

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

---

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"



*Laurea triennale in Fisica*

**Una classificazione geometrica del tensore  
di torsione dello spazio-tempo**

**Relatore:**  
Prof. Salvatore Capozziello

**Candidato:**  
Matteo Califano  
Matricola:N85000836

**Anno Accademico 2017/2018**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Geometria e Gravitazione . . . . .	2
1.2	Teorie di Gravitazione con Torsione . . . . .	3
1.3	Perchè classificare la torsione . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Richiami di Geometria Differenziale</b>	<b>5</b>
2.1	Varietà Differenziabili . . . . .	5
2.2	Vettori tangenti e Fibrato Tangente . . . . .	6
2.3	Covettori e Fibrato Cotangente . . . . .	7
2.4	Campi vettoriali e Uno-forme . . . . .	8
2.5	Tensori e Campi Tensoriali . . . . .	9
2.6	Connessione Lineare . . . . .	12
2.7	Curvatura . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Varietà di Riemann-Cartan</b>	<b>17</b>
3.1	Tensore di Torsione . . . . .	17
3.2	Tetrad e Bivettori . . . . .	21
3.3	Classificazione del tensore di Torsione . . . . .	23
3.4	Il teorema di Green . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>28</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Geometria e Gravitazione

La relatività generale, formulata da Einstein, è la prima teoria sulla gravitazione puramente geometrica, nella quale la dinamica della materia è descritta dalla geometria dello spazio e la geometria è determinata dalla materia. In questo modo la nozione di uno spazio assoluto della fisica classica cade definitivamente. Nella teoria della relatività speciale la nozione di velocità è un concetto relativo, perchè ogni sistema inerziale è fisicamente equivalente; nella relatività generale anche l'accelerazione perde il suo significato assoluto, i sistemi inerziali non hanno più un ruolo privilegiato, in quanto tutti gli osservatori sono equivalenti, inclusi quelli in sistemi di riferimento in accelerazione. In questo senso la relatività generale è una generalizzazione della relatività speciale. Quest'ultima, fissato un sistema di riferimento inerziale  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , è caratterizzata da uno (pseudo) prodotto scalare definito da:

$$\langle v, w \rangle = \eta_{ij} v^i w^j,$$

con

$$\eta_{ij} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (1.1)$$

La coppia  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  è detta spazio-tempo di Minkowski. Un vettore  $v \in \mathbb{R}^4$  sarà:

- di tipo tempo se  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
- di tipo spazio e  $\langle v, v \rangle > 0$ ;
- di tipo luce, o nullo, se  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Tale caratterizzazione risulta inoltre essere indipendente dal sistema di riferimento adottato nello studio del fenomeno preso in considerazione e permette di identificare tre diverse regioni dello spazio-tempo che ne definiscono la struttura casuale, come mostrato nella figura 1.1.

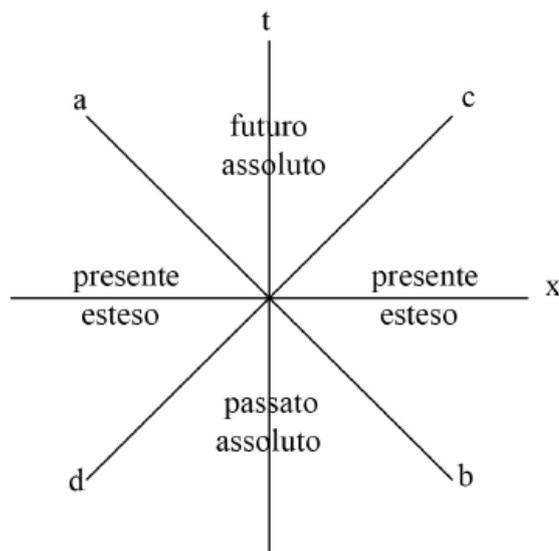


Figura 1.1: Struttura casuale della fisica relativistica

Come detto in precedenza la relatività generale porta con sé una generalizzazione dell'equivalenza tra i sistemi di riferimento, questo, da un punto di vista matematico, implica il passaggio dallo spazio-tempo piatto di Minkowski ad una varietà riemanniana ( $V_4$ ), in cui la curvatura è strettamente legata alla presenza di un campo gravitazionale; in questo senso si può dire di aver "geometrizzato" l'interazione gravitazionale. Una delle proprietà fondamentali del campo gravitazionale è che differenti corpi subiscono la stessa accelerazione indipendentemente dalla loro massa (*principio di equivalenza*).

## 1.2 Teorie di Gravitazione con Torsione

E' interessante introdurre il concetto di torsione, perché quest'ultima conduce ad una necessaria generalizzazione della teoria della relatività generale di Einstein, che a sua volta è un ampliamento della geometria Riemanniana dello spazio-tempo. Questa generalizzazione risale alle modifiche apportate da Cartan nel 1922-23 alla teoria di Einstein. A questo punto la domanda sorge spontanea: perché si cerca di proporre teorie gravitazionali alternative o più generali, sebbene la relatività generale si accorda perfettamente con i dati sperimentali nel dominio della macro-fisica?

Le motivazioni sono principalmente di carattere teorico. Infatti, si trattano due realtà fisiche che a prima vista sembrano completamente differenti: da una parte si ha che a livello microscopico giocano un ruolo fondamentale l'interazione forte, debole ed elettromagnetica, mentre l'interazione gravitazionale non sembra influenzare i fenomeni fisici; dall'altra parte la fisica del macroscopico è governata in maniera predominante dall'attrazione gravitazionale. In aggiunta, l'interazione forte, debole ed elettromagnetica sono ben descritte nella Teoria Quantistica e Relativistica dei Campi, che si evolve nello spazio-tempo piatto di Minkowski. Quindi, in prima approssimazione, sembra che la gravitazione non abbia effetti quando si

tratta la fisica delle particelle elementari. Tuttavia, studi più recenti hanno messo in luce come la teoria quantistica nello spazio-tempo curvo, invece che nello spazio-tempo piatto di Minkowski, conduca ad alcuni nuovi effetti molto importanti (interferometria neutronica, interazioni di contatto spin-spin, ecc.) e, inoltre, quando si tratta la fisica delle particelle elementari, ci si rende conto che il ruolo della gravitazione diventa molto importante e necessario, ad esempio nello studio dell'universo primordiale.

Bisogna prestare attenzione perchè quando si considerano insieme sia la relatività generale che la fisica delle particelle si deve prendere in considerazione oltre che la massa delle particelle, anche lo spin. Così come la massa è descritta, in una teoria di campo, dal tensore impulso-energia, anche lo spin verrà descritto da un tensore di densità di spin. Nella teoria della Relatività Generale la grandezza fisica della massa viene "geometrizzata" associandola alla curvatura dello spazio tempo; analogamente in una teoria estesa della gravitazione bisognerà connettere lo spin con una nuova grandezza geometrica: la torsione. La relazione dinamica tra curvatura e tensore impulso-energia è espressa dall'equazione di campo di Einstein, analogamente ci sarà una relazione che lega la torsione al tensore di spin.

### 1.3 Perchè classificare la torsione

La torsione appare nella letteratura in forme abbastanza differenti. Generalmente, lo spin è considerato essere la sorgente della torsione, tuttavia ci sono molte altre possibilità, come ad esempio casi in cui la controparte fenomenologica è assente, ed in altri la torsione deriva da sorgenti non caratterizzate da spin, ma come gradiente di un campo scalare. Per chiarire questi aspetti, lo scopo di questo lavoro è quello di fornire due schemi per la classificazione dei tensori di torsione basati sulle proprietà geometriche dei vettori e dei bivettori che possono essere usati per decomporre la torsione.

La prima classificazione si basa sulla possibilità di costruire i tensori di torsione partendo dal prodotto tensoriale tra un bivettore semplice covariante e un vettore controvariante. Verranno quindi classificati in base alle possibili combinazioni di 24 tensori indipendenti, che prenderanno il nome di *torsioni elementari*.

La seconda classificazione deriva dalla decomposizione, in un punto di  $U_4$ , del tensore di torsione in tre tensori irriducibili rispetto al gruppo di Lorentz. Verranno anche in questo caso classificati in base alle proprietà geometriche dei vettori e dei bivettori che li compongono. Segue che gli elementi della seconda classificazione sono generalmente espressi come una combinazione di "tensori elementari di torsione" mentre, in generale, quest'ultimi non sono irriducibili.

La classificazione dei tensori di torsione mostra come differenti sorgenti di torsione possono influenzare le quantità cinematiche, l'accelerazione, l'espansione e le loro equazioni di evoluzione. In particolare, da un punto di vista fenomenologico, le teorie di torsione possono risultare rilevanti nell'ambito della cosmologia.

## Capitolo 2

# Richiami di Geometria Differenziale

### 2.1 Varietà Differenziabili

Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Una  $n$ -carta su un insieme  $M$  è una coppia  $(U, \varphi)$ , con  $U \subseteq M$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  applicazione iniettiva e con immagine un aperto  $\varphi(U)$  di  $\mathbb{R}^n$ .

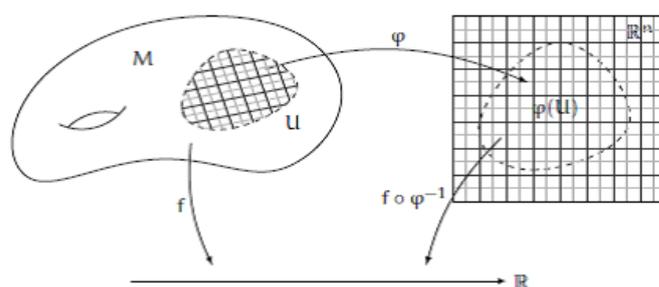


Figura 2.1: Carte e funzioni

In componenti  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ , con  $x^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  detta  $i$ -esima *coordinata locale*. L'applicazione  $\varphi$  dà corrispondenza biunivoca da  $U$  a  $\varphi(U)$ ; l'applicazione inversa  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow M$  è detta *parametrizzazione locale*. Intuitivamente, una parametrizzazione locale ci permette di trasportare le coordinate Cartesiane di  $\mathbb{R}^n$  su  $U$ . Inoltre, consente di stabilire una corrispondenza biunivoca fra le funzioni  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definite sull'insieme astratto  $U$  e funzioni  $\hat{f} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  definite nell'aperto  $\varphi(U)$  di  $\mathbb{R}^n$  (quindi: ordinarie funzioni reali di  $n$  variabili reali). Tale corrispondenza è data da:

$$f \leftrightarrow \hat{f} := f \circ \varphi^{-1}.$$

Siano  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  due  $n$ -carte su  $M$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ . Le due carte si dicono compatibili se  $\varphi(U \cap V)$  e  $\psi(U \cap V)$  sono aperti e il cambio di carte

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

è una funzione  $C^\infty$  con inversa  $C^\infty$ .

Un n-atlante su M è una collezione  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  di n-carte tali che:

- $\cup_\alpha U_\alpha = M$ ;
- $\forall \alpha, \beta, U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  oppure  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  e le carte  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  sono compatibili.

Due n-atlanti su un insieme M si dicono *compatibili* se ogni carta del primo è compatibile con ogni carta del secondo, ovvero se la loro unione è ancora un atlante. Due atlanti definiscono la stessa classe di funzioni  $C^\infty$  su M se e solo se sono compatibili, quindi inducono su M la stessa *struttura differenziabile*. Più formalmente, una struttura differenziabile di dimensione n è una classe di equivalenza di n-atlanti compatibili.

Dato un n-atlante  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  su un insieme M, si può; definire una *topologia* su M (detta *indotta dalla struttura differenziabile*) dichiarando  $A \subseteq M$  aperto se e solo se  $\alpha(A \cap U_\alpha)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n \forall \alpha$ .

Una varietà differenziabile M di dimensione n è un insieme dotato di una struttura differenziabile di dimensione n tale che la topologia indotta sia:

- (i) di Hausdorff;
- (ii) a base numerabile.

La condizione (i) garantisce che per ogni coppia di punti distinti p e q esistono due aperti disgiunti U e V tali che  $p \in U$  e  $q \in V$ ; la (ii) assicura che si può sempre scegliere un atlante numerabile.

## 2.2 Vettori tangenti e Fibrato Tangente

Data una varietà M, una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  ed un punto  $p \in M$ , definiamo:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (f) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\hat{p} + te_i) - \hat{f}(\hat{p})}{t} \quad (2.1)$$

dove  $\hat{f} := f \circ \varphi^{-1}$   $\hat{p} = \varphi(p)$  sono le rappresentazioni locali di f e p, ed  $(e_i)_{i=1}^n$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Le applicazioni in 2.1 sono le derivate parziali, calcolate in p, della funzione f scritta in coordinate locali. Usiamo la convenzione di Einstein di sottointendere somme su indici ripetuti due volte, una in alto e una in basso. Dato  $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ , scriveremo ad esempio

$$\xi := v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (2.2)$$

per indicare la somma  $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ .

La formula 2.1 definisce un'applicazione  $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  analoga della derivata direzionale, in direzione di v, su uno spazio Euclideo.

Una applicazione lineare  $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *derivazione di  $C^\infty(M)$  in p* se  $\forall f, g \in C^\infty(M)$  soddisfa:

$$\xi(f \cdot g) := \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g). \quad (2.3)$$

L'insieme delle derivazioni in  $p$  verrà indicato con  $T_pM$ , ed è detto *spazio tangente* ad  $M$  in  $p$ . I suoi elementi sono detti *vettori tangenti* mentre  $p$  è detto *punto di applicazione*. Ad ogni carta è associata una base dello spazio tangente, data dalla formula 2.1 (la base dipende ovviamente dalla carta scelta). Data un'altra carta  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  in  $p$ , il vettore 2.2 si può scrivere nella forma

$$\xi = w^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p,$$

per qualche  $w = (w^1, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^n$ . Segue dalla regola di derivazione delle funzioni composte che le  $n$ -uple di componenti  $v$  e  $w$  sono legate dalla relazione

$$w^i = v^k \frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k} \Big|_{x=\varphi(p)}, \quad (2.4)$$

in cui  $\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^k} \Big|_{x=\varphi(p)}$  indica il generico elemento di matrice Jacobiana  $Jac(\psi \circ \varphi^{-1})$  della funzione  $\psi \circ \varphi^{-1}$ , calcolato in  $\varphi(p)$ . Indichiamo con

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

l'insieme di tutti gli spazi tangenti ad  $M$  per ogni  $p \in M$ . Ad ogni carta  $(U, \varphi)$  su  $M$  è possibile associare una  $2n$ -carta  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  su  $TM$ , le cui funzioni componenti sono dette *coordinate naturali*. Si prenda  $\tilde{U} := \bigsqcup_{p \in U} T_pM$  e per ogni  $\xi = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in \tilde{U}$  definiamo

$$\tilde{\varphi}(\xi) := (\varphi(p), v) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

In questo modo, a partire da un atlante su  $M$  si può ottenere un atlante su  $TM$ , che diventa una varietà differenziabile di dimensione  $2n$  detta *fibrato tangente*.

## 2.3 Covettori e Fibrato Cotangente

Il duale  $V^*$  di uno spazio vettoriale reale  $V$  è l'insieme di tutte le applicazioni lineari  $V \rightarrow \mathbb{R}$ . Il duale  $T_p^*M$  dello spazio tangente  $T_pM$  è detto *spazio cotangente* ad  $M$  in  $p$ ; i suoi elementi sono detti *covettori*. Sia  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta in  $p$ . Siccome ogni applicazione lineare è univocamente determinata dal suo valore sui vettori di una base, possiamo definire dei covettori come segue:

$$dx^i \Big|_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad dx^i \Big|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \right) = \delta_k^i.$$

Gli elementi  $dx^i \Big|_p$  formano una base di  $T_p^*M$  della duale alla base 2.1 di  $T_pM$ . Come per il fibrato tangente, usando tale base è possibile definire delle "coordinate naturali" sull'insieme  $T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M$  di tutti i covettori. Si può quindi associare ad un atlante su  $M$  un atlante su  $T^*M$ , che diventa in questo modo una varietà differenziabile di dimensione  $2n$

detta *fibrato cotangente*. Ad ogni funzione  $f \in C^\infty(M)$  è possibile associare un covettore  $df_p$ , detto *differenziale* di  $f$  in  $p$ , come segue:

$$df_p(\xi) := \xi(f), \quad \forall \xi \in T_pM,$$

in cui il membro di destra  $\xi$  agisce su  $f$  come derivazione. In coordinate locali:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \cdot dx_p^i.$$

Il differenziale è in un certo senso l'analogo del gradiente di una funzione.

## 2.4 Campi vettoriali e Uno-forme

Un campo vettoriale (*globale e liscio*) su una varietà differenziabile ; è una applicazione lineare  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  soddisfacente la relazione

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M). \quad (2.5)$$

L'insieme di tutti i campi vettoriali (globali e lisci) su  $M$  è indicato con  $\mathbf{X}(M)$ . Le equazioni 2.3 e 2.5 sono simili, ma mentre la prima è un'uguaglianza fra numeri reali ( $p \in M$  è fissato), la seconda è un'identità fra funzioni. Nonostante questa differenza, dati  $X \in \mathbf{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$  e  $p \in M$ , possiamo definire un numero reale tramite la formula

$$\xi(f) := X(f)(p). \quad (2.6)$$

Otteniamo in questo modo un'applicazione lineare  $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ . Siccome  $X$  soddisfa la 2.5, calcolando ambo i membri di tale uguaglianza in  $p$  si osserva che  $\xi$  soddisfa la 2.3: dato  $X \in \mathbf{X}(M)$ , tramite la 2.6 si ottiene un vettore tangente in  $p$  (indicato con  $X_p$ ). Si può allora pensare ad un campo vettoriale  $X$  come ad una collezione di vettori tangenti  $X_p \in T_pM$ , uno per ogni  $p \in M$  (come ad esempio in figura 2.2), ovvero come ad una applicazione:

$$M \rightarrow TM, \quad p \mapsto X_p \in T_pM.$$

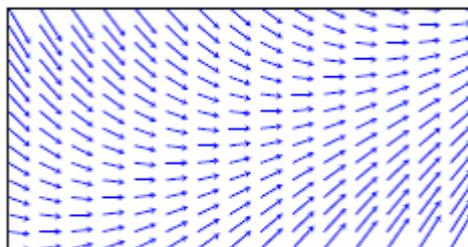


Figura 2.2: Campo vettoriale in  $\mathbb{R}^2$

Si può verificare che tale applicazione è differenziabile, e che ogni applicazione differenziabile  $M \rightarrow TM$  che manda  $p$  in  $T_pM$  (detta "sezione" del fibrato tangente) è associata ad un campo vettoriale, nel senso della definizione 2.5. Data una carta  $(U, \varphi)$  ogni campo vettoriale  $X$  si può esprimere localmente nella forma

$$X_p = v^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \forall p \in U. \quad (2.7)$$

Le funzioni  $v^i \in C^\infty(U)$  sono univocamente determinate da  $X$  e sono dette *funzioni componenti* di  $X$ .

Sia  $U \subseteq M$  aperto, si indica con  $\Omega^1(U)$  l'insieme delle applicazioni  $C^\infty(U) - \text{lineari}$ :

$$\omega = \mathbf{X}(U) \rightarrow C^\infty(U). \quad (2.8)$$

Gli elementi di  $\Omega^1(U)$  sono detti *1-forme differenziali*. In coordinate locali, sia  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta,  $dx^i \in \Omega^1(U) \forall i = 1, \dots, n$  e  $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathbf{X}(U)$  si definiscono le funzioni componenti di  $X$  come segue:

$$dx^i(X) = X^i.$$

## 2.5 Tensori e Campi Tensoriali

Sia  $p \in M$ ,  $U \subseteq M$  aperto,  $T_pM$  lo spazio tangente a  $M$  in  $p$  e  $T_p^*M$  lo spazio cotangente a  $M$  in  $p$ , si definisce un  *tensore* di tipo  $(k,l)$  su  $U$  un'applicazione multilineare:

$$T_l^k(U) = \underbrace{T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}_{l\text{-volte}} \times \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{k\text{-volte}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Si dirà  $k$ -covariante e  $l$ -controvariante. Più in generale possiamo vedere il tensore  $T_l^k$  come un elemento dello spazio  $\underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{l\text{-volte}} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{k\text{-volte}}$ .

In componenti sia  $(e_i)_{i=1}^n$  una base di  $T_pM$ , e  $(e^i)_{i=1}^n$  una base duale di  $T_p^*M$ , allora ogni tensore  $F$  di tipo  $(k,l)$  si scriverà:

$$F = F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \otimes e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \dots \otimes e^{i_k} \quad (2.10)$$

dove  $F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} \in \mathbb{R}$  sono le componenti del tensore e si possono vedere come:

$$F(e^{j'_1}, \dots, e^{j'_l}, e_{i'_1}, \dots, e_{i'_k}) = F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} \underbrace{e_{j_1}(e^{j'_1})}_{\delta_{j_1}^{j'_1}} \dots e_{j_l}(e^{j'_l}) e^{i_1}(e_{i'_1}) \dots e^{i_k}(e_{i'_k}) = F_{i'_1, \dots, i'_k}^{j'_1, \dots, j'_l} \quad (2.11)$$

Si definisce un *campo tensoriale* di tipo  $(k,l)$  su  $U \subseteq M$  aperto, un'applicazione  $C^\infty(U)$

multilineare:

$$F := \underbrace{\Omega^1(U) \times \dots \times \Omega^1(U)}_{l\text{-volte}} \times \underbrace{\mathbf{X}(U) \times \dots \times \mathbf{X}(U)}_{k\text{-volte}} \rightarrow C^\infty(U). \quad (2.12)$$

L'insieme di tutti i campi tensoriali di tipo (k,l) su U sarà indicato con  $\tau_l^k(U)$ .

### Leggi di Trasformazione

Si consideri un punto  $p \in M$ ,  $T_p M$  lo spazio tangente in p e l'insieme  $e_{i=1}^n$  una base di questo spazio. Un cambio di base in  $T_p M$  è determinato da una matrice nxn appartenente a  $GL(n)$ , il gruppo delle matrici quadrate rappresentanti una trasformazione lineare. Sia  $e_i \rightarrow e_{i'}$  il cambio di base, la nuova base sarà legata alla prima attraverso la relazione:

$$e_{j'} = A_{j'}^i e_i \quad (2.13)$$

Si consideri ora la spazio duale  $T_p^* M$  e una sua base  $e^i$ ; è possibile ottenere una relazione analoga a quella precedente. Si può scrivere:

$$e^i(e_k) A_{j'}^k = \delta_k^i A_{j'}^k = A_{j'}^i \quad (2.14)$$

Dato che le uno-forme agiscono linearmente, l'espressione sopra definisce l'azione degli  $e^i$  sui vettori di base trasformati,

$$e^i(e_k) A_{j'}^k = e^i(e_k A_{j'}^k) = e^i(e_{j'}) \quad (2.15)$$

Sia  $A^{-1}$ , in componenti  $A_j^{i'}$ , l'inversa di A tale che

$$A_j^{i'} A_{k'}^j = \delta_{k'}^{i'} \quad A_{j'}^i A_k^{j'} = \delta_k^i$$

Operando da sinistra con  $A^{-1}$  sulle equazioni 2.14 e 2.15 e eguagliando i risultati, si ottiene che la base duale trasformata è data da

$$e^{k'} = A_i^{k'} e^i \quad (2.16)$$

ovvero la base duale di una uno-forma si trasforma sfruttando la matrice inversa  $A^{-1}$ .

Da notare che  $A^{-1}$  è anche la matrice che trasforma le componenti dei vettori mentre le componenti delle uno-forme si trasformano utilizzando A. Per questo motivo i primi sono anche detti vettori *contravarianti* e i secondi vettori *covarianti*. In particolare, si può mettere in luce quest'ultima affermazione introducendo due carte  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  e  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  tali che  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $p \in U \cap V$ . Siano, quindi,  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $\frac{\partial}{\partial y^i}$  due basi coordinate dello spazio  $T_p M$ . Come visto in precedenza si può scrivere:

$$A = A_{j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^{j'}} \quad e \quad A^{-1} = A_j^{i'} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial x^j}. \quad (2.17)$$

Scomponendo ora un vettore (o un covettore) in componenti e ricordando come si trasformano gli elementi di base, si ottiene:

$$v^{i'} = A_i^{k'} v^i \quad e \quad \omega_{i'} = A_{i'}^k \omega_k. \quad (2.18)$$

Applicando quanto appena detto ai tensori le loro componenti si trasformeranno secondo:

$$F_{i'_1, \dots, i'_k}^{j'_1, \dots, j'_l} = A_{j'_1}^{i'_1} \dots A_{j'_l}^{i'_l} A_{i'_1}^{i_1} \dots A_{i'_k}^{i_k} F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} \quad (2.19)$$

### Simmetrizzazione e antisimmetrizzazione di un tensore

Esistono due modi per manipolar gli indici di un tensore per ottenere una determinata simmetria:

**simmetrico**  $F_{(i_1, \dots, i_k)}^{j_1, \dots, j_l} = \frac{1}{n!} (F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} + \text{somme con gli indici } i_1, \dots, i_k \text{ permutati})$

**antisimmetrico**  $F_{[i_1, \dots, i_k]}^{j_1, \dots, j_l} = \frac{1}{n!} (F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} + \text{somme alterne con gli indici } i_1, \dots, i_k \text{ permutati})$

Si può far vedere come qualsiasi tensore è scomponibile nella somma tra la sua parte simmetrica e quella antisimmetrica.

### Tensore metrico

Un tensore metrico  $g$  è un campo tensoriale di tipo  $(2,0)$ , quindi  $g \in \tau_0^2(M)$ , che sia simmetrico e non degenerare.

$$g(X, Y) = g(Y, X) \quad \forall X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Si definisce *metrica* su  $M$  un'applicazione  $C^\infty$  tale che:

$$p \in M \longmapsto g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M;$$

che sia simmetrica e non degenerare. Definita la metrica, possiamo determinare il prodotto scalare tra i vettori dello stesso spazio tangente  $T_pM$ :

$$\langle v, w \rangle = g(v, w) = g_{ij} v^i w^j \quad \forall v, w \in T_pM \quad (2.20)$$

Dove  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ . In particolare in una carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  si può scrivere  $g$  come:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j;$$

l'ultima uguaglianza è giustificata dalla simmetria della metrica.

Definito il prodotto scalare possiamo introdurre i concetti di norma ( $\|v\|^2 = g(v, v)$ ) e angolo tra vettori ( $g(v, w) = |v| \cdot |w| \cdot \cos\theta$ ). In generale la coppia  $(M, g)$  è detta *varietà Riemanniana*.

## 2.6 Connessione Lineare

Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , con  $I$  aperto, una curva parametrizzata liscia, si definisce il *vettore velocità*  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$  come segue:

$$\gamma'(t)(f) := \frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \quad \forall t \in I \text{ e } \forall f \in C^\infty(M). \quad (2.21)$$

Sorge, invece, un problema nella definizione di accelerazione di una curva. Volendola definire come segue:

$$\gamma''(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma'(t+\epsilon) - \gamma'(t)}{\epsilon}$$

la differenza tra i vettori al numeratore non ha senso in quanto appartengono a due spazi diversi, rispettivamente  $T_{\gamma(t+\epsilon)}M$  e  $T_{\gamma(t)}M$ .

Per ovviare a questa difficoltà si può introdurre sulla varietà una *connessione lineare*.

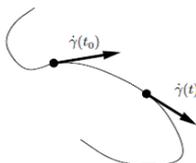


Figura 2.3:  $\gamma'(t+\epsilon)$  e  $\gamma'(t)$

Una connessione lineare su  $M$  è una connessione su  $TM$ . Si definisce una connessione su  $TM$  un' applicazione

$$\nabla : \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \rightarrow \mathbf{X}(M) \quad \text{scritta } (X, Y) \rightarrow \nabla_X Y, \quad (2.22)$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

(a) è  $C^\infty$ -lineare in  $X$ :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = \nabla_{fX_1} Y + \nabla_{gX_2} Y$$

(b) è  $\mathbb{R}$ -lineare in  $Y$ :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$$

(c) soddisfa la seguente regola:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Sia  $\{E_1, \dots, E_n\}$  un riferimento locale su  $U$  di  $TM$ , si definiscono *i coefficienti di connessione* di  $\nabla$  come segue:

$$\nabla_{E_i} E_j|_p = \Gamma_{ij}^k E_k|_p \quad \forall p \in M, \Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U) \quad (2.23)$$

Questo ci permette di scrivere una connessione in coordinate locali nel seguente modo:

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k \quad (2.24)$$

Se i coefficienti di connessione sono simmetrici per gli indici in basso

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

la connessione si dirà *simmetrica* e i coefficienti saranno detti *simboli di Christoffel*, spesso indicati con  $\{\Gamma_{ij}^k\}$ . La connessione indotta dai simboli di christoffel si chiama connessione di Levi-Civita.

La derivata covariante di un vettore  $v^v$  in direzione di  $\mu$  sarà:

$$\nabla_\mu v^v = \partial_\mu v^v + \Gamma_{\mu\lambda}^v v^\lambda.$$

Analogamente la derivata covariante di un covettore  $\omega_v$  in direzione di  $\mu$  sarà:

$$\nabla_\mu \omega_v = \partial_\mu \omega_v - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda.$$

Quanto detto finora ci permette di definire la derivata covariante di un tensore.

Sia  $\nabla$  una connessione lineare su M. Esiste un'unica connessione in ciascun fibrato tensoriale  $T_l^k M$ , anch'essa denotato con  $\nabla$ , tale che le seguenti condizioni sono soddisfatte.

- (a)  $\nabla_X f = Xf$
- (b)  $\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$
- (c) commuta con ogni tipo di contrazione:

$$\nabla_X(\text{tr}Y) = \text{tr}(\nabla_X Y)$$

- (d) dati il campo vettoriale Y e l'uno-forma  $\omega$ :

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

- (e)  $\forall F \in \tau_l^k(M)$ ,  $Y_i$  campi vettoriali,  $\omega^j$  uno-forme :  
 $(\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k) = X(F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k))$   
 $- \sum_{j=1}^l F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, Y_k)$   
 $+ \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^l, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k).$

In componenti si scriverà:

$$F_{i_1, \dots, i_k; m}^{j_1, \dots, j_l} = \partial_m F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} + \sum_s F_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, p, \dots, j_l} \Gamma_{mp}^{j_s} - \sum_s F_{i_1, \dots, p, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_l} \Gamma_{mi_s}^p.$$

Si definisce *campo vettoriale lungo una curva*  $\gamma$  un'applicazione differenziabile V tale che:

$$V : I \subseteq M \rightarrow TM, \quad \text{tale che } V(t) \in T\gamma(t)M. \quad (2.25)$$

In generale  $V(t)$  è tangente a  $M$  ma non a  $\gamma$ .

Sia  $M$  varietà differenziabile e  $\nabla$  connessione su  $TM$ . Per ogni  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \exists!$  operatore  $\mathbb{R}$ -lineare  $D_t : \mathbf{X}(\gamma) \rightarrow \mathbf{X}(\gamma)$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $D_t(fV) = fD_tV + \dot{f}V \quad \forall f \in C^\infty(I) \text{ e } V \in \mathbf{X}(\gamma)$
- (ii) se  $V$  è estendibile  $\Rightarrow \forall$  estensione  $X$  di  $V$  si ha:  $D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}X|_{\gamma(t)}$

L'operatore  $D_t$  è detto *derivata covariante lungo  $\gamma$* , ed è univocamente determinato dalla connessione.

In coordinate locali, si  $t_0 \in I$ ,  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta con  $\gamma(t_0) \in U$  allora

$$D_tV(t_0) = (\dot{V}^k + V^i(t_0)\dot{\gamma}(t_0)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)))\partial_k|_{\gamma(t_0)}.$$

Si definisce *accelerazione* di una curva  $\gamma$ , il campo vettoriale  $D_t\gamma'(t)$ .

Si consideri una curva  $q : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  sarà una *geodetica* se  $D_tq'(t) = 0$ . Localmente detto  $q^i = x^i \circ q \quad [\varphi \circ q = (q^1, \dots, q^n)]$ ;

$$q \text{ è una geodetica} \Leftrightarrow \ddot{q}^k(t) + \dot{q}^i(t)\dot{q}^j(t)\Gamma_{ij}^k(q(t)) = 0. \tag{2.26}$$

Quest'ultima equazione è detta *equazione delle geodetiche*.

Data un operatore di derivata  $\nabla$  si può definire il *trasporto parallelo* lungo una curva  $\gamma$ .

$V \in \mathbf{X}(\gamma)$  si dirà "parallelo lungo  $\gamma$ " se  $D_tV = 0$ .

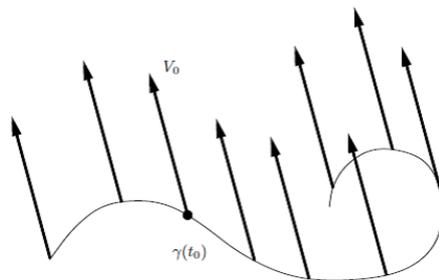


Figura 2.4: Trasporto parallelo di  $V_0$  lungo  $\gamma$

Data una curva  $\gamma : I \rightarrow M$ ,  $t_0 \in I$  e un vettore  $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ , esiste un unico campo vettoriale  $V$  parallelo lungo  $\gamma$  tale che  $V(t_0) = V_0$ . Se  $\gamma : I \rightarrow M$  è una curva e  $t_0, t_1 \in I$ , il trasporto parallelo definisce un operatore:

$$P_{t_0, t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M.$$

E' facile verificare che questo operatore instaura un isomorfismo tra  $T_{\gamma(t_0)}M$  e  $T_{\gamma(t_1)}M$ . In conclusione possiamo ridefinire la derivata covariante lungo una curva  $\gamma$ , come segue:

$$D_tV(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_{t_0, t}^{-1}V(t) - V(t_0)}{t - t_0}.$$

In questo senso una connessione "connette" due spazi vettoriali vicini.

## 2.7 Curvatura

La derivata covariante e il trasporto parallelo forniscono una struttura matematica capace di formalizzare il concetto di *curvatura*. La nozione intuitiva di curvatura dipende dalla geometria estrinseca della varietà, che caratterizza lo spazio immergendolo in uno a dimensione maggiore; mentre la curvatura come proprietà geometrica intrinseca può essere misurata da osservatori confinati sulla varietà. Sia  $M$  una qualsiasi varietà Riemanniana, l'endomorfismo di curvatura è la mappa  $R : \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \rightarrow \mathbf{X}(M)$  definita da

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.27)$$

E' facile verificare che la mappa  $R$  è  $C^\infty(M)$  – *multilineare*, e quindi gli si può associare un campo tensoriale  $R$  di tipo (3,1). La curvatura in termini delle coordinate locali ( $x^i$ ) può essere scritta come

$$R = R_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l \quad (2.28)$$

dove i coefficienti  $R_{ijk}^l$  sono definiti da

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l.$$

I coefficienti della curvatura si possono esprimere come:

$$R_{ijk}^l := \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l. \quad (2.29)$$

### Proprietà del tensore di Riemann

Si può ottenere dal tensore di curvatura, abbassando l'ultimo indice, un tensore 4 volte covariante  $Rm$  detto tensore di Riemann.

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad (2.30)$$

che in coordinate locali diventa:

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$$

dove  $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$ . Il tensore di Riemann, assegnati i campi vettoriali  $X, Y, Z, W$ , segue le seguenti proprietà:

- (a)  $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(X, W, Y, Z)$
- (b)  $Rm(W, X, Y, Z) = -Rm(W, X, Z, Y)$
- (c)  $Rm(W, X, Y, Z) = Rm(Y, Z, W, X)$
- (d)  $Rm(W, X, Y, Z) + Rm(X, Y, W, Z) + Rm(Y, W, X, Z) = 0$

si può notare che:

- (a) è una conseguenza diretta della definizione del tensore
- (b) segue dalla compatibilità della connessione con la metrica (ovvero se è soddisfatta  $\nabla_{\mu}g_{ij} = 0$ )
- (c) deriva dalle altre tre proprietà
- (d) è anche chiamata *identità algebrica di Bianchi*.

Le seguenti proprietà saranno espresse in coordinate locali come segue:

- (a')  $R_{ijkl} = -R_{jikl}$
- (b')  $R_{ijkl} = -R_{jilk}$
- (c')  $R_{ijkl} = R_{klij}$
- (d')  $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = R_{[ijk]l} = 0$

Si enuncia infine l' *identità differenziale di Bianchi*:

$$\nabla Rm(X, Y, Z, V, W) + \nabla Rm(X, Y, V, W, Z) + \nabla Rm(X, Y, W, Z, V) = 0 \quad (2.31)$$

che in componenti sarà:

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0.$$

### Tensore di Ricci e Curvatura scalare

Siccome un tensore di rango 4 non è così facile da manipolare, spesso è utile costruire dei tensori più semplici che riassumano alcune delle informazioni contenute nel tensore di curvatura. Il più importante di questi tensori è il *tensore di Ricci* "Rc", il quale è un campo tensoriale 2 volte covariante definito come traccia del tensore di Riemann. In componenti Rc sarà:

$$R_{ij} := R_{kij}^k = g^{km} R_{kijm}. \quad (2.32)$$

il tensore di Ricci si associato ad una connessione simmetrica sarà anch'esso simmetrico

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

La *curvatura scalare* è una funzione R definita come traccia del tensore di Ricci:

$$R := g^{ij} R_{ij} = R_i^i.$$

# Capitolo 3

## Varietà di Riemann-Cartan

### 3.1 Tensore di Torsione

Uno spazio metrico affine è una tripla  $(M, g, \bar{\nabla})$ , dove  $M$  è una varietà differenziabile di dimensione  $n \geq 2$ , con metrica  $g$  e  $\bar{\nabla}$  connessione lineare con un tensore di torsione non nullo ed in generale indipendente dalla metrica.

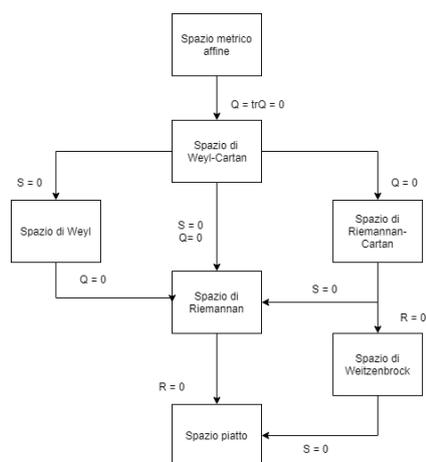


Figura 3.1

In particolare, con varietà di Riemann-Cartan si indica la tripla  $(M, g, \bar{\nabla})$ , dove  $(M, g)$  è una varietà (pseudo-)Riemanniana alla quale è aggiunta una connessione lineare  $\bar{\nabla}$  dotata di torsione non nulla  $S$  e compatibile con la metrica  $(Q = \bar{\nabla}g = 0)$ .

Si può vedere la *torsione* come un'applicazione

$$S : \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \rightarrow \mathbf{X}(M)$$

definita da

$$S(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

E' facile verificare come l'applicazione  $S$  sia  $C^\infty$ -bilineare e quindi identificabile con un tensore di tipo  $(2,1)$ . In aggiunta alla definizione data, si può far vedere come la torsione, seguendo i lavori di Cartan, in coordinate locali sia identificabile con la parte antisimmetrica della connessione:

$$S_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu) = \Gamma_{[\alpha\beta]}^\mu. \quad (3.1)$$

Per visualizzare il significato di  $S_{\alpha\beta}^\mu$ , prendiamo due vettori  $\mathbf{u}_P$  e  $\mathbf{v}_P$  applicati al punto  $P$  e trasportiamo parallelamente il primo lungo la direzione del secondo e viceversa ottenendo due nuovi vettori  $\mathbf{u}_R^\parallel$  e  $\mathbf{v}_Q^\parallel$ . Come vediamo dalla Figura 3.2 se la connessione è dotata di torsione, il parallelogramma non si chiude.

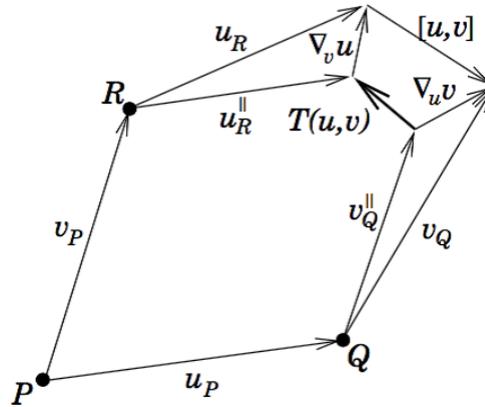


Figura 3.2: Si osserva come la torsione possa avere una interpretazione geometrica nella mancata chiusura del parallelogramma. In questo caso  $T(u, v) = 2S(u, v)$ .

Si vuole ora ottenere l'espressione generale della connessione in coordinate locali.

1.  $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu}$
2.  $-\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = -\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g_{\nu\beta} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha}$
3.  $-\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = -\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\alpha\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta g_{\beta\mu}$

Si ricordi ora la definizione di tensore di torsione 3.1, a questa si aggiunga la definizione di tensore di non metricità:

$$N_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = N_{\alpha\nu\mu} \quad (3.2)$$

e di tensore di *contorsione*:

$$K_{\alpha\beta}^\mu = -S_{\alpha\beta}^\mu - S_{\alpha\beta}^\mu + S_{\beta\alpha}^\mu = -K_{\alpha\beta}^\mu \quad (3.3)$$

Si sommano membro a membro le equazioni 1,2,3, moltiplicando per  $\frac{1}{2}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(N_{\alpha\mu\nu} - N_{\mu\nu\alpha} - N_{\nu\alpha\mu}) &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}) + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}g_{\mu\beta}[\Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta]}_{g_{\mu\beta}S_{\nu\alpha}^\beta} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}g_{\beta\nu}[\Gamma_{\mu\alpha}^\beta - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta]}_{g_{\beta\nu}S_{\mu\alpha}^\beta} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}[\Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\nu\mu}^\beta]}_{g_{\alpha\beta}\Gamma_{(\mu\nu)}^\beta} \end{aligned}$$

riordinando,

$$\frac{1}{2}(N_{\alpha\mu\nu} - N_{\mu\nu\alpha} - N_{\nu\alpha\mu}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}) + S_{\nu\alpha\mu} + S_{\mu\alpha\nu} + g_{\alpha\beta}\Gamma_{(\mu\nu)}^\beta$$

aggiungendo e sottraendo  $S_{\mu\nu\alpha}$  e successivamente moltiplicando per  $g^{\alpha\beta}$ , si ottiene:

$$\frac{1}{2}(N_{\mu\nu}^\beta - N_{\mu\nu}^\beta - N_{\nu\mu}^\beta) = -\{\mu\nu\}^\beta + S_{\nu\mu}^\beta + S_{\mu\nu}^\beta - S_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta$$

dove si è tenuto conto della scomposizione  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \Gamma_{(\mu\nu)}^\beta + \Gamma_{[\mu\nu]}^\beta$  e della definizione 3.1. Ricordando ora la definizione 3.3, si può riscrivere:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \{\mu\nu\}^\beta - K_{\mu\nu}^\beta - V_{\mu\nu}^\beta, \quad (3.4)$$

dove  $-V_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2}(N_{\mu\nu}^\beta - N_{\mu\nu}^\beta - N_{\nu\mu}^\beta)$ .

Una varietà di Riemann-Cartan, come detto, è dotata di metrica compatibile con la connessione quindi il tensore di non-metricità 3.2 è nullo; si ottiene, quindi, la seguente espressione in coordinate locali della connessione:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \{\mu\nu\}^\beta - K_{\mu\nu}^\beta \quad (3.5)$$

dove  $\{\mu\nu\}^\beta$  sono gli usuali simboli di Christoffel.

In seguito verranno usati i simboli  $\tilde{\nabla}$  e  $\nabla$  per indicare rispettivamente la derivata covariante con e senza torsione. L'introduzione di una connessione con torsione segna il passaggio dallo spazio-tempo di Riemann  $V_4$  allo spazio-tempo di Riemann-Cartan  $U_4$ . Alla luce della nuova espressione della connessione è possibile ridefinire il tensore di Riemann, il tensore di Ricci e la curvatura scalare, come segue:

$$R_{abc}^d = R_{abc}^d(\{\}) - \nabla_a K_{bc}^d + \nabla_b K_{ac}^d + K_{ae}^d K_{bc}^e - K_{be}^d K_{ac}^e \quad (3.6)$$

dove  $R_{abc}{}^d(\{\})$  è il tensore generato dai simboli di Christoffel;

$$R_{ab} = R_{ab}(\{\}) - 2\nabla_a S_c + \nabla_b K_{ac}{}^c + K_{ae}{}^b K_{bc}{}^e - 2S_e K_{ac}{}^e \quad (3.7)$$

dove  $S_a = S_{ab}{}^a$ ; ed infine

$$R = R(\{\}) - 4\nabla_a S^a + K_{ceb} K^{bce} - 4S_a S^a. \quad (3.8)$$

Di conseguenza le proprietà del tensore di di curvatura verranno modificate come segue:

$$R^l{}_{[abc]} = 2\nabla_{[a} S^l{}_{bc]} - 4S^f{}_{[ab} S^l{}_{c]f},$$

mentre l'identità differenziale di Bianchi diventa

$$\nabla_{[f} R^l{}_{ab]c} = 2S^k{}_{[fa} R^l{}_{b]kc}.$$

Si valuta ora  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho$ . La derivata covariante di un generico tensore, in una certa direzione, quantifica il cambiamento subito da questo quando trasportato parallelamente; il commutatore di due derivate covarianti misura la differenza nel trasportare il vettore prima lungo una direzione poi nell'altra. In generale, in una varietà non piatta trasportando parallelamente un vettore lungo un percorso chiuso, questo non ritornerà nella posizione iniziale.

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \\ &= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\nu V^\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma + \\ &\quad + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio sono stati messi in ordine gli indici e cancellati alcuni termini che sono eguali dopo la sostituzione  $(\mu \leftrightarrow \nu)$ . Nell'ultimo membro si riconoscono il tensore di Riemann e la torsione quindi si può riscrivere:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho V^\sigma - S_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho. \quad (3.9)$$

Si può notare che il tensore di Riemann misura la parte del commutatore delle derivate covarianti proporzionale al campo vettoriale stesso mentre la torsione misura la parte proporzionale alla derivata covariante. Nella figura che segue si evincono gli effetti di curvatura e torsione quando si compie un loop infinitesimo.

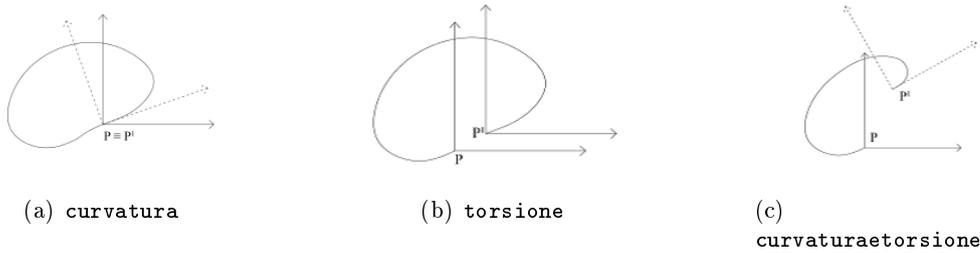


Figura 3.3: Rappresentazione grafica di curvatura e torsione

### 3.2 Tetradi e Bivettori

Finora si è sfruttato il fatto che una base naturale per lo spazio tangente  $T_p M$  nel punto  $p$  è data dalle derivate parziali rispetto le coordinate in quel punto,  $\hat{e}_a = \partial_a$ . Analogamente per lo spazio cotangente in  $p$   $T_p^* M$  una base sarà data da  $\hat{e}^a = dx^a$ . Nulla vieta però di introdurre un nuovo sistema di vettori di base  $\hat{e}_A$  (i vettori saranno indicati con una lettera maiuscola per ricordare che non sono in relazione che nessun sistema di coordinate). Questo nuovo sistema si potrà prendere di modo che risulti:

$$g_{ab} e_A^a e_B^b = \eta_{AB}, \tag{3.10}$$

dove  $g^{ab}$  è l'usuale tensore metrico, e  $\eta_{AB}$  è la metrica di Minkowski dello spazio-tempo Lorentziano, in dettaglio:

$$\eta_{AB} = \eta^{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \tag{3.11}$$

L'insieme dei vettori che comprende questa base ortonormale prende il nome di *tetrade*. Proprio come non si può, in generale, trovare carte coordinate che coprano l'intera varietà, spesso non si è in grado di trovare un singolo insieme di campi vettoriali di base lisci che sono definiti ovunque. E' possibile superare questo problema lavorando in diverse carte e assicurandosi che le cose si "comportino bene" nelle sovrapposizioni.

Qualsiasi vettore può essere espresso come una combinazione lineare di vettori di base. Nello specifico, possiamo esprimere i nostri vecchi vettori di base  $\hat{e}_a = \partial_a$  in relazione ai nuovi:

$$\hat{e}_a = e_a^A \hat{e}_A \tag{3.12}$$

Le componenti  $e_a^A$  formano una matrice  $n \times n$  invertibile, con inversa  $e_A^a$ , che avrà le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} e_A^a e_b^A &= \delta_b^a \\ e_A^a e_a^B &= \delta_A^B. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Da queste relazioni si ricava:

$$\hat{e}_A = e_A^a \hat{e}_a,$$

e quindi si può costruire la relazione tra la metrica dello spazio curvo e quella dello spazio piatto lorentziano:

$$\eta_{AB} = g_{ab} e_A^a e_B^b \quad (3.14)$$

e

$$g_{ab} = \eta_{AB} e_a^A e_b^B. \quad (3.15)$$

Con l'utilizzo della tetrad si può quindi esprimere un generico vettore nello spazio curvo  $V = V^a \hat{e}_a$  in relazione con la base ortonormale  $\hat{e}_A$ :

$$V^a = e_A^a V^A. \quad (3.16)$$

Analogamente, dato un tensore  $B_{ab}$ , si possono ottenere le sue componenti  $B_{AB}$  nello spazio tangente piatto contraendo gli indici della tetrad:

$$B_{AB} = e_A^a e_B^b B_{ab}.$$

Da un punto di vista matematico, l'insieme dei quattro campi vettoriali della tetrad instaura un isomorfismo tra  $TM$  e  $M \times \mathbb{R}^4$ . Ogni tensore può essere espresso mediante vettori e covettori di base, esprimendo quest'ultimo come una combinazione lineare degli elementi della tetrad.

Il risultato del *prodotto esterno*<sup>1</sup> di due vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  prende il nome di *bivettore*  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ . Data la linearità del prodotto esterno, i bivettori sono elementi di uno spazio lineare, lo *spazio bivettoriale* appunto. Quest'ultimo sarà indicato con  $\Lambda^2 M$ , il prodotto esterno è una mappa definita come:

$$\wedge : T_p M \times T_p M \rightarrow \Lambda^2 M.$$

Si può pensare di visualizzare  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , come un elemento di un'area orientata di un particolare piano, si veda figura 3.4.

Se si prende una base  $e_1, e_2$  nel sottospazio definito da  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , siano  $a_1, a_2, b_1, b_2$  le componenti dei vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , allora si avrà:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2.$$

Un bivettore si definisce *semplice* se può essere scritto come prodotto esterno di due vettori; se la varietà ha dimensione 2 o 3 tutti i bivettori sono semplici. Nel caso dello spazio-tempo, quindi di una varietà quadridimensionale, si può far vedere come un generico bivettore possa

<sup>1</sup>il prodotto esterno di due vettori gode delle seguenti proprietà:

- antisimmetrico:  $a \wedge b = -b \wedge a$
- prodotto per uno scalare:  $a \wedge (\beta b) = \beta(a \wedge b)$
- distributivo:  $a \wedge (b + c) = (a \wedge b) + (a \wedge c)$

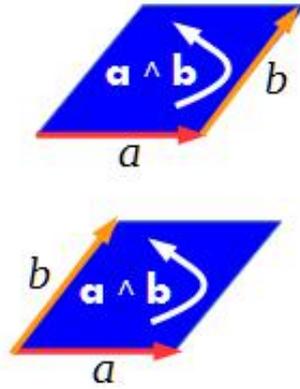


Figura 3.4: Rappresentazione di un bivettore

essere ricondotto nella somma di due bivettori semplici.

In componenti, il bivettore associato alla coppia di vettori (a,b), può essere visto come un tensore  $B^{ij}$  di tipo (0,2), dove gli indici ij sono in relazione con le componenti dei vettori  $a^i, b^j$ . In particolare, un bivettore  $B^{ij}$  si dirà semplice se soddisfa:

$$B^{[ij} B^{k]z} = 0.$$

Partendo dai vettori della tetrad in una varietà n-dimensionale, si possono costruire  $\frac{n(n-1)}{2}$  bivettori semplici

$$F_{AB}^{ab} = e_A^{[a} e_B^{b]}$$

e ogni bivettore  $B^{ab}$  è espressa come

$$B^{ab} = B^{AB} e_A^a e_B^b,$$

con  $B^{AB} = -B^{BA}$ .

Gli elementi introdotti in questo paragrafo saranno strumenti utili nel seguito della trattazione.

### 3.3 Classificazione del tensore di Torsione

#### Decomposizione del tensore di Torsione

Una importante proprietà della torsione è che può essere decomposta, rispetto il gruppo di Lorentz, in tre tensori irribucibili<sup>2</sup>, che possono essere scritti:

$$S_{ab}^c = {}^T S_{ab}^c + {}^A S_{ab}^c + {}^V S_{ab}^c. \tag{3.17}$$

---

<sup>2</sup>sono indipendenti tra di loro e non possono essere ulteriormente decomposti

Il numero di componenti in generale sarà:

$$\frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-4)}{3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + n,$$

in particolare in  $\mathbf{U}_4$ , la torsione ha 24 componenti, di cui  ${}^T S_{ab}^c$  ha 16 componenti,  ${}^A S_{ab}^c$  ne ha 4 e  ${}^V S_{ab}^c$  ha le restanti 4 componenti. Più in dettaglio possiamo scrivere:

$${}^V S_{ab}^c = \frac{1}{3}(S_a \delta_b^c - S_b \delta_a^c) \quad (3.18)$$

dove  $S_a = S_{ab}^b$ ;

$${}^A S_{ab}^c = g^{cd} S_{[abd]}, \quad (3.19)$$

il quale è chiamato tensore di torsione assiale (o totalmente antisimmetrico); e

$${}^T S_{ab}^c = S_{ab}^c - {}^A S_{ab}^c - {}^V S_{ab}^c. \quad (3.20)$$

**Lemma 1.** Se il tensore di torsione soddisfa l'equazione algebrica

$$S(X, Y, Z) - S(X, Z, Y) + g(X, Y)C(Z) - g(X, Z)C(Y) = 0 \quad (3.21)$$

fissata l'uno-foma differenziabile  $C$  e per ogni campo vettoriale liscio  $X, Y$  e  $Z$  su  $M$ , allora  $S$  sarà un  $V$ -torsione.

**Dimostrazione.** Si riscrive l'equazione tre volte in coordinate locali della generica carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  della varietà  $M$  come segue:

$$\begin{aligned} S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}C_k - g_{ik}C_j &= 0 \\ S_{jik} - S_{jki} + g_{ij}C_k - g_{jk}C_i &= 0 \\ S_{kij} - S_{kji} + g_{kj}C_i - g_{ki}C_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Si sommano le tre equazioni, ricordando che  $S_{ijk} + S_{jik} = 0$  si ottiene

$$S_{kij} = g_{ki}C_j - g_{ij}C_k \quad (3.23)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $g^{kj}$ , si trova che

$$S_i = g^{kj} S_{kij} = (n-1)C_i;$$

sostituendo nell'equazione 3.23 si ottiene:

$$S_{kij} = \frac{1}{(n-1)}(g_{ki}S_j - g_{ij}S_k). \quad (3.24)$$

Quest'ultima equazione è l'espressione in coordinate della  $V$ -torsione definita in 3.18 .

**Tensori elementari di torsione: una prima classificazione**

E' possibile vedere il tensore di torsione  $S$  della connessione  $\bar{\nabla}$  come una sezione liscia del fibrato tensoriale  $\Lambda^2 M \otimes TM$ .

Da questa affermazione discende la possibilità di costruire un tensore con tutte le proprietà della torsione partendo dal prodotto tensoriale di un bivettore  $F_{ab}$  con un vettore  $\Sigma^c$ .

E' noto che ogni generico bivettore in una varietà quadridimensionale può essere sempre ridotto nella somma di due bivettore semplici data una particolare scelta di coordinate. In analogia con il caso elettromagnetico, si indica con  $E_{ab}$  il termine elettrico (ovvero se il bivettore è composto da un vettore di tipo tempo); e con  $B_{ab}$  il termine magnetico, composto da due vettori di tipo spazio. Si può quindi introdurre il concetto di tensore elementare di torsione vedendolo come prodotto tensoriale di un bivettore *semplice* con un vettore.

Si dirà che un bivettore  $A_{ab}$  e un vettore  $V^c$  sono ortogonali se  $V^a A_{ab} = 0$ .

Si considereranno solo i casi dove ogni vettore  $\Sigma^c$  è o ortogonale al bivettore semplice o ad una delle sue componenti; gli altri possibili casi sono una combinazione di quest'ultimi due. Allora i 24 tensori elementari di torsione possono essere classificati secondo le proprietà spazio-temporali dei loro bivettori e i corrispettivi vettori. Si ricorda che ogni generico tensore di torsione può essere decomposto in termini di queste parti elementari. In generale, si ha

$$S_{ABCab}^{(el)c} = e_{[a}^A e_{b]}^B e_C^c, \quad (3.25)$$

e allora ogni tensore di torsione può essere espresso come

$$S_{ab}{}^c = S_{AB}{}^C e_{[a}^A e_{b]}^B e_C^c, \quad (3.26)$$

dove i coefficienti saranno

$$S_{AB}{}^C = S_{ab}{}^c e_A^{[a} e_B^{b]} e_c^C. \quad (3.27)$$

La classificazione di tensori elementari di torsione, nei quali il vettore  $\Sigma^a$  non giace nel piano definito dal bivettore, è la seguente:

- (a) se  $E_{ab}$  è il bivettore ottenuto dal prodotto tensoriale antisimmetrico di un covettore di tipo tempo e uno di tipo spazio,  $\Sigma^a$  dovrà essere un qualsiasi vettore di tipo spazio ortogonale a  $E_{ab}$ . Il caso puramente elettrico è rappresentato da una sola famiglia di tensori, che verrà indicato con  $Es$ ;
- (b) nel caso puramente magnetico il vettore  $\Sigma^a$  di tipo spazio, di tipo tempo o anche un vettore nullo, portando quindi a tre famiglie di tensori indicate rispettivamente con  $Bs, Bt, Bn$ ;
- (c) nel caso nullo, il vettore  $\Sigma^a$  può essere o un vettore nullo o un vettore di tipo spazio, individuando quindi due classi rispettivamente  $Nn$  e  $Ns$ .

Nell caso in cui, invece, il vettore  $\Sigma^a$  giace nello stesso piano descritto dal bivettore, si può notare che, se  $B=C$  nella 3.25, si ottiene la definizione di V-torsione 3.18. Si può infine

definire l'operatore duale come

$${}^*S_{ab}{}^c = \frac{1}{2}\varepsilon^{de}{}_{ab}S_{de}{}^c, \quad (3.28)$$

quest'ultimo ha la proprietà di associare una A-torsione con una V-torsione.

### Classificazione in termini di tensori irriducibili in quattro dimensioni

Si vuole dare una seconda classificazione dei tensori di torsione, rispettando le loro proprietà irriducibili. Si considera la V-torsione, la quale è caratterizzato dal covettore  $S_a = S_{ab}{}^b$ , come si vede in 3.18. Questo covettore potrà essere di tipo tempo, di tipo spazio o di tipo luce; se ne deducono quindi tre tipologie di V-torsione, le quali possono essere indicate rispettivamente con  $V_t$ ,  $V_s$  e  $V_l$ . Si può, in più, notare che la V-torsione può essere espressa come una combinazione di tensori elementari di torsione:

$${}^V S_{ab}{}^c = \frac{2}{3}S_{[a}e_{b]}^A e_A^c. \quad (3.29)$$

Si può esprimere la A-torsione come segue:

$${}^A S_{abc} = \varepsilon_{abcd}\sigma^d. \quad (3.30)$$

Analogamente al caso della V-torsione, si possono distinguere tre tipologie di A-torsione  $A_t$ ,  $A_s$  e  $A_l$ , in relazione alle caratteristiche del vettore  $\sigma^d$ .

Scrivendo esplicitamente la proprietà di 3.28, si mettono in relazione la A-torsione con la V-torsione come segue

$$\varepsilon^{de}{}_{ab}S_{[d}\delta_{e]}^c = \varepsilon^{dc}{}_{ab}S_d, \quad (3.31)$$

dove si riconosce al secondo membro la A-torsione e riscrivendo il primo membro

$$\varepsilon^{ef}{}_{ab}\varepsilon_{def}{}^c S^d = S_{[a}\delta_{b]}^c, \quad (3.32)$$

si mette in evidenza la relazione con la V-torsione.

Infine, si può far vedere come costruire la T-torsione con una combinazione di tensori elementari di torsione:

$${}^T S_{ab}{}^c = V_{[a}e_{b]}^A C_A^B e_B^c, \quad (3.33)$$

e

$${}^T S_{ab}{}^c = \varepsilon^{ef}{}_{ab}V_{[e}e_{f]}^A C_A^B e_B^c, \quad (3.34)$$

dove  $C_A^B$  è una matrice arbitraria. Dalla condizione di traccia nulla

$$V_{[a}e_{b]}^A C_A^B e_B^b = 0, \quad (3.35)$$

e

$$\varepsilon^{ef}{}_{ab}V_{[e}e_{f]}^A C_A^B e_B^b = 0, \quad (3.36)$$

si ottengono 7 condizioni sulla matrice  $C_A^B$ , fissato  $V_a$ . Come conseguenza,  $C_A^B$  ha 9 componenti indipendenti. Per ottenere le 16 componenti della T-torsione va aggiunta un'ulteriore condizione, alla già citata traccia nulla. Se  $V^2 = V^a V_a \neq 0$ , si può imporre che

$$C_A^B e_a^A e_B^b V^a V_b = 0, \tag{3.37}$$

che ricordando la condizione 3.35, può essere ridotta a:

$$C_A^A = 0. \tag{3.38}$$

Come nei precedenti casi, anche la T-torsione è caratterizzata da un vettore ( $V^a$ ), dal quale discende la classificazione in Tt, Ts e Tl, a seconda se  $V^a$  è di tipo tempo, spazio o luce.

### 3.4 Il teorema di Green

Si vuole dare un'estensione al caso delle varietà di Riemann-Cartan del teorema di Green (o teorema della divergenza). Su una varietà (pseudo)-Riemanniana  $(M, g)$ , la divergenza di un generico campo vettoriale liscio  $X$  è data dalla formula:

$$div X = tr \nabla X.^3$$

Inoltre, se  $(M, g)$  è una varietà compatta e orientata, allora il teorema di Green

$$\int_M (div X) dv = 0$$

può essere scritto nella forma

$$\int_M \nabla X dv = 0,$$

dove l'elemento di volume calcolato in coordinate locali nella carta  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  su  $M$  è  $dv = \sqrt{|det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Ora sia  $(M, g, \bar{\nabla})$  una varietà di Riemann-Cartan, data la dipendenza  $\bar{\nabla} = \nabla + K$  segue che

$$tr \bar{\nabla} X = tr \nabla + (tr K) X.$$

Se ne deduce che il teorema di Green per una varietà di Riemann-Cartan compatta e orientata avrà la forma

$$\int_M (tr \bar{\nabla} X - (tr K) X) dv = 0.$$

Il teorema di Green fornisce ulteriori proprietà ad un campo vettoriale ed è fondamentale quando si vuole introdurre il concetto di integrazione su una varietà. In questo caso si è messa in luce la dipendenza dal tensore di contorsione quando la varietà in questione è, per l'appunto, una varietà di Riemann-Cartan.

---

<sup>3</sup>per approfondire Kobashi-Nomizu, Foundations of Differential Geometry vol.1, Interscience Publishers, New York-London (1969)

## Capitolo 4

# Conclusioni

Lo scopo di questo elaborato, seguendo l'articolo [2], è stato quello di fissare la base teorica e geometrica che servirà poi per l'elaborazione di teorie gravitazionali estese, prima fra tutte quella che è stata definita "la naturale estensione della Relatività Generale" ovvero la teoria di Einstein-Cartan-Sciama-Kibble. Il fulcro delle nuove teorie è l'introduzione di una connessione con torsione compatibile con la metrica; l'aggiunta del tensore di torsione porta naturalmente ad un'estensione dei risultati della Relatività Generale. Infatti, alle equazioni di campo che descrivono i fenomeni in questa teoria, verranno aggiunte le equazioni di Cartan che legano la torsione con la densità di spin della materia. Il lavoro, successivamente, presenta (in linea con l'articolo [1]) due schemi per la classificazione del tensore di torsione. Il primo basato sulla decomposizione in tensori irriducibili, evidenzia essenzialmente tre classi di tensori: a traccia nulla, vettoriali e totalmente antisimmetrici (vedi T-torsione, V-torsione, A-torsione). In aggiunta alla decomposizione si propone un'ulteriore schema di classificazione basato sulle proprietà dei quadrivettori nello spazio-tempo. Si è giunti alla possibilità di costruire due tensori della stessa classe irriducibile, ma con proprietà distinte, dovuto al fatto che possono essere costruiti con vettori di tipo spazio, di tipo tempo o luce. Il secondo schema è basato su tensori di torsione elementari, quest'ultimi sono date dal prodotto tensoriale di un bivettore semplice e un vettore. Come conseguenza, la classificazione di questi tensori è basata sulle proprietà dello spazio-tempo dei bivettori semplici, e dei relativi vettori. L'obiettivo ultimo del classificare la torsione, è stato quello di eliminare un pregiudizio letterario che l'associava unicamente con lo spin delle particelle; e far vedere come quest'ultima entra in gioco (nelle forme indicate nello schema proposto) in numerose altre teorie. Si riportano, a titolo esplicativo, alcuni casi presenti nella letteratura scientifica, in cui è possibile classificare il tensore di torsione secondo la classificazione data di tensori irriducibili.

1. Lo spin delle particelle di Dirac è sorgente di una  $A_s$ -torsione per la particelle massicce e di una  $A_n$ -torsione per il neutrino (vedi [8]).
2. Il tensore di T-torsione può essere trovata nella supergravità semplice dove la torsione è data in termini degli spinori di Rarita-Schwinger.

3. In alcuni articoli è discussa l'influenza della At-torsione nelle perturbazioni cosmologiche.
4. As e Vs torsioni introducono anisotropie nello spazio-tempo.
5. Esempi di torsione di classe VI e A1 si ritrovano nella trattazione di onde elettromagnetiche nulle.
6. La A1-torsione può indurre un contributo geometrico alla fase Berry delle particelle di Dirac.

A seguire un'altra classe di esempi, che sono in relazione con la classificazione secondo i tensori di torsione elementari.

1. I tensori di torsione legati allo spin sono generati dalle particelle di Weyssenhoff e dalle particelle classiche di Dirac. Nel primo caso, la torsione è data dal Bs-tensore; nel secondo invece, dall' As-tensore.
2. Ci sono studi di modelli cosmologici in cui è presente la Bs-torsione.

L'aver introdotto la torsione in aggiunta alla connessione di Levi-Civita, come detto, conduce alla formulazione di teorie estese della gravitazione. Tuttavia, modificando la struttura geometrica dello spazio-tempo sorgono contraddizioni con i principi cardini della Relatività Generale, primo fra tutti il principio di equivalenza. Quest'ultimo nella sua formulazione debole (dovuta allo stesso Einstein) afferma che la massa inerziale, cioè la proprietà intrinseca del corpo materiale di opporsi alle variazioni di moto, e la massa gravitazionale, che rappresenta la proprietà di un corpo di essere sorgente e di subire l'influsso di un campo gravitazionale, sono numericamente uguali. Questo significa che la traiettoria di un corpo in caduta libera è indipendente dalla sua struttura interna e composizione. Le teorie di gravitazione che incorporano il principio di equivalenza (PE) sono quelle che soddisfano i postulati delle teorie metriche di gravità:

- lo spazio-tempo è dotato di una metrica simmetrica;
- le traiettorie dei corpi in caduta libera sono le geodetiche della metrica;
- in un sistema di riferimento locale le leggi della fisica non gravitazionali sono scritte nel linguaggio della Relatività Speciale.

Se si considerano, in teorie con torsione, due particelle di massa identica (di cui solo una però dotata di spin) in uno spazio curvo le loro traiettorie in assenza di forze esterne saranno delle geodetiche. Tuttavia, il discrimen tra i due percorsi (che per il PE devono essere uguali) sta nella connessione che li descrive. Infatti nel caso della particella priva di spin, la connessione sarà quella di Levi-Civita e la traiettoria sarà la soluzione (in un riferimento locale  $(q^1, \dots, q^n)$ ) dell'equazione:

$$\ddot{q}^k(t) + \{^k_{ij}\}(q(t))\dot{q}^i(t)\dot{q}^j(t) = 0. \quad (4.1)$$

Nel caso, invece, della particella con spin la traiettoria sarà data da:

$$\ddot{q}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(q(t))\dot{q}^i(t) \dot{q}^j(t) = 0, \quad (4.2)$$

dove

$$\Gamma_{ij}^k = \{_{ij}^k\} + K_{ij}^k.$$

Queste nuove teorie aprono a nuove frontiere e discussioni, in quanto se da un lato bisogna verificare che si accordino con i principi cardini della fisica, dall'altro descrivono in maniera ottimale problemi aperti della fisica contemporanea.

# Bibliografia

- [1] S. Capozziello, G.Lambiase, and C. Stornaiolo, *Geometric classification of the torsion tensor of space-time*, Ann. Phys(Leipzig), (2001).
- [2] I.A. Gordeeva, V. I. Pan'zhenskii, and S. E. Stepanov, *Riemannian-Cartan manifolds*, Journal of Mathematical Science, (2010).
- [3] V. de Sabbata, C. Sivaram, *Spin and Torsion in gravitation*, World Scientific Publishing, (1994).
- [4] V. de Sabbata, M. Gasperini, *Introduction to gravitation*, World Scientific Publishing, (1985).
- [5] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*,Springer, (2000).
- [6] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An introduction to curvature*,Springer, (1997).
- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman,(1973)
- [8] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. Kerlick, *General Relativity with Spin and Torsion: foundation and prospects*, Rev. mod. Phys., (1976)
- [9] S. Carrol, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, (2004).
- [10] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry vol.1*, Interscience Publishers, New York-London (1969)