

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

---

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"



*Tesi di laurea triennale in Fisica*

## Trasferimento radiativo tra corpi a piccole distanze

Relatore:  
Prof. Giuseppe Bimonte

Candidato:  
Davide Iacobacci  
Matricola: N85000866

Anno Accademico 2017/2018

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Il corpo nero</b>	<b>3</b>
1.1 Il teorema di Kirchhoff . . . . .	3
1.2 La formula di Rayleigh-Jeans . . . . .	3
1.3 La legge di Planck . . . . .	5
<b>2 Flusso radiativo tra corpi a piccole distanze</b>	<b>9</b>
2.1 La teoria di Rytov . . . . .	9
2.2 La teoria di Polder e Van Hove . . . . .	13
2.3 Flusso di calore trasferito tra una sfera e un piano . . . . .	18
<b>3 Conclusioni</b>	<b>22</b>
<b>A La funzione di Green</b>	<b>24</b>
A.1 Soluzione delle equazioni di Maxwell con il metodo dei potenziali	26
A.2 La media del vettore di Poynting . . . . .	28
<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>

# Introduzione

Il trasferimento radiativo, in generale, può essere definito come un canale di trasferimento di energia tramite onde elettromagnetiche. Il tipico esempio di cui ci occuperemo è lo scambio di radiazione termica tra due corpi.

In questo caso, le onde **propagative** trasportano energia da un corpo all'altro, determinando un trasferimento netto di calore. A contribuire al trasporto di energia ci sono anche le onde **evanescenti**. Queste, contrariamente alle prime, si propagano solo lungo l'interfaccia dei due mezzi e la loro ampiezza diminuisce in modo esponenziale, risultando concentrata in una regione molto **vicina** alla superficie; per questo motivo sono anche chiamate onde **superficiali**. Solo in presenza di un mezzo posto ad una distanza tale da trovarsi all'interno del campo evanescente, cioè ad una distanza di circa una lunghezza d'onda  $\lambda$ , avremo un flusso netto di energia irradiata da un mezzo all'altro (fig.1); altrimenti il contributo delle onde evanescenti sarà nullo (fig.2).

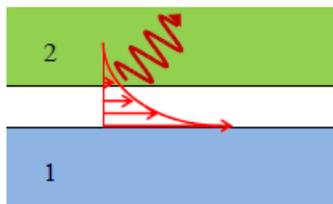


fig.1

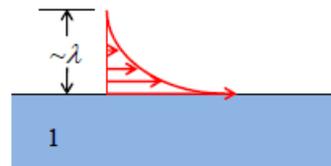


fig.2

In base alla distinzione tra onde propagative ed evanescenti, si possono definire due regimi del trasferimento radiativo, detti di **campo vicino** e **campo lontano**.

I corpi che si scambiano energia ad una distanza maggiore della lunghezza d'onda della radiazione, rientrano nel regime di campo lontano ed il trasferimento di energia avviene solo tramite onde propagative, dal momento che le onde evanescenti decadono esponenzialmente entro una distanza di circa una lunghezza d'onda.

Quando i corpi sono separati da una distanza minore della lunghezza d'onda della radiazione, sono in regime di campo vicino e parte dell'energia viene trasferita tramite onde evanescenti.

La teoria della radiazione termica, che ha come pioniere Max Planck, si basa sul concetto di **corpo nero**. La distribuzione di corpo nero di Planck, però, è ristretta ad un'assunzione fondamentale: la distanza tra i corpi che scambiano radiazione termica, deve essere maggiore della lunghezza d'onda dominante, di modo che il trasferimento di energia avvenga solo tramite onde propagative. In regime di campo vicino, il trasferimento di calore radiativo può aumentare di qualche ordine di grandezza, rispetto ai valori previsti dalla teoria di Planck, per effetto delle onde evanescenti. Il primo modello correttivo al trasferimento di calore radiativo in regime di campo vicino si basa sulla descrizione elettromagnetica di Rytov dell'emissione termica, in seguito generalizzata da Polder e Van Hove.

La trattazione che seguirà prevede un primo capitolo in cui richiameremo alcuni concetti sul corpo nero e sulla legge di Kirchhoff.

Nel secondo ci occuperemo del problema del trasferimento radiativo tra due piani infiniti, disposti parallelamente e a piccole distanze; per fare ciò descriveremo la teoria di Rytov e quella più generale di Polder e Van Hove.

Infine, accenneremo alla "proximity approximation", utilizzata per studiare casi semplici di geometrie non piane. In particolare descriveremo lo scambio termico tra una sfera e un piano.

# Capitolo 1

## Il corpo nero

### 1.1 Il teorema di Kirchhoff

Si definisce **corpo nero**, un oggetto in grado di assorbire una qualunque radiazione elettromagnetica incidente. Il corpo nero può essere pensato come una cavità, le cui pareti sono formate da oscillatori armonici che, una volta eccitati dalla radiazione incidente, la ri-emettono in seguito al raggiungimento dell'equilibrio termico tra radiazione e pareti. Il termine ed il concetto di corpo nero, furono introdotti per la prima volta da Gustav Kirchhoff nel 1860. In particolare, egli dimostrò che il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente di un corpo, definisce una funzione universale  $f(\nu, T)$ , indipendente dalla natura stessa dei corpi:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T),$$

dove il potere emissivo  $e(\nu, T)$  è definito come l'energia media emessa alla frequenza  $\nu$ , da un corpo a temperatura  $T$ , per unità di superficie, per unità di tempo e di angolo solido; mentre il potere assorbente  $a(\nu, T)$  è il rapporto tra la potenza elettromagnetica assorbita e quella incidente.

Kirchhoff, poi, definì corpo nero un corpo il cui potere assorbente è pari a 1, per ogni temperatura e frequenza. Da ciò segue che, la funzione universale  $f(\nu, T)$  descrive proprio il potere emissivo di un corpo nero.

Vogliamo adesso determinare lo spettro di corpo nero, vale a dire la densità di energia irradiata in funzione della frequenza  $\nu$ .

### 1.2 La formula di Rayleigh-Jeans

Descriviamo dapprima l'approccio classico di Rayleigh e Jeans.

Se consideriamo il corpo nero come una cavità, le cui pareti sono formate da oscillatori armonici, la densità di energia in essa contenuta  $u(\nu, T)$ ,

nell' intervallo di frequenza compreso tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , é

$$u(\nu, T)d\nu = \langle \epsilon \rangle n(\nu)d\nu, \quad (1.1)$$

dove  $\langle \epsilon \rangle$  rappresenta l' energia media degli oscillatori delle pareti della cavità, in risonanza con la frequenza  $\nu$  e  $n(\nu)d\nu$  é il numero di onde stazionarie tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  all' interno della cavità, che si assume di forma cubica di lato  $L$ . Affinchè si instaurino onde stazionarie, bisogna richiedere che queste abbiano nodi alle estremità del cubo e, quindi, che nelle tre direzioni devono essere contenute un numero intero di semilunghezze d' onda:

$$\begin{cases} n_x = \frac{2L}{\lambda}, & n_x = 1, 2, 3, \dots \\ n_y = \frac{2L}{\lambda}, & n_y = 1, 2, 3, \dots \\ n_z = \frac{2L}{\lambda}, & n_z = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.2)$$

Ogni terna  $(n_x, n_y, n_z)$  corrisponde ad un possibile modo di un' onda stazionaria nella cavità. Perciò, possiamo considerare lo spazio tridimensionale degli interi  $(n_x, n_y, n_z)$ , in cui ogni punto é posto in corrispondenza biunivoca con un' onda stazionaria permessa. Il numero di onde stazionarie permesse nell' intervallo di lunghezza d' onda  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ , quindi, é uguale al numero di punti, a coordinate intere, nell' ottante positivo del guscio sferico compreso tra  $n$  e  $n + dn$ , con  $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ .

Dal momento che il numero di modi é molto grande, lo spazio può essere considerato come continuo, perciò, il numero di punti a coordinate intere, nell' ottante positivo del guscio sferico, ben approssima il volume del guscio. Da ciò segue che il numero di onde stazionarie permesse é

$$N = 2 \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn, \quad (1.3)$$

dove il fattore 2 tiene conto dei due possibili stati di polarizzazione delle onde. Ricordando che

$$n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2L\nu}{c} \quad dn = \frac{2L}{c} d\nu.$$

e sostituendo  $n$  e  $dn$  nella Eq.(1.3), si ottiene il risultato in termini della frequenza  $\nu$

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (1.4)$$

La densità di modi vibrazionali permessi si ottiene dividendo per il volume della cavità:

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu. \quad (1.5)$$

Per determinare il valor medio dell' energia degli oscillatori  $\langle \epsilon \rangle$ , si utilizza la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\epsilon) = C e^{-\beta \epsilon}, \quad (1.6)$$

dove  $C$  é un' opportuna costante di normalizzazione e  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , con  $k_B$  costante di Boltzmann. La formula (1.6) esprime la probabilità che un oscillatore abbia un' energia compresa tra  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$ . Da ciò segue che il valor medio dell' energia é

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^\infty f(\epsilon) d\epsilon}. \quad (1.7)$$

Sostituendo la (1.6) nella formula precedente si ottiene

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^\infty \epsilon e^{-\beta \epsilon} d\epsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta \epsilon} d\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta \epsilon} d\epsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = k_B T. \quad (1.8)$$

Questo risultato é noto come **teorema di equipartizione dell' energia**. Inserendo le (Eq.1.5) e (Eq.1.8) nell' equazione (1.1), si ottiene la **formula di Rayleigh-Jeans**:

$$u(\nu, T) = 8\pi k_B T \frac{\nu^2}{c^3}, \quad (1.9)$$

che espressa in funzione di  $\lambda$  si scrive come

$$u(\lambda, T) = 8\pi \frac{k_B T}{\lambda^4}. \quad (1.10)$$

Questa legge risulta in accordo con i risultati sperimentali per grandi lunghezze d' onda (o basse frequenze), mentre si discosta completamente per piccole lunghezze d' onda (o alte frequenze). La formula (1.10), infatti, prevede una densità di energia infinita per  $\lambda \rightarrow 0$  e, quindi, emissioni altissime per lunghezze d'onda corrispondenti all' ultravioletto e ai raggi X.

Questo problema, noto come “**catastrofe ultravioletta**”, fu risolto da Planck nel 1900.

### 1.3 La legge di Planck

Planck ipotizzò che la radiazione elettromagnetica fosse quantizzata, cioè, che potesse essere emessa ed assorbita solo in “pacchetti”, detti **quanti**. In particolare, l' energia doveva essere un multiplo intero di una quantità legata alla frequenza dell' onda stessa:

$$\epsilon_n = nh\nu, \quad (1.11)$$

dove  $h = 6,626 \times 10^{-34} J \cdot s$  è la costante di Planck.

Analogamente alla distribuzione di Boltzmann (Eq. 1.6), la probabilità che un oscillatore armonico della cavità occupa l' $n$ -esimo livello di energia  $\epsilon_n$  è data da

$$P(\epsilon_n) = C e^{-\beta \epsilon_n}, \quad (1.12)$$

dove  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  e  $C$  è un'opportuna costante di normalizzazione. Il valore medio dell'energia  $\langle \epsilon \rangle$ , quindi, diventa:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\beta \epsilon_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n}} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} = -\frac{d}{d\beta} \log \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta h\nu)n}. \quad (1.13)$$

Usando la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta h\nu)n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}},$$

si ottiene

$$\langle \epsilon \rangle = -\frac{d}{d\beta} \log \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{1 - e^{-\beta h\nu}} e^{-\beta h\nu} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (1.14)$$

Inserendo questa nuova espressione nella formula della densità di energia (Eq.1.1) si ricava la **legge di Planck**, che descrive la radiazione di corpo nero (Fig. 1.1):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (1.15)$$

che, in termini della lunghezza d'onda, diventa

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}. \quad (1.16)$$

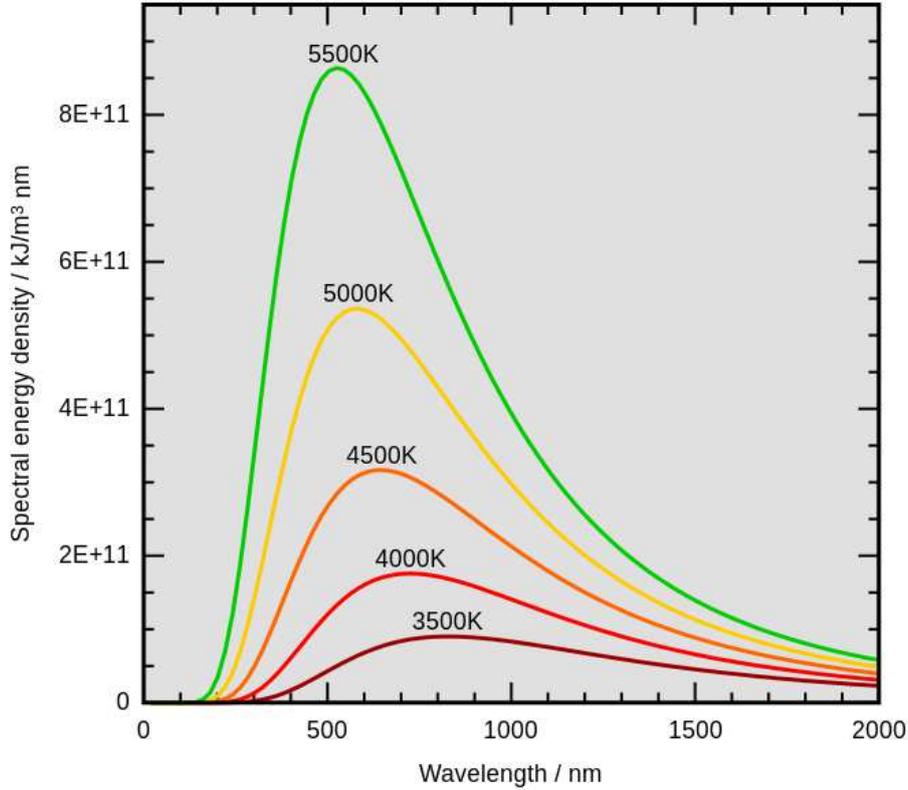


Figura 1.1: distribuzione della radiazione di corpo nero.

La formula di Planck, oltre a risolvere il problema della “catastrofe ultra-violetta” e ad essere in accordo con i risultati sperimentali, permette di giustificare la legge empirica di Stefan-Boltzmann.

Integrando l’equazione (1.15) su tutto lo spettro, si ottiene la densità di energia totale

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu; \quad (1.17)$$

ponendo  $\frac{h\nu}{k_B T} = x$ ,

$$u(T) = \frac{8\pi k_B^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (1.18)$$

e sapendo che

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15},$$

si ottiene

$$u(T) = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^3} T^4. \quad (1.19)$$

La formula (1.19) rappresenta proprio la legge di Stefan-Boltzmann per la densità di energia. Questa può essere scritta in maniera più compatta usando la costante di Stefan-Boltzmann  $\sigma$  nel seguente modo:

$$u(T) = \frac{4\sigma T^4}{c}. \quad (1.20)$$

Ovviamente, il corpo nero costituisce un modello ideale, in quanto non esistono corpi reali che assorbono tutta la radiazione elettromagnetica incidente. Al contrario, non esistono neanche quelli che la riflettono completamente, detti “corpi bianchi”. Perciò nell’ applicazione a corpi reali, della legge di Stefan-Boltzmann, si moltiplica la costante  $\sigma$  per l’ emissività  $\epsilon$ , che é compresa tra 0 (per i corpi *idealmente bianchi*) e 1 (per i corpi idealmente neri). Per cui, per i corpi reali (detti “corpi grigi”), si ha

$$u(T) = \frac{4\epsilon\sigma T^4}{c} \quad (1.21)$$

Successivamente mostreremo come si modifica la legge di Stefan-Boltzmann, nel caso di flusso radiativo scambiato tra corpi che sono separati da una distanza minore della lunghezza d’ onda della radiazione.

## Capitolo 2

# Flusso radiativo tra corpi a piccole distanze

### 2.1 La teoria di Rytov

Come già accennato nell' introduzione, la legge di Kirchhoff e la distribuzione di Planck possono essere applicate solo in regime di campo lontano, cioè ai campi radiativi, ovvero quei campi elettromagnetici descritti da un vettore d' onda  $\mathbf{k}$  reale. Kirchhoff, infatti, descrive solo la componente **propagativa** dei campi e non é in grado di spiegare quei fenomeni che hanno origine nel campo vicino, cioè quando si considerano corpi che scambiano energia termica ad una distanza inferiore alla lunghezza d' onda della radiazione.

La teoria di Rytov, successivamente generalizzata da Polder e Van Hove, é in grado di descrivere il trasferimento radiativo tra corpi nel regime di campo vicino. Questa si basa sul fenomeno delle **fluttuazioni elettrodinamiche**. Un corpo caratterizzato da una funzione dielettrica  $\epsilon(\omega)$ , ad una certa temperatura  $T$ , per effetto delle fluttuazioni di carica e di corrente presenti all' interno di esso, irradia campi elettromagnetici fluttuanti. Nella meccanica statistica classica, la sola sorgente delle fluttuazioni di carica e corrente é l' agitazione termica delle particelle, le quali sono sempre soggette ad un moto disordinato ed incessante, che causa l'irraggiamento. L'energia viene continuamente irradiata e riassorbita dal corpo, se questo si trova all' equilibrio termico. Fuori dall' equilibrio, come nel caso di due superfici dielettriche a temperature diverse  $T_1$  e  $T_2$ , si genera un flusso netto di energia da un corpo all' altro.

Nella teoria classica tali fluttuazioni sono solo di natura termica; nella teoria quantistica, invece, in accordo con il principio di indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2},$$

le particelle non possono essere mai strettamente in quiete. Se lo fossero, infatti, il principio di Heisenberg risulterebbe violato. In base alla teoria quantistica, quindi, deve esistere un “moto di punto zero” [6, 7], cioè un agitazione delle particelle, che sia una stretta conseguenza del principio di indeterminazione.

Questo ulteriore moto é anche chiamato “fluttuazione quantistica”.

La fluttuazione quantistica delle cariche, all’ interno dei materiali, produce campi elettromagnetici fluttuanti, dei quali la teoria di Rytov é in grado di determinare sia la componente radiativa, che si propaga all’ infinito, sia la componente evanescente, che tende rapidamente a zero e che risulta dominante solo in regime di campo vicino. Questi campi si dicono fluttuanti dal momento che il valore medio del campo elettrico  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \rangle$  e del campo magnetico  $\langle \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \rangle$  sono nulli in qualunque punto dello spazio; mentre i valori quadratici medi, come ad esempio  $\langle \mathbf{H}^2(\mathbf{x}, t) \rangle$ ,  $\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) \rangle$ ,  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \rangle$ , sono non nulli. Ricordando la definizione del vettore di Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad (2.1)$$

si ha che  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle \neq 0$ .

Si dice, quindi, che il vettore di Poynting é una quantità fluttuazionale, poichè il suo valore medio é diverso da zero anche se le medie dei campi, dal quale é ottenuto, sono nulle.

Allo scopo di studiare il trasferimento radiativo, é necessario determinare proprio la media del vettore di Poynting.

L’ elemento chiave della teoria di Rytov é la funzione di correlazione delle correnti fluttuanti presenti nel materiale:

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle. \quad (2.2)$$

Rytov ipotizzò che il correlatore dovesse avere la seguente forma:

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle = C \delta(\omega - \omega') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.3)$$

dove la  $C$ , avendo scritto le sorgenti  $\mathbf{j}$  in trasformata di Fourier, deve essere una funzione della frequenza  $\omega$  e della temperatura  $T$ ;  $\delta_{\alpha\beta}$  é la delta di Kronecker, che tiene conto dell’ assunzione di materiale isotropo, per cui le componenti  $j_x$ ,  $j_y$  e  $j_z$  risultano indipendenti tra loro;  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  é la delta di Dirac, che tiene conto della **località** del fenomeno delle fluttuazioni, per cui queste risultano correlate solo nel limite in cui  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ .

Per discutere la  $\delta(\omega - \omega')$  si deve considerare, invece, la funzione di correlazione nel dominio dei tempi.

Dalla definizione di trasformata di Fourier si ha che

$$j_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}.$$

Dal momento che la densità di corrente deve essere una grandezza reale, si impone

$$j_\alpha(\mathbf{x}, t) = j_\alpha^*(\mathbf{x}, t),$$

dove  $j_\alpha^*$  indica il complesso coniugato. Applicando la condizione di realtà della densità di corrente, si ricava

$$j_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha^*(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha(\mathbf{x}, -\omega) e^{-i\omega t};$$

qui nell' ultima uguaglianza si é effettuato il cambiamento di variabili  $\omega = -\omega$ . Affinchè sia valida l' uguaglianza precedente, si deve avere l'uguaglianza degli integrandi:

$$j_\alpha^*(\mathbf{x}, -\omega) = j_\alpha(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.4)$$

Si scrive adesso il correlatore nel dominio dei tempi:

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, t) j_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle = f(t - t'). \quad (2.5)$$

Per ragioni di invarianza rispetto alle traslazioni temporali, il correlatore deve essere una funzione della differenza dei tempi  $f(t - t')$ . All' equilibrio termico, infatti, si raggiunge una situazione **stazionaria**, quindi non vi é alcuna ragione per cui una misura delle correnti debba dipendere dall' istante in cui viene effettuata.

Dalla (Eq. 2.5), usando la trasformata di Fourier, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle j_\alpha(\mathbf{x}, t) j_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta(\mathbf{x}', \omega') \rangle e^{-i(\omega t + \omega' t')} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta(\mathbf{x}', -\omega') \rangle e^{-i(\omega t - \omega' t')}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

applicando la condizione di realtà (Eq. 2.4), diventa

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, t) j_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle e^{-i(\omega t - \omega' t')}. \quad (2.7)$$

Affinchè valga la (Eq.2.5), si deve avere che

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle \propto \delta(\omega - \omega').$$

Dalla (Eq. 2.2) e dalla definizione di delta di Dirac, infatti, la (Eq.2.7) diventa

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, t) j_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega, T) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta} e^{-i\omega(t-t')}. \quad (2.8)$$

Rytov, infine, ricavò l' espressione della funzione  $C(\omega, T)$  in modo euristico, postulando l' espressione del correlatore in modo da essere in accordo con la legge di Kirchhoff.

La legge di Kirchhoff asserisce che la quantità di energia irradiata in un angolo solido  $d\Omega$ , ad un angolo di incidenza  $\theta$ , nell' intervallo di frequenza  $d\omega$ , é data da [1]

$$I_\omega d\omega d\Omega = (1 - R_{\parallel} + 1 - R_{\perp})(2\pi)^{-3} \hbar \omega^3 c^{-2} (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^{-1} d\omega d\Omega, \quad (2.9)$$

dove  $R_{\parallel}$  e  $R_{\perp}$  sono i coefficienti di riflessione per i due stati di polarizzazione di un' onda luminosa incidente sul materiale ad un angolo  $\theta$ .

Rytov postulò che il correlatore (2.2) avesse la seguente forma [1]:

$$\langle j_\alpha(\mathbf{x}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle = \frac{\epsilon''(\omega)}{2\pi} \frac{\hbar \omega^2}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} \delta(\omega - \omega') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.10)$$

dove  $\epsilon''$  é la parte immaginaria della funzione dielettrica.

In seguito verificò che, utilizzando questa espressione del correlatore, si riesce ad ottenere nuovamente la legge di Kirchhoff (2.9).

In particolare, egli risolse le equazioni di Maxwell nel caso di un singolo dielettrico piano e di spessore infinito, poi, utilizzando l' espressione (2.10), calcolò la media del vettore di Poynting in termini del correlatore ed ottenne nuovamente la legge di Kirchhoff (v. Appendice A Sez. A.2).

L' equazione (2.10), inoltre, rappresenta una forma del teorema di fluttuazione e dissipazione [7, 14]: un teorema generale della meccanica statistica che lega le fluttuazioni di corrente alla risposta dissipativa del sistema, qui rappresentata dalla funzione dielettrica  $\epsilon(\omega)$ .

In realtà l' argomento utilizzato da Rytov per scrivere il correlatore nella forma (2.2), si può applicare per scrivere la media di una qualsiasi grandezza fluttuante (i.e.  $\langle E_\alpha(\mathbf{x}, \omega) E_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle$ ,  $\langle H_\alpha(\mathbf{x}, \omega) H_\beta^*(\mathbf{x}', \omega') \rangle$ ). Ogni media sarà caratterizzata, però, da un diverso coefficiente  $C_{\alpha\beta}(\omega, T)$ , detto "spettro di potenza", che esprime la forza del campo.

Il correlatore di Rytov, inoltre, risulta ancora più generale dal momento che é indipendente dalla geometria del sistema.

D' altronde la funzione di correlazione, contenedo la funzione di Dirac, é un' espressione locale, che continua ad essere valida anche nel caso di geometrie non piane.

Le correnti fluttuanti, infatti, non si "accorgono" della presenza di una curvatura, quindi l' espressione (2.10) continua a valere anche nel caso di dielettrici non piani, come una palla o un ellissoide.

Il calcolo del campo elettromagnetico fluttuante, però, risulta più complesso, in quanto sono più articolate le condizioni al contorno delle equazioni di Maxwell per la determinazione della funzione di Green.

Nel paragrafo successivo vedremo come la teoria di Polder e Van Hove,

che generalizza la teoria di Rytov, riproduce la legge classica di Stephan-Boltzmann, nel regime di campo lontano, e come il flusso radiativo dipende dalla distanza, nel regime di campo vicino.

## 2.2 La teoria di Polder e Van Hove

Rytov limitò gli studi sul trasferimento di calore al caso più semplice di un dielettrico di spessore infinito alla temperatura  $T$ .

Polder e Van Hove generalizzarono la teoria di Rytov studiando il flusso di calore tra due corpi qualsiasi, di spessore infinito, posti a temperature diverse [1].

In base a quanto detto precedentemente, corpi con proprietà dielettriche qualsiasi, emettono radiazione termica e, tramite il correlatore (Eq.2.10), si può determinare il flusso netto di calore tra i due corpi.

Si supponga che il semi-spazio  $z < 0$  sia occupato da una piastra con costante dielettrica  $\epsilon_1(\omega)$  e temperatura  $T_1$ , mentre il semi-spazio  $z > d$  da una piastra con costante dielettrica  $\epsilon_2(\omega)$  e temperatura  $T_2$ . Nella regione  $0 < z < d$  c'è il vuoto e si suppone che le dimensioni trasversali delle piastre  $L_x$  e  $L_y$  siano molto maggiori della separazione  $d$ ; in questo modo gli effetti di bordo sono trascurabili (Fig. 2.1).

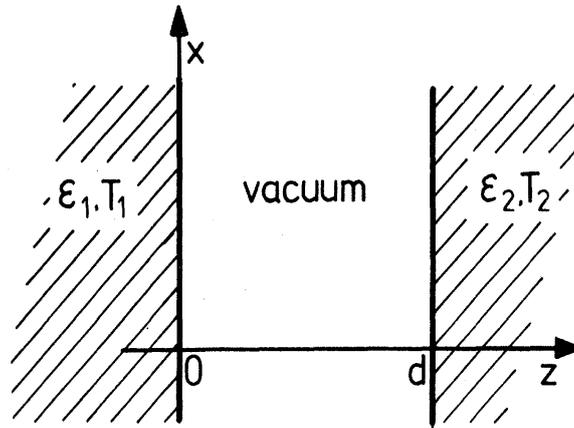


Figura 2.1: situazione geometrica per il calcolo del trasferimento di calore radiativo tra corpi alla distanza  $d$ .

Sulla base della teoria di Rytov, il campo tra le due superfici può essere interpretato come il risultato del continuo irraggiamento originato da fluttuazioni quantistiche e termiche all'interno dei materiali [6]. Inoltre, è importante osservare che, il carattere **locale** delle fluttuazioni, implica che le due superfici emettono in modo **indipendente** l'una dall'altra.

Perciò, in una configurazione stazionaria, la radiazione proveniente da entrambe le superfici é la stessa di quella irradiata da una delle due, se questa fosse all' equilibrio termico con l' ambiente e in assenza dell' altra.

Questa considerazione permette di separare il problema affrontato da Polder e Van Hove in due step [6]. Nel primo si determina il campo irradiato da una delle due piastre isolata e, quindi, all' **equilibrio termico** con l' ambiente; nel secondo si determina il campo all' interno della cavità, tenendo conto delle riflessioni multiple alle quali é soggetto il campo radiativo proveniente dalle due superfici.

Per determinare il campo elettromagnetico al di fuori di una singola piastra, é sufficiente considerare il campo elettrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ , dal momento che il campo magnetico può essere ottenuto da  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  utilizzando le equazioni di Maxwell. La geometria del sistema é piana, quindi, il campo elettrico, in un generico punto  $\mathbf{x}$  dello spazio vuoto, può essere sempre espresso come sovrapposizione di onde piane della forma

$$\mathbf{E}_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) = b_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) e_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp \pm k_z z - \omega t)}, \quad (2.11)$$

dove  $\mathbf{k}_\perp$  é la proiezione del vettore d' onda nel piano  $(x, y)$ :

$$\mathbf{k}_\perp = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}, \quad \mathbf{k}^{(\pm)} = \mathbf{k}_\perp + k_z \hat{z}, \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - |\mathbf{k}_\perp|^2};$$

la radice quadrata é definita in modo che  $Im(k_z) \geq 0$ .

L' indice  $\alpha = s, p$  denota la polarizzazione, in particolare  $s$  e  $p$  corrispondono rispettivamente a trasversa elettrica (TE) e trasversa magnetica (TM); gli apici  $(+)$  e  $(-)$  si riferiscono alla direzione di propagazione dell' onda lungo  $z$ ; i vettori  $e_{s, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega)$  e  $e_{p, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega)$  sono definiti come

$$e_{s, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) = \hat{z} \times \hat{k}_\perp, \quad e_{p, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}^\pm \times e_{s, \mathbf{k}_\perp}^\pm(\omega).$$

Si consideri ora una data frequenza  $\omega$ . Per quelle componenti spaziali per cui  $k_\perp < \frac{\omega}{c}$ ,  $k_z$  é reale, quindi,  $\mathbf{E}_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}$  descrive un' onda propagativa nella direzione  $z$ , mentre per quelle componenti per cui  $k_\perp > \frac{\omega}{c}$ ,  $k_z$  é immaginario e non c' é propagazione lungo  $z$ . Esiste solo un campo evanescente, appena oltre la superficie del materiale, che decade esponenzialmente con la distanza.

Sono proprio queste ultime onde, che nella teoria "classica" di Kirchhoff non danno alcun contributo all' emissione termica, ad essere responsabili del forte accrescimento di energia trasferita, quando il campo evanescente é "disturbato" dalla prossimità del secondo mezzo.

Per una data frequenza  $\omega$ , quindi, il criterio appena descritto separa la trasmissione di energia in due categorie [2]: quella trasportata da onde propagative ( $W^{(PW)}$ ) e quella trasportata da onde evanescenti ( $W^{(EW)}$ ).

Essendo il campo elettrico sovrapposizione di onde elementari, si scrive come [8]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} b_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) e_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp \pm k_z z - \omega t)}. \quad (2.12)$$

In accordo con quanto detto nella sezione precedente, sulla validità generale del correlatore di Rytov, le fluttuazioni del campo elettromagnetico sono interamente descritte dalla funzione di correlazione delle ampiezze  $b_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}$ . Dal momento che il problema mostra una simmetria per traslazione nelle direzioni  $x$  e  $y$ , passando in trasformata di Fourier anche nelle coordinate spaziali, il correlatore assume la forma [8]

$$\langle b_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) b_{\alpha', \mathbf{k}'_\perp}^{(\pm)*}(\omega') \rangle = (2\pi)^3 C_{\alpha\alpha'}(k_\perp, \omega, T) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta(\omega - \omega'),$$

dove, analogamente al correlatore sulle correnti, é soddisfatta la condizione di realt  (v. Sec. 2.1 Eq.(2.4))

$$b_{\alpha, \mathbf{k}_\perp}^{(\pm)}(\omega) = b_{\alpha, -\mathbf{k}_\perp}^{(\pm)*}(-\omega).$$

Il problema si riduce, quindi, al calcolo del coefficiente  $C_{\alpha\alpha'}(k_\perp, \omega, T)$ , che si ottiene determinando la funzione di Green diadica, per le equazioni di Maxwell, nel caso di una singola superficie piana (v. Appendice A).

In generale si ha che, quando  $k_z$  é reale [8]

$$C^{(PW)} = \frac{2\pi\omega}{c^2 k_z} F(\omega, T) (1 - RR^\dagger), \quad (2.13)$$

mentre, quando  $k_z$  é immaginario

$$C^{(EW)} = -i \frac{2\pi\omega}{c^2 |k_z|} F(\omega, T) (R - R^\dagger), \quad (2.14)$$

dove  $R$  é la matrice di riflessione. Nel caso in esame, di una superficie piana, si ha che  $R$  é definita dai coefficienti di Fresnel [9]

$$\begin{aligned} R_p(\omega, k_\perp) &= \frac{i\epsilon(\omega)k_z - k(\omega, k_\perp)}{i\epsilon(\omega)k_z + k(\omega, k_\perp)}, \\ R_s(\omega, k_\perp) &= \frac{k(\omega, k_\perp) - ik_z}{k(\omega, k_\perp) + ik_z}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

qui si definisce  $k(\omega, k_\perp) = \sqrt{|k_\perp|^2 - \epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}}$ .

La funzione

$$F(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right)$$

generalizza la distribuzione di Planck (Eq. 1.15), tenendo conto anche del contributo delle fluttuazioni di punto zero [8].

Si può osservare che, in accordo con quanto detto in precedenza, mentre l'equazione (2.13) può essere ottenuta direttamente dalla legge di Kirchhoff (Eq.2.9), l'equazione (2.14) non può essere ottenuta allo stesso modo. Il motivo é che la legge di Kirchhoff si applica solo alle onde con vettore di propagazione  $k_z$  reale (cioè per  $k_{\perp} < \omega/c$ ).

La teoria di Polder e Van Hove, che si fonda su quella di Rytov, quindi, costituisce una teoria completa, infatti, permette di determinare il trasferimento radiativo sia nel regime di campo vicino, che in quello di campo lontano.

Si aggiunga adesso la seconda piastra alla distanza  $d$  (step 2).

Per determinare il campo elettromagnetico nella cavità, si deve tenere conto delle riflessioni multiple alle quali é soggetto: il campo elettrico elementare emesso nella direzione  $+z$  é dato da

$$\mathbf{E}_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)} = b_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}^{(+)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

Dopo la prima riflessione diventa

$$\mathbf{E}_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(-)} = R_2 b_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(-)}(\omega) e^{ik_z d} e^{i(\mathbf{k}^{(-)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

dopo la seconda

$$\mathbf{E}_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)} = R_1 R_2 b_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e^{2ik_z d} e^{i(\mathbf{k}^{(+)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},$$

alla fine, tenendo conto anche delle onde emesse nella direzione  $-z$  e utilizzando la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n e^{2ink_z d} = \frac{1}{1 - R_1 R_2 e^{2ik_z d}},$$

si ottiene [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\alpha}(\omega) = & \frac{b_1}{1 - R_1 R_2 e^{2ik_z d}} e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}^{(+)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + \frac{R_2 b_1 e^{ik_z d}}{1 - R_1 R_2 e^{2ik_z d}} e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(-)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}^{(-)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \\ & + \frac{b_2}{1 - R_2 R_1 e^{2ik_z d}} e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(-)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}^{(-)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + \frac{R_1 b_2 e^{ik_z d}}{1 - R_2 R_1 e^{2ik_z d}} e_{\alpha, \mathbf{k}_{\perp}}^{(+)}(\omega) e^{i(\mathbf{k}^{(+)} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Qui  $R_1$ ,  $b_1$ ,  $R_2$ ,  $b_2$ , indicano rispettivamente il coefficiente di riflessione e l'ampiezza dell'onda proveniente dalla prima e dalla seconda superficie.

Per calcolare il flusso netto di calore trasferito, infine, bisogna determinare la media del vettore di Poynting

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \quad (2.17)$$

in un generico punto  $\mathbf{x}$  tra le due superfici.

Utilizzando il correlatore precedentemente discusso e le equazioni (2.13) e (2.14), si perviene alla seguente formula della potenza del calore netto trasferito tra le superfici [6]

$$W = \mathcal{A} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \hbar\omega [n(\omega, T_1) - n(\omega, T_2)] \sum_\alpha \int_{\mathcal{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \theta(k_z^2) \frac{(1 - |R_{1,\alpha}|^2)(1 - |R_{2,\alpha}|^2)}{|1 - R_{1,\alpha}R_{2,\alpha}e^{2ik_z d}|^2} + \theta(-k_z^2) 4e^{-2d\text{Im}(k_z)} \frac{\text{Im}(R_{1,\alpha})\text{Im}(R_{2,\alpha})}{|1 - R_{1,\alpha}R_{2,\alpha}e^{2ik_z d}|^2} = W^{(PW)} + W^{(EV)} \quad (2.18)$$

dove

$$n(\omega, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1};$$

$\theta$  é la funzione di Heaviside,  $\mathcal{A}$  é l'area trasversale delle piastre,  $\alpha$  é l'indice di polarizzazione.

Dalla formula (2.18) si osserva innanzitutto che, per la presenza della funzione  $n(\omega, T)$ , detta fattore di Bose, non tutte le frequenze contribuiscono all'integrale, ma solo quelle per cui tale fattore é significativo, cioè fino a quando l'esponente  $\frac{\hbar\omega}{kT} \approx 1$ .

Quindi

$$\omega \approx \omega_T = \frac{kT}{\hbar},$$

$\omega_T$  é detta "frequenza termica".

Per  $\omega > \omega_T$ , infatti, l'esponenziale al denominatore cresce ed il fattore di Bose tende rapidamente a zero.

Ricordando che  $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2$  e che le onde propagative sono caratterizzate da quei  $k_z$  reali, si ottiene che i moti propagativi sono limitati da

$$k_\perp \lesssim \frac{\omega_T}{c} = \frac{kT}{\hbar c} = \frac{2\pi}{\lambda_T},$$

$\lambda_T$  é la lunghezza d'onda termica.

Il contributo evanescente, invece, non é soggetto a questa limitazione.

Infatti, l'integrale sui moti evanescenti si estende da  $k_\perp \approx \frac{2\pi}{\lambda_T}$  fino a quando l'esponenziale  $e^{-2d\text{Im}(k_z)}$  non diventa trascurabile:

$$\text{Im}(k_z) = \sqrt{k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{c^2}},$$

quindi l'esponenziale tenderà a zero per  $k_\perp d \gg 1$ .

Perciò l'integrale si estenderà fino a  $k_\perp \approx \frac{1}{d}$ . Da ciò si ricava che, quando i due corpi si trovano a piccole distanze, cioè quando  $d \ll \lambda_T \Rightarrow \frac{1}{d} \gg \frac{1}{\lambda_T}$ , il range di integrazione dei moti propagativi é molto più piccolo rispetto ai valori che  $k_\perp$  può assumere per i moti evanescenti.

Pertanto, si può concludere che, per  $d \ll \lambda_T$ , i moti evanescenti diventano dominanti, poichè nell' integrazione contribuiscono molti più valori di  $k_{\perp}$  rispetto ai moti propagativi.

Viceversa, per grandi distanze  $d \gg \lambda_T$ , i moti propagativi diventano preponderanti e, in particolare, per  $d \rightarrow \infty$ ,  $W^{(EW)} \rightarrow 0$ , a causa della presenza dell'esponenziale decrescente.

La lunghezza d' onda termica  $\lambda_T$ , quindi, rappresenta quel valore di soglia a partire dal quale uno dei due contributi ( $W^{(EW)}$  oppure  $W^{(PW)}$ ) diventa dominante.

La figura 2.2 mostra, ad esempio, l' andamento del flusso termico in funzione della distanza  $d$  tra una sfera e un piano, che discuteremo nel paragrafo successivo.

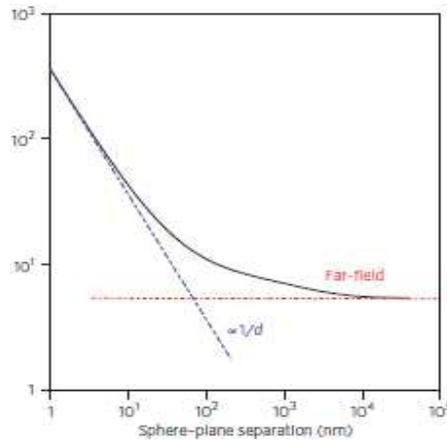


Figura 2.2: andamento del flusso termico in funzione della separazione  $d$  sfera-piano.

In questo grafico è evidente la transizione da regime di campo vicino ( $W \propto 1/d$ ) a regime di campo lontano, in cui  $W$  tende al valore costante dato dalla legge di Stephan-Boltzmann (Eq.1.19).

### 2.3 Flusso di calore trasferito tra una sfera e un piano

La verifica di questa nuova teoria è molto difficile da sperimentare. Le difficoltà pratiche sono diverse: si devono disporre due superfici a distanze controllabili di circa  $10 - 100 \text{ nm}$ ; si deve fare in modo che tali superfici siano piane e, quindi, ottenere una rugosità molto minore della distanza tra i due oggetti e, soprattutto, bisogna controllare il parallelismo.

Dal momento che è praticamente impossibile ottenere due piani perfettamente paralleli a tali distanze, per studiare il flusso radiativo trasferito si

preferisce utilizzare una sfera e un piano. Infatti, la simmetria sferica ci assicura che ogni posizione alla quale viene posta la sfera é equivalente, purché si misuri adeguatamente la distanza minima  $d$  tra i due oggetti. Per mostrare un confronto con la teoria precedentemente descritta, riportiamo, in questa sezione, un esperimento che permette di misurare la conduttanza termica tra un piano e una sfera, per distanze che variano da  $30\text{ nm}$  a  $2.5\text{ }\mu\text{m}$  [4].

La conduttanza termica é definita come

$$G(d, T) = \frac{\phi(d)}{\Delta T}, \quad (2.19)$$

dove  $\phi(d)$  é il flusso termico alla distanza  $d$  e  $\Delta T \approx 10 - 20\text{ K}$  é la differenza di temperatura tra i due oggetti.

L'esperimento consiste nel misurare il flusso radiativo, che in regime di campo vicino é dell'ordine dei nanowatt, tramite un flussometro molto sensibile. Si attacca la sfera ad un cantilever di silicio, basato su un microscopio a forza atomica, in grado di misurare variazioni di flusso dell'ordine dei picowatt. La curvatura del cantilever viene misurata utilizzando fibre ottiche e l'apparato (Fig. 2.3), descritto nell'articolo [4], é costruito in modo tale da controllare la radiazione proveniente dal sistema ottico.

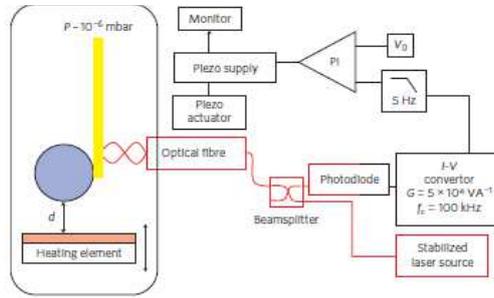


Figura 2.3: apparato sperimentale.

I dati vengono raccolti misurando la deformazione del cantilever  $\delta(d)$ , proporzionale al flusso di calore tramite un fattore  $H$ , in funzione della distanza  $d$  piano-sfera.

La conduttanza termica é la somma del contributo di campo lontano

$$G_{ff} = 2\pi R^2 4\sigma\epsilon(T)T^3, \quad (2.20)$$

dove  $R$  é il raggio della sfera,  $\sigma$  é la costante di Stefan-Boltzmann e  $\epsilon(T) = 0.354$  é l'emissività del silicio [4], e del contributo di campo vicino

$$G_{nf} = \frac{H}{\Delta T}\delta(d), \quad (2.21)$$

dove il valore ricavato di  $H$  é di  $2.30nW nm^{-1}$ .

Il modello teorico del flusso di calore trasferito nel campo vicino si basa sulla “proximity approximation”, che consiste nel considerare il flusso tra il piano e la sfera come localmente descritto dal trasferimento radiativo tra due piani separati da una distanza  $\tilde{d}$ .

Quindi, si può pensare di dividere la sfera in infiniti piani e di integrare il coefficiente di calore trasferito  $h(d, T)$ , ricavato numericamente [4], sulla intera area:

$$G_{theo}(d, T) = \int_0^R h(\tilde{d}(r), T) 2\pi r dr, \quad (2.22)$$

dove  $\tilde{d}(r) = d + R - \sqrt{R^2 - r^2}$  é la distanza locale tra il piano e la sfera (Fig 2.4)

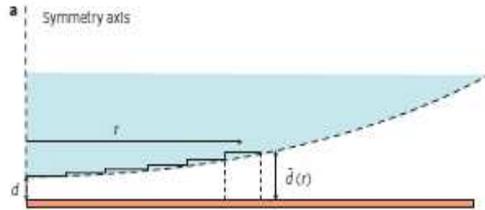


Figura 2.4: proximity approximation.

Se si considera solo il contributo di campo vicino, l’integrazione sulla sfera restituisce un andamento  $1/d$  per la conduttanza.

La figura 2.5 mostra chiaramente come l’ andamento teorico in funzione della distanza, devia dalla legge  $1/d$  per  $d > 10 nm$  e che la conduttanza tende al suo valore costante di campo lontano (Eq. 2.20) per  $d > 10 \mu m$ .

Sempre nella figura 2.5 i risultati sperimentali evidenziano un completo accordo con il modello teorico precedentemente descritto, nell’ intervallo  $[30 nm, 2.5 \mu m]$ .

Pertanto, si può affermare che la teoria riproduce correttamente la non banale transizione da regime di campo lontano a campo vicino e che la “proximity approximation” risulta valida, almeno in questa geometria.

In realtà la principale restrizione di questa approssimazione é che la sua validità é limitata a distanze molto più piccole delle dimensioni degli oggetti coinvolti; in caso contrario, bisogna tenere conto degli effetti dovuti alla curvatura.

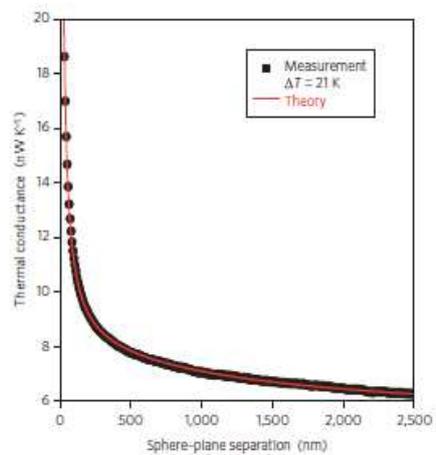


Figura 2.5: conduttanza termica tra una sfera di raggio  $R = 20 \mu m$  e un piano di silicio.

## Capitolo 3

# Conclusioni

La legge di Kirchhoff permette di descrivere, in maniera esatta, il trasferimento radiativo nel regime di campo lontano, cioè l'energia trasportata da onde che si propagano all'infinito. La teoria di Kirchhoff, però, non risulta completa, in quanto la propagazione del calore, attraverso il vuoto, subisce una forte modifica quando le superfici si avvicinano ad una distanza minore della lunghezza d'onda caratteristica della radiazione termica.

In particolare, il trasferimento radiativo aumenta per effetto delle onde evanescenti, ovvero onde che decadono esponenzialmente.

Data la natura di queste onde, questo nuovo contributo si manifesta solo nel regime di campo vicino e può essere anche descritto in termini di fenomeno di tunneling dei fotoni [3, 4].

Per spiegare questi nuovi fenomeni, si utilizzano le fluttuazioni elettrodinamiche, che furono originariamente introdotte da Rytov nel 1950. Sulla base dei suoi studi, Polder e Van Hove elaborarono una nuova teoria in grado di generalizzare la legge di Kirchhoff alla regione di campo vicino.

Questa teoria permette di spiegare in modo esatto il comportamento del flusso radiativo a piccole distanze (cioè per distanze paragonabili alla lunghezza d'onda caratteristica  $\lambda_T$ ) e nel limite di grandi distanze si riconduce alla legge di Kirchhoff.

Dal momento che le fluttuazioni sono fenomeni locali, la nuova teoria risulta adeguata per ogni geometria; chiaramente, in situazioni più complesse, l'espressione del campo elettromagnetico fluttuante, al di fuori della superficie emettente, sarà più difficile da determinare.

Per un approfondimento su tale argomento rimandiamo a [6].

Di particolare interesse è lo scambio di calore tra un piano ed una sfera; questa geometria, infatti, può essere descritta dalla "proximity approximation" e permette di descrivere il funzionamento di alcuni strumenti.

Un esempio è lo "scanning tunneling microscope" (STM), dove la punta del microscopio, ad una certa temperatura  $T$ , causa un intenso riscaldamento locale di una superficie vicina, provocandone l'emissione di alcune molecole

oppure una modifica della superficie stessa [3].

È importante osservare che l' intenso riscaldamento è conseguenza della sola vicinanza tra la punta e la superficie, cioè dell' effetto di prossimità che determina una grande potenza di calore trasferito.

Quest' ultima rappresenta una delle tante possibili applicazioni dello studio del trasferimento di calore radiativo su scale nanometriche, descritto in questa trattazione.

# Appendice A

## La funzione di Green

Vogliamo descrivere il metodo della funzione di Green per la risoluzione delle equazioni differenziali.

Nel caso dei problemi dell'algebra lineare, la soluzione  $\mathbf{x}$  dell'equazione

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

per un vettore incognito  $\mathbf{x}$ , un vettore dato  $\mathbf{b}$  e una matrice invertibile  $A$  assegnata, è fornita da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Vorremmo poter applicare lo stesso ragionamento alle equazioni differenziali lineari. Sia  $\mathcal{L}$  un operatore differenziale invertibile (cioè deve esistere  $\mathcal{L}^{-1}$  t.c.  $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = I$ ) nelle variabili  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $f(\mathbf{x})$  una funzione assegnata. Data l'equazione

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

si vuole determinare l'operatore inverso  $\mathcal{L}^{-1}$  tale che

$$u(\mathbf{x}) = \mathcal{L}^{-1}f(\mathbf{x}).$$

Questa è proprio l'idea su cui si basa il metodo della **funzione di Green**.

**Definizione A.0.1.** Sia  $\mathcal{L}$  un operatore differenziale nelle variabili  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , data l'equazione

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{A.1}$$

con  $f$  funzione assegnata, la **funzione di Green** associata all'operatore  $\mathcal{L}$ , è la soluzione dell'equazione

$$\mathcal{L}G(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = \delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_n - y_n),$$

che può essere riscritta in forma più compatta come

$$\mathcal{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{A.2}$$

dove  $\delta^{(n)}$  è la delta di Dirac  $n$ -dimensionale.

**Teorema A.0.1.** Se la funzione  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  é soluzione della Eq.(A.2), allora la funzione

$$u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

é soluzione della (A.1).

*Dimostrazione.* Dal momento che l'operatore  $\mathcal{L}$  agisce sulle variabili  $\mathbf{x}$  e non sulle  $\mathbf{y}$ , si ha che

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

che usando la (A.2) diventa

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}).$$

□

Immediata é l'estensione ai campi vettoriali: si consideri l'equazione

$$\mathcal{L}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.3})$$

In questo caso l'operatore differenziale  $\mathcal{L}$  agisce sul campo vettoriale  $\mathbf{A}$ , che rappresenta la risposta incognita del sistema; il campo vettoriale  $\mathbf{B}$ , invece, é la sorgente nota. Per determinare una soluzione dell'equazione (A.3), si può utilizzare il metodo di Green: si considera come sorgente  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , che é zero ovunque tranne per  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  e l'equazione (A.3) diventa

$$\mathcal{L}\mathbf{G}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbf{n}_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (i = x, y, z), \quad (\text{A.4})$$

dove  $\mathbf{n}_i$  é il vettore unitario lungo l'i-esima direzione. Le tre equazioni date dalla (Eq. A.4) possono essere scritte nella forma compatta

$$\mathcal{L}\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overleftrightarrow{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{A.5})$$

dove  $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$  é la diade unitaria (matrice unitaria 3x3), mentre  $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$  é nota come funzione di Green diadica o tensore di Green. In maniera del tutto analoga al caso precedente, la soluzione dell'equazione (A.3) può essere espressa come

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{B}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (\text{A.6})$$

dove  $V$  é il volume della sorgente.

## A.1 Soluzione delle equazioni di Maxwell con il metodo dei potenziali

Le equazioni di Maxwell in un materiale non-magnetico, scritte nel dominio delle frequenze  $\omega$ , tramite la trasformata di Fourier, sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = 4\pi\rho, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = -i\epsilon(\mathbf{x}, \omega)\frac{\omega}{c}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{A.10})$$

dove  $\epsilon(\mathbf{x}, \omega)$  é la permittività elettrica del mezzo.

Per risolvere le equazioni di Maxwell si sceglie di utilizzare il metodo dei potenziali [5]. Il campo elettrico ed il campo magnetico, in termini del potenziale scalare  $\phi(\mathbf{x}, \omega)$  e del potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega)$ , si scrivono come:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, \omega) + i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega). \quad (\text{A.12})$$

Sostituendo la (A.12) e la (A.11) nella (A.10) si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega) - i\frac{\omega}{c}\epsilon(\mathbf{x}, \omega)[-\nabla\phi(\mathbf{x}, \omega) + i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega)]. \quad (\text{A.13})$$

Utilizzando l'identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A},$$

la gauge di Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = i\frac{\omega}{c}\epsilon\phi \quad (\text{A.14})$$

e ricordando che  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon$ , l'equazione diventa

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{A.15})$$

ovvero l'equazione di Helmholtz.

In base a quanto detto sulla funzione di Green, si ha che

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \int_V G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)\mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega)d\mathbf{x}', \quad (\text{A.16})$$

dove  $G_0$ , soluzione dell'equazione

$$(\nabla^2 + k^2)G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = -\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|), \quad (\text{A.17})$$

é la funzione di Green scalare, che rappresenta la risposta del sistema ad una sorgente infinitesima diretta lungo una delle possibili direzioni ortogonali [11]. Infatti, quando

$$\frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}(\mathbf{x},\omega) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\hat{x}_1,$$

la sorgente  $\mathbf{j}$  corrisponde alla distribuzione di corrente di un dipolo elettrico infinitesimo diretto lungo la direzione  $x_1$  e, dalla (A.16), si ottiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\omega) = \frac{c}{i\omega}G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\hat{x}_1. \quad (\text{A.18})$$

Adesso si deve ricavare l'espressione del campo elettrico e del campo magnetico. In particolare sostituendo la gauge di Lorentz (Eq. A.14) nella (A.12) si ottiene

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\omega) = \frac{i\omega}{c}\left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right]\mathbf{A}(\mathbf{x},\omega); \quad (\text{A.19})$$

poi, dalla (A.18),

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x},\omega) = \mathbf{G}_1^E(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \left(1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\hat{x}_1. \quad (\text{A.20})$$

$\mathbf{G}_1^E$  é la funzione di Green del campo elettrico nel caso di una sorgente diretta lungo l'asse  $x_1$ . Analogamente, per sorgenti dirette lungo  $x_2$  e  $x_3$ , si ricava

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x},\omega) = \mathbf{G}_2^E(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \left(1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\hat{x}_2, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{x},\omega) = \mathbf{G}_3^E(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \left(1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\hat{x}_3. \quad (\text{A.22})$$

Pertanto, si può costruire la funzione di Green diadica per il campo elettrico sommando le tre equazioni precedenti:

$$\overleftrightarrow{G}^E(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{G}_i^E(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\hat{x}_i = \sum_{i=1}^3 \left(1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\hat{x}_i\hat{x}_i. \quad (\text{A.23})$$

Dal momento che

$$\sum_{i=1}^3 \hat{x}_i\hat{x}_i = \overleftrightarrow{I}$$

ed é facile vedere che

$$\nabla \cdot [G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega)\overleftrightarrow{I}] = \nabla G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega),$$

la (Eq. A.23) può essere riscritta come

$$\overleftrightarrow{G}^E(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega) = \left(\overleftrightarrow{I} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G_0(\mathbf{x},\mathbf{x}',\omega). \quad (\text{A.24})$$

Quindi, l' espressione generale del campo elettrico é

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \int_V \overleftrightarrow{G}^E(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega) d\mathbf{x}'. \quad (\text{A.25})$$

Un discorso analogo vale per il campo  $\mathbf{H}$ ; dalla relazione (A.11), si ricava

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \omega) = \int_V \overleftrightarrow{G}^H(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega) d\mathbf{x}', \quad (\text{A.26})$$

dove

$$\overleftrightarrow{G}^H(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \nabla \times [\overleftrightarrow{I} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)].$$

Le espressioni (A.25) e (A.26) potevano essere ottenute direttamente generalizzando l'equazione (A.17) in modo da tenere conto delle tre direzioni ortogonali (in accordo con quanto detto nella sezione precedente)[5, 10]:

$$\nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{G} - k^2 \overleftrightarrow{G} = \overleftrightarrow{I} \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|).$$

É chiaro, da quest' ultima equazione, che la funzione di Green diadica  $\overleftrightarrow{G}$  non é altro che una notazione compatta, che contiene le tre funzioni di Green orientate nelle direzioni ortogonali. La prima colonna del tensore di Green corrisponde al campo prodotto da una sorgente puntuale nella direzione  $x_1$ , la seconda colonna al campo prodotto nella direzione  $x_2$  e la terza colonna al campo prodotto nella direzione  $x_3$ . In generale, una sorgente puntuale, orientata in una direzione qualsiasi, può produrre un campo nelle tre direzioni ortogonali, perciò, la funzione di Green diadica può essere scritta nella forma

$$\begin{pmatrix} G_{x_1 x_1} & G_{x_1 x_2} & G_{x_1 x_3} \\ G_{x_2 x_1} & G_{x_2 x_2} & G_{x_2 x_3} \\ G_{x_3 x_1} & G_{x_3 x_2} & G_{x_3 x_3} \end{pmatrix},$$

dove la  $i$ , in  $G_{x_i x_j}$ , si riferisce alla polarizzazione del campo prodotto dalla sorgente polarizzata nella direzione  $x_j$ .

## A.2 La media del vettore di Poynting

Utilizzando l'espressione del campo elettrico e del campo magnetico ottenute precedentemente (Eq.(A.25) e (A.26)) e la trasformata di Fourier, si ottiene [1]

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega' \int_{\mathcal{R}^3} d\mathbf{x}' e^{i\omega' t} \overleftrightarrow{e}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega') \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega') + c.c. \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega'' \int_{\mathcal{R}^3} d\mathbf{x}'' e^{i\omega'' t} \overleftrightarrow{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'', \omega'') \mathbf{j}(\mathbf{x}'', \omega'') + c.c. , \quad (\text{A.28})$$

dove si sono considerate solo le frequenze  $\omega > 0$ ;  $\overleftarrow{e}$  e  $\overleftarrow{h}$  rappresentano rispettivamente il tensore di Green per il campo  $\mathbf{E}$  e per il campo  $\mathbf{H}$ . La media del vettore di Poynting é data da

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle = 4 \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \text{Re} \{ \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{x}, t) \rangle \}. \quad (\text{A.29})$$

Il fattore 4 tiene conto che sono state considerate solo le frequenze positive, inoltre,  $\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle$  é nullo poichè il correlatore  $\langle \mathbf{j} \mathbf{j} \rangle = 0$  [1].

Esplicitando l' equazione (A.29), si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \rangle &= \frac{c}{8\pi^2} \int_0^\infty d\omega' \int_0^\infty d\omega'' \int_{\mathcal{R}^6} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' e^{i(\omega' - \omega'')t} \\ &\langle \overleftarrow{e}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega') \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega') \times \overleftarrow{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'', \omega'') \mathbf{j}(\mathbf{x}'', \omega'') \rangle + c.c. , \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

dove si é utilizzata la propriet  di linearit  della media.

Scrivendo in componenti e usando la notazione di Einstein di somma su indici ripetuti, si ha che

$$\langle \overleftarrow{e} \mathbf{j} \times \overleftarrow{h} \mathbf{j} \rangle = \langle \epsilon_{abc} e_{bd} j_d h_{ce}^* j_e \rangle = \epsilon_{abc} e_{bd} h_{ce}^* \langle j_d j_e \rangle;$$

dalla (Eq.2.10)

$$\begin{aligned} \epsilon_{abc} e_{bd} h_{ce}^* \langle j_d j_e \rangle &= \epsilon_{abc} e_{bd} h_{ce}^* \frac{\epsilon''(\omega)}{2\pi} \frac{\hbar\omega^2}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} \delta(\omega' - \omega'') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \delta_{ed} \\ &= \frac{\epsilon''(\omega)}{2\pi} \frac{\hbar\omega^2}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} \mathbf{e}_d \times \mathbf{h}_d \delta(\omega' - \omega'') \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

e sostituendo nella (Eq.A.30), si ottiene

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{x}) \rangle = \frac{c}{16\pi^3} \int d\omega d\mathbf{x}' \mathbf{e}_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \times \mathbf{h}_a^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \frac{\hbar\omega^2}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} \epsilon''(\omega) + c.c. , \quad (\text{A.32})$$

dove, utilizzando la propriet  delle funzioni di Dirac, l' integrale nelle otto varibili si é ridotto ad un integrale quadruplo.

Dal momento che il problema mostra una simmetria per traslazioni lungo gli assi  $x$  e  $y$  (v. Fig. 2.1), conviene scrivere la (Eq. A.32) in trasformata di Fourier nelle variabili  $x$  e  $y$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(z) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{c}{(2\pi)^5} \int d\omega dk_x dk_y dz' \mathbf{e}_a(k_x, k_y, z, z', \omega) \\ &\times \mathbf{h}_a^*(k_x, k_y, z, z', \omega) \frac{\hbar\omega^2}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} \epsilon''(\omega) + c.c. . \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Senza ledere a generalità, inoltre, si può considerare il caso  $k_y = 0$ , poichè il problema presenta simmetria per rotazione e si può sostituire  $dk_x dk_y$  con  $2\pi k_x dk_x$ , integrando tra 0 e  $\infty$ :

$$\langle \mathbf{S}(z) \rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{(2\pi)^4} \int d\omega dk_x dz' \mathbf{e}_a(k_x, 0, z, z', \omega) \times \mathbf{h}_a^*(k_x, 0, z, z', \omega) \frac{\hbar\omega^2}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} e''(\omega) + c.c. \quad (\text{A.34})$$

Infine, calcolando il tensore di Green per il campo elettrico e per il campo magnetico e sostituendo nell' espressione precedente, si ottiene proprio la legge di Kirchhoff. Questo procedimento, illustrato nell' articolo di Polder e Van Hove [1], dimostra la validità del correlatore di Rytov.

# Bibliografia

- [1] D. Polder and M. Van Hove. Theory of radiative heat transfer between closely spaced bodies. *Phys. Rev. B* 4, 3303-3314 (1971).
- [2] C.M. Hargreaves. Radiative transfer between closely spaced bodies. *thesis, University of Leiden*(1973).
- [3] Prendry JB. *J. Phys.: Condens. Matter* 11:6621 (1999)
- [4] E.Rousseau, A. Siria, G. Jourdan, S. Volz, F. Comin, J. Chevrier, J. Greffet. Radiative heat transfer at the nanoscale. *Nature Photon.* 3 514-517 (2009)
- [5] Francoeur, Mathieu. Near field radiative transfer: thermal radiation, thermophotovoltaic power generation and optical characterization. *University of Kentucky Doctoral Dissertations.* 58. (2010)
- [6] G. Bimonte. Scattering approach to Casimir forces and radiative heat transfer for nanostructured surfaces out of thermal equilibrium. *Phys. Rev. A* 80 (2009)
- [7] G. Bimonte, T. Emig, M. Kardar, M. Kruger. Non-Equilibrium Fluctuational Quantum Electrodynamics: Heat Radiation, Heat Transfer, and Force. *Annual review of condensed matter physics* (2017)
- [8] G. Bimonte, E. Santamato. General theory of electromagnetic fluctuations near homogeneous surface in terms of its reflection amplitudes. *Phys. Rev. A* 76 (2007)
- [9] V.B. Bezerra, G. Bimonte, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, C. Romero. Thermal correction to the Casimir force, radiative heat transfer, and an experiment. *The European Physical journal C* (2007)
- [10] L.Novotny, B.Hecht. Principle of Nano-Optics. *Cambridge University Press* (2006)
- [11] Chen-To Tai. Dyadic Green functions in electromagnetic theory. *IEEE Press* (1994)

- [12] La funzione di Green. *Corso di Fisica Matematica 2, a.a 2013-2014*  
*Dipartimento di Matematica, Università di Milano.*
- [13] Gerhard Kramm e Nicole Mölder. Planck' s blackbody radiation law:  
presentation in different domains and determination of the related  
dimensional constants. *Journal of the Calcutta Mathematical Society*  
*(in press)*
- [14] L. Landau, E. Lifšits. Fisica teorica Vol.5: Fisica statistica.
- [15] S. M. Rytov. Theory of Electric Fluctuations and Thermal Radiation.  
(1959)