYBE esiste una quantizzazione, cioè una soluzione formale  $R$  di QYBE il cui termine al primo ordine sia proprio  $r$ . In effetti, unendo il Teorema 2 ed il Teorema 6 dell'articolo di Drinfel'd [5], si arriva al seguente risultato

**Teorema 1.** *Per ogni  $r \in M_n(\mathbb{R}) \otimes M_n(\mathbb{R})$  costante, antisimmetrica ( $r_{12} + r_{21} = 0$ ) e soluzione della CYBE esiste  $R = 1 + r\hbar + O(\hbar^2)$  soluzione della QYBE.*

Il precedente teorema ci dice che (almeno nell'ambito delle serie formali), ogni matrice  $r$  classica ammette una quantizzazione. In effetti Drinfel'd prova che esiste  $R$  invertibile, con  $R_{21} = R_{12}^{-1}$

# Capitolo 3

## Gruppi Quantistici

In questo capitolo tratteremo i cosiddetti gruppi quantistici, intesi come deformazione di algebre su funzioni di gruppi classici. Lo studio dei gruppi quantistici, come vedremo, è strettamente legato allo studio delle matrici  $R$  soluzioni della QYBE. In particolare, seguiremo l'approccio di Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan in [8].

### 3.1 Piano Quantistico

In questa prima sezione, considereremo l'esempio del piano quantistico, che ci permetterà di avere un'idea della struttura di un gruppo quantistico. Cominciamo con una definizione. Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  ed  $x_1, \dots, x_n \in V$   $n$  vettori linearmente indipendenti (i.e. una base).

**Definizione 4.** *Si definisce algebra universale liberamente generata da  $x_1, \dots, x_n$  l'insieme di tutte le combinazioni lineari di prodotti tensoriali finiti di elementi di  $V$ . In simboli si scrive  $\mathbb{C} \langle x_1, \dots, x_n \rangle = TV$ . In particolare si ha  $T^0V = \mathbb{C}$  e  $T^1V = V$ .*

Sia  $R$  una soluzione della QYBE. Consideriamo il quoziente

$$A(R) = \frac{\mathbb{C} \langle x_1, \dots, x_n \rangle}{\langle R_{k,l}^{i,j} x^k x^l - \lambda x^j x^i \rangle} \quad (3.1)$$

dove  $\langle R_{k,l}^{i,j} x^k x^l - \lambda x^j x^i \rangle$  è l'ideale generato dagli elementi  $R_{k,l}^{i,j} x^k x^l - \lambda x^j x^i$ . (3.1) è detto "Quantum vector space". Come caso speciale, studiamo l'esempio con  $n = 2$ . Consideriamo l'algebra generata liberamente da due operatori  $x^1 = x, x^2 = y$  ed  $R$  della forma

$$R = q^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

dove  $q$  è un parametro complesso. In questa notazione, la coppia  $(i, j)$  rappresenta una riga, mentre  $(k, l)$  rappresenta una colonna, e queste sono ordinate nel modo  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ . Scegliendo  $\lambda = q^{-\frac{3}{2}}$ , si ottiene la matrice  $R$  già menzionata nel capitolo precedente; l'algebra (3.1) in questo caso è generata da  $x, y$  con regole di commutazione

$$R_{2,1}^{2,1} x^2 x^1 = x^1 x^2 \lambda \rightarrow xy = qyx \quad (3.3)$$

e prende il nome di "piano quantistico" (quantum plane). Consideriamo un esempio fisico in cui valgono le regole di commutazione tra operatori proposte sopra. Consideriamo gli operatori posizione,  $q$ , ed impulso,  $p$ , le cui regole di commutazione si scrivono come  $[q, p] = i\hbar$ . I rispettivi operatori unitari sono dati da:

$$\tilde{q} = e^{iaq} \quad \tilde{p} = e^{ibp} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

Siamo ora interessati ad analizzare la regola di commutazione tra i due nuovi operatori definiti. Notiamo che il commutatore  $[q, p]$  è multiplo dell'unità, pertanto vale la seguente regole di commutazione dalla formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$\tilde{q}\tilde{p} = e^{-iab\hbar} \tilde{p}\tilde{q}. \quad (3.5)$$

Notiamo che questa relazione è analoga a quella ottenuta per i generatori del piano quantistico, con  $q = e^{-iab\hbar}$ ,  $x = \tilde{q}$ ,  $y = \tilde{p}$ .

Vediamo adesso in che modo il piano quantistico suggerisce l'idea del gruppo quantistico, di cui daremo la definizione formale in una sezione successiva. Ricordiamo che un gruppo  $G$  è un insieme dotato di un'operazione interna associativa, di un elemento unitario e di un inverso per ogni elemento del gruppo stesso. Consideriamo il gruppo delle trasformazioni affini della retta reale, definito nel seguente modo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\} \quad (3.6)$$

L'operazione interna è l'usuale prodotto righe per colonne, l'elemento unitario non è altro che la matrice identica ( $a = 1, b = 0$ ) e l'inverso di un elemento di  $G$  è sempre definito, in quanto, con le condizioni specificate, il determinante di suddetto elemento è sempre diverso da 0. Verifichiamo che effettivamente  $G$  abbia la struttura di gruppo. Dati due elementi  $g, g' \in G$ , si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

quindi  $gg' \in G$ . Consideriamo ora matrici in  $G$ , i cui elementi siano operatori invece che numeri reali. Gli operatori che ci interessano sono proprio i generatori del

piano quantistico. Consideriamo due copie del piano quantistico, i cui generatori indichiamo rispettivamente da  $(a, b)$  e  $(a', b')$ , che soddisfano quindi le seguenti regole di commutazione

$$ab = qba \quad a'b' = qb'a' \quad (3.8)$$

In analogia con la struttura di gruppo relativa a  $G$ , definiamo

$$a'' = aa' \quad b'' = ab' + b \quad (3.9)$$

Assumendo che le due copie commutino tra loro, con un po' di algebra si vede che  $a''b'' = qb''a''$ . In un certo senso si può dire che sul piano quantistico c'è una struttura di gruppo: moltiplicando due matrici i cui elementi soddisfano (3.8) si ottiene una matrice i cui elementi soddisfano le medesime regole di commutazione. (Di elemento neutro e di inverso parleremo più avanti).

## 3.2 Definizione formale di gruppo quantistico

In questa sezione, chiariremo il concetto di gruppo quantistico dandone una definizione generale come in [6],[7]. L'ingrediente fondamentale per la definizione di gruppo quantistico sono le cosiddette algebre di Hopf, di cui motiveremo l'utilizzo. Ricordiamo innanzitutto la definizione di algebra. Un'algebra  $A$  su  $\mathbb{C}$  con unità  $I$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  su cui è definita un'operazione di moltiplicazione  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  (anche indicata con  $\cdot$ ) che è  $\mathbb{C}$ -bilineare, ovvero ed associativa. Inoltre  $\forall a \in A$  deve valere  $a \cdot I = I \cdot a$ . L'associatività del prodotto può essere riassunta nel seguente diagramma commutativo.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes id} & A \otimes A \\ \downarrow id \otimes \mu & & \downarrow \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array}$$

Inoltre, l'esistenza dell'unità è equivalente all'esistenza di un'applicazione lineare  $i : \mathbb{C} \rightarrow A$ , in modo tale che valgano i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes A & \xrightarrow{i \otimes id} & A \otimes A \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{id} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{id \otimes i} & A \otimes A \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \mu \\
A & \xrightarrow{id} & A
\end{array}$$

dove con  $\simeq$  abbiamo indicato l'isomorfismo canonico tra  $\mathbb{C} \otimes A$  ed  $A$  e tra  $\mathbb{C} \otimes A$  ed  $A$ . Esplicitiamo l'isomorfismo nel primo caso, essendo il secondo analogo. L'isomorfismo è semplicemente dato da

$$h : \mathbb{C} \otimes A \rightarrow A \quad h(\lambda \otimes a) = \lambda a \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, a \in A \quad (3.10)$$

L'identità si ricava allora ponendo  $i(1) = I$ . Sia  $G$  un gruppo finito, e consideriamo  $A = \mathbb{C}^G$ , l'algebra delle funzioni su  $G$  a valori in  $\mathbb{C}$ , con le operazioni di somma e prodotto definite come segue

$$(f + h)(g) = f(g) + h(g) \quad (f \cdot h)(g) = f(g)h(g) \quad (\lambda f)(g) = \lambda f(g) \quad \forall f, h \in A, g \in G, \lambda \in \mathbb{C}$$

Specifichiamo in questo caso cosa si intende per  $A \otimes A$ . Date  $f_1, f_2 \in A$ , definiamo  $f_1 \otimes f_2 \in \mathbb{C}^{G \times G}$  quell'applicazione tale che  $(f_1 \otimes f_2)(x, y) = f_1(x)f_2(y) \quad \forall x, y \in G$ . Pertanto, si definisce il prodotto tensoriale algebrico nel seguente modo

$$A \otimes A = \left\{ F : G \times G \rightarrow \mathbb{C} : F = \sum_{ij} f_i \otimes f_j, \quad f_i, f_j \in A \right\} \quad (3.11)$$

Inoltre, l'identità dell'algebra è data da  $I : I(g) = 1 \forall g \in G$ . Vediamo adesso come sia possibile definire ulteriori applicazioni lineari su  $A$ , sfruttando la struttura di gruppo di  $G$ .

$$\begin{array}{ll}
\Delta f(g, g') \equiv f(gg') & \Delta : \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^G \otimes \mathbb{C}^G \\
\epsilon(f) \equiv f(1_G) & \epsilon : \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C} \\
(Sf)(g) \equiv f(g^{-1}) & S : \mathbb{C}^G \rightarrow \mathbb{C}^G
\end{array}$$

Le applicazioni definite sopra prendono il nome, rispettivamente, di coprodotto, counità ed antipodo. Sfruttando la struttura di gruppo di  $G$ , è possibile verificare le seguenti proprietà

$$(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta \quad \text{Coassociatività di } \Delta \quad (3.12)$$

$$(id \otimes \epsilon)\Delta(f) = (\Delta \otimes id)\Delta(f) = f \quad (3.13)$$

$$m(S \otimes id)\Delta(f) = m(id \otimes S)\Delta(f) = \epsilon(f)I \quad (3.14)$$

$\forall f \in \mathbb{C}^G$  ed  $m$  è tale che  $m(a \otimes b) = ab \quad \forall a, b \in \mathbb{C}^G$ . Dimostriamo le proprietà appena enunciate. Cominciamo col verificare la (3.9).  $\forall f \in \mathbb{C}^G, \forall g_1, g_2, g_3 \in G$ , si ha

$$(\Delta \otimes id)\Delta(f)(g_1, g_2, g_3) = \Delta(f)(g_1g_2, g_3) = f((g_1g_2) \cdot g_3) = f(g_1g_2g_3)$$

dove abbiamo sfruttato l'associatività del prodotto di elementi nel gruppo. Analogamente si calcola  $(id \otimes \Delta)\Delta(f)(g_1, g_2, g_3) = f(g_1(g_2g_3)) = f(g_1g_2g_3)$ , dunque, l'uguaglianza. Per quanto riguarda la proprietà sulla counità, si ha

$$(id \otimes \epsilon)\Delta(f)(g) = (id \otimes \epsilon)F(g) = F(g, 1_G) = \Delta f(g, 1_G) = f(g1_G) = f(g) \quad (3.15)$$

dove abbiamo posto  $F = \Delta(f)$ . Il calcolo di  $(\epsilon \otimes id)\Delta(f)(g)$  è analogo e restituisce lo stesso risultato grazie ancora all'associatività del prodotto di  $G$ . Con notazioni analoghe, proviamo l'ultima relazione

$$m(S \otimes id)\Delta(f)(g) = m(S \otimes id)F(a) = mF(g^{-1}, g) = f(1_G) \quad (3.16)$$

e quindi  $m(S \otimes id)\Delta(f) = \epsilon(f)I$ . Analogamente si verifica l'altra proprietà.

Valgono inoltre le seguenti relazioni, che ci saranno utili in seguito

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \quad (3.17)$$

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b) \quad (3.18)$$

$$S(ab) = S(a)S(b) \quad (3.19)$$

Infatti

$$\Delta(ab)(g_1, g_2) = ab(g_1g_2) = a(g_1g_2)b(g_1g_2) = \Delta(a)\Delta(b)(g_1g_2)$$

$$\epsilon(ab)(g) = ab(1_G) = a(1_G)b(1_G) = \epsilon(a)\epsilon(b)$$

$$S(ab)(g) = ab(g^{-1}) = a(g^{-1})b(g^{-1}) = S(a)S(b)$$

dove ancora una volta si sono sfruttate la proprietà di struttura di  $G$ . Un'algebra  $A$  dotata di coprodotto, counità ed antipodo che soddisfa le proprietà di coassociatività riportate sopra, viene detta algebra di Hopf. E' interessante analizzare i diagrammi commutativi che rappresentano suddette proprietà.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xleftarrow{\Delta \otimes id} & A \otimes A \\ id \otimes \Delta \uparrow & & \Delta \uparrow \\ A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes A & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & A \otimes A \\ \simeq \uparrow & & \Delta \uparrow \\ A & \xleftarrow{id} & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes A & \xleftarrow{id \otimes \epsilon} & A \otimes A \\ \simeq \uparrow & & \Delta \uparrow \\ A & \xleftarrow{id} & A \end{array}$$

Notiamo come i diagrammi commutativi delle co-operazioni si ottengono semplicemente invertendo il verso delle frecce e cambiando l'operazione in questione.

La definizione di coprodotto ha un significato ben preciso. Dal punto di vista matematico, esso ci permette di costruire prodotti tensoriali di rappresentazioni. Dal punto di vista fisico, invece, dati operatori che agiscono su stati di singola particella, il coprodotto ci dice quale è l'operatore corrispondente su stati con due o più particelle.

Sia  $G = GL(n, \mathbb{C})$  il gruppo delle matrici invertibili di dimensione  $n$  con elementi complessi, e sia  $\text{Fun}(G)$  l'algebra delle funzioni che sono polinomi in  $T_b^a$  e in  $\frac{1}{\det(T)}$ , dove  $T_b^a$  è la funzione seguente:  $\forall g \in G, T_b^a(g) = g_b^a$ . Utilizzando la definizione di coprodotto, si ha

$$\Delta(T_b^a)(g, g') = T_b^a(gg') = (gg')_b^a = g_c^a g_b'^c = T_c^a(g)T_b^c(g') \quad \forall g, g' \in G \quad (3.20)$$

dove sono sottintese le somme su indici ripetuti. In maniera compatta si può quindi scrivere

$$\Delta(T_b^a) = T_c^a \otimes T_b^c \quad (3.21)$$

Inoltre, la counità e l'antipodo diventano:

$$\epsilon(T_b^a) = \delta_b^a \quad (3.22)$$

$$S(T_b^a) = (T^{-1})_b^a \quad (3.23)$$

Evidenziamo il fatto che l'includere  $\frac{1}{\det(T)}$  è dovuto alla necessità di poter scrivere la matrice inversa, e quindi l'antipodo. Con le co-strutture così definite,  $\text{Fun}(G)$  è un'algebra di Hopf. Vogliamo adesso riprodurre le regole di commutazione già menzionate per il piano quantistico facendo uso della struttura di  $\text{Fun}(G)$ . Per far ciò, consideriamo una deformazione noncommutativa di  $\text{Fun}(G)$  denominata  $\text{Fun}_q(G)$ . Un'algebra di Hopf noncommutativa quale  $\text{Fun}_q(G)$  è quello che viene denominato gruppo quantistico. Nonostante la denominazione adottata, è importante sottolineare che quello che si ottiene non è un gruppo, ma qualcosa di analogo all'algebra delle funzioni definite su un gruppo. Consideriamo adesso gruppi quantistici generati dagli elementi  $T_b^a$  che soddisfano la seguente regola di commutazione:

$$R_{ef}^{ab} T_c^e T_d^f = T_f^b T_e^a R_{cd}^{ef} \quad (3.24)$$

La matrice  $R$ , come preannunciato, dipende da un parametro  $q$ , in modo tale che per  $q \rightarrow 1$  si ottiene il cosiddetto "limite classico"

$$R_{cd}^{ab} \xrightarrow{q \rightarrow 1} \delta_c^a \delta_d^b \quad (3.25)$$

per cui i  $T_b^a$  commutano e si ritorna all'usuale algebra delle funzioni sul gruppo  $\text{Fun}(G)$ . Per comodità riscriviamo la (3.24) come segue

$$R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12} \quad (3.26)$$

dove come al solito  $T_1 = T \otimes 1, T_2 = 1 \otimes T$  e l'uguaglianza è tra matrici in  $A \otimes A$ . Consideriamo adesso il gruppo quantistico  $SL_q(2)$ , introdotto per la prima volta da Woronowicz in [9] e [10], descritto da un'algebra denominata con  $\text{Fun}_q(SL(2))$ , che ora andiamo a definire (qui  $SL(2)$  è il gruppo delle matrici  $2 \times 2$  complesse ed invertibili con determinante 1).  $\text{Fun}_q(SL(2))$  è generata dagli elementi  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  di una matrice  $2 \times 2$

$$T_b^a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Con regole di commutazione in (3.24), gli elementi stessi soddisfano

$$\alpha\beta = q\beta\alpha \quad \alpha\gamma = q\gamma\alpha \quad \beta\delta = q\delta\beta \quad \gamma\delta = q\delta\gamma \quad (3.28)$$

$$\beta\gamma = \gamma\beta \quad \alpha\delta - \delta\alpha = (q - q^{-1})\beta\gamma \quad (3.29)$$

dove  $q$  è il parametro di deformazione. La matrice  $R$  che garantisce tali regole è la seguente

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

che abbiamo già incontrato in precedenza. Da un calcolo diretto, si può verificare che un elemento centrale dell'algebra, ovvero un elemento che commuta con tutti i suoi generatori, è il seguente

$$\det_q T = \alpha\delta - q\beta\gamma \quad (3.31)$$

Questo viene detto determinante quantistico per via del fatto che nel limite classico ( $q \rightarrow 1$ ) si ottiene l'usuale definizione di determinante di una matrice  $2 \times 2$ . A partire dalle relazioni di commutazione tra i generatori, si nota che la condizione  $\det_q T = I$  richiesta da  $\text{Fun}_q(SL(2))$  è consistente. Si può inoltre determinare la matrice inversa, che risulta

$$(T^{-1})_b^a = (\det_q T)^{-1} \begin{pmatrix} \delta & -q^{-1}\beta \\ -q\gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Seguendo quanto detto precedentemente, si vuole dare a  $\text{Fun}_q(SL(2))$  una struttura di algebra di Hopf, pertanto abbiamo bisogno di definire il coprodotto, la counità e l'antipodo per tale algebra. Da (3.21), (3.22) e (3.23) segue

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma \quad \Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta \quad (3.33)$$

$$\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \delta \otimes \gamma \quad \Delta(\delta) = \gamma \otimes \beta + \delta \otimes \delta \quad (3.34)$$

$$\epsilon(\alpha) = \epsilon(\delta) = 1 \quad \epsilon(\beta) = \epsilon(\gamma) = 0 \quad (3.35)$$

$$S(\alpha) = \delta \quad S(\beta) = -q^{-1}\beta \quad S(\gamma) = -q\gamma \quad S(\delta) = \alpha \quad (3.36)$$

Arrivati a questo punto, si può reinterpretare anche l'esempio del piano quantistico dal punto di vista delle algebre di Hopf. Sia  $A$  generata da  $a, b, a^{-1}$ , con  $ab = qba$ . Posti

$$a_1 = a \otimes 1 \quad a_2 = 1 \otimes a \quad (3.37)$$

$$b_1 = b \otimes 1 \quad b_2 = 1 \otimes a \quad (3.38)$$

elementi di  $A \otimes A$ , si possono definire le strutture dell'algebra di Hopf a partire dalle (3.9)

$$a'' = a_1 a_2 = a \otimes a =: \Delta(a) \quad (3.39)$$

$$b'' = a_1 b_2 + b_1 = a \otimes b + b \otimes 1 =: \Delta(b) \quad (3.40)$$

La counità deve restituire l'identità di  $A$ , pertanto si pone

$$\epsilon \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

L'antipodo diventa

$$S \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

### 3.3 Gruppi quantistici e QYBE

In quest'ultima sezione metteremo in evidenza il legame tra sistemi integrabili e gruppi quantistici tramite la QYBE seguendo [11]. Infatti, se si costruisce un gruppo quantistico con relazioni tra i generatori date da (3.24) e la matrice  $R$  in questione soddisfa la QYBE, si ottiene una condizione che assicura la consistenza delle relazioni di commutazione.

Sia  $R$  soluzione della QYBE e consideriamo l'algebra

$$A(R) = \frac{\mathbb{C} \langle T_b^a \rangle}{\langle R_{ef}^{ab} T_c^e T_d^f - T_f^b T_e^a R_{cd}^{ef} \rangle} \quad (3.43)$$

Come abbiamo già visto in precedenza, è possibile riscrivere la relazione "RTT" in maniera più compatta come  $R_{12} T_1 T_2 = T_2 T_1 R_{12}$ . Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima per  $T_3$  e sfruttando il fatto che  $[R_{ij}, T_k] = 0$  per  $i, j \neq k$ , si ha

$$R_{12} T_1 T_2 T_3 = T_2 T_1 T_3 R_{12} \quad (3.44)$$

quindi, moltiplicando per  $R_{13}$

$$R_{13} R_{12} T_1 T_2 T_3 = T_2 (R_{13} T_1 T_3) R_{12} = T_2 T_3 T_1 R_{13} R_{12} \quad (3.45)$$

sfruttando ancora le relazioni "RTT". Moltiplichiamo adesso per  $R_{23}$ , ottenendo

$$R_{23} R_{13} R_{12} T_1 T_2 T_3 = T_3 T_2 T_1 R_{23} R_{13} R_{12} \quad (3.46)$$

Moltiplichiamo questa relazione per  $R_{32}R_{31}R_{21}$  per arrivare a

$$R_{32}R_{31}R_{21}R_{23}R_{13}R_{12}T_1T_2T_3 = T_1T_2T_3R_{32}R_{31}R_{21}R_{23}R_{13}R_{12} \quad (3.47)$$

Imponendo quindi la condizione che sia  $R_{32}R_{31}R_{21}R_{23}R_{13}R_{12} = 1$  e ricordando che  $R_{ji} = R_{ij}^{-1}$  si ottiene la relazione

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (3.48)$$

ovvero  $R$  soddisfa la QYBE.

Consideriamo ora l'algebra delle funzioni che sono polinomi in  $T_b^a$  come nel caso di  $SL_q(2)$  esposto nella sezione precedente, con coprodotto e counità definiti da (3.21) ed (3.22). L'aver omesso  $\frac{1}{\det_q T}$  implica il fatto che non è più possibile definire l'antipodo, per cui è necessario conoscere gli elementi  $(T^{-1})_b^a$ . Una struttura algebrica di questo tipo è detta bialgebra. Il lemma VIII.6.3 in [12] ci assicura che per algebre di funzioni di questo tipo esiste un'unica struttura di bialgebra dotata di coprodotto e counità come sopra. Ciò garantisce che il coprodotto sia un morfismo di algebre e che quindi sia compatibile con le regole di commutazione (3.24)

$$\Delta(R_{12}T_1T_2) = \Delta(T_2T_1R_{12}) \quad (3.49)$$

Nella sezione precedente abbiamo costruito il gruppo quantistico associato a  $SL(2, \mathbb{C})$ . Quello relativo a  $GL(2, \mathbb{C})$  si ottiene con relazioni analoghe, definendo opportunamente il coprodotto, la counità e l'antipodo per il generatore  $\frac{1}{\det_q T}$ . Si possono costruire i gruppi quantistici  $SL_q(n, \mathbb{C})$  e  $GL_q(n, \mathbb{C})$  con  $n > 2$  in maniera analoga. Infatti, si può definire la struttura di bialgebra con coprodotto e counità ancora definite da (3.21) e (3.22) ottenendo le bialgebre  $A(GL_q(n, \mathbb{C}))$  e  $A(SL_q(n, \mathbb{C}))$  con regole di commutazione tra i generatori simili a quelle per i casi  $n = 2$ , ottenute con una matrice  $R$  analoga alla (3.30), ma di dimensione maggiore. Inoltre, è possibile definire una generalizzazione del determinante quantistico  $\det_q T$  per dimensioni maggiori di 2 per cui, aggiungendo a  $A(GL_q(n, \mathbb{C}))$  il generatore  $\frac{1}{\det_q T}$  ed imponendo la condizione  $\det_q T = 1$  nel caso di  $A(SL_q(n, \mathbb{C}))$  si ottengono proprio i gruppi quantistici cercati. La nozione di gruppo quantistico che abbiamo introdotto è quella di Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan, partendo da matrici  $R$  soddisfacenti la QYBE. Esiste una definizione più generale data da Woronowicz in termini di  $C^*$ -algebre, che va oltre gli scopi di questa tesi.

# Appendice A

## Notazioni

Diamo alcune definizioni e fissiamo alcune notazioni che saranno utili al lettore. Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , ed indichiamo con  $V^*$  il suo duale, ovvero lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari a valori in  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 5.** *Un tensore  $A$  di tipo  $(k, l)$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -multilineare*

$$A : \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_k \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_l \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

In componenti, scriviamo

$$A = a_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \quad a_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R} \quad \forall i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l = 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

L'insieme dei tensori di tipo  $(k, l)$  è anch'esso uno spazio vettoriale, che indichiamo con  $T_l^k$ . Esiste una definizione di tensore più generale, ma esula dagli scopi di questa tesi. E' possibile definire il prodotto tensoriale tra tensori di tipo diverso. Dati  $A \in T_l^k$  e  $B \in T_s^r$ , definiamo

$$A \otimes B \in T_{l+s}^{k+r} \quad (A \otimes B)_{j_1, \dots, j_{l+s}}^{i_1, \dots, i_{k+r}} = a_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} b_{j_{l+1}, \dots, j_{l+s}}^{i_{k+1}, \dots, i_{k+r}} \quad (\text{A.3})$$

dove, come al solito, tutti gli indici vanno da 1 ad  $n$ . Definiamo adesso il prodotto tra due tensori. Dati  $A \in T_s^k, B \in T_r^s$ , allora

$$AB \in T_r^k \quad (AB)_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_k} = \sum_{l_1, \dots, l_s} a_{l_1, \dots, l_s}^{i_1, \dots, i_k} b_{j_1, \dots, j_r}^{l_1, \dots, l_s} \quad (\text{A.4})$$

Notiamo che la definizione di prodotto tra tensori appena data non è altro che una generalizzazione del prodotto righe per colonne tra matrici. Infatti, se abbiamo un singolo indice, quello definito è il prodotto scalare tra vettori, mentre se ne sono presenti due, abbiamo il prodotto righe per colonne tra matrici. Proprio per analogia con le matrici, si può definire la traccia parziale di un tensore. Sia  $A \in T_k^k$ , allora

$$Tr_m(A) \in T_{k-1}^{k-1} \quad m = 1, \dots, k \quad (\text{A.5})$$

ed in componenti si ha

$$(Tr_m A)_{j_1 \dots j_{k-1}}^{i_1 \dots i_{k-1}} = \sum_{l=1}^n a_{j_1 \dots j_{m-1} l j_{m+1} \dots j_{k-1}}^{i_1 \dots i_{m-1} l i_{m+1} \dots i_{k-1}} \quad (\text{A.6})$$

Sia  $A \in T_1^1$ . Poniamo allora

$$A_n = \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \otimes A \otimes \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I} \quad (\text{A.7})$$

$A_n \in T_k^k$  che in questo caso è dato da

$$T_k^k := \underbrace{M_n(\mathbb{C}) \otimes \dots \otimes M_n(\mathbb{C})}_{k \text{ volte}} \quad (\text{A.8})$$

In maniera simile si definisce  $A_{ij} \in T_k^k$ , in cui si intende che il tensore  $A$  è inserito nei siti  $i, j$ . Un modo utile per rappresentare tali tensori viene dall'isomorfismo di algebre dato da  $M_n(\mathbb{C}) \otimes M_n(\mathbb{C}) \simeq M_{n^2}(\mathbb{C})$ . Ad esempio, nel caso  $n = 2$ , il prodotto tensoriale tra due elementi di  $M_2(\mathbb{C})$  diventa

$$A \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Nel membro di destra compare infatti una matrice  $4 \times 4$  scritta nella forma di blocchi  $2 \times 2$ . L'isomorfismo ci permette di identificare tensori con matrici  $4 \times 4$ , ma per semplicità li supporremo uguali.

# Bibliografia

- [1] Babelon, O., Bernard, D., Talon, M. (2003). *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge University Press.
- [2] Etingof, Pavel, and Frédéric Latour. *The dynamical Yang-Baxter equation, representation theory, and quantum integrable systems*. Vol. 29. Oxford University Press on Demand, 2005.
- [3] Nepomechie, Rafael I. "A spin chain primer." *International Journal of Modern Physics B* 13.24n25 (1999): 2973-2985.
- [4] Jones, Vaughan FR. "In and around the origin of quantum groups." arXiv preprint math/0309199 (2003).
- [5] Drinfeld, V. G. "Constant quasiclassical solutions of the Yang-Baxter quantum equation." *Soviet Math. Dokl.* Vol. 28. No. 3. 1983.
- [6] Aschieri, Paolo. "Lectures on Hopf algebras, quantum groups and twists." arXiv preprint hep-th/0703013 (2007).
- [7] Drinfeld, Vladimir Gershonovich. "Quantum groups." *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* 155 (1986): 18-49.
- [8] Faddeev, Ludwig D., N. Yu Reshetikhin, and L. A. Takhtajan. "Quantization of Lie groups and Lie algebras." *Algebraic Analysis, Volume 1*. 1988. 129-139.
- [9] S.L. Woronowicz, *Pseudospaces, pseudogroups, and Pontryagin duality, Mathematical problems in theoretical physics*, Lect. Notes in Phys., vol. 116, Springer, 1980, pp. 407–412, Proc. ICMP, Lausanne 1979.
- [10] S.L. Woronowicz, *Twisted  $SU(2)$  group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 (1987), 117–181
- [11] Chari, Vyjayanthi, and Andrew N. Pressley. *A guide to quantum groups*. Cambridge university press, 1995.

- [12] Kassel, Christian. *Quantum groups*. Vol. 155. Springer Science & Business Media, 2012.