

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Formalismo dell'operatore densità e applicazione all'oscillazione del neutrino

Relatore:
Prof. Gennaro Miele

Candidato:
Renato Maria Prisco
Matricola: N85000804

Anno Accademico 2017-2018

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Formalismo dell'operatore densità | 3 |
| 1.1 Stati puri e miscele statistiche | 3 |
| 1.2 Operatore densità per stati puri | 4 |
| 1.3 Operatore densità per miscele statistiche | 6 |
| 1.3.1 Definizione | 6 |
| 1.3.2 Proprietà | 8 |
| 1.3.3 Analogie con la meccanica classica | 9 |
| 1.4 Operatore densità ridotto | 12 |
| 2 Oscillazione del neutrino | 14 |
| 2.1 Il neutrino nel modello standard | 14 |
| 2.2 Introduzione al fenomeno di oscillazione | 15 |
| 2.3 Oscillazione a due sapori | 16 |
| 2.4 Oscillazione a tre sapori | 17 |
| 2.5 Cenni sull'oscillazione in presenza di materia | 18 |
| 3 Applicazione dell'operatore densità all'oscillazione del neutrino | 21 |
| 3.1 Applicazione nel caso di stati puri | 21 |
| 3.1.1 Caso a due sapori | 21 |
| 3.1.2 Caso a tre sapori | 23 |
| 3.2 Applicazione nel caso di miscele statistiche | 24 |
| 3.2.1 Sovrapposizioni coerenti ed incoerenti di autostati di sapore | 25 |
| 3.2.2 Rappresentazione geometrica nel caso a due sapori | 26 |
| 3.3 Cenni sull'oscillazione in ambienti estremi | 31 |
| Conclusioni | 34 |

Introduzione

La nascita della meccanica quantistica ha costituito senza ombra di dubbio un punto di svolta nella storia della fisica. Formulata nei primi decenni del secolo scorso per la necessità di risolvere alcune importanti problematiche teoriche e sperimentali, la teoria quantistica si è affermata sempre più nel corso degli anni, grazie agli enormi successi e agli ottimi riscontri sperimentali da essa ottenuti. Ancora oggi la meccanica quantistica risulta, malgrado la sua natura poco intuitiva, una delle teorie più utilizzate per le applicazioni e per la risoluzione di problemi fisici. E' proprio questo suo grande successo, a dispetto della sua difficile collocazione tra i paradigmi mentali dell'uomo, che rende l'idea della vastità della sua portata.

Tra le radicali differenze con la fisica classica (quantizzazione di alcune grandezze fisiche, carattere ondulatorio della materia, ecc.), una di quelle che ha destato maggiore scalpore è la natura probabilistica prevista per gli esiti di una misura. L'applicazione alla fisica di distribuzioni di probabilità, valori di aspettazione e fluttuazioni intorno ad essi era già un metodo consolidato (basti pensare alla meccanica statistica o all'analisi di dati sperimentali). Più che nell'idea in sé di non poter prevedere con assoluta certezza l'esito di una misura, la vera novità consisteva nell'impossibilità di farlo persino quando lo stato di un sistema fosse noto con esattezza e se muniti di un apparato di misura ideale. Anche in queste condizioni, infatti, la formulazione matematica della meccanica quantistica permette di stabilire con precisione soltanto i *possibili* esiti della misura con le relative probabilità. Ad ogni grandezza fisica viene così associata una ben precisa distribuzione di probabilità, la quale costituisce la massima informazione accessibile. Nel passaggio alla descrizione di situazioni fisiche più complesse e vicine alla realtà - in cui anziché analizzare il comportamento di una singola particella si può avere a che fare, ad esempio, con un *ensemble statistico* di particelle - si sovrappone, all'indeterminazione intrinsecamente quantistica, quella puramente *statistica*. Nasce allora l'esigenza di un formalismo matematico quanto più chiaro e semplificato possibile, che dia la possibilità di potersi giostrare senza troppe difficoltà tra questi due livelli di indeterminazione.

In questo lavoro di tesi viene presentato l'*operatore densità*, quale strumento matematico che maggiormente si addice alla trattazione di problemi del tipo appena descritto. Viene inoltre proposto un esempio di applicazione dell'operatore densità a un problema fisico reale di grande interesse: l'*oscillazione del neutrino*. La fisica del neutrino è infatti, in generale, uno dei campi di ricerca più attivi degli ultimi decenni. La sua esistenza fu ipotizzata da Pauli nel 1930 e confermata sperimentalmente nel 1956. In base ai dati sperimentali sui decadimenti β dei nuclei atomici, al neutrino fu inizialmente attribuita una massa compatibile con lo zero. Successivamente, ci si rese conto che i neutrini potessero presentarsi in tre diversi *sapori*, ognuno dei quali associato ad un diverso leptone carico (elettrone e^- , muone μ^- e tauone τ^- per i neutrini, con le rispettive antiparticelle per gli antineutrini). Il fenomeno di oscillazione riguarda proprio la possibilità di una transizione da un sapore all'altro durante la propagazione di un fascio di neutrini; il tutto reso è reso possibile dall'eventualità che la massa del neutrino, per quanto piccola,

non sia esattamente nulla.

Nel primo capitolo è trattato il formalismo matematico dell'operatore densità, attraverso lo studio e l'analisi delle sue proprietà. Viene così mostrato in che modo esso racchiuda in maniera compatta le informazioni statistiche e quantistiche di un dato sistema. Nel secondo capitolo sono invece presentate le basi del fenomeno di oscillazione del neutrino: questo è analizzato nel caso di singola particella, allo scopo di mettere in risalto le caratteristiche salienti del problema. Forti dei risultati ottenuti, nel terzo capitolo si passa all'applicazione dell'operatore densità all'oscillazione del neutrino, dapprima ricavando, come utile esercizio, le formule già ottenute nel secondo capitolo e passando, poi, a discutere l'approccio ad un più complicato problema statistico, semplificato da una vantaggiosa rappresentazione geometrica.

Capitolo 1

Formalismo dell'operatore densità

1.1 Stati puri e miscele statistiche

Nell'ambito della teoria quantistica lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un vettore $|\psi\rangle$ appartenente a uno spazio di Hilbert \mathcal{H} . La conoscenza del vettore $|\psi\rangle$ costituisce la massima informazione possibile che si può avere riguardo il sistema preso in considerazione: data una grandezza fisica A , ad essa è associato un operatore autoaggiunto \hat{A} agente in \mathcal{H} i cui autovalori (supponiamo ad esempio siano discreti) sono i possibili esiti di una misura di A ; la probabilità di ottenere come risultato della misura il valore a_n è data dal quadrato della norma della proiezione di $|\psi\rangle$ nell'autospazio relativo all'autovalore a_n . Il carattere probabilistico degli esiti del processo di misura è intrinsecamente legato alla natura quantistica del sistema e non è dovuto ad una mancanza di informazione sul sistema stesso. Quando lo stato del sistema è noto con certezza, si dice che esso si trova in uno *stato puro*. Per determinare $|\psi\rangle$ si può ad esempio effettuare un insieme di misure relative ad un set completo di osservabili che commutano.

Non sempre però lo stato di un sistema fisico è conosciuto con esattezza. Spesso infatti si riesce al più a concludere che il sistema si trova con una certa probabilità p_1 in uno stato $|\psi_1\rangle$, con una probabilità p_2 in uno stato $|\psi_2\rangle$, ..., con una probabilità p_k in uno stato $|\psi_k\rangle$, ... Si dice allora che il sistema si trova in una *miscela statistica* di stati. In questo caso le probabilità $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ non hanno nulla a che fare con la natura quantistica del sistema, bensì dipendono da una mancanza di informazioni su quest'ultimo. Ci troviamo allora dinanzi due diversi livelli di indeterminazione: uno di tipo puramente statistico, dovuto alla conoscenza incompleta dello stato del sistema, l'altro di tipo intrinsecamente quantistico, dovuto al fatto che, anche se conoscessimo lo stato del sistema, l'esito di una misura non sarebbe comunque univocamente determinato. Per calcolare la probabilità che una misura di A dia come risultato a_n , bisognerà allora tenere conto di entrambi questi aspetti. Di conseguenza, è utile introdurre un operatore che racchiuda al suo interno tutte le informazioni necessarie per lo studio di un sistema del genere. Tale operatore viene detto *operatore densità*.

Prima di passare alla sua definizione, è importante sottolineare la differenza tra una miscela statistica degli stati $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle, \dots$ e una loro combinazione lineare $|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle$ con $|c_k|^2 = p_k$. Consideriamo ad esempio una miscela formata dagli stati $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ con probabilità, rispettivamente, p_1 e p_2 . Detti a_n un autovalore non degenere dell'osservabile \hat{A} e $|\varphi_{a_n}\rangle$ l'autostato ad esso associato, distinguiamo i due possibili casi:

1. il sistema si trova nello stato $|\psi_1\rangle \implies$ la probabilità di trovare a_n in una misura di A è:

$$P^{(1)}(a_n) = |\langle \varphi_{a_n} | \psi_1 \rangle|^2 \quad (1.1)$$

2. il sistema si trova nello stato $|\psi_2\rangle \implies$ la probabilità di trovare a_n in una misura di A è:

$$P^{(2)}(a_n) = |\langle \varphi_{a_n} | \psi_2 \rangle|^2 \quad (1.2)$$

Poiché il sistema è in una miscela statistica, la probabilità di avere come esito a_n sarà data dalla media pesata di $P^{(1)}(a_n)$ e $P^{(2)}(a_n)$ con pesi p_1 e p_2 :

$$P(a_n) = p_1 P^{(1)}(a_n) + p_2 P^{(2)}(a_n) \quad (1.3)$$

Viceversa, se il sistema si trova in uno stato $|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle$ con $|c_1|^2 = p_1$ e $|c_2|^2 = p_2$ la probabilità di trovare a_n in una misura di A è:

$$\begin{aligned} P'(a_n) &= |\langle \varphi_{a_n} | \psi \rangle|^2 = |\langle \varphi_{a_n} | c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \rangle|^2 = |c_1 \langle \varphi_{a_n} | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi_{a_n} | \psi_2 \rangle|^2 \\ &= |c_1|^2 |\langle \varphi_{a_n} | \psi_1 \rangle|^2 + |c_2|^2 |\langle \varphi_{a_n} | \psi_2 \rangle|^2 + 2 \operatorname{Re}[c_1 c_2^* \langle \varphi_{a_n} | \psi_1 \rangle \langle \varphi_{a_n} | \psi_2 \rangle^*] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ricordando di aver posto $|c_1|^2 = p_1$ e $|c_2|^2 = p_2$, abbiamo allora:

$$P'(a_n) = P(a_n) + 2 \operatorname{Re}[c_1 c_2^* \langle \varphi_{a_n} | \psi_1 \rangle \langle \varphi_{a_n} | \psi_2 \rangle^*] \quad (1.5)$$

Da quest'ultima relazione ricaviamo che $P(a_n)$ e $P'(a_n)$ differiscono tra di loro per via del termine di interferenza $2 \operatorname{Re}[c_1 c_2^* \langle \varphi_{a_n} | \psi_1 \rangle \langle \varphi_{a_n} | \psi_2 \rangle^*]$. Possiamo allora concludere che una miscela di stati non è equivalente a una loro combinazione lineare.

1.2 Operatore densità per stati puri

Iniziamo con l'introdurre l'operatore densità nel caso di sistemi in uno stato puro $|\psi\rangle$ (che supporremo sempre normalizzato). Dato un operatore autoaggiunto \hat{A} associato all'osservabile A , le quantità fisicamente rilevanti che vogliamo siano accessibili dalla conoscenza dell'operatore densità sono:

1. il valor medio $\langle \hat{A} \rangle(t)$ nel tempo;
2. la probabilità $P(a_n)$ di ottenere un qualunque esito a_n da una misura di A , qualora sia noto il proiettore \hat{P}_n sull'autospazio relativo all'autovalore a_n .

Vogliamo poi che sia nota un'equazione che regoli l'evoluzione temporale dell'operatore densità, così da poter descrivere completamente il sistema ad ogni istante di tempo t .

Per capire come definire un tale operatore, sviluppiamo lo stato $|\psi(t)\rangle$ in una qualunque base ortonormale discreta $\{|e_n\rangle\}_n$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |e_n\rangle \quad (1.6)$$

con $c_n(t) := \langle e_n | \psi(t) \rangle$. Il valor medio di \hat{A} sarà dato da:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{m,n} c_m^*(t) c_n(t) A_{mn} \quad (1.7)$$

con $A_{mn} := \langle e_m | \hat{A} | e_n \rangle$. Definiamo ora l'operatore densità nel seguente modo:

$$\hat{\rho}(t) := |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (1.8)$$

Gli elementi di matrice di $\hat{\rho}(t)$ nella base $\{|e_n\rangle\}_n$ sono dati da:

$$\rho_{mn}(t) := \langle e_m | \hat{\rho}(t) | e_n \rangle = \langle e_m | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | e_n \rangle = c_m(t) c_n^*(t) \quad (1.9)$$

Sostituendo nella 1.7 otteniamo:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_{m,n} \rho_{nm}(t) A_{mn} = \sum_{m,n} \langle e_n | \hat{\rho}(t) | e_m \rangle \langle e_m | \hat{A} | e_n \rangle \quad (1.10)$$

Riconoscendo l'espressione dell'identità $\mathbb{1} = \sum_m |e_m\rangle \langle e_m|$ abbiamo:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_n \langle e_n | \hat{\rho}(t) \hat{A} | e_n \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{A}) \quad (1.11)$$

Quest'ultima relazione soddisfa la richiesta fatta nel punto 1. Notiamo in realtà come la seconda richiesta sia automaticamente soddisfatta nel momento in cui lo sia la prima. Infatti:

$$P(a_n) = \langle \hat{P}_n \psi(t) | \hat{P}_n \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{P}_n^2 | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{P}_n | \psi(t) \rangle = \langle \hat{P}_n \rangle(t) \quad (1.12)$$

e applicando la 1.11 all'operatore \hat{P}_n :

$$P(a_n) = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{P}_n) \quad (1.13)$$

Infine, ricaviamo l'equazione che regola l'evoluzione temporale di $\hat{\rho}(t)$. Detta $\hat{H}(t)$ l'hamiltoniana del sistema, abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \hat{H}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \end{aligned} \quad (1.14)$$

E' utile osservare alcune proprietà dell'operatore $\hat{\rho}(t)$:

- $\hat{\rho}(t)$ ha traccia unitaria. Infatti:

$$\text{Tr}(\hat{\rho}(t)) = \sum_n \rho_{nn} = \sum_n |c_n|^2 = \|\psi(t)\|^2 = 1 \quad (1.15)$$

- $\hat{\rho}(t)$ è autoaggiunto. Infatti:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 | \hat{\rho}(t) \phi_2 \rangle &= \langle \phi_1 | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \phi_2 \rangle = (\langle \phi_2 | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \phi_1 \rangle)^* \\ &= \langle \phi_2 | \hat{\rho}(t) \phi_1 \rangle^* = \langle \hat{\rho}(t) \phi_1 | \phi_2 \rangle \end{aligned} \quad (1.16)$$

- $\hat{\rho}(t)^2 = \hat{\rho}(t)$. Infatti:

$$\hat{\rho}(t)^2 | \phi \rangle = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \phi \rangle = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t) | \phi \rangle = \hat{\rho}(t) | \phi \rangle \quad (1.17)$$

Vedremo come l'ultima proprietà sia valida solo nel caso di sistemi in uno stato puro.

Grazie alle relazioni 1.11, 1.13 e 1.14, che permettono di prevedere valori medi di osservabili, probabilità degli esiti di misura e l'evoluzione temporale di $\hat{\rho}(t)$, è possibile descrivere completamente un sistema in uno stato puro tramite l'operatore densità $\hat{\rho}$ anziché il vettore $|\psi\rangle$.

A questo proposito, vediamo come riscrivere il postulato sull'operazione di misura in termini dell'operatore $\hat{\rho}$. Dopo una misura di \hat{A} che dà come esito a_n , sappiamo che il sistema collassa nello stato rappresentato da $\hat{P}_n |\psi\rangle / \|\hat{P}_n |\psi\rangle\|$, dunque l'operatore densità associato al sistema subito dopo la misura risulta:

$$\hat{\rho}' = \frac{1}{\|\hat{P}_n |\psi\rangle\|^2} \hat{P}_n |\psi\rangle \langle \psi| \hat{P}_n = \frac{1}{\|\hat{P}_n |\psi\rangle\|^2} \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \quad (1.18)$$

Poiché $\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n) = \sum_k \langle e_k | \hat{P}_n |\psi\rangle \langle \psi| \hat{P}_n | e_k \rangle = \|\hat{P}_n |\psi\rangle\|^2$ possiamo concludere che, dopo una misura che dà come esito a_n :

$$\hat{\rho} \longrightarrow \frac{1}{\text{Tr}(\hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n)} \hat{P}_n \hat{\rho} \hat{P}_n \quad (1.19)$$

Con quest'ultima relazione, abbiamo tutto ciò che serve per sostituire l'utilizzo del vettore $|\psi\rangle$ con quello dell'operatore densità $\hat{\rho}$.

1.3 Operatore densità per miscele statistiche

1.3.1 Definizione

Consideriamo un sistema che si trovi in una miscela statistica degli stati $\{|\psi_k\rangle\}_k$ (che supponiamo normalizzati) con probabilità $\{p_k\}_k$. Ricordiamo che le p_k , in quanto probabilità, sono soggette ai vincoli $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$.

Detti \hat{A} un osservabile a spettro discreto e $\{a_n\}_n$ i suoi autovalori, indichiamo con $\langle \hat{A} \rangle_k$ il valor medio dell'operatore \hat{A} se il sistema si trovasse nello stato $|\psi_k\rangle$. Abbiamo allora (sottintendendo le dipendenze dal tempo):

$$\langle \hat{A} \rangle_k = \langle \psi_k | \hat{A} | \psi_k \rangle \quad (1.20)$$

Il valor medio dell'osservabile A eseguito sulla miscela statistica sarà dato da:

$$\langle A \rangle = \sum_k p_k \langle \hat{A} \rangle_k \quad (1.21)$$

Infatti, detta $P^{(k)}(a_n)$ la probabilità di ottenere l'esito a_n da una misura di A se il sistema si trovasse nello stato $|\psi_k\rangle$, la probabilità di trovare a_n quando la misura è eseguita sulla miscela statistica sarà, come per la 1.3:

$$P(a_n) = \sum_k p_k P^{(k)}(a_n) \quad (1.22)$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella seguente:

$$\langle A \rangle = \sum_n P(a_n) a_n \quad (1.23)$$

otteniamo infine:

$$\langle A \rangle = \sum_{n,k} p_k P^{(k)}(a_n) a_n = \sum_k p_k \sum_n P^{(k)}(a_n) a_n = \sum_k p_k \langle \hat{A} \rangle_k \quad (1.24)$$

la quale prova la 1.21.

Per quanto visto nel paragrafo precedente, $\langle \hat{A} \rangle_k$ può essere ricondotto tramite la 1.11 all'operatore $\hat{\rho}_k := |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$:

$$\langle \hat{A} \rangle_k = \text{Tr}(\hat{\rho}_k \hat{A}) \quad (1.25)$$

Sostituendo quest'ultima nella 1.21 abbiamo:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k p_k \text{Tr}(\hat{\rho}_k \hat{A}) = \text{Tr}\left(\sum_k p_k \hat{\rho}_k \hat{A}\right) \quad (1.26)$$

Definendo allora l'operatore densità per miscele statistiche come:

$$\hat{\rho} := \sum_k p_k \hat{\rho}_k = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (1.27)$$

avremo:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}) \quad (1.28)$$

Da quest'ultima relazione otteniamo anche:

$$P(a_n) = \langle \hat{P}_n \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_n) \quad (1.29)$$

Ricaviamo infine, utilizzando la 1.14, l'equazione per l'evoluzione temporale di $\hat{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= \sum_k p_k \frac{d}{dt} \hat{\rho}_k(t) = \sum_k p_k \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}_k(t)] \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \sum_k p_k \hat{\rho}_k(t)] = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \end{aligned} \quad (1.30)$$

detta anche *equazione di Liouville*.

Notiamo come la 1.28, la 1.29 e la 1.30 siano identiche rispettivamente alle 1.11, 1.13 e 1.14 che risultano perciò essere valide, oltre che per stati puri, anche nel caso generale di miscele statistiche. E' allora ancora una volta possibile descrivere interamente il sistema una volta che ne sia assegnato l'operatore densità a un certo istante, in quanto siamo in grado di ricavare da esso l'evoluto $\hat{\rho}(t)$ e da questo il valore medio e le probabilità relative agli esiti della misura di un qualunque osservabile.

La 1.30 merita qualche commento. Bisogna infatti stare attenti a non confonderla con l'equazione di evoluzione temporale per gli osservabili nella rappresentazione di Heisenberg, in quanto la 1.30 è riferita alla rappresentazione di Schrödinger. Indicando con $\hat{U}(t)$ l'evolutore temporale del sistema e ricordando che esso è soluzione di:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t) \hat{U}(t) \\ \hat{U}(0) = \mathbb{1} \end{cases} \quad (1.31)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t)) &= \left(\frac{d}{dt} \hat{U}(t) \right) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) + \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \left(\frac{d}{dt} \hat{U}^\dagger(t) \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \hat{H}(t) \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) - \frac{1}{i\hbar} \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) \hat{H}(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t)] \end{aligned} \quad (1.32)$$

Da questo e dal fatto che:

$$\hat{U}(0) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(0) = \mathbb{1} \hat{\rho}(0) \mathbb{1} = \hat{\rho}(0) \quad (1.33)$$

deduciamo che:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^+(t) \quad (1.34)$$

in quanto il secondo membro è soluzione dell'equazione di Liouville con le stesse condizioni iniziali di $\hat{\rho}(t)$. Di conseguenza, *in rappresentazione di Heisenberg l'operatore densità rimane costante*:

$$\hat{\rho}_H(t) = \hat{U}^+(t) \hat{\rho}(t) \hat{U}(t) = \hat{U}^+(t) \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^+(t) \hat{U}(t) = \hat{\rho}(0) \quad (1.35)$$

1.3.2 Proprietà

Passiamo ad esaminare alcune importanti proprietà dell'operatore densità definito nel caso generale di miscele statistiche.

Proprietà 1. $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$.

Dimostrazione. $\text{Tr} \hat{\rho} = \text{Tr}(\sum_k p_k \hat{\rho}_k) = \sum_k p_k \text{Tr} \hat{\rho}_k$ ma, per la 1.15, $\text{Tr} \hat{\rho}_k = 1 \implies \text{Tr} \hat{\rho} = \sum_k p_k = 1$. \square

Proprietà 2. $\hat{\rho}$ è autoaggiunto e definito positivo.

Dimostrazione. Per l'autoaggiuntezza basta osservare che $\hat{\rho}$ è una combinazione lineare a coefficienti reali di operatori autoaggiunti. Inoltre:

$$\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle = \langle \phi | \left(\sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) | \phi \rangle = \sum_k p_k |\langle \psi_k | \phi \rangle|^2 \geq 0 \quad \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.36) \quad \square$$

Notiamo che non per forza gli stati $\{|\psi_k\rangle\}_k$ sono ortonormali. La proprietà 2, però, ci dice che possiamo sempre trovare un set ortormale di autostati di $\hat{\rho}$.

Proprietà 3. Gli autovalori $\{\pi_k\}_k$ di $\hat{\rho}$ sono tali che $0 \leq \pi_k \leq 1 \quad \forall k$.

Dimostrazione. La disuguaglianza $\pi_k \geq 0$ segue dal fatto che $\hat{\rho}$ è definito positivo. Poiché inoltre $\hat{\rho}$ è autoaggiunto, la sua traccia sarà uguale alla somma dei suoi autovalori (essa è invariante per cambio di base e, calcolandola in una base ortonormale di autostati di $\hat{\rho}$, otteniamo proprio $\text{Tr} \hat{\rho} = \sum_k \pi_k$). Allora, poiché $\pi_k \geq 0$:

$$\pi_k \leq \sum_k \pi_k = \text{Tr} \hat{\rho} = 1 \quad (1.37) \quad \square$$

Consideriamo adesso un nuovo sistema che si trovi in una miscela statistica degli stati $\{|\phi_k\rangle\}_k$ con probabilità $\{\pi_k\}_k$, dove i $\{|\phi_k\rangle\}_k$ formano una base di autostati di $\hat{\rho}$ (si noti che ciò è sempre lecito in quanto le π_k soddisfano le condizioni $0 \leq \pi_k \leq 1$ e $\sum_k \pi_k = 1$). L'operatore densità ad esso associato è:

$$\hat{\rho}' = \sum_k \pi_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k| = \hat{\rho} \quad (1.38)$$

Dunque la "rappresentazione" iniziale, in cui abbiamo immaginato il nostro sistema come in una miscela statistica degli stati $\{|\psi_k\rangle\}_k$ con probabilità $\{p_k\}_k$, non è unica. Questo conferisce un ruolo centrale all'operatore densità: possiamo pensare il nostro sistema come scomposto in diverse miscele statistiche tra di loro equivalenti (ossia che permettono di formulare le stesse predizioni fisiche); ad accomunare le varie miscele è l'operatore densità che, invece, rimane lo stesso ed è l'elemento unificante che caratterizza il sistema. Ciò nonostante, la rappresentazione in cui $\hat{\rho}$ è diagonale è utile per

stabilire se il sistema considerato si trova in uno stato puro o in una miscela di stati. Se infatti il sistema si trova in uno stato puro $|\psi\rangle$, allora $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ è il proiettore sul sottospazio unidimensionale generato da $|\psi\rangle$. Di conseguenza, $\hat{\rho}$ possiede gli autovalori 0 e 1, dove 1 è non degenere. Assegnata allora la matrice associata a $\hat{\rho}$ in una base che lo diagonalizza, basta controllare gli elementi diagonali: se essi sono tutti nulli tranne uno uguale ad 1, allora il sistema si trova in uno stato puro; in tutti gli altri casi esso si trova in una miscela statistica. Un criterio di giudizio più semplice, che può essere eseguito una volta data la matrice associata a $\hat{\rho}$ in una *qualunque* base (così da aggirare la procedura di diagonalizzazione), è fornito dalla seguente proprietà:

Proprietà 4. $\text{Tr } \hat{\rho}^2 \leq 1$, dove il segno di uguaglianza vale se e soltanto se il sistema si trova in uno stato puro.

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare che $\text{Tr } \hat{\rho}^2 \leq 1$. Sappiamo che, gli autovalori di $\hat{\rho}^2$ sono: $\{\pi_k^2\}_k$. Abbiamo dunque:

$$\text{Tr } \hat{\rho}^2 = \sum_k \pi_k^2 \leq \left(\sum_k \pi_k \right)^2 = 1 \quad (1.39)$$

Adesso, se il sistema si trova in uno stato puro, abbiamo un unico autovalore non nullo e, nella 1.39, vale il segno d'uguaglianza. Viceversa, se vale la relazione $\sum_k \pi_k^2 = \left(\sum_k \pi_k \right)^2 = 1$, allora necessariamente uno solo tra i π_k è diverso da zero e il sistema di conseguenza si trova in uno stato puro. \square

Osserviamo infine come un qualunque operatore \hat{O} che sia autoaggiunto, definito positivo e abbia traccia unitaria possa essere considerato un operatore densità relativo ad un qualche sistema. Infatti, da queste tre proprietà discende che gli autovalori α_k di \hat{O} verificano i vincoli $0 \leq \alpha_k \leq 1$ e $\sum_k \alpha_k = 1$ (la dimostrazione è identica a quella della proprietà 3) e inoltre:

$$\hat{O} = \sum_k \alpha_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| \quad (1.40)$$

dove i $|\psi_k\rangle$ formano una base ortonormale di autostati di \hat{O} . Esso può dunque considerarsi associato, ad esempio, ad una miscela statistica degli stati $|\psi_k\rangle$ con probabilità $\{\alpha_k\}_k$.

1.3.3 Analogie con la meccanica classica

In meccanica classica a rappresentare lo stato di un sistema è un punto (\vec{q}, \vec{p}) nello spazio delle fasi. Quando lo stato del sistema non è noto con certezza, si ricorre a una funzione densità $\rho(\vec{q}, \vec{p})$ definita proprio nello spazio delle fasi e tale che $\rho(\vec{q}, \vec{p}) dq dp$ corrisponde alla probabilità di trovare il sistema in uno stato rappresentato nel volume infinitesimo $dq dp$ centrato intorno al punto (\vec{q}, \vec{p}) . L'operatore densità $\hat{\rho}$ e la funzione densità $\rho(\vec{q}, \vec{p})$ presentano alcune analogie:

- $\int \rho(\vec{q}, \vec{p}) dq dp = 1$ così come $\text{Tr } \hat{\rho} = 1$;
- $0 \leq \rho(\vec{q}, \vec{p}) \leq 1$ così come gli autovalori di $\hat{\rho}$ soddisfano: $0 \leq \pi_k \leq 1$;
- l'equazione di evoluzione temporale per ρ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \{H, \rho\} \quad (1.41)$$

dove con $\{\cdot, \cdot\}$ sono indicate le parentesi di Poisson, è formalmente analoga alla 1.30 se in luogo di H e ρ si considerano gli operatori \hat{H} e $\hat{\rho}$ e se si opera la sostituzione $\{\cdot, \cdot\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]$;

- dato un osservabile $A(\vec{q}, \vec{p})$, la conoscenza di $\rho(\vec{q}, \vec{p})$ permette di calcolare il valor medio di A nel seguente modo:

$$\langle A \rangle = \int \rho(\vec{q}, \vec{p}) A(\vec{q}, \vec{p}) dq dp \quad (1.42)$$

Allo stesso modo, se \hat{A} è l'operatore associato ad A , allora $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$.

Queste caratteristiche comuni sono alla base della generalizzazione al caso quantistico di alcuni risultati della meccanica classica statistica. Ad esempio, un sistema quantistico in equilibrio termodinamico in un bagno termico a temperatura T si troverà in una miscela statistica rappresentata dall'operatore densità $\hat{\rho} = Z^{-1} \exp(-\frac{\hat{H}}{kT})$, con k costante di Boltzmann e Z^{-1} una costante tale che $\hat{\rho}$ abbia traccia unitaria: $Z = (\text{Tr} \exp(-\frac{\hat{H}}{kT}))$. In questo caso $[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0$ ed è possibile trovare una base ortonormale di autostati comuni a \hat{H} e $\hat{\rho}$. In particolare data una qualunque base $\{|\phi_j\rangle\}_j$ di autostati di \hat{H} , dall'espressione di $\hat{\rho}$ ricaviamo che:

$$\hat{\rho} |\phi_j\rangle = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_j}{kT}\right) |\phi_j\rangle \quad (1.43)$$

e il sistema può essere considerato in una miscela statistica degli stati $\{|\phi_j\rangle\}_j$ con probabilità $\{\exp(-\frac{E_j}{kT})/Z\}_j$.

Consideriamo come esempio un insieme di particelle con spin $S = 1/2$ debolmente interagenti e immerse in un campo magnetico uniforme \vec{B} . Orientando l'asse z del nostro sistema di riferimento lungo la direzione del campo, l'Hamiltoniana che regola l'evoluzione della parte di spin si scrive come:

$$\hat{H} = -\gamma \hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} = -\gamma B \hat{S}_z \quad (1.44)$$

con γ fattore giromagnetico. Di conseguenza l'operatore densità risulta:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{\gamma B \hat{S}_z}{kT}\right) \quad (1.45)$$

Gli autostati $|1/2, \pm 1/2\rangle$ di \hat{S}_z sono anche autostati di $\hat{\rho}$ di autovalori $\exp(\pm \gamma B \hbar / 2kT)$. La matrice densità in questa base sarà allora:

$$\underline{\rho} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\gamma B \hbar}{2kT}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\gamma B \hbar}{2kT}\right) \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

La magnetizzazione macroscopica del sistema è definita come $\vec{M} := n\gamma\langle\hat{\vec{S}}\rangle$, dove n è la densità numerica di particelle. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{S}_x) \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \\ \frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) & 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{S}_y) \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \\ i\frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) & 0 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}
M_z &= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{S}_z) \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{n\gamma}{Z} \frac{\hbar}{2} \left[\exp\left(\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) - \exp\left(-\frac{\gamma B\hbar}{2kT}\right) \right]
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Per temperature tali che $\gamma B\hbar \ll 2kT$ possiamo scrivere, arrendoci al primo ordine:

$$Z \simeq \left(1 + \frac{\gamma B\hbar}{2kT} + 1 - \frac{\gamma B\hbar}{2kT} \right) = 2 \tag{1.50}$$

$$M_z \simeq \frac{n\gamma\hbar}{4} \left(1 + \frac{\gamma B\hbar}{2kT} - 1 + \frac{\gamma B\hbar}{2kT} \right) = \frac{n\gamma^2\hbar^2 B}{4kT} \tag{1.51}$$

la quale è la legge di Curie per la magnetizzazione di particelle con spin $S = 1/2$.

1.4 Operatore densità ridotto

Uno dei problemi in cui l'introduzione di un operatore densità è di grande aiuto è quello dello studio di sistemi quantistici in interazione, in particolare quando siamo interessati ad analizzare solo uno dei sistemi in gioco. Per rendersi conto dell'importanza di tale situazione, basta notare che ogniqualevolta schematizziamo l'interazione di un sistema X con l'esterno attraverso un determinato potenziale \hat{V} , stiamo commettendo un'approssimazione: stiamo cioè assumendo che X non abbia influenza sulle sorgenti esterne che generano il potenziale. Una descrizione più dettagliata dovrebbe tener conto del sistema complessivo Z composto da X (che vogliamo analizzare) e dal sistema Y formato delle sorgenti esterne.

Siano allora \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 gli spazi di Hilbert associati rispettivamente a X e Y . Lo spazio di Hilbert \mathcal{H} associato a Z sarà dato dal prodotto tensore $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Scelte allora una base ortonormale $\{|u_j(1)\rangle\}_j$ in X e una $\{|v_k(2)\rangle\}_k$ in Y , una base ortonormale di \mathcal{H} è data da:

$$\{|e_{j,k}\rangle := |u_j(1)\rangle \otimes |v_k(2)\rangle\}_{j,k} \quad (1.52)$$

dove con (1) e (2) sono indicate le generiche variabili relative rispettivamente ai sistemi X e Y . D'ora in avanti il prodotto tensore tra due vettori $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ sarà indicato con la notazione contratta $|\phi_1\rangle|\phi_2\rangle$.

Poiché siamo interessati all'analisi del sistema X , consideriamo un osservabile A relativo al primo sistema. Ciò vuol dire che in \mathcal{H} ad esso è associato:

$$\hat{A}(1) := \hat{A} \otimes \mathbb{1} \quad (1.53)$$

dove \hat{A} è l'operatore definito in \mathcal{H}_1 associato all'osservabile A . Detto $\hat{\rho}$ l'operatore densità relativo al sistema Z , per la 1.28 il valor medio di $\hat{A}(1)$ sullo stato di \mathcal{H} in cui si trova Z risulta:

$$\langle \hat{A}(1) \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}(1)) = \sum_{j,k} \langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle | v_k(2) \rangle \quad (1.54)$$

Utilizzando la relazione di chiusura $\mathbb{1} = \sum_{j',k'} |u_{j'}(1)\rangle |v_{k'}(2)\rangle \langle u_{j'}(1)| \langle v_{k'}(2)|$, e ricordando che $\hat{A}(1)$ agisce solo sulle variabili del sistema X , abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}(1) \rangle &= \sum_{j,k,j',k'} \langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_{k'}(2) \rangle \langle u_{j'}(1) | \langle v_{k'}(2) | \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle | v_k(2) \rangle \\ &= \sum_{j,k,j',k'} \left[\langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_{k'}(2) \rangle \right] \left[\langle u_{j'}(1) | \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle \right] \langle v_{k'}(2) | v_k(2) \rangle \\ &= \sum_{j,k,j',k'} \left[\langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_{k'}(2) \rangle \right] \left[\langle u_{j'}(1) | \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle \right] \delta_{k,k'} \\ &= \sum_{j,k,j'} \left[\langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_k(2) \rangle \right] \left[\langle u_{j'}(1) | \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle \right] \end{aligned} \quad (1.55)$$

Definendo allora l'*operatore densità ridotto* come quell'operatore $\hat{\rho}(1)$ (agente sulle variabili del primo sistema) i cui elementi di matrice nella base $\{|u_j(1)\rangle\}_j$ sono:

$$\langle u_j | \hat{\rho}(1) | u_{j'} \rangle := \sum_k \langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_k(2) \rangle \quad (1.56)$$

e sostituendo la loro espressione all'interno della 1.55, otteniamo:

$$\begin{aligned}\langle \hat{A}(1) \rangle &= \sum_{j,j'} \langle u_j(1) | \hat{\rho}(1) | u_{j'}(1) \rangle \langle u_{j'}(1) | \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle \\ &= \sum_j \langle u_j(1) | \hat{\rho}(1) \hat{A}(1) | u_j(1) \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1}(\hat{\rho}(1) \hat{A}(1))\end{aligned}\quad (1.57)$$

dove $\text{Tr}_{\mathcal{H}_1}$ indica la traccia eseguita sugli operatori pensati come definiti in \mathcal{H}_1 . Spesso la 1.56 viene scritta in forma operatoriale come:

$$\hat{\rho}(1) = \text{Tr}_2 \hat{\rho} \quad (1.58)$$

dove Tr_2 viene indicata come un'operazione di "traccia parziale" eseguita sulle variabili (2).

La 1.57 ci dice che tutte le quantità fisiche misurabili relative al sistema X sono calcolabili in termini dell'operatore $\hat{\rho}(1)$ nello stesso modo in cui ciò avviene per sistemi non composti. $\hat{\rho}(1)$ è dunque un operatore definito sullo spazio \mathcal{H}_1 che contiene tutte le informazioni fisicamente rilevanti sul sistema X . Esso è inoltre autoaggiunto, definito positivo e a traccia unitaria. Infatti:

$$\begin{aligned}\langle u_{j'} | \hat{\rho}(1) | u_j \rangle &= \sum_k \langle u_{j'}(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_j(1) \rangle | v_k(2) \rangle \\ &= \sum_k (\langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_k(2) \rangle)^* = \langle u_j | \hat{\rho}(1) | u_{j'} \rangle^*\end{aligned}\quad (1.59)$$

la quale prova l'autoggiuntezza, mentre $\forall |\phi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle \in \mathcal{H}_1$:

$$\begin{aligned}\langle \phi | \hat{\rho}(1) | \phi \rangle &= \sum_{j,j'} c_j^* \langle u_j | \hat{\rho}(1) | u_{j'} \rangle c_{j'} = \sum_{j,k,j'} c_j^* \langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_{j'}(1) \rangle | v_k(2) \rangle c_{j'} \\ &= \sum_k \langle \phi | \langle v_k | \hat{\rho} | \phi \rangle | v_k \rangle \geq 0\end{aligned}\quad (1.60)$$

la quale prova che $\hat{\rho}(1)$ è definito positivo. Infine:

$$\text{Tr} \hat{\rho}(1) = \sum_j \langle u_j | \hat{\rho}(1) | u_j \rangle = \sum_{j,k} \langle u_j(1) | \langle v_k(2) | \hat{\rho} | u_j(1) \rangle | v_k(2) \rangle = \text{Tr} \hat{\rho} = 1 \quad (1.61)$$

Nonostante $\hat{\rho}(1)$ verifichi queste proprietà, non bisogna confonderlo con un vero e proprio operatore densità per il sistema X : lo sarebbe solo se soddisfacesse l'equazione di Liouville. Invece:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(1) = \text{Tr}_2 \frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_2 [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (1.62)$$

Dunque $\hat{\rho}(1)$ ci permette di ragionare in questo modo: in un qualunque istante t_0 , anche se il sistema Z non si trova in uno stato prodotto, possiamo considerare una base $\{ |\psi_{k,t_0}\rangle \}_k$ di autostati di $\hat{\rho}(1, t_0)$ e immaginare il sistema X come in una miscela statistica di questi autostati, con probabilità pari agli autovalori π_k corrispondenti. Ad un istante t successivo possiamo ripetere questo ragionamento ma, poiché $\hat{\rho}(1, t)$ non soddisfa l'equazione di Liouville, gli autostati $\{ |\psi_{k,t}\rangle \}_k$ di $\hat{\rho}(1, t)$ non sono gli evoluti temporali degli stati $\{ |\psi_{k,t_0}\rangle \}_k$, bensì sono da ottenersi eseguendo nuovamente la diagonalizzazione all'istante t .

Capitolo 2

Oscillazione del neutrino

2.1 Il neutrino nel modello standard

L'esistenza del neutrino fu ipotizzata per la prima volta da Pauli nel 1930 analizzando gli spettri energetici degli elettroni (o dei positroni) emessi nei decadimenti β . Per fissare le idee, consideriamo un decadimento β^- : se un nucleo padre ${}^A_Z X$ decadesse soltanto in un nucleo figlio ${}^A_{Z+1} Y$ e un elettrone (decadimento a due corpi), si dovrebbe avere, per l'elettrone, uno spettro energetico piccato intorno a un determinato valore. Nel sistema del centro di massa, infatti, $T_X = 0$ e, definendo il Q -value della reazione come $Q = m_X - m_Y - m_e$, abbiamo, per conservazione dell'energia, $T_Y + T_e = Q$. Poiché $m_e \ll m_Y$, il rinculo T_Y del nucleo Y è trascurabile rispetto a T_e che, dunque, risulta circa uguale a Q (da cui la natura discreta dello spettro energetico elettronico). Tutto ciò non coincide però con quanto fu all'epoca osservato: lo spettro energetico dell'elettrone presentava infatti un andamento continuo, come se il decadimento fosse a tre corpi. Per spiegare questa caratteristica, Pauli fu allora portato a supporre l'esistenza di una particella neutra, che indicheremo con ν , emessa insieme alle altre due nel decadimento β , così che $T_e + T_\nu \simeq Q' = m_X - m_Y - m_e - m_\nu$. Misurando il valore massimo di T_e (in corrispondenza del quale $T_\nu = 0$) si poteva ottenere perciò una stima di Q' . Si osservò che il valore così misurato di Q' era compatibile con quello di Q , portando la particella ν ad avere una massa compatibile con lo zero. Per questo motivo Fermi chiamò la nuova particella *neutrino*.

Nel 1956 Cowan e Reines confermarono sperimentalmente l'esistenza del neutrino, riuscendo a rivelare eventi:

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+ \quad (2.1)$$

provocati dal flusso di antineutrini uscenti da un reattore nucleare.

Oggi, in accordo con il Modello Standard, i neutrini sono inquadrati all'interno della famiglia dei *leptoni*, nella quale possiamo individuare tre doppietti di particelle:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ognuno formato da un leptone carico e dal neutrino ad esso associato. Ai tre doppietti di particelle si accompagnano i relativi doppietti di antiparticelle. Ciò che distingue i neutrini *elettronici*, *muonici* e *tauonici* è il fatto che essi prendono parte a reazioni in cui compaiono rispettivamente elettroni, muoni e tauoni. Così ad esempio un neutrino prodotto dal decadimento:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (2.3)$$

può interagire con un neutrone dando luogo alla reazione:

$$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p \quad (2.4)$$

tra i cui prodotti compare un muone μ^- e non un elettrone e^- . Ciò rende il neutrino un neutrino muonico.

E' importante sottolineare che il Modello Standard assegna massa nulla ai neutrini. Come invece vedremo nel prossimo paragrafo, è proprio la caratteristica di avere una massa diversa da zero (seppur molto piccola) a rendere possibile un fenomeno di oscillazione.

2.2 Introduzione al fenomeno di oscillazione

Come detto nel paragrafo precedente, i neutrini possono presentarsi in tre diversi *sapori*: elettronico, muonico e tauonico. A ognuno di essi è associato un *autostato di sapore debole* $|\nu_\alpha\rangle$, con $\alpha = e, \mu, \tau$. Non è detto però che tali autostati, nell'ipotesi in cui il neutrino abbia una massa non nulla, debbano necessariamente coincidere con gli autostati di massa $|\nu_j\rangle$, con $j = 1, 2, 3$. Al contrario, possiamo in generale supporre che ogni autostato di sapore non abbia una massa ben definita, bensì sia una sovrapposizione di tutti e tre gli autostati di massa, data dalla combinazione lineare:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{j\alpha}^+ |\nu_j\rangle \quad (2.5)$$

dove con U è indicata la matrice unitaria 3x3 del cambio di riferimento dalla base $\{|\nu_j\rangle\}_{j=1,2,3}$ alla base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_{\alpha=e,\mu,\tau}$. La 2.5 si può esprimere come:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* |\nu_j\rangle \quad (2.6)$$

Poiché i neutrini vengono prodotti e rivelati come autostati di sapore, ma la loro evoluzione temporale è dettata dagli autostati di massa, nella loro propagazione può avvenire il cosiddetto fenomeno di *oscillazione del neutrino*: un neutrino che possiede inizialmente un ben definito sapore α potrebbe essere rivelato, dopo un certa distanza percorsa, in un sapore $\beta \neq \alpha$. In particolare gli autostati di massa seguono la legge di evoluzione temporale (d'ora in avanti sceglieremo $\hbar = 1$, $c = 1$):

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-iE_j t} |\nu_j\rangle \quad (2.7)$$

con $E_j = \sqrt{p^2 + m_j^2}$, dove p è il momento del neutrino. Di conseguenza, a un generico istante t , l'evoluto temporale $|\nu_\alpha(t)\rangle$ dello stato $|\nu_\alpha\rangle$ sarà:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* |\nu_j(t)\rangle = \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} |\nu_j\rangle \quad (2.8)$$

Poiché allora gli autostati di massa $|\nu_j\rangle$ evolvono con frequenze diverse, il fenomeno di oscillazione può avvenire.

2.3 Oscillazione a due sapori

Consideriamo per il momento due soli autostati di massa $|\nu_j\rangle$ con $j = 1, 2$ e i due autostati di sapore $|\nu_\alpha\rangle$ con $\alpha = e, \mu$. Vogliamo stimare la *probabilità di transizione* $P_{\alpha \rightarrow \beta}(L)$ che un neutrino inizialmente nel sapore α venga rivelato, dopo una distanza percorsa L , nel sapore $\beta \neq \alpha$ e la *probabilità di sopravvivenza* $P_{\alpha \rightarrow \alpha}(L) = 1 - P_{\alpha \rightarrow \beta}(L)$ che esso sia invece rivelato nello stesso sapore α .

La matrice U del cambio riferimento è una matrice unitaria 2x2 ed è possibile, tenendo conto che i vettori di base sono definiti a meno di una fase fisicamente irrilevante, parametrizzarla attraverso un angolo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ottenendo:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La relazione tra gli autostati di sapore e quelli di massa risulta:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{e2}^* \\ U_{\mu1}^* & U_{\mu2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

All'istante iniziale il neutrino si trova nello stato:

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha 1}^* |\nu_1\rangle + U_{\alpha 2}^* |\nu_2\rangle \quad (2.11)$$

Il suo evoluto temporale all'istante t è dato da:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = U_{\alpha 1}^* |\nu_1(t)\rangle + U_{\alpha 2}^* |\nu_2(t)\rangle = U_{\alpha 1}^* e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + U_{\alpha 2}^* e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle \quad (2.12)$$

Possiamo esprimere gli autostati di massa in termini di quelli di sapore invertendo la relazione 2.10. Per l'unitarietà della matrice U si ha:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{\mu 1} \\ U_{e2} & U_{\mu 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Sostituendo quest'ultima nella 2.12 otteniamo:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(t)\rangle &= U_{\alpha 1}^* e^{-iE_1 t} (U_{e1} |\nu_e\rangle + U_{\mu 1} |\nu_\mu\rangle) + U_{\alpha 2}^* e^{-iE_2 t} (U_{e2} |\nu_e\rangle + U_{\mu 2} |\nu_\mu\rangle) \\ &= (U_{\alpha 1}^* U_{e1} e^{-iE_1 t} + U_{\alpha 2}^* U_{e2} e^{-iE_2 t}) |\nu_e\rangle + (U_{\alpha 1}^* U_{\mu 1} e^{-iE_1 t} + U_{\alpha 2}^* U_{\mu 2} e^{-iE_2 t}) |\nu_\mu\rangle \\ &= \sum_{\beta=e, \mu} (U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} e^{-iE_1 t} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} e^{-iE_2 t}) |\nu_\beta\rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

e, di conseguenza:

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha \rangle|^2 = |U_{\alpha 1}^* U_{\beta 1} e^{-iE_1 t} + U_{\alpha 2}^* U_{\beta 2} e^{-iE_2 t}|^2 \\ &= |U_{\alpha 1}|^2 |U_{\beta 1}|^2 + |U_{\alpha 2}|^2 |U_{\beta 2}|^2 + 2 \operatorname{Re}[(U_{\alpha 1} U_{\alpha 2}^* U_{\beta 1}^* U_{\beta 2} e^{-i(E_2 - E_1)t})] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Se $\alpha \neq \beta$ allora, dalla 2.9 abbiamo:

$$\begin{aligned} |U_{\alpha 1}|^2 |U_{\beta 1}|^2 &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ |U_{\alpha 2}|^2 |U_{\beta 2}|^2 &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ U_{\alpha 1} U_{\alpha 2}^* U_{\beta 1}^* U_{\beta 2} &= -\sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

e sostituendo nella 2.15 otteniamo, infine, la *probabilità di transizione*:

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \cos[(E_2 - E_1)t]) \\ &= \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[\frac{(E_2 - E_1)t}{2} \right] \quad (\alpha \neq \beta) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Poichè il neutrino ha una massa molto piccola, è facile trovarsi in condizioni ultra-relativistiche ($p \gg m_j$) e possiamo approssimare:

$$E_2 - E_1 = \sqrt{p^2 + m_2^2} - \sqrt{p^2 + m_1^2} \simeq p + \frac{m_2^2}{2p} - p - \frac{m_1^2}{2p} = \frac{\Delta m^2}{2p} \simeq \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (2.18)$$

con $\Delta m^2 := m_2^2 - m_1^2$. Inoltre, essendo in queste condizioni $\beta \simeq 1$, consideriamo $L \simeq t$ e la 2.17 diventa:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(L) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right] \quad (2.19)$$

Di conseguenza:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(L) = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[\frac{\Delta m^2 L}{4E} \right] \quad (2.20)$$

Il periodo di oscillazione λ è dato da:

$$\lambda = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \simeq 2,48 \text{ km} \frac{E}{\Delta m^2} \frac{\text{eV}^2}{\text{GeV}} \quad (2.21)$$

2.4 Oscillazione a tre sapori

Nella situazione reale, con tre autostati di sapore e tre autostati di massa, U è una matrice unitaria 3x3 che si può parametrizzare, con una particolare scelta di fase per i vettori di base, tramite tre angoli di mixing θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} e una fase δ nel modo seguente:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

con $c_{ij} := \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} := \sin \theta_{ij}$. Procedendo in maniera analoga al caso a due sapori, sostituiamo nella 2.8 la relazione:

$$|\nu_j\rangle = \sum_{\beta} U_{\beta j} |\nu_{\beta}\rangle \quad (2.23)$$

ottenendo così:

$$|\nu_{\alpha}(t)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} |\nu_j\rangle = \sum_{j,\beta} U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} |\nu_{\beta}\rangle \quad (2.24)$$

Perciò la probabilità di transizione dallo stato α a quello β è data da:

$$\begin{aligned} P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) &= |\langle \nu_{\beta} | \nu_{\alpha} \rangle|^2 = \left| \sum_j U_{\beta j} U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} \right|^2 \\ &= \sum_{j,k} U_{\alpha k} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta k}^* e^{-i(E_j - E_k)t} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tabella 2.1: Valori di best-fit e intervalli a 2σ , 3σ , e 4σ per i parametri di mixing dei neutrini ottenuti dall'analisi dati globali in [7].

| Parametro | Best Fit | 2σ | 3σ | 4σ |
|-------------------------------------|----------|--------------|--------------|--------------|
| Δm_{21}^2 [$10^{-5}eV^2$] | 8.1 | 7.5 - 8.7 | 7.2 - 9.1 | 7.0 - 9.4 |
| Δm_{31}^2 [$10^{-3}eV^2$] | 2.2 | 1.7 - 2.9 | 1.4 - 3.3 | 1.1 - 3.7 |
| θ_{12} | 0.30 | 0.23 - 0.34 | 0.23 - 0.38 | 0.21 - 0.41 |
| θ_{13} | 0.50 | 0.38 - 0.64 | 0.34 - 0.68 | 0.30 - 0.72 |
| θ_{23} | 0.000 | ≤ 0.028 | ≤ 0.046 | ≤ 0.068 |

Quest'ultima relazione può essere riscritta come:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 |U_{\beta j}|^2 + 2 \sum_{j < k} \text{Re}[U_{\alpha k} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta k}^* e^{-i(E_j - E_k)t}] \quad (2.26)$$

la quale, per $\alpha = \beta$ ci dà la *probabilità di sopravvivenza*:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) = \sum_j |U_{\alpha j}|^4 + 2 \sum_{j < k} |U_{\alpha j}|^2 |U_{\alpha k}|^2 \cos[(E_j - E_k)t] \quad (2.27)$$

Come nel caso a due sapori, ad entrare nelle formule delle probabilità sono soltanto le *differenze* di energia che, ancora una volta, possiamo approssimare come:

$$E_j - E_k \simeq \frac{\Delta m_{jk}^2}{2E} \quad (2.28)$$

dove le $\Delta m_{jk}^2 := m_j^2 - m_k^2$ sono i parametri fisici rilevanti nel processo di oscillazione. Date Δm_{21}^2 e Δm_{31}^2 , la terza si ottiene come $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2$. Notiamo inoltre come le ampiezze di oscillazione dipendono soltanto dalle quantità $U_{\alpha k} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\beta k}^*$, le quali sono indipendenti dalla parametrizzazione scelta per la matrice U , in quanto non variano mandando $U_{\alpha j} \rightarrow e^{-i\varphi_a} U_{\alpha j} e^{i\varphi_b}$. Valori dei cinque parametri di mixing Δm_{21}^2 , Δm_{31}^2 , θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} ottenuti da un'analisi globale di dati sperimentali raccolti ([7]) sono mostrati in tabella 2.1.

2.5 Cenni sull'oscillazione in presenza di materia

Nei paragrafi precedenti, nessun termine di interazione con la materia è stato preso in considerazione nell'Hamiltoniana del sistema. Ciò significa che i risultati ottenuti sono validi per oscillazioni nel vuoto. In presenza di materia i neutrini possono prendere parte a *interazioni deboli* di *corrente neutra* e di *corrente carica*. Le prime sono insignificanti per il fenomeno di oscillazione, essendo indipendenti dal sapore del neutrino e contribuendo per un fattore di fase comune. Le seconde sono invece dovute alla presenza di elettroni (quella di muoni e tauoni è trascurabile nella materia ordinaria) che possono interagire con i neutrini elettronici in fenomeni di scattering:

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \quad (2.29)$$

dando quindi un contributo significativo all'oscillazione. L'Hamiltoniana di interazione che schematizza il fenomeno è data, al primo ordine nella *costante di Fermi* G_F , da ([6]):

$$\hat{H}_I = \sqrt{2} G_F N_e |\nu_e\rangle \langle \nu_e| \quad (2.30)$$

dove N_e , che supporremo costante, è la differenza tra la densità degli elettroni e quella dei positroni nel mezzo. \hat{H}_I è dunque diagonale nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ e moltiplica la componente elettronica del vettore di stato per il fattore $V_{CC} := \sqrt{2}G_F n_e$, eliminando le altre.

Limitiamoci per semplicità al caso di due sapori $|\nu_\alpha\rangle$ con $\alpha = e, \mu$. L'Hamiltoniana di propagazione nel vuoto, diagonale nella base $\{|\nu_j\rangle\}_j$, è rappresentata nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ dalla matrice:

$$\begin{aligned} \underline{H}_0 &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p + \frac{m_1^2}{2p} & 0 \\ 0 & p + \frac{m_2^2}{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu2}^* \end{pmatrix} \\ &= p\underline{\mathbb{1}} + \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2|U_{e1}|^2 + m_2^2|U_{e2}|^2 & m_1^2U_{e1}U_{\mu1}^* + m_2^2U_{e2}U_{\mu2}^* \\ m_1^2U_{e1}^*U_{\mu1} + m_2^2U_{e2}^*U_{\mu2} & m_1^2|U_{\mu1}|^2 + m_2^2|U_{\mu2}|^2 \end{pmatrix} \\ &= p\underline{\mathbb{1}} + \frac{1}{2p} \begin{pmatrix} m_1^2 \cos^2 \theta + m_2^2 \sin^2 \theta & \frac{\Delta m^2}{2} \sin(2\theta) \\ \frac{\Delta m^2}{2} \sin(2\theta) & m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Notiamo che un termine del tipo $\lambda \hat{\mathbb{1}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, all'interno dell'Hamiltoniana non produce altro che uno shift dei livelli energetici, lasciando inalterati gli autostati dell'Hamiltoniana stessa. Esso aggiunge soltanto un fattore di fase comune (fisicamente irrilevante) nell'evoluzione temporale di uno stato, non modificando dunque il fenomeno di oscillazione che, invece, dipende solo da differenze di fase. Possiamo allora evitare di prendere in considerazione il termine $p\underline{\mathbb{1}}$ all'interno della 2.31 e siamo liberi di aggiungervi $-\frac{m_1^2+m_2^2}{4p}\underline{\mathbb{1}}$ ottenendo:

$$\underline{H}_0' = \frac{\Delta m^2}{4p} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

L'hamiltoniana complessiva $\hat{H} = \hat{H}_0' + \hat{H}_I$ è rappresentata nella stessa base dalla matrice:

$$\underline{H} = \frac{\Delta m^2}{4p} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

a cui possiamo aggiungere, per il ragionamento appena fatto, il termine $-\frac{V_{CC}}{2}\underline{\mathbb{1}}$:

$$\underline{H} = \frac{1}{4p} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos(2\theta) + 2pV_{CC} & \Delta m^2 \sin(2\theta) \\ \Delta m^2 \sin(2\theta) & \Delta m^2 \cos(2\theta) - 2pV_{CC} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Possiamo rendere questa Hamiltoniana formalmente analoga ad \underline{H}_0' definendo i parametri θ_M e $(\Delta m^2)_M$ in modo che:

$$\begin{cases} \Delta m^2 \cos(2\theta) - 2pV_{CC} = (\Delta m^2)_M \cos(2\theta_M) \\ \Delta m^2 \sin(2\theta) = (\Delta m^2)_M \sin(2\theta_M) \end{cases} \quad (2.35)$$

Ciò è possibile tramite le seguenti posizioni:

$$\begin{cases} \tan(2\theta_M) = \sin(2\theta) / [\cos(2\theta) - 2pV_{CC}/\Delta m^2] \\ (\Delta m^2)_M = \Delta m^2 \sqrt{\sin^2(2\theta) + (\cos^2(2\theta) - 2pV_{CC}/\Delta m^2)^2} \end{cases} \quad (2.36)$$

consentendoci di scrivere:

$$\underline{H} = \frac{(\Delta m^2)_M}{4p} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta_M) & \sin(2\theta_M) \\ \sin(2\theta_M) & \cos(2\theta_M) \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Dal punto di vista del fenomeno di oscillazione, dunque, a patto di operare le sostituzioni $\theta \leftrightarrow \theta_M$ e $\Delta m^2 \leftrightarrow (\Delta m^2)_M$, l'Hamiltoniana complessiva è identica a quella di oscillazione del vuoto e il problema è perciò risolto semplicemente operando le medesime sostituzioni nelle formule ottenute per la propagazione nel vuoto.

Analizziamo adesso alcuni casi notevoli:

1. Quando $\cos(2\theta) - 2pV_{CC}/\Delta m^2 = 0$, cioè per:

$$\sqrt{2} G_F N_e = \frac{\Delta m^2}{2p} \cos(2\theta) \quad (2.38)$$

si entra in una condizione detta di *risonanza*, poiché in questo caso $\theta_M = \pi/4$ e la relazione tra i nuovi autostati di massa $|\nu_j^M\rangle$ e quelli di sapore risulta quella di *massimo mixing*:

$$\begin{cases} |\nu_1^M\rangle = (|\nu_e\rangle - |\nu_\mu\rangle)/\sqrt{2} \\ |\nu_2^M\rangle = (|\nu_e\rangle + |\nu_\mu\rangle)/\sqrt{2} \end{cases} \quad (2.39)$$

Notiamo inoltre che in condizione di risonanza $(\Delta m^2)_M$ assume il suo minimo valore possibile $\sin(2\theta) \Delta m^2$.

2. Quando $\cos(2\theta) - 2pV_{CC}/\Delta m^2 \simeq \cos(2\theta)$, cioè per:

$$\sqrt{2} G_F N_e \ll \frac{\Delta m^2}{2p} \cos(2\theta) \quad (2.40)$$

$\theta_M = 0$, gli autostati di massa $|\nu_j^M\rangle$ coincidono con quelli di sapore (*zero mixing*) e non si verifica alcuna oscillazione. Inoltre $(\Delta m^2)_M = \Delta m^2$, perciò le energie restano le stesse.

3. Quando $\sin(2\theta) = \cos(2\theta) - 2pV_{CC}/\Delta m^2$, cioè per:

$$\sqrt{2} G_F N_e = \frac{\Delta m^2}{2p} (\cos(2\theta) - \sin(2\theta)) \quad (2.41)$$

$\theta_M = \pi/2$, ancora una volta non si verifica oscillazione ($|\nu_1^M\rangle = -|\nu_\mu\rangle$ e $|\nu_2^M\rangle = |\nu_e\rangle$), ma questa volta $(\Delta m^2)_M = \sqrt{2} \sin(2\theta) \Delta m^2$.

Capitolo 3

Applicazione dell'operatore densità all'oscillazione del neutrino

3.1 Applicazione nel caso di stati puri

Come punto di partenza, in questo paragrafo ci occuperemo di ricavare le formule delle probabilità di transizione e di sopravvivenza trovate nel capitolo precedente utilizzando, però, il formalismo dell'operatore densità, per osservare esplicitamente come entrambi gli approcci portino allo stesso risultato. Ricordiamo che, nel suddetto capitolo, siamo partiti da una condizione iniziale in cui il neutrino si trovasse in un ben definito autostato di sapore: ci troviamo dunque nel caso di *stati puri*.

3.1.1 Caso a due sapori

Consideriamo ancora una volta due soli autostati di massa $|\nu_j\rangle$ con $j = 1, 2$ e due autostati di sapore $|\nu_\alpha\rangle$ con $\alpha = e, \mu$. Per fissare le idee, supponiamo che inizialmente il neutrino si trovi nell'autostato di sapore elettronico $|\nu_e\rangle$. Dalla 1.8 abbiamo che l'operatore densità all'istante iniziale è definito come:

$$\hat{\rho}(0) = |\nu_e\rangle \langle \nu_e| \quad (3.1)$$

La matrice ad esso associata nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ ha elementi $\rho_{\alpha\beta}(0) = \langle \nu_\alpha | \nu_e \rangle \langle \nu_e | \nu_\beta \rangle$ e risulta dunque:

$$\underline{\rho}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

La risoluzione del problema consiste nel trovare l'espressione dell'operatore $\hat{\rho}(t)$ a ogni istante di tempo. Noto infatti $\hat{\rho}(t)$, siamo in grado di ricavare le probabilità di sopravvivenza e di transizione tramite la 1.13:

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}(t) &= \text{Tr}(\hat{\rho}(t) |\nu_e\rangle \langle \nu_e|) \\ &= \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{e\mu}(t) \\ \rho_{\mu e}(t) & \rho_{\mu\mu}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & 0 \\ \rho_{\mu e}(t) & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \rho_{ee}(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 P_{e \rightarrow \mu}(t) &= \text{Tr}(\hat{\rho}(t) |\nu_\mu\rangle \langle \nu_\mu|) \\
 &= \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{e\mu}(t) \\ \rho_{\mu e}(t) & \rho_{\mu\mu}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Tr} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \rho_{e\mu}(t) \\ 0 & \rho_{\mu\mu}(t) \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \rho_{\mu\mu}(t)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Per ottenere l'operatore densità a ogni istante di tempo occorre risolvere l'equazione di Liouville 1.30. A questo scopo, utilizziamo il risultato ottenuto nella 1.34, ricordando che l'operatore di evoluzione temporale (indicato in questo capitolo come $\hat{V}(t)$) risulta:

$$\hat{V}(t) = e^{-i\hat{H}t} \tag{3.5}$$

e che esso è rappresentato nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ dalla matrice:

$$\underline{V}(t) = U \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} U^+ \tag{3.6}$$

Al generico istante di tempo t , la matrice rappresentante l'operatore densità sarà allora:

$$\begin{aligned}
 \underline{\rho}(t) &= \underline{V}(t) \underline{\rho}(0) \underline{V}^+(t) \\
 &= U \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} U^+ \underline{\rho}(0) U \begin{pmatrix} e^{iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{iE_2 t} \end{pmatrix} U^+ \\
 &= U \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \tilde{\underline{\rho}}(0) \begin{pmatrix} e^{iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{iE_2 t} \end{pmatrix} U^+
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

dove abbiamo indicato con $\tilde{\underline{\rho}}(0) := U^+ \underline{\rho}(0) U$ la matrice associata all'operatore densità nella base degli autostati di massa $\{|\nu_j\rangle\}_j$. Sviluppando la sua espressione otteniamo:

$$\tilde{\underline{\rho}}(0) = \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |U_{e1}|^2 & U_{e1}^* U_{e2} \\ U_{e2}^* U_{e1} & |U_{e2}|^2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

e sostituendo nella 3.7:

$$\begin{aligned}
 \underline{\rho}(t) &= U \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{e1}|^2 & U_{e1}^* U_{e2} \\ U_{e2}^* U_{e1} & |U_{e2}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{iE_2 t} \end{pmatrix} U^+ \\
 &= U \tilde{\underline{\rho}}(t) U^+
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dove $\tilde{\underline{\rho}}(t)$ è la matrice rappresentate $\hat{\rho}(t)$ nella base $\{|\nu_j\rangle\}_j$. Svolti i prodotti righe per colonne, essa assume la forma:

$$\tilde{\underline{\rho}}(t) = \begin{pmatrix} |U_{e1}|^2 & U_{e1}^* U_{e2} e^{-i(E_2-E_1)t} \\ U_{e1} U_{e2}^* e^{i(E_2-E_1)t} & |U_{e2}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

che, sostituita all'interno della 3.9, ci restituisce infine:

$$\underline{\rho}(t) = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |U_{e1}|^2 & U_{e1}^* U_{e2} e^{-i(E_2-E_1)t} \\ U_{e1} U_{e2}^* e^{i(E_2-E_1)t} & |U_{e2}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu2}^* \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Da quest'ultima espressione possiamo calcolare gli elementi diagonali $\rho_{ee}(t)$ e la $\rho_{\mu\mu}(t)$ che, come affermano la 3.3 e la 3.4, rappresentano le probabilità cercate. Otteniamo così:

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow e}(t) &= |U_{e1}|^4 + |U_{e1}|^2 |U_{e2}|^2 e^{-i(E_2-E_1)t} + |U_{e1}|^2 |U_{e2}|^2 e^{i(E_2-E_1)t} + |U_{e1}|^4 \\ &= \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos[(E_2 - E_1)t] \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos[(E_2 - E_1)t] \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \cos[(E_2 - E_1)t]) \\ &= 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[\frac{(E_2 - E_1)t}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} P_{e \rightarrow \mu}(t) &= |U_{e1}|^2 |U_{\mu1}|^2 + U_{e1}^* U_{\mu2}^* U_{e2} U_{\mu1} e^{-i(E_2-E_1)t} + U_{e1} U_{\mu2} U_{e1}^* U_{\mu1}^* e^{i(E_2-E_1)t} \\ &\quad + |U_{e2}|^2 |U_{\mu2}|^2 \\ &= |U_{e1}|^2 |U_{\mu1}|^2 + |U_{e2}|^2 |U_{\mu2}|^2 + 2 \operatorname{Re}[U_{e1} U_{\mu2} U_{e2}^* U_{\mu1}^* e^{i(E_2-E_1)t}] \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos[(E_2 - E_1)t] \\ &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \cos[(E_2 - E_1)t]) \\ &= \sin^2(2\theta) \sin^2 \left[\frac{(E_2 - E_1)t}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

le quali coincidono, rispettivamente, con la 2.20 e la 2.19.

3.1.2 Caso a tre sapori

Generalizziamo adesso i risultati appena ottenuti al caso con tre autostati di sapore e tre autostati di massa. Procediamo nello stesso modo, con le stesse notazioni e servendoci sempre della 1.34 per risolvere l'equazione di Liouville. Ancora una volta, gli elementi diagonali della matrice densità nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ ci daranno le probabilità cercate. Supponiamo allora che il neutrino si trovi inizialmente in certo autostato di sapore $|\nu_\alpha\rangle$. In maniera analoga al caso a due sapori, abbiamo:

$$\underline{V}(t) = U \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iE_3 t} \end{pmatrix} U^+ \quad (3.14)$$

e dunque:

$$\begin{aligned}
 \underline{\rho}(t) &= \underline{V}(t)\underline{\rho}(0)\underline{V}^+(t) \\
 &= U \begin{pmatrix} e^{-iE_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iE_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iE_3t} \end{pmatrix} U^+ \underline{\rho}(0) U \begin{pmatrix} e^{iE_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{iE_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{iE_3t} \end{pmatrix} U^+ \\
 &= U \begin{pmatrix} e^{-iE_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iE_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iE_3t} \end{pmatrix} \tilde{\rho}(0) \begin{pmatrix} e^{iE_1t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{iE_2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{iE_3t} \end{pmatrix} U^+ \\
 &= U \tilde{\rho}(t) U^+
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La matrice $\tilde{\rho}(0)$ ha elementi:

$$\tilde{\rho}_{ij}(0) = \sum_{\beta,\gamma} U_{i\beta}^+ \rho_{\beta\gamma}(0) U_{\gamma j} = \sum_{\beta,\gamma} U_{\beta i}^* \rho_{\beta\gamma}(0) U_{\gamma j} \tag{3.16}$$

Poiché il neutrino si trova inizialmente nell'autostato di sapore α , l'operatore densità $\hat{\rho} = |\nu_\alpha\rangle \langle \nu_\alpha|$ ha elementi di matrice $\rho_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma}$ nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$. Perciò:

$$\tilde{\rho}_{ij}(0) = \sum_{\beta,\gamma} U_{\beta i}^* \delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma} U_{\gamma j} = U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} \tag{3.17}$$

Di conseguenza, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\rho}_{hk}(t) &= \sum_{i,j} V_{hi} \tilde{\rho}_{ij}(0) V_{jk}^+ = \sum_{i,j} V_{hi} \tilde{\rho}_{ij}(0) V_{kj}^* = \sum_{i,j} \delta_{hi} e^{-iE_i t} \tilde{\rho}_{ij}(0) \delta_{kj} e^{iE_j t} \\
 &= e^{-iE_h t} \tilde{\rho}_{hk}(0) e^{iE_k t} = U_{\alpha h}^* U_{\alpha k} e^{-i(E_h - E_k)t}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Possiamo allora, dalla 3.15, ricavare la *probabilità di transizione*:

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta}(t) &= \rho_{\beta\beta}(t) = \sum_{h,k} U_{\beta h} \tilde{\rho}_{hk}(t) U_{\beta k}^* = \sum_{h,k} U_{\beta h} U_{\beta k}^* U_{\alpha h}^* U_{\alpha k} e^{-i(E_h - E_k)t} \\
 &= \sum_k |U_{\alpha h}|^2 |U_{\beta h}|^2 + 2 \sum_{h < k} \text{Re}[U_{\beta h} U_{\beta k}^* U_{\alpha h}^* U_{\alpha k} e^{-i(E_h - E_k)t}]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

la quale, per $\alpha = \beta$, ci dà la *probabilità di sopravvivenza*:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha}(t) = \sum_j |U_{\alpha j}|^4 + 2 \sum_{j < k} |U_{\alpha j}|^2 |U_{\alpha k}|^2 \cos[(E_j - E_k)t] \tag{3.20}$$

Esse coincidono, rispettivamente, con la 2.26 e la 2.27.

3.2 Applicazione nel caso di miscele statistiche

Nella maggior parte delle applicazioni fisiche reali, difficilmente si ha a che fare con un sistema di neutrini rappresentabile mediante uno stato puro. Al contrario ci si trova spesso di fronte a un *ensemble statistico* schematizzabile tramite una miscela statistica di stati.

3.2.1 Sovrapposizioni coerenti ed incoerenti di autostati di sapore

Consideriamo un sistema che, all'istante di tempo t , si trovi in una miscela statistica di un certo insieme di tre stati $|u_j\rangle$ con pesi p_j , $j = 1, 2, 3$. Dalla 1.27 abbiamo:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_j p_j |u_j\rangle \langle u_j| \quad (3.21)$$

Considerata la rappresentazione di $\hat{\rho}(t)$ nella base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$:

$$\underline{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(t) & \rho_{e\mu}(t) & \rho_{e\tau}(t) \\ \rho_{\mu e}(t) & \rho_{\mu\mu}(t) & \rho_{\mu\tau}(t) \\ \rho_{\tau e}(t) & \rho_{\tau\mu}(t) & \rho_{\tau\tau}(t) \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

gli elementi diagonali $\rho_{\alpha\alpha}$ sono detti *popolazioni* degli autostati $|\nu_\alpha\rangle$, poiché:

$$\rho_{\alpha\alpha}(t) = \langle \nu_\alpha | \hat{\rho}(t) | \nu_\alpha \rangle = \sum_j p_j \langle \nu_\alpha | u_j \rangle \langle u_j | \nu_\alpha \rangle = \sum_j p_j |c_\alpha^{(j)}|^2 \quad (3.23)$$

dove $c_\alpha^{(j)} := \langle \nu_\alpha | u_j \rangle$. Gli elementi fuori diagonale $\rho_{\alpha\beta}(t)$ sono invece spesso indicati come *coerenze*. Dalla loro definizione:

$$\rho_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\alpha | \hat{\rho}(t) | \nu_\beta \rangle = \sum_j p_j \langle \nu_\alpha | u_j \rangle \langle u_j | \nu_\beta \rangle = \sum_j p_j c_\alpha^{(j)} c_\beta^{(j)*} \quad (3.24)$$

deduciamo che $\rho_{\alpha\beta}(t)$ è la media pesata (fatta sulla miscela statistica) dei termini $c_\alpha^{(j)} c_\beta^{(j)*}$, i quali contengono informazioni di fase sugli stati $|u_j\rangle$. Quando tutte le coerenze sono nulle, si dice che il sistema si torva in una *sovrapposizione incoerente* degli stati $|u_j\rangle$. Ciò significa che esso può essere visto come una miscela statistica di questi ultimi, con pesi dati proprio dalle popolazioni:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_\alpha \rho_{\alpha\alpha}(t) |\nu_\alpha\rangle \langle \nu_\alpha| \quad (3.25)$$

Quest'ultimo caso è sempre verificato in luogo di *zero mixing* e se la sovrapposizione è incoerente all'istante iniziale. Infatti, in queste condizioni, la base degli autostati di sapore coincide con quella degli autostati di massa e, proiettandovi l'equazione di Liouville 1.30, otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \rho_{\alpha\beta}(t) = -i \sum_\gamma (H_{\alpha\gamma} \rho_{\gamma\beta}(t) - \rho_{\alpha\gamma}(t) H_{\gamma\beta}) = -i(H_{\alpha\alpha} - H_{\beta\beta}) \rho_{\alpha\beta}(t) \quad (3.26)$$

da cui:

$$\rho_{\alpha\beta}(t) = \rho_{\alpha\beta}(0) e^{-i \int_0^t (H_{\alpha\alpha}(t') - H_{\beta\beta}(t')) dt'} \quad (3.27)$$

Se allora all'istante iniziale le coerenze sono tutte nulle, $\rho_{\alpha\beta}(t) = 0 \forall \alpha, \beta, t$ e il sistema permane in una sovrapposizione incoerente. Ponendo inoltre $\alpha = \beta$ nella 3.26, osserviamo che le popolazioni rimangono costanti nel caso di zero mixing. Notiamo che, quando l'Hamiltoniana è costante, la 3.26 si risolve come:

$$\rho_{\alpha\beta}(t) = \rho_{\alpha\beta}(0) e^{-i(E_1 - E_2)t} \quad (3.28)$$

ovvero le coerenze oscillano alle frequenze di Bohr del sistema.

Quando invece $\rho_{\alpha\beta}(t) \neq 0$ per qualche coppia α e β (i termini $c_\alpha^{(j)} c_\beta^{(j)*}$ non svaniscono una volta mediati sulla miscela statistica), gli stati $|u_j\rangle$ non coincidono con gli autostati di sapore $|\nu_\alpha\rangle$ e il sistema è detto trovarsi in una *sovrapposizione coerente* degli stati $|u_j\rangle$.

3.2.2 Rappresentazione geometrica nel caso a due sapori

Vediamo come costruire un'utile rappresentazione geometrica di un ensemble statistico di neutrini nel caso a due sapori. E' facile verificare che ogni matrice M complessa 2×2 può essere espressa come combinazione lineare della matrice identità e delle tre matrici di Pauli σ_i nel seguente modo:

$$M = \frac{1}{2} \left[\text{Tr}(M) \mathbb{1} + \sum_i \text{Tr}(M \sigma_i) \sigma_i \right] \quad (3.29)$$

Ricordiamo che, ai fini dell'analisi del fenomeno di oscillazione, possiamo aggiungere all'Hamiltoniana il termine $-\text{Tr}(\hat{H})/2 \mathbb{1}$, rendendola così a traccia nulla. Applicando allora la 3.29 alle matrici \underline{H} e $\underline{\rho}$ otteniamo:

$$\underline{H} = -\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \quad \underline{\rho} = \frac{1}{2} \mathbb{1} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{S} \quad (3.30)$$

con $\vec{B} = \sum_j B_j \vec{e}_j^{(F)}$ e $\vec{S} = \sum_j S_j \vec{e}_j^{(F)}$, dove $\{\vec{e}_j^{(F)}\}_j$ è una base ortonormale di vettori geometrici dello spazio in cui è inquadrata la rappresentazione geometrica che vogliamo ricavare, $B_j := -\text{Tr}(\hat{H} \hat{\sigma}_j)$ e $S_j := \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\sigma}_j)$. Svolgendo tutti i prodotti righe per colonne abbiamo:

$$S_1 = 2 \text{Re}[\rho_{e\mu}], \quad S_2 = -2 \text{Im}[\rho_{e\mu}], \quad S_3 = \rho_{ee} - \rho_{\mu\mu} \quad (3.31)$$

$$B_1 = -2 \text{Re}[H_{e\mu}], \quad B_2 = 2 \text{Im}[H_{e\mu}], \quad B_3 = -(H_{ee} - H_{\mu\mu}) \quad (3.32)$$

Le componenti di \vec{B} dipendono (attraverso gli elementi di \underline{H}) dalla fisica del problema considerato (oscillazioni nel vuoto, nella materia ecc.), mentre quelle di \vec{S} dalla natura del nostro ensemble statistico. Analizziamo allora, attraverso le 3.31, il comportamento del vettore \vec{S} rispetto al sistema di riferimento individuato dalla terna $\{\vec{e}_j^{(F)}\}_j$. Notiamo, innanzitutto, come la proiezione $\vec{S}_{12} := S_1 \vec{e}_1^{(F)} + S_2 \vec{e}_2^{(F)}$ di \vec{S} nel piano generato da $\vec{e}_1^{(F)}$ e $\vec{e}_2^{(F)}$ funga da indicatore del grado di coerenza della sovrapposizione degli stati $|\nu_\alpha\rangle$ per l'ensemble di neutrini. Infatti, la sovrapposizione è incoerente se e soltanto se $\rho_{e\mu} = 0$ e ciò è vero se e soltanto se \vec{S}_{12} è nullo. Una sovrapposizione incoerente sarà dunque rappresentata da un vettore \vec{S} disposto lungo $\vec{e}_3^{(F)}$, mentre una coerente da un vettore \vec{S} non parallelo a $\vec{e}_3^{(F)}$. Osservando la 3.31, ci accorgiamo inoltre che il valore della componente di \vec{S} lungo $\vec{e}_3^{(F)}$ ci dà informazioni riguardo le popolazioni. Ricordando infatti il vincolo $\rho_{ee} + \rho_{\mu\mu} = 1$, risulta:

$$\rho_{ee} = \frac{1}{2} (1 + S_3) \quad (3.33)$$

$$\rho_{\mu\mu} = \frac{1}{2} (1 - S_3) \quad (3.34)$$

Il segno di S_3 dipende da quale tra i due stati $|\nu_e\rangle$ e $|\nu_\mu\rangle$ sia maggior parte popolato. Nel caso di una sovrapposizione incoerente, \vec{S} ha solo componente S_3 e dunque il suo verso ci dice quale delle due popolazioni prevale, con un'orientazione verso $\vec{e}_3^{(F)}$ se $\rho_{ee} > \rho_{e\mu}$ e verso $-\vec{e}_3^{(F)}$ se $\rho_{ee} < \rho_{e\mu}$. Quando \vec{S} giace nel piano generato da \vec{e}_1 e \vec{e}_2 , i due sapori sono ugualmente popolati ($\rho_{ee} = \rho_{e\mu} = 1/2$) e, per una sovrapposizione incoerente, ciò si traduce in $\vec{S} = 0$.

Vediamo adesso come si trasformano le componenti dei vettori \vec{B} e \vec{S} quando, nello spazio dei sapori, passiamo tramite una trasformazione unitaria dal riferimento $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ a un altro. Se U è la matrice del cambio riferimento, possiamo parametrizzarla come in 2.9 mediante un angolo $\phi \in [0, \pi/2]$. Per fissare le idee, consideriamo il vettore \vec{S} . Detta $\tilde{\rho}$ la matrice rappresentante $\hat{\rho}$ nel nuovo riferimento ($\tilde{\rho} = U^+ \rho U$), le nuove componenti S'_1, S'_2 e S'_3 risultano:

$$\begin{aligned}
 S'_1 &= 2 \operatorname{Re} [\tilde{\rho}_{12}] = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{\alpha\beta} U_{\alpha 1}^* \rho_{\alpha\beta} U_{\beta 2} \right] \\
 &= 2 \operatorname{Re} [U_{11}^* \rho_{11} U_{12} + U_{11}^* \rho_{12} U_{22} + U_{21}^* \rho_{21} U_{12} + U_{21}^* \rho_{22} U_{22}] \\
 &= 2 \operatorname{Re} [\cos \phi \sin \phi \rho_{11} + \cos^2 \phi \rho_{12} - \sin^2 \phi \rho_{21} - \sin \phi \cos \phi \rho_{22}] \\
 &= (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) 2 \operatorname{Re} [\rho_{12}] + \cos \phi \sin \phi (\rho_{11} - \rho_{22}) \\
 &= \cos(2\phi) S_1 + \sin(2\phi) S_3
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
 S'_2 &= -2 \operatorname{Im} [\tilde{\rho}_{12}] = \\
 &= -2 \operatorname{Im} [\cos \phi \sin \phi \rho_{11} + \cos^2 \phi \rho_{12} - \sin^2 \phi \rho_{21} - \sin \phi \cos \phi \rho_{22}] \\
 &= -(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) 2 \operatorname{Im} [\rho_{12}] + \cos \phi \sin \phi \operatorname{Im} [\rho_{11} - \rho_{22}] \\
 &= S_2
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 S'_3 &= \tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22} = \sum_{\alpha\beta} (U_{\alpha 1}^* \rho_{\alpha\beta} U_{\beta 1} - U_{\alpha 2}^* \rho_{\alpha\beta} U_{\beta 2}) \\
 &= U_{11}^* \rho_{11} U_{11} + U_{11}^* \rho_{12} U_{21} + U_{21}^* \rho_{21} U_{11} + U_{21}^* \rho_{22} U_{21} - U_{12}^* \rho_{11} U_{12} \\
 &\quad - U_{12}^* \rho_{12} U_{22} - U_{22}^* \rho_{21} U_{12} - U_{22}^* \rho_{22} U_{22} \\
 &= \cos^2 \phi \rho_{11} - \cos \phi \sin \phi \rho_{12} - \cos \phi \sin \phi \rho_{21} + \sin^2 \phi \rho_{22} - \sin^2 \phi \rho_{11} \\
 &\quad - \sin \phi \cos \phi \rho_{12} - \sin \phi \cos \phi \rho_{21} - \cos^2 \phi \rho_{22} \\
 &= -2 \cos \phi \sin \phi 2 \operatorname{Re} [\rho_{12}] + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) (\rho_{11} - \rho_{22}) \\
 &= -\sin(2\phi) S_1 + \cos(2\phi) S_3
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Le componenti S_j e S'_j sono allora legate tramite la relazione lineare:

$$\begin{pmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & 0 & \sin(2\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(2\phi) & 0 & \cos(2\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

Questo vuol dire che passare, nello spazio dei sapori, dalla base $\{|\nu_\alpha\rangle\}_\alpha$ a un'altra tramite la trasformazione unitaria U corrisponde a considerare, nello spazio della rappresentazione geometrica, una nuova base $\{\vec{e}'_j\}_j$ che si ottiene da quella $\{\vec{e}_j^{(F)}\}_j$ mediante una rotazione di angolo 2ϕ intorno all'asse individuato da \vec{e}_2 . I nuovi vettori di base saranno cioè connessi ai primi dalla relazione:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}'_1 &= \cos(2\phi) \vec{e}_1^{(F)} - \sin(2\phi) \vec{e}_3^{(F)} \\
 \vec{e}'_2 &= \vec{e}_2^{(F)} \\
 \vec{e}'_3 &= \sin(2\phi) \vec{e}_1^{(F)} + \cos(2\phi) \vec{e}_3^{(F)}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Questo ci permette di affermare che il modulo di \vec{S} :

$$|\vec{S}|^2 = 4 |\rho_{e\mu}|^2 + \rho_{ee}^2 + \rho_{ee}^2 - 2\rho_{ee}\rho_{\mu\mu} \tag{3.40}$$

non dipende dalla base dello spazio dei sapori in cui si sceglie di rappresentare in forma matriciale l'operatore $\hat{\rho}$. Grazie a quest'ultima osservazione, possiamo dare un'utile interpretazione al modulo di \vec{S} . Sappiamo infatti che l'operatore densità è un operatore autoaggiunto, perciò possiamo valutare il valore di $|\vec{S}|$ nel riferimento associato a una base che diagonalizza $\hat{\rho}$, ottenendo:

$$|\vec{S}|^2 = (\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22})^2 \leq 1 \quad (3.41)$$

dove il segno di uguaglianza vale se e soltanto se uno tra $\tilde{\rho}_{11}$ e $\tilde{\rho}_{22}$ è nullo, ovvero se il sistema si trova in uno stato puro. Dunque vale la regola:

$$\begin{cases} |\vec{S}| < 1 & \text{se il sistema si trova in una miscela statistica} \\ |\vec{S}| = 1 & \text{se il sistema si trova in uno stato puro} \end{cases} \quad (3.42)$$

Passiamo ora a descrivere geometricamente la dinamica del nostro ensemble di neutrini. A questo scopo, scriviamo i due membri dell'equazione di Liouville 1.30 in forma matriciale utilizzando le 3.30:

$$\frac{d}{dt}\underline{\rho}(t) = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \frac{d}{dt}\vec{S} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} [\underline{H}, \underline{\rho}] &= -i \left[-\frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \frac{1}{2}\underline{1} + \frac{1}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{S} \right] = -\frac{i}{4} \sum_{ij} S_i B_j (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) \\ &= -\frac{i}{4} \sum_{ij} 2i S_i B_j \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{S} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

dove abbiamo utilizzato la proprietà secondo cui $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \epsilon_{ijk} \sigma_k$. Confrontate tra di loro, le ultime due relazioni ci danno la dinamica del vettore \vec{S} :

$$\frac{d}{dt}\vec{S} = \vec{S} \times \vec{B} \quad (3.45)$$

formalmente analoga a quella di un momento magnetico \vec{S} , con fattore giromagnetico $g = 1$, in un campo magnetico \vec{B} . Quando l'Hamiltoniana non dipende dal tempo, \vec{B} è costante e il vettore \vec{S} compie un moto di precessione intorno a \vec{B} con frequenza $\omega = |\vec{B}| = |E_1 - E_2|$. Se allora il sistema si trova inizialmente in una sovrapposizione incoerente degli autostati di sapore, passerà poi in una sovrapposizione coerente per tutti gli istanti di tempo successivi, tranne quelli multipli interi del periodo $T = 2\pi/(E_1 - E_2)$. In questi, infatti, \vec{S} torna a disporsi lungo l'asse individuato da $\vec{e}_3^{(F)}$ e la sovrapposizione diventa perciò nuovamente incoerente. Consideriamo, ad esempio, l'Hamiltoniana in 2.37, assumendo una densità N_e costante (i risultati ottenuti saranno validi anche per l'oscillazione nel vuoto a patto di scambiare $\theta \leftrightarrow \theta_M$ e $\Delta m^2 \leftrightarrow (\Delta m^2)_M$). Dalla 3.32 le componenti di \vec{B} risultano:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{(\Delta m^2)_M}{2p} \sin(2\theta_M) \\ B_2 &= 0 \\ B_3 &= \frac{(\Delta m^2)_M}{2p} \cos(2\theta_M) \end{aligned} \quad (3.46)$$

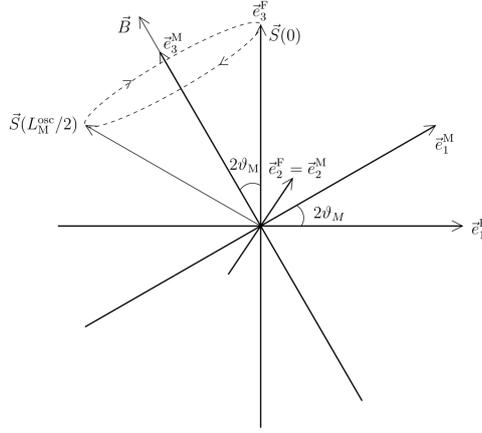


Figura 3.1: Precessione di \vec{S} intorno \vec{B} costante per $\theta_m < \pi/4$, con condizioni iniziali di sovrapposizione incoerente e popolazioni $W_e > W_\mu$. In figura sono mostrati anche i vettori dei due sistemi di riferimento $\{\vec{e}_j^{(F)}\}_j$ e $\{\vec{e}_j^{(M)}\}_j$. Con $L_M^{(osc)}$ si è indicata la lunghezza percorsa nel periodo $T = 2\pi/(E_1 - E_2)$.

Dunque \vec{B} giace nel piano generato da $\vec{e}_1^{(F)}$ e $\vec{e}_3^{(F)}$, inclinato di $2\theta_M$ rispetto all'asse individuato da $\vec{e}_3^{(F)}$. Dalla 3.32 deduciamo che \vec{B} è orientato lungo il terzo asse del riferimento $\{\vec{e}_j^{(M)}\}_j$ associato alla base degli autostati di massa (in cui \hat{H} è diagonale). La 3.39 conferma, infatti, che il riferimento $\{\vec{e}_j^{(M)}\}_j$ si ottiene da quello $\{\vec{e}_j^{(F)}\}_j$ per rotazione di angolo $2\theta_M$ intorno all'asse individuato da $\vec{e}_2^{(F)}$, come mostrato in figura 3.1. In questo sistema di riferimento le condizioni iniziali $S_1(0) = S_2(0) = 0$ e $S_3(0) = W_e - W_\mu$ (sovrapposizione incoerente degli autostati di sapore con popolazioni W_e e W_μ) corrispondono a:

$$\begin{aligned} S_1^{(M)}(0) &= \sin(2\theta_M)S_3(0) = \sin(2\theta_M)(W_e - W_\mu) \\ S_2^{(M)}(0) &= S_2(0) = 0 \\ S_3^{(M)}(0) &= \cos(2\theta_M)S_3(0) = \cos(2\theta_M)(W_e - W_\mu) \end{aligned} \quad (3.47)$$

dove $S_j^{(M)}$ indicano le componenti di \vec{S} in $\{\vec{e}_j^{(M)}\}_j$. La precessione di \vec{S} intorno a \vec{B} avviene con frequenza $\omega = |\vec{B}| = (\Delta m^2)_M/2p$ e, in questo sistema di riferimento, la soluzione dell'equazione 3.43, in corrispondenza delle condizioni iniziali 3.47, risulta:

$$\begin{aligned} S_1^{(M)}(t) &= \sin(2\theta_M)(W_e - W_\mu) \cos\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{2p}\right] \\ S_2^{(M)}(t) &= \sin(2\theta_M)(W_e - W_\mu) \sin\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{2p}\right] \\ S_3^{(M)}(t) &= \cos(2\theta_M)(W_e - W_\mu) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Passando al riferimento dei sapori:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \cos(2\theta_M)S_1^{(M)}(t) - \sin(2\theta_M)S_3^{(M)}(t) \\ &= \frac{1}{2} \sin(4\theta_M)(W_e - W_\mu) \left(\cos\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{2p}\right] - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

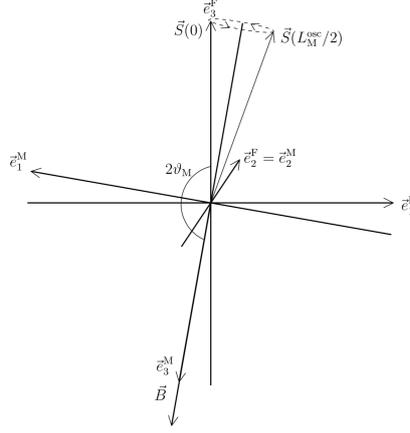


Figura 3.2: Precessione di \vec{S} intorno \vec{B} per un mezzo con $N_e \gg N_e^R$ e costante, nel caso in cui $\theta < \pi/4$ e nelle condizioni iniziali di sovrapposizione incoerente con $W_e = 1$ e $W_\mu = 0$.

$$S_2(t) = S_2^{(M)}(t) = \sin(2\theta_M)(W_e - W_\mu) \sin\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{2p}\right] \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} S_3(t) &= \sin(2\theta_M)S_1^{(M)}(t) + \cos(2\theta_M)S_3^{(M)}(t) \\ &= (W_e - W_\mu) \left(1 - 2 \sin^2(2\theta_M) \sin^2\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{4p}\right]\right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dalle 3.51, 3.33 e 3.34 abbiamo allora:

$$P_e(t) = \rho_{ee}(t) = \frac{1}{2} + (W_e - W_\mu) \left(\frac{1}{2} - \sin^2(2\theta_M) \sin^2\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{4p}\right]\right) \quad (3.52)$$

$$P_\mu(t) = \rho_{\mu\mu}(t) = \frac{1}{2} - (W_e - W_\mu) \left(\frac{1}{2} - \sin^2(2\theta_m) \sin^2\left[\frac{(\Delta m^2)_M t}{4p}\right]\right) \quad (3.53)$$

le quali, per $W_e = 1$ e $W_\mu = 0$ ci ridanno le 2.20 e 2.19.

Analizziamo adesso il caso di una densità N_e variabile con continuità all'interno del mezzo, con un ensemble che parte come sovrapposizione incoerente con $W_e = 1$ e $W_\mu = 0$. Detta N_e^R la densità che verifica la condizione di risonanza 2.38, dalla prima delle relazioni 2.36 si ottiene che, nel caso in cui $\theta < \pi/4$ (come noi supporremo), $\theta_M < \pi/4$ se $N_e < N_e^R$ e viceversa. La configurazione rappresentata in figura 3.1 si presta allora bene a descrivere proprio una situazione in cui $N_e < N_e^R$. Supponiamo al contrario di partire inizialmente da una condizione in cui $N_e \gg N_e^R$ (è quello che accade, ad esempio, ai neutrini solari, i quali sono prodotti come $|\nu_e\rangle$ nel nucleo del Sole). Sempre dalla prima delle 2.36 si ha $\theta_M \simeq \pi/2$ e, di conseguenza, \vec{B} è quasi allineato al semiasse individuato da $-\vec{e}_3^{(F)}$. Se il valore di N_e rimanesse costante, \vec{S} descriverebbe, come mostrato in figura 3.2, un cono di piccola apertura angolare intorno $-\vec{e}_3^{(M)}$, il quale è a sua volta quasi allineato a $\vec{e}_3^{(F)}$. Di conseguenza, $S_3 \simeq 1$ e dunque $P_{e \rightarrow e} \simeq 1$ (d'altro canto se $\theta_M \simeq \pi/2$, $|\nu_e\rangle \simeq |\nu_1\rangle$ il quale è stazionario). Quando N_e diminuisce, lo stesso accade a θ_M (seconda delle 2.36). Ciò vuol dire che, come mostrato

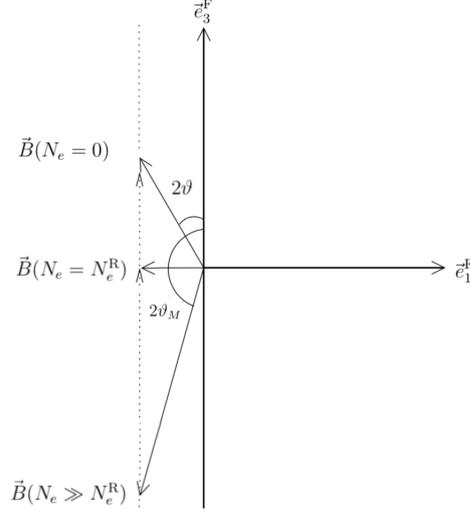


Figura 3.3: Variazione di \vec{B} nel passaggio dalla situazione in cui $N_e \gg N_e^R$, a quella di risonanza $N_e = N_e^R$ ed infine a quella di vuoto $N_e = 0$.

in figura 3.3, il vettore \vec{B} ruota nel piano individuato da $\vec{e}_1^{(F)}$ e $\vec{e}_3^{(F)}$ fino a transitare nella condizione di risonanza per $N_e = N_e^R$ ($\theta_M = \pi/4$ e \vec{B} orientato lungo $-\vec{e}_1$) per arrivare nella situazione in cui $\theta_M \simeq \theta$ per $N_e \simeq 0$ (neutrini uscenti dal Sole ed entranti nel vuoto). Dalle 2.36, esprimendo $\sin(2\theta_M) = \Delta m^2 \sin(2\theta) / (\Delta m^2)_M$, notiamo come il prodotto $\sin(2\theta_M)(\Delta m^2)_M$ si mantenga costante al valore $\sin(2\theta)$. Nella rotazione di \vec{B} , perciò, soltanto la componente B_3 varia. Se la transizione avvenisse con una velocità angolare $\omega = |\vec{B}|$ di \vec{S} molto maggiore di quella ω_B con cui ruota \vec{B} , allora \vec{S} sarebbe trascinato da \vec{B} e il passaggio dal nucleo solare al vuoto si concluderebbe con una configurazione geometrica rappresentata in figura 3.4a. Come si può osservare da quest'ultima, se l'angolo di mixing θ è piccolo, \vec{B} è quasi allineato a \vec{e}_3 e, di conseguenza, $S_3 \simeq -1$ e $P_{e \rightarrow \mu} \simeq 1$. Se, al contrario, la transizione avvenisse con $\omega_B \gg \omega$, il vettore \vec{S} rimarrebbe congelato durante l'attraversamento e, all'uscita dal Sole, S_3 sarebbe ancora prossima all'unità e, di conseguenza, $P_{e \rightarrow e} \simeq 1$ (figura 3.4b).

3.3 Cenni sull'oscillazione in ambienti estremi

Questo paragrafo è dedicato all'approccio qualitativo allo studio di un ensemble statistico di neutrini in ambienti estremi come l'Early Universe o il nucleo di una supernova, seguendo [9] e [6]. Prima di tutto, bisogna tenere in considerazione il fatto che il nostro ensemble sia formato da neutrini di vari momenti \vec{p} : per ogni valore di \vec{p} viene considerato un operatore densità $\hat{\rho}_{\vec{p}}$ agente nello spazio dei sapori. Si dimostra ([10]) che esso verifica l'equazione:

$$i \frac{d}{dt} \hat{\rho}_{\vec{p}} = [H_{\vec{p}}^0, \hat{\rho}_{\vec{p}}] + [H_{\vec{p}}^{\text{int}}, \hat{\rho}_{\vec{p}}] + C[\hat{\rho}_{\vec{p}}, \hat{\rho}_{\vec{p}}] \quad (3.54)$$

al cui secondo membro sono presenti vari termini il cui significato è ora discusso. Nel primo troviamo la normale Hamiltoniana di oscillazione nel vuoto, rappresentata nella base dei sapori dalla matrice:

$$\underline{H}_{\vec{p}}^0 = U \frac{M^2}{2p} U^\dagger \quad (3.55)$$

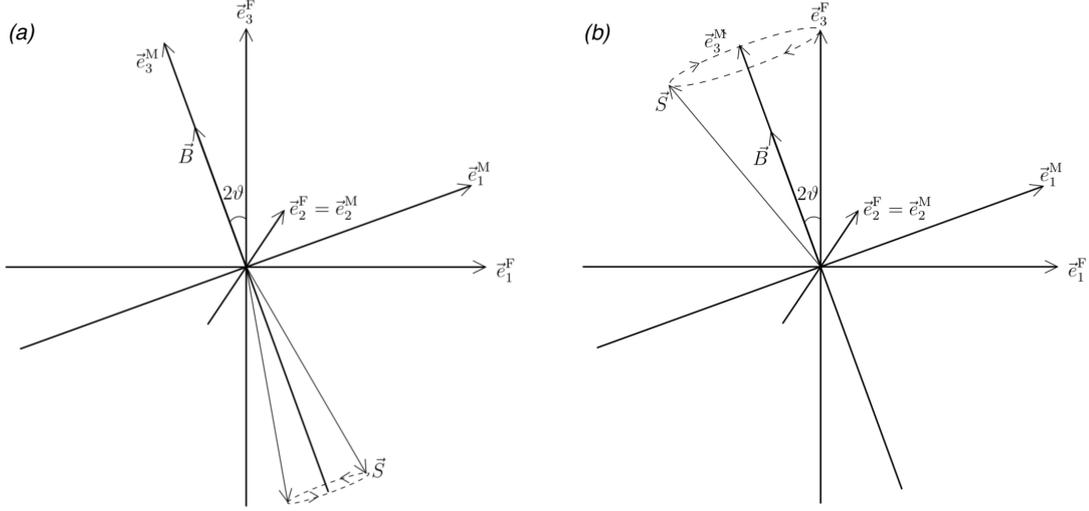


Figura 3.4: Configurazione geometrica finale nel caso di transizione in cui $\omega_B \ll \omega$ (a) e $\omega_B \gg \omega$ (b).

dove $M^2 = \text{diag}(-\Delta m^2/2, \Delta m^2/2)$ (a meno di termini proporzionali ad $\underline{1}$, irrilevanti ai fini dell'oscillazione). Nel secondo termine, $H_{\bar{p}}^{\text{int}}$ è un potenziale che rappresenta, al primo ordine nella costante di Fermi G_F , l'interazione con la materia. Essa è data dalla somma di due contributi:

$$H_{\bar{p}}^{\text{int}} = H_{\bar{p}}^m + H_{\bar{p}}^{\nu\nu} \quad (3.56)$$

il primo dovuto all'interazione con i leptoni carichi circostanti, il secondo all'interazione dei neutrini con altri neutrini. Più nello specifico, $H_{\bar{p}}^m$ può essere ad esempio considerato in prima approssimazione (trascuando la presenza di leptoni carichi diversi dagli elettroni) come nel paragrafo 2.5, mentre $H_{\bar{p}}^{\nu\nu}$ dipende da $\hat{\rho}_{\bar{p}}$ e $\hat{\bar{\rho}}_{\bar{p}}$ (l'operatore densità associato agli antineutrini) e può presentare elementi fuori diagonale nella base dei sapori. Esso risulta rilevante quando la densità di neutrini è così elevata che essi stessi costituiscono un mezzo circostante in cui avviene la propagazione. Ciò accade in due ambienti estremi: l'Early Universe e l'interno di una supernova. Infine, troviamo il *termine collisionale* $C[\hat{\rho}_{\bar{p}}, \hat{\bar{\rho}}_{\bar{p}}]$, il quale include i processi al secondo ordine in G_F e che è responsabile della perdita di coerenza dell'ensemble statistico. Ad esso contribuiscono a loro volta vari termini:

$$C[\hat{\rho}_{\bar{p}}, \hat{\bar{\rho}}_{\bar{p}}] = \left(\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{\bar{p}} \right)_{CC} + \left(\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{\bar{p}} \right)_{NC} + \left(\frac{d}{dt} \hat{\rho}_{\bar{p}} \right)_S \quad (3.57)$$

dovuti rispettivamente a interazioni di corrente carica, di corrente neutra e all'interazione tra neutrini. L'insieme di tutti i termini al secondo membro della 3.54 rendono quest'ultima un set di equazioni integro-differenziali non lineare.

Esaminiamo ora qualitativamente quali termini sono dominanti nei due ambienti sopra citati: l'Early Universe e il nucleo di una supernova.

1. Early Universe:

In questo ambiente, a temperature dell'ordine del MeV e in una situazione di *charge-symmetry* in cui la densità di elettroni e positroni è dello stesso ordine di grandezza, il termine $\hat{H}_{\bar{p}}^{m(1)} = \sqrt{2} G_F n_e |\nu_e\rangle \langle \nu_e|$ usato nel paragrafo 2.5 risulta

dare un contributo trascurabile all'Hamiltoniana $H_{\vec{p}}^m$, per cui è necessario considerare un secondo termine che è proporzionale alla somma delle densità di energia ϵ_{e^-} e ϵ_{e^+} di elettroni e positroni:

$$\hat{H}_{\vec{p}}^{m(2)} = -\frac{8\sqrt{2}G_F p}{3m_W^2}(\epsilon_{e^-} + \epsilon_{e^+})|\nu_e\rangle\langle\nu_e| \quad (3.58)$$

Il termine di auto-interazione $H_{\vec{p}}^{\nu\nu}$ dipende, invece, dalla presenza o meno di asimmetria tra neutrini e antineutrini: se c'è asimmetria, esso è dominato da:

$$\hat{H}_{\vec{p}}^{\nu\nu(1)} = \sqrt{2}G_F \int d\vec{q}(1 - \cos\theta_{\vec{p}\vec{q}})[\hat{\rho}_{\vec{q}} - \hat{\rho}_{\vec{q}} + \text{Tr}(\hat{\rho}_{\vec{q}} - \hat{\rho}_{\vec{q}})] \quad (3.59)$$

mentre in caso contrario prevale:

$$\hat{H}_{\vec{p}}^{\nu\nu(2)} = -\frac{8\sqrt{2}G_F p}{3m_W^2} \int d\vec{q} \frac{3}{4}(1 - \cos\theta_{\vec{p}\vec{q}})^2 q[\hat{\rho}_{\vec{q}} + \hat{\rho}_{\vec{q}}] \quad (3.60)$$

Infine il termine collisionale $C[\hat{\rho}_{\vec{p}}, \hat{\rho}_{\vec{p}}]$ causa una perdita di coerenza nell'ensamble statistico di neutrini, andando a smorzare i termini fuori diagonale.

2. Nucleo di una supernova:

Quando il nucleo di una supernova diventa gravitazionalmente instabile, i neutrini, che inizialmente si trovano in una regione detta *neutrinosfera*, vengono espulsi. Per il termine $H_{\vec{p}}^m$ è sufficiente considerare l'espressione utilizzata nel paragrafo 2.5. Per $H_{\vec{p}}^{\nu\nu}$ si rivela adeguata l'espressione 3.59, mentre il termine collisionale risulta trascurabile.

Conclusioni

In questa tesi è stato studiato l'uso dell'operatore densità $\hat{\rho}$ quale strumento matematico più adatto a descrivere problemi fisici in cui non si ha accesso ad un'informazione massimale sul sistema. Attraverso la dimostrazione e l'analisi delle sue proprietà, si è mostrato il modo in cui esso possa semplificare notevolmente la trattazione contemporanea di due tipi di informazione: quella concernente la natura quantistica del sistema stesso e quella riguardante l'aspetto statistico. L'equazione di Liouville, nella quale entra in gioco la fisica di un problema, regola la dinamica dell'operatore densità, consentendo il suo utilizzo anche nello studio dell'evoluzione temporale di un certo ensemble statistico. Essendo in grado di ricavare da $\hat{\rho}$ i possibili esiti di una misura con le rispettive probabilità, e avendo la possibilità di farlo potenzialmente ad ogni istante di tempo, ecco allora che l'uso dell'operatore densità si sostituisce perfettamente a quello dei vettori di stato, obsoleti nel caso di un sistema in una miscela statistica di stati. Nell'analisi di tale approccio, si sono sfruttate le caratteristiche dell'operatore densità per alcune importanti considerazioni. E' stato ad esempio osservato come la scomposizione di un sistema in una certa miscela statistica di stati non sia unica: lo stesso ensemble può essere immaginato come scomposto in maniera equivalente in più di una miscela statistica, ottenendo gli stessi risultati misurabili. L'introduzione poi di un operatore densità ridotto permette di approssimare lo studio di due sistemi in interazione, quando siamo interessati ai risultati delle misure riguardanti soltanto uno dei due (basti pensare, ad esempio, ad un qualunque sistema immerso in un ambiente esterno).

Per mostrare una possibile applicazione dell'operatore densità, è stato scelto un problema fisico sul quale si è incentrata molta della fisica teorica e sperimentale degli ultimi decenni: l'oscillazione del neutrino. Il fenomeno è stato dapprima analizzato nelle sue parti essenziali, nell'ipotesi di un singolo neutrino che si propaga nel vuoto. Si sono potute così evidenziare le caratteristiche più importanti del mixing tra autostati di massa e di sapore: un neutrino in un determinato sapore è rappresentato da uno stato sovrapposizione dei vari autostati di massa che, evolvendo con fattori di fase diversi per via della differenza di massa, rendono possibile la transizione in un diverso sapore all'atto della rivelazione. Successivamente si è accennato al problema dell'interazione con la materia arrivando ad un risultato interessante: ad un certo livello di approssimazione, il processo è schematizzabile in maniera analoga all'oscillazione nel vuoto grazie all'introduzione di un angolo di mixing θ_M dipendente dalle caratteristiche del mezzo circostante, utile più avanti nel lavoro di tesi.

Inquadrate i punti principali del fenomeno di oscillazione, si è potuto, quindi, passare all'applicazione dell'operatore densità al problema, iniziando col mostrare esplicitamente il modo in cui si possano ricavare, attraverso $\hat{\rho}$, gli stessi risultati precedentemente ottenuti. Ciò si è rivelato un utile esercizio per familiarizzare con l'approccio applicativo dell'operatore densità; si è colta così l'opportunità di presentare un metodo risolutivo dell'equazione di Liouville per un problema fisico più semplice. A seguire è stato affrontato il passaggio al caso statistico, partendo dall'esposizione del concetto di sovrappo-

sizione coerente ed incoerente di stati, attraverso l'analisi degli elementi diagonali della matrice rappresentante $\hat{\rho}$ in una base dello spazio dei sapori. Tali elementi contengono informazioni di fase e si annullano nel caso di zero mixing. La loro presenza è letta facilmente nell'ambito di una comoda rappresentazione geometrica mostrata successivamente, in cui è possibile associare alla matrice densità un vettore geometrico \vec{S} in grado di raffigurare le proprietà statistiche e di coerenza dell'ensemble studiato. La fisica del problema viene invece rappresentata dal vettore \vec{B} associato all'Hamiltoniana del sistema, attorno al quale \vec{S} evolve con un moto di precessione. Tramite questo notevole risultato, la dinamica del sistema può essere raffigurata all'interno della rappresentazione geometrica stessa, che si rende estremamente utile nell'analisi della propagazione di un fascio di neutrini all'interno di un mezzo a densità elettronica variabile.

Infine, si è accennato al modo di approcciarsi ad un problema dal grado di complessità ben più elevato in cui l'operatore densità gioca un ruolo fondamentale: lo studio di un ensemble di neutrini in ambienti estremi ad alta densità, quali l'Early Universe e il nucleo di una supernova.

Bibliografia

- [1] Karl Blum. *Density matrix theory and applications*. Vol. 64. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Diu B. Cohen-Tannoudji C. e Laloe F. *Quantum Mechanics Vol. 1*. Hermann e John Wiley & Sons, 1977.
- [3] Ugo Fano. «Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques». In: *Reviews of Modern Physics* 29.1 (1957), p. 74.
- [4] Guido Fantini et al. «The formalism of neutrino oscillations: an introduction». In: *arXiv preprint arXiv:1802.05781* (2018).
- [5] Carlo Giunti e Chung W Kim. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press, 2007.
- [6] Julien Lesgourgues et al. *miele*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] Michele Maltoni et al. «Status of global fits to neutrino oscillations». In: *New Journal of Physics* 6.1 (2004), p. 122.
- [8] Albert Messiah. *Quantum Mechanics [Vol 1-2]*. Dover, 1964.
- [9] Ninetta Saviano. «Neutrino Flavor Conversions in High-Density Astrophysical and Cosmological Environments». In: (2014).
- [10] G Sigl e G Raffelt. «General kinetic description of relativistic mixed neutrinos». In: *Nuclear Physics B* 406.1-2 (1993), pp. 423–451.