



Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”
Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Propagazione ondosa in Meccanica dei Continui

Relatore:

Prof. Addolorata Marasco

Candidato:

Luca Scala

Matricola N85000802

Sommario

Fenomeni di carattere ondulatorio si riscontrano in pressoché qualsiasi disciplina di carattere scientifico, dalla matematica alla fisica, dall'ingegneria all'economia.

Nel presente lavoro si affronterà la fondamentale questione di come le onde si propagano in un mezzo continuo, specializzando il discorso al caso dei fluidi perfetti e dei continui elastici lineari. In particolare si studierà la propagazione delle *onde ordinarie di discontinuità* secondo la teoria di Hadamard. Tale approccio consente di ottenere la velocità di propagazione delle onde e le loro caratteristiche geometriche riconducendo il problema dell'integrazione di sistemi di PDEs non lineari a quello della risoluzione di un problema agli autovalori per il *tensore acustico*. Il vantaggio di questa procedura è la grande semplificazione del problema, laddove il principale svantaggio è l'impossibilità di ottenere ulteriori informazioni sulle proprietà delle onde che non siano la velocità con cui viaggiano, la geometria del fronte d'onda ed il tipo di onda (trasversale, longitudinale o obliqua), al contrario dell'analisi classica di Fourier valida per sistemi lineari.

La materia sarà presentata delineando nel primo capitolo gli aspetti fisico-matematici della questione, in particolare sarà presentata una introduzione alla meccanica dei mezzi continui, nel secondo quelli puramente matematici, con la teoria di Hadamard relativa alla propagazione delle onde ordinarie di discontinuità per equazioni differenziali alle derivate parziali, e nel terzo l'applicazione degli strumenti matematici alla teoria fisica, determinando le soluzioni ondulatorie alle equazioni di Eulero ed a quelle della elasticità lineare.

In appendice saranno riportati alcuni notebooks scritti in ambiente Mathematica, e riportati nelle sezioni 8.13, 8.14, 8.15, 8.16 del testo [1], in grado di classificare PDEs del second'ordine, sistemi di PDEs del primo, e di ottenere la velocità di propagazione delle superfici caratteristiche per problemi di Cauchy associati a sistemi di PDEs del primo e del secondo ordine.

Indice

1	Introduzione alla Meccanica dei Continui	7
1.1	Coordinate euleriane e lagrangiane	7
1.2	Deformazioni	8
1.3	Cinematica di un continuo deformabile	10
1.4	Dinamica di un continuo deformabile	12
1.5	Equazioni di bilancio ed assiomi costitutivi	15
1.5.1	Fluidi perfetti	18
1.5.2	Continui elastici isotropi	19
1.6	Equazioni dell'elasticità lineare	20
2	Teoria di Hadamard	23
2.1	Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine	24
2.2	Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine	26
2.3	Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine	28
2.4	Superfici singolari	29
2.4.1	Superfici singolari fisse	29
2.4.2	Superfici singolari in moto	31
2.5	Onde ordinarie	32
2.6	Linearizzazione ed onde	35
3	Propagazione ondosa	37
3.1	Onde ordinarie in fluidi perfetti	37
3.2	Onde ordinarie in sistemi elastici	39
A	Classificazione di PDEs con Mathematica	43
A.1	PDEs del second'ordine: PdeEqClass	43
A.2	Sistemi del prim'ordine: PdeSysClass	44
B	Propagazione ondosa con Mathematica	47
B.1	Onde ordinarie di discontinuità in sistemi del prim'ordine: WavesI	47
B.2	Onde ordinarie di discontinuità in sistemi del second'ordine: WavesII	50

Capitolo 1

Introduzione alla Meccanica dei Continui

Physico-mechanical laws are, as it were, the telescopes of our spiritual eye, which can penetrate into deepest night of time, past and to come.

Hermann von Helmholtz, *On the Interaction of Natural Forces*.

Il concetto di **corpo continuo deformabile** nasce dalla necessità di modellizzare, nei propri aspetti cinematici, dinamici e termici, sistemi fisici le cui caratteristiche non rientrano nell'ambito di insiemi di punti materiali o di corpi rigidi.

Una definizione formale del concetto di continuo può essere data nel modo seguente: si definisce continuo un corpo che può essere suddiviso con continuità in elementi di estensione infinitesima che preservino tutte e sole le medesime proprietà fisiche del corpo¹.

Nel presente capitolo, dopo aver definito i sistemi di coordinate lagrangiane ed euleriane, e la teoria delle deformazioni finite, verranno introdotte le principali nozioni di cinematica e dinamica di un sistema continuo deformabile, per poi passare alla descrizione delle equazioni di bilancio e delle equazioni costitutive, tramite le quali si caratterizzano macroscopicamente le proprietà fisico-chimiche di ogni sistema continuo. Poiché, infatti, a parità di sollecitazioni impresse i corpi continui subiscono differenti deformazioni, è necessario introdurre nel sistema di PDEs delle equazioni del moto i differenti comportamenti dei materiali attraverso tali equazioni, che in generale dovranno soddisfare una serie di assiomi detti assiomi costitutivi. Verrà, infine, posta particolare attenzione alle equazioni di Eulero per i fluidi perfetti ed alle equazioni dell'elastodinamica lineare di Navier-Cauchy.

1.1 Coordinate euleriane e lagrangiane

Sia S un sistema continuo deformabile tridimensionale. Nello spazio euclideo tridimensionale E_3 sia $R = (O, \mathbf{e}_i)$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale, con O origine del sistema e (\mathbf{e}_i) , $i = 1, 2, 3$, terna di vettori di base.²

Si indichi con $C(t)$ la configurazione del sistema S rispetto al riferimento R al tempo t . Tale configurazione sarà detta la **configurazione attuale** del sistema S al tempo t . Al fine di descrivere

¹Per una definizione assiomaticamente rigorosa si veda W. Noll, *The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics*, in [3], pp. 32-47.

²Essendo in una tale scelta di sistema di riferimento le componenti covarianti di un tensore coincidenti con le componenti controvarianti (è banale verificare, infatti, che il tensore metrico coincide con la delta di Kronecker: $g_{ij} \equiv \delta_{ij}$), per il resto della trattazione gli indici tensoriali saranno posti in basso.

la cinematica di un continuo deformabile è necessario definire una **configurazione di riferimento** C^* ottenuta fissando un **istante di riferimento** t^* tale che

$$C^* := C(t^*). \quad (1.1.1)$$

Una qualsiasi grandezza osservabile Ψ definita nella configurazione di riferimento C^* sarà detta **grandezza lagrangiana** e verrà indicata nel corso della trattazione con una lettera maiuscola, laddove una osservabile ψ definita nella configurazione attuale $C(t)$ sarà detta **grandezza euleriana** e verrà indicata con una lettera minuscola.

Si consideri, ad esempio, il caso del vettore posizione:

- le coordinate euleriane del punto $\mathbf{x} \in S$ in $C(t)$, detto **punto spaziale**, saranno le componenti del vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$;
- le coordinate lagrangiane del punto $\mathbf{X} \in S$ in C^* , detto **punto materiale**, saranno le componenti del vettore $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Il moto del sistema S sarà, dunque, descritto da equazioni del seguente tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1.1.2)$$

dette **equazioni finite del moto**.

In componenti la (1.1.2) assume la forma

$$x_i = x_i(X_j, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1.3)$$

Si assume che le equazioni finite del moto soddisfino le seguenti proprietà:

1. le $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ sono monodrome; questa condizione garantisce che non vi siano lacerazioni del continuo durante il moto;
2. $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \in C^2(C^* \times [0, +\infty[)$; questa condizione è necessaria per definire i campi di velocità ed accelerazione;
3. ad ogni t le $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ sono invertibili; questa condizione garantisce l'impenetrabilità dei corpi e comporta che in ogni $\mathbf{X} \in C^*$ sia non nullo lo Jacobiano: $J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \neq 0$. Infatti, se C^* è la configurazione iniziale, a $t = 0$ risulta $J = 1$, e dalla continuità dello Jacobiano si ottiene

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) > 0. \quad (1.1.4)$$

1.2 Deformazioni

Fissato t nella (1.1.2) si ottiene la **deformazione finita** da C^* a $C(t)$ subito da S al tempo t . Si dice **gradiente di deformazione** in $\mathbf{X} \in C^*$ a t fissato, il differenziale in \mathbf{X} della deformazione finita

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right). \quad (1.2.1)$$

Risulta evidente, confrontando con l'espressione dello Jacobiano data in (1.1.4), che $J = \det \mathbf{F}$. La (1.2.1), inoltre, instaura un isomorfismo da $\mathbf{X} \in C^* \rightarrow \mathbf{x} \in C(t)$.

Se \mathbf{F} non dipende da \mathbf{X} , la deformazione è detta **omogenea**.

La deformazione di un sistema continuo può anche essere espressa mediante il **campo di spostamento**, definito come

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X}. \quad (1.2.2)$$

Introducendo il **gradiente di spostamento**

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}), \quad (1.2.3)$$

segue che

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \quad (1.2.4)$$

Si enuncia, senza dimostrarlo, il seguente risultato.

Teorema 1.2.1 (di decomposizione polare di Cauchy). *Sia \mathbf{F} un tensore del secondo ordine per il quale valga la condizione $\det \mathbf{F} > 0$, definito in uno spazio vettoriale euclideo E_3 ; allora esisteranno due tensori \mathbf{U} e \mathbf{V} simmetrici e definiti positivi, ed un opportuno tensore ortogonale \mathbf{R} , tale che*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (1.2.5)$$

con \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{R} univocamente definiti dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^t\mathbf{F}}, \\ \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^t}, \\ \mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Applicando il teorema alla (1.2.1), si possono definire i seguenti tensori:

\mathbf{R} = tensore di rotazione,

\mathbf{U} = tensore destro di stiramento,

\mathbf{V} = tensore sinistro di stiramento.

Si introducono, ora, il **tensore destro di Cauchy-Green**

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^t\mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad C_{lm} = \frac{\partial x_k}{\partial X_l} \frac{\partial x_k}{\partial X_m}, \quad (1.2.7)$$

ed il **tensore sinistro di Cauchy-Green**

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^t = \mathbf{F}\mathbf{F}^t = \mathbf{R}\mathbf{U}^2\mathbf{R}^t = \mathbf{V}^2, \quad B_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_k}. \quad (1.2.8)$$

Può provarsi che i tensori \mathbf{C} e \mathbf{B} hanno gli stessi autovalori, e gli autovettori di \mathbf{C} si ottengono applicando \mathbf{R}^t a quelli di \mathbf{B} .

Il significato fisico di \mathbf{C} è quello di fornire il quadrato della lunghezza dell'elemento $d\mathbf{x}$ ottenuto per deformazione dell'elemento $d\mathbf{X}$

$$dl^2 = d\mathbf{X}\mathbf{C}d\mathbf{X}; \quad (1.2.9)$$

\mathbf{B}^{-1} , invece, fornisce il quadrato della lunghezza iniziale di $d\mathbf{x}$

$$dL^2 = d\mathbf{x}\mathbf{B}^{-1}d\mathbf{x}. \quad (1.2.10)$$

Discende da risultati di algebra tensoriale che gli autovalori di un tensore simmetrico sono reali e strettamente positivi se il tensore è definito positivo; è questo il caso dei tensori \mathbf{C} e \mathbf{B} . Inoltre l'equazione secolare³ per \mathbf{C} può scriversi nella forma

$$\lambda^3 - I_C\lambda^2 + II_C\lambda - III_C = 0, \quad (1.2.11)$$

ove i coefficienti I_C , II_C , III_C sono detti **primo**, **secondo** e **terzo invariante principale di \mathbf{C}** , ed hanno le seguenti espressioni

$$\begin{cases} I_C = \text{tr}\mathbf{C}, \\ II_C = \det \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \\ III_C = \det \mathbf{C}. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

³ $\det(C_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$.

Se, nello specifico, si adoperano come vettori di base gli autovettori di \mathbf{C} , le espressioni di sopra divengono

$$\begin{cases} I_C = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ II_C = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3, \\ III_C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \end{cases} \quad (1.2.13)$$

con λ_n autovalori di \mathbf{C} .

Un discorso analogo vale per \mathbf{B} , e poiché \mathbf{C} e \mathbf{B} hanno gli stessi autovalori, si ottiene

$$\begin{cases} I_C = I_B, \\ II_C = II_B, \\ III_C = III_B. \end{cases} \quad (1.2.14)$$

1.3 Cinematica di un continuo deformabile

Si è visto nella sezione (1.1) che una qualsiasi osservabile associata ad un sistema continuo può essere espressa in due forme, a seconda che sia riferita alla configurazione di riferimento C^* o a quella attuale $C(t)$. Si è, inoltre, trattato il caso delle coordinate di un punto espresse in entrambe le forme e si è descritta la relazione che tra esse intercorre (equazione (1.1.2)). In generale, se χ è una grandezza fisica associata al sistema S e Ψ è la sua rappresentazione lagrangiana, mentre ψ quella euleriana, varrà la relazione

$$\chi = \psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \Psi(\mathbf{X}, t). \quad (1.3.1)$$

La differenza tra i due punti di vista può essere visualizzata tramite un semplice esempio. Si consideri un fiume che scorre in un letto; analizzarne il moto dal punto di vista lagrangiano corrisponde al considerare una singola particella del fluido e seguirla nel suo moto lungo il letto del fiume, laddove dal punto di vista euleriano corrisponda al fissare una posizione geometrica nel letto che è occupata, istante per istante, da differenti particelle. Il primo punto di vista trova prevalente impiego nello studio dei continui elastici, mentre il secondo è preponderante nell'analisi dei continui fluidi.

La relazione che intercorre tra derivata lagrangiana (detta **derivata materiale**) e derivata euleriana di una generica osservabile χ può essere ricavata banalmente dall'applicazione della regola di derivazione delle funzioni composte⁴, e risulta

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi, \quad (1.3.2)$$

dove, per un generico campo tensoriale in coordinate qualsiasi, ∇ rappresenta la derivata covariante, ed il termine $\mathbf{v} \cdot \nabla \psi$ è detto **derivata convettiva** di ψ . Si vuole, ora, fornire espressioni che descrivano i campi vettoriali di velocità ed accelerazione della particella $\mathbf{X} \in C^*$ al tempo t

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{a} &= \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

con \mathbf{u} il campo di spostamento definito in (1.2.2). Il campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è detto **campo cinetico** o **atto di moto** di S .

Da una banale applicazione della (1.3.2) si ricava

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.3.4)$$

⁴Per tale ragione è utilizzato, a volte, il nome di **derivata totale** in luogo di derivata materiale.

La traiettoria di una particella del sistema S è detta **linea di corrente**, ed è fornita, in termini lagrangiani, dall'integrazione di $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) dt. \quad (1.3.5)$$

Se il campo di velocità è dato in forma euleriana, sarà necessaria l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali non autonomo (ossia le cui variabili dipendono esplicitamente da t) nella forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.3.6)$$

Si definiscono **linee di flusso** le curve integrali, a t fissato, del campo cinetico, ovvero le soluzioni di

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad t = \text{cost}, \quad (1.3.7)$$

dove s è un parametro definito lungo la curva.

Sia D dominio in cui si svolge il moto di S , se è soddisfatta la seguente condizione

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in D \times [t_1, t_2], \quad (1.3.8)$$

il moto si dice **stazionario** in $D \times [t_1, t_2]$. In altre parole, in un moto di questo tipo $\forall \mathbf{x} \in D$ le particelle di S che in $[t_1, t_2]$ transitano in \mathbf{x} hanno tutte la stessa velocità. Poiché in tal caso nelle (1.3.7) e (1.3.8) non compare esplicitamente la variabile t , i due sistemi sono equivalenti e le linee di flusso coincidono con quelle di corrente.⁵

Si può dimostrare nell'ambito dell'algebra tensoriale il seguente teorema.

Teorema 1.3.1. *Ogni tensore doppio \mathbf{T} può essere decomposto univocamente nella somma di un tensore simmetrico \mathbf{S} ed un tensore antisimmetrico \mathbf{A} nella forma*

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{A}, \quad (1.3.9)$$

con

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t), \quad (1.3.10)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t). \quad (1.3.11)$$

Applicando il teorema 1.3.1 al gradiente di velocità si ottiene

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (1.3.12)$$

con

$$\mathbf{D} = (D_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = (D_{ji}) \quad (1.3.13)$$

tensore simmetrico detto **tensore velocità di deformazione**, e

$$\mathbf{W} = (W_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -(W_{ji}) \quad (1.3.14)$$

tensore antisimmetrico detto **tensore velocità di rotazione** o **tensore di vorticità**.

Dal teorema del differenziale e applicando la (1.3.12) segue che

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{D} \cdot d\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x}, \quad (1.3.15)$$

⁵ Il viceversa non è valido: se le linee di flusso coincidono con quelle di corrente, non è lecito asserire che il moto sia stazionario. A prova di ciò si noti che in un moto traslatorio rettilineo le linee di corrente e di flusso coincidono, sebbene il campo cinetico dipenda dalla variabile temporale.

dove si è definito il vettore $\boldsymbol{\omega}$ **velocità angolare locale** tale che

$$\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} = \mathbf{W} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.3.16)$$

La relazione (1.3.16), espressa in coordinate, assume la forma seguente

$$\varepsilon_{ihj}\omega_h dx_j = W_{ij} dx_j, \quad (1.3.17)$$

con ε_{ihj} simbolo di Levi-Civita.⁶ Si verifica, dunque, che l'espressione della $\boldsymbol{\omega}$ risulta

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}. \quad (1.3.19)$$

Si richiama, ora, l'espressione dell'atto di moto di un corpo rigido

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}, \quad (1.3.20)$$

nella quale O è l'origine del riferimento cartesiano e P è un qualsiasi punto del corpo. Confrontando la (1.3.15) con la (1.3.20), è possibile stabilire qualitativamente che in un intorno infinitesimo di \mathbf{x} il campo di velocità per un continuo è analogo all'atto di moto per un corpo rigido, con la differenza che nel caso del continuo comparirà un termine aggiuntivo descrivente la deformazione del corpo durante il moto, e che la $\boldsymbol{\omega}$ per un corpo rigido è funzione solo del tempo.

Analizzando il campo di accelerazione $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ in componenti

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (1.3.21)$$

sommando e sottraendo $v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ si ottiene

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_i}, \quad (1.3.22)$$

ricordando la (1.3.14)

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2v_j W_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_i}, \quad (1.3.23)$$

ed essendo

$$2W_{ij} = 2\varepsilon_{ihj}\omega_h = \varepsilon_{ihj}(\nabla \times \mathbf{v})_h, \quad (1.3.24)$$

si ricava in termini vettoriali

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}. \quad (1.3.25)$$

1.4 Dinamica di un continuo deformabile

In meccanica dei continui le leggi che governano la conservazione o il bilancio di quantità fisiche sono espresse tramite equazioni integrali che prendono il nome di **equazioni del bilancio**.

Si definisce **volume materiale** una regione $c(t) \subset C(t)$ ottenuta mappando una regione $c^* \subset C^*$ tramite la (1.1.2), ovvero un volume che sarà composto, durante il moto, sempre dalle medesime particelle.

⁶La definizione del simbolo di Levi-Civita è la seguente

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione di classe pari} \\ 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ è una permutazione di classe dispari.} \end{cases} \quad (1.3.18)$$

In virtù della definizione stessa di corpo continuo, si assume che in esso la massa sia distribuita con continuità in tutta la regione $C(t)$ che il sistema S occupa al tempo t , ovvero che esista una funzione

$$\varrho(\mathbf{x}, t) \in C^1, \quad (1.4.1)$$

detta **densità di massa**, tale che se $c(t) \subset C(t)$ è un volume materiale associato a $c^* \subset C^*$, la massa in $c(t)$ ad ogni istante t sia data da

$$m(c^*) = \int_{c(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) dc. \quad (1.4.2)$$

Si suppone valido, inoltre, il seguente **principio di conservazione della massa**

$$\frac{d}{dt} \int_{c(t)} \varrho(\mathbf{x}, t) dc = 0, \quad \forall c(t) \text{ volume materiale}, \quad (1.4.3)$$

ovvero durante il moto la massa del volume c^* non varia nel tempo.

Si vuole ricavare una relazione locale per esprimere tale principio; a tal fine si richiama la seguente **formula di Liouville**

$$\dot{J} = J \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1.4.4)$$

e si dimostra il seguente teorema.

Teorema 1.4.1 (del trasporto). *Sia $\psi(\mathbf{x}, t)$ una funzione regolare su $C(t)$, $\forall t \in [a, b]$ e sia $c(t)$ un volume materiale, allora*

$$\frac{d}{dt} \int_{c(t)} \psi(\mathbf{x}, t) dc = \int_{c(t)} [\dot{\psi} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v}] dc = \int_{c(t)} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dc. \quad (1.4.5)$$

Dimostrazione. Operiamo il passaggio da $c(t)$ a c^* :

$$\frac{d}{dt} \int_{c(t)} \psi(\mathbf{x}, t) dc = \int_{c^*} \frac{d}{dt} (J\psi) dc^* = \int_{c^*} \psi \frac{d}{dt} J dc^* + \int_{c^*} J \frac{d}{dt} \psi dc^*, \quad (1.4.6)$$

dalla (1.4.4) segue

$$\frac{d}{dt} \int_{c(t)} \psi(\mathbf{x}, t) dc = \int_{c^*} \psi J \nabla \cdot \mathbf{v} dc^* + \int_{c^*} J \frac{d}{dt} \psi dc^*, \quad (1.4.7)$$

e operando il passaggio da c^* a $c(t)$

$$\frac{d}{dt} \int_{c(t)} \psi(\mathbf{x}, t) dc = \int_{c(t)} \psi \nabla \cdot \mathbf{v} dc + \int_{c(t)} \frac{d}{dt} \psi dc = \int_{c(t)} [\dot{\psi} + \psi \nabla \cdot \mathbf{v}] dc. \quad (1.4.8)$$

□

Applicando, ora, il teorema del trasporto alla (1.4.3), segue

$$\int_{c(t)} (\dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v}) dc = 0, \quad \forall c(t) \text{ volume materiale}. \quad (1.4.9)$$

Per la continuità della funzione integranda e l'arbitrarietà di $c(t)$ si ottiene l'**equazione di continuità della massa**

$$\dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.4.10)$$

che è proprio la relazione locale cercata.

Si opererà, ora, l'ipotesi che per un volume materiale $c(t)$ valgano i postulati della dinamica; in particolare si consideri il **principio del bilancio della quantità di moto**

$$\dot{\mathbf{Q}}(c) = \mathbf{F}(c, c^e), \quad \forall c(t) \text{ volume materiale}, \quad (1.4.11)$$

dove

$$\mathbf{Q}(c) = \int_{c(t)} \varrho \mathbf{v} dc \quad (1.4.12)$$

rappresenta la **quantità di moto** di $c(t)$, e $\mathbf{F}(c, c^e)$ è la risultante delle forze agenti su $c(t)$ dall'esterno $c^e(t)$.

Si discuterà, ora, il caso di **continui semplici**⁷, ovvero continui per i quali le $\mathbf{F}(c, c^e)$ possano esprimersi nel modo seguente

$$\mathbf{F}(c, c^e) = \int_{c(t)} \varrho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dc + \int_{\partial c(t)} \mathbf{t} d\sigma, \quad (1.4.13)$$

con \mathbf{b} **densità delle forze di massa** e \mathbf{t} **sforzo specifico** o **tensione**. I contributi del primo integrale rappresentano l'azione delle forze agenti su $c(t)$ dall'esterno di S , sono distribuiti con continuità su tutta la regione $c(t)$ e sono dette **forze di massa**; i contributi del secondo termine si riferiscono alle **forze di contatto**, e rappresentano l'effetto delle interazioni molecolari tra le particelle di $c(t)$ e $c^e(t)$ sulla frontiera $\partial c(t)$. Il campo $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ è assegnato a priori, laddove il campo \mathbf{t} , dipendente dalla deformazione su S , è incognito, ed al fine di specificarne il legame con il moto del sistema sarà necessario fornire le equazioni costitutive del materiale.

Per un continuo semplice si suppone valida la **ipotesi di Eulero-Cauchy**

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}), \quad (1.4.14)$$

con \mathbf{n} versore della normale uscente all'elemento $\partial\sigma$ di $\partial c(t)$.

Dalla (1.4.12) discende

$$\dot{\mathbf{Q}}(c) = \frac{d}{dt} \int_{c(t)} \varrho \mathbf{v} dc, \quad (1.4.15)$$

ed applicando il teorema del trasporto 1.4.2

$$\dot{\mathbf{Q}}(c) = \frac{d}{dt} \int_{c(t)} \varrho \mathbf{v} dc = \int_{c(t)} \varrho \dot{\mathbf{v}} dc, \quad (1.4.16)$$

ricordando, poi, la (1.4.13) si ottiene

$$\dot{\mathbf{Q}}(c) = \int_{c(t)} \varrho \dot{\mathbf{v}} dc = \int_{c(t)} \varrho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dc + \int_{\partial c(t)} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\sigma. \quad (1.4.17)$$

Può dimostrarsi il seguente risultato.

Teorema 1.4.2 (di Cauchy). *Se \mathbf{t} , \mathbf{b} e $\dot{\mathbf{v}}$ sono funzioni regolari, allora:*

a) *per gli sforzi vale il terzo postulato della dinamica*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}), \quad (1.4.18)$$

b) *\mathbf{t} è lineare in \mathbf{n} , ovvero*

$$\exists \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.4.19)$$

dove $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ è un tensore doppio detto **tensore degli sforzi di Cauchy**.

È possibile, a questo punto, formulare localmente l'equazione del bilancio della quantità di moto. Dal teorema di Gauss si ottiene

$$\int_{\partial c(t)} t_i d\sigma = \int_{c(t)} T_{ij} n_j d\sigma = \int_{c(t)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dc; \quad (1.4.20)$$

sostituendo in (1.4.17)

$$\int_{\partial c(t)} [\varrho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{b}) - \nabla \cdot \mathbf{T}] dc = 0, \quad (1.4.21)$$

⁷Quando le ipotesi di continuo semplice appaiono troppo restrittive per modellizzare correttamente il comportamento di un continuo, si passa alla descrizione di **continui polari**.

e per l'arbitrarietà di $c(t)$ e la regolarità delle funzioni integrande

$$\varrho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \varrho \mathbf{b}, \quad (1.4.22)$$

che rappresenta l'**equazione del bilancio della quantità di moto**.

Si supponga valido il **principio di bilancio del momento angolare**

$$\dot{\mathbf{K}}_{x_0}(c) = \mathbf{M}_{x_0}(c, c^e), \quad \forall c(t) \text{ volume materiale}, \quad (1.4.23)$$

dove

$$\mathbf{K}_{x_0}(c) = \int_{c(t)} \varrho(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{v} \, dc \quad (1.4.24)$$

è il momento angolare di $c(t)$ rispetto al polo \mathbf{x}_0 , e \mathbf{M}_{x_0} momento delle forze agenti su $c(t)$ provenienti da $c^e(t)$ rispetto a \mathbf{x}_0 ; è possibile mostrare che vale la seguente relazione

$$\varepsilon_{ijk} T_{kj} = 0, \quad (1.4.25)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t, \quad (1.4.26)$$

cioè il tensore degli sforzi è simmetrico.

Considerando le equazioni di bilancio in forma locale fin qui discusse, si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali non lineare

$$\begin{cases} \dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \varrho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \varrho \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.4.27)$$

di quattro equazioni scalari nelle dieci incognite $\varrho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, essendo $\mathbf{T} = \mathbf{T}^t$.

Per ottenere il pareggiamento tra equazioni ed incognite è necessario che sia specificata nel sistema la natura del materiale continuo in esame, procedimento che sarà effettuato tramite l'introduzione di **equazioni costitutive** le quali correleranno il tensore \mathbf{T} ai campi $\varrho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

1.5 Equazioni di bilancio ed assiomi costitutivi

Si sono, fin ora, analizzate le equazioni del bilancio che riguardano gli aspetti puramente meccanici dei sistemi continui deformabili, sottolineando come esse valgano universalmente per qualsivoglia continuo semplice di Cauchy. In questa sezione ci si occuperà del bilancio dell'energia e della formulazione dei principi della termodinamica in meccanica dei continui. Si enumereranno, inoltre, gli assiomi generali ai quali deve sottostare una qualsiasi equazione costitutiva al fine di descrivere correttamente le caratteristiche intrinseche di ogni specifico corpo continuo, e permettere il pareggiamento tra equazioni ed incognite nelle (1.4.27).

Il **bilancio dell'energia** ed il **primo principio della termodinamica** in meccanica dei continui vengono enunciati nella seguente forma:

- i) ad ogni volume materiale $c(t)$ di S è possibile associare una funzione scalare $U(c)$ detta **energia interna**, tale che se $T(c)$ è l'energia cinetica di $c(t)$, l'energia totale E di $c(t)$ risulti

$$E(c) = U(c) + T(c); \quad (1.5.1)$$

- ii) la potenza totale W che c scambia con l'ambiente esterno c^e può scriversi nella forma

$$W(c) = P(c, c^e) + Q(c, c^e), \quad (1.5.2)$$

dove $P(c, c^e)$ rappresenta il contributo meccanico dovuto all'azione delle forze esterne agenti su c e $Q(c, c^e)$ è la **potenza termica**;

iii) la variazione nel tempo dell'energia in $c(t)$ è data dalla seguente relazione

$$\dot{U}(c) + \dot{T}(c) = P(c, c^e) + Q(c, c^e). \quad (1.5.3)$$

Nell'ipotesi di continuo semplice di Cauchy si suppone valgano le seguenti relazioni

$$U(c) = \int_c \varrho \varepsilon dc, \quad (1.5.4)$$

$$T(c) = \int_c \frac{1}{2} \varrho v^2 dc, \quad (1.5.5)$$

dove ε è detta **energia specifica interna**.

Dalle (1.4.17) e (1.4.19) si ha

$$P(c, c^e) = \int_c \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dc + \int_{\partial c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (1.5.6)$$

e analogamente si suppone valida la seguente relazione

$$Q(c, c^e) = \int_c \varrho r dc + \int_{\partial c} s d\sigma, \quad (1.5.7)$$

con r **sorgente di calore specifico** ed s **flusso di calore** attraverso ∂c .

Per analogia con il postulato di Eulero-Cauchy si ottiene l'**ipotesi di Fourier**

$$s = s(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}), \quad (1.5.8)$$

da cui si ricava

$$s(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.5.9)$$

con \mathbf{h} **vettore flusso di calore**.

Sostituendo le (1.5.4)-(1.5.9) nella (1.5.3), dall'arbitrarietà del volume materiale e dalla regolarità della funzione integranda, si ricava l'**equazione locale del bilancio dell'energia**⁸:

$$\varrho \dot{\varepsilon} = \mathbf{T} : \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{h} + \varrho r, \quad \text{su } c(t). \quad (1.5.10)$$

Si analizzerà, ora, il contenuto del **II principio della termodinamica**. Introdotta la temperatura assoluta termodinamica ϑ , con $\vartheta > 0$, il postulato afferma che per ogni volume materiale $c(t)$ di un continuo S , esistono due funzioni scalari $S(c)$ ed $M(c, c^e)$ dette **entropia** e **flusso di entropia**, tali che valga la seguente disuguaglianza

$$M(c, c^e) \leq \dot{S}(c), \quad (1.5.11)$$

dove

$$S(c) = \int_c \varrho \eta dc, \quad (1.5.12)$$

$$M(c, c^e) = \int_{\partial c} i d\sigma + \int_c \varrho k dc, \quad (1.5.13)$$

ed η è l'**entropia specifica**, i la **densità di flusso conduttivo dell'entropia** e k la **densità di flusso radiativo dell'entropia**.

Analogamente a quanto fatto prima, supposto

$$i = i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}), \quad (1.5.14)$$

si ha

$$i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}. \quad (1.5.15)$$

⁸Il simbolo $:$ indica il doppio prodotto scalare tra tensori, definito per due tensori del second'ordine \mathbf{T} ed \mathbf{S} come segue: $a = \mathbf{T} : \mathbf{S} = T_{ij} S_{ij}$.

Una forma della diseguaglianza dell'entropia che discende dalla (1.5.15) e da ulteriori considerazioni che esulano dagli scopi del presente lavoro⁹, è data dalla **diseguaglianza di dissipazione ridotta**

$$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\vartheta}) + \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} - \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta}{\vartheta} \geq 0, \quad (1.5.16)$$

dove $\psi = \varepsilon - \vartheta\eta$ rappresenta l'**energia libera di Helmholtz**.

Si è già sottolineato, nella precedente sezione, come i principi di bilancio siano validi per qualsivoglia sistema continuo e sia necessario introdurre, al fine di specificare la natura particolare di ciascuno di essi e risolvere il sistema delle equazioni del moto, le equazioni **costitutive** del materiale, le quali forniranno la specifica risposta del singolo corpo alle sollecitazioni cui è soggetto. Da un punto di vista formale, si può osservare come le equazioni del bilancio formulate fino ad ora non rappresentino un sistema chiuso di equazioni di campo, e sia necessaria l'aggiunta di relazioni che connettano il tensore degli sforzi, l'energia interna e il flusso di calore agli altri campi. Tali equazioni saranno prevalentemente ricavate a partire da evidenze sperimentali, e dovranno soddisfare una serie di condizioni teoriche dette **assiomi costitutivi**. Al fine di enunciare questi ultimi si introdurranno alcune definizioni.

Si dirà **processo termocinetico** l'insieme di funzioni

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \\ \vartheta = \vartheta(\mathbf{X}, t), \end{cases} \quad \text{con } (\mathbf{X}, t) \in C^* \times \mathfrak{R}, \quad (1.5.17)$$

mentre sarà chiamata **storia del processo termocinetico** di S fino all'istante t

$$\begin{cases} \mathbf{x}_S^t = \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau), \\ \vartheta_S^t = \vartheta(\mathbf{X}, \tau), \end{cases} \quad \text{con } (\mathbf{X}, \tau) \in C^* \times]-\infty, t]. \quad (1.5.18)$$

Due processi si diranno **localmente equivalenti** in \mathbf{X} se esiste almeno un intorno di \mathbf{X} in cui essi coincidano.

Si definisce, inoltre, **processo termodinamico** l'insieme di campi

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \vartheta(\mathbf{X}, t), \mathbf{T}(\mathbf{X}, t), \varepsilon(\mathbf{X}, t), \mathbf{h}(\mathbf{X}, t), \eta(\mathbf{X}, t), \psi(\mathbf{X}, t)\}, \quad \text{con } (\mathbf{X}, t) \in C^* \times \mathfrak{R}. \quad (1.5.19)$$

Si verifica che a determinare la risposta del materiale è l'insieme

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{T}, \mathbf{h}, \eta, \psi\}. \quad (1.5.20)$$

Si possono, a questo punto, enunciare gli assiomi costitutivi.

1. **Principio del determinismo.** Ad ogni istante t , la risposta \mathbf{A} del materiale in $\mathbf{X} \in C^*$ è determinata dall'intera storia del processo termocinetico fino all'istante t .
2. **Principio di azione locale.** \mathbf{A} dipende dalla storia del processo termocinetico attraverso una classe di equivalenza locale in \mathbf{X} .
3. **Principio di oggettività materiale.** Le equazioni costitutive relative ai campi \mathbf{A} debbono risultare invarianti se sottoposte ad un cambio di sistema di riferimento.
4. **Principio di dissipazione.** Tutte le equazioni costitutive devono soddisfare la diseguaglianza di dissipazione ridotta (1.5.16) in ogni processo termocinetico compatibile con le equazioni di bilancio dell'impulso, del momento angolare e dell'energia.
5. **Principio di equipresenza.** Tutte le equazioni costitutive dipendono dalle stesse variabili, ovvero dalla storia del processo termocinetico.

⁹Per una trattazione più approfondita si veda [1], sezione 5.6 pp. 150-152.

Determinare le equazioni costitutive per un materiale non è, in generale, un problema semplice. Poiché nella teoria dei corpi continui si rinuncia ad un'analisi microscopica in favore di una descrizione macroscopica dell'evoluzione, le relazioni in questione possono solo essere ricavate tramite sperimentazione, sebbene si possa, in linea generale, semplificare il problema dal punto di vista teorico imponendo una serie di vincoli consistenti con gli assiomi costitutivi, e tenendo conto delle simmetrie dei sistemi in esame¹⁰.

Si specializzerà, ora, il discorso ad alcuni casi elementari di interesse per la successiva trattazione.

1.5.1 Fluidi perfetti

Si definisce **fluido perfetto** un sistema continuo per il quale

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}, \quad p > 0, \quad (1.5.21)$$

dove la funzione positiva p è detta **pressione**. Si distinguono due classi di fluidi perfetti:

1. se $p = p(\varrho)$ il fluido perfetto è detto **compressibile**,
2. se $\varrho = \text{cost}$ e p non dipende da ϱ il fluido perfetto è detto **incompressibile**.

Dalla (1.4.19) si ottiene l'espressione dello sforzo specifico per un fluido perfetto

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{n}, \quad (1.5.22)$$

che si riferisce al **principio di Pascal** supposto valido anche in condizioni dinamiche.

Sostituendo la (1.5.22) nelle (1.4.13), si hanno le **forze di pressione**

$$\int_{\partial c(t)} \mathbf{t} d\sigma = - \int_{\partial c(t)} p \mathbf{n} d\sigma. \quad (1.5.23)$$

Si ottiene, così, il sistema delle **equazioni di Eulero**

$$\begin{cases} \dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \varrho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \varrho \mathbf{b}, \end{cases} \quad (1.5.24)$$

corrispondenti a quattro equazioni scalari nelle cinque incognite ϱ , \mathbf{v} , p .

È possibile, a questo punto, specificare il problema (1.5.24) per le due classi di fluidi perfetti.

Per i **liquidi**, cioè fluidi perfetti incompressibili ($\varrho = \text{cost}$), si ha

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & \text{in } C(t), \\ \varrho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p + \varrho \mathbf{b}, & \text{in } C(t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), & \text{in } C(t), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{su } \partial C(t) \quad (\text{puro scorrimento}), \end{cases} \quad (1.5.25)$$

nelle incognite $p(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Per i **gas**, fluidi perfetti compressibili (per i quali si assegna l'equazione costitutiva $p = p(\varrho)$), si ha

$$\begin{cases} \dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & \text{in } C(t), \\ \varrho \dot{\mathbf{v}} = -p'(\varrho) \nabla \varrho + \varrho \mathbf{b}, & \text{in } C(t), \\ \varrho(\mathbf{x}, 0) = \varrho_0(\mathbf{x}), & \text{in } C(t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), & \text{in } C(t), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{su } \partial C(t), \end{cases} \quad (1.5.26)$$

nelle incognite $\varrho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

¹⁰Per approfondire l'argomento sulle simmetrie si veda [1], sezione 7.1 pp. 178-182.

1.5.2 Continui elastici isotropi

Un sistema continuo si dice **elastico** se, in seguito ad un passaggio dalla configurazione C^* a $C(t)$, il tensore degli sforzi in un punto del sistema dipende dalla deformazione che il sistema ha subito nell'intorno di quel punto; ovvero, ricordando che una deformazione in $\mathbf{X} \in C^*$ è localmente descritta dal gradiente di deformazione \mathbf{F} , un sistema continuo S è elastico se

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}). \quad (1.5.27)$$

Sia \mathbf{B} un tensore del second'ordine, una funzione scalare $f(\mathbf{B})$ si dice **isotropia** se

$$f(\mathbf{B}) = f(\mathbf{QBQ}^t), \quad \forall \mathbf{Q} \in O(3), \quad (1.5.28)$$

con $O(3)$ gruppo delle matrici ortogonali di ordine tre¹¹.

Analogamente, dato un vettore \mathbf{v} e un tensore del second'ordine \mathbf{B} , si diranno **isotrope** funzioni vettoriali $\mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{B})$ e tensoriali $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{B})$ che soddisfino le seguenti relazioni

$$\mathbf{Qf}(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = \mathbf{f}(\mathbf{Qv}, \mathbf{QBQ}^t), \quad \forall \mathbf{Q} \in O(3), \quad (1.5.29)$$

$$\mathbf{QT}(\mathbf{v}, \mathbf{B})\mathbf{Q}^t = \mathbf{T}(\mathbf{Qv}, \mathbf{QBQ}^t), \quad \forall \mathbf{Q} \in O(3). \quad (1.5.30)$$

Discende dalle proprietà delle funzioni isotrope che per le (1.5.28), (1.5.29) risulta

$$f(\mathbf{B}) = f(I_B, II_B, III_B), \quad (1.5.31)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{B}) = (K_0\mathbf{I} + K_1\mathbf{B} + K_2\mathbf{B}^2)\mathbf{v}, \quad (1.5.32)$$

con I_B, II_B, III_B invarianti principali del tensore \mathbf{B} e K_0, K_1, K_2 funzioni di $I_B, II_B, III_B, g^2, \mathbf{g} \cdot \mathbf{Bg}$ e $\mathbf{g} \cdot \mathbf{B}^2\mathbf{g}$, con $\mathbf{g} = \nabla\vartheta$.

È possibile provare che un sistema elastico le cui equazioni caratteristiche soddisfino il principio di oggettività materiale ed il principio di dissipazione è un **solido elastico isotropo** se e solo se

$$\begin{cases} \psi = \psi(I, II, III, \vartheta), \\ \eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} = \eta(I, II, III, \vartheta), \\ \mathbf{T} = f_0\mathbf{I} + f_2\mathbf{B} + f_3\mathbf{B}^2, \\ \mathbf{h} = (K_0\mathbf{I} + K_1\mathbf{B} + K_2\mathbf{B}^2)\mathbf{g}, \end{cases} \quad (1.5.33)$$

con I, II, III invarianti principali di \mathbf{B} o \mathbf{C} , f_0, f_1, f_2 funzioni di I, II, III e K_0, K_1, K_2 funzioni di $I_B, II_B, III_B, g^2, \mathbf{g} \cdot \mathbf{Bg}$ e $\mathbf{g} \cdot \mathbf{B}^2\mathbf{g}$.

Se si impongono le seguenti ulteriori condizioni:

- i) la trasformazione $C^* \rightarrow C(t)$ è infinitesima,
- ii) C^* è uno **stato naturale**, ovvero in C^* risulta $\mathbf{T} = \mathbf{0}$,
- iii) in C^* il sistema è elastico, omogeneo e a temperatura costante ed uniforme,

allora dalla (1.5.33)₃¹² è possibile ricavare le equazioni costitutive per un **solido elastico lineare isotropo**. Per prima cosa si noti che per il tensore sinistro di Cauchy-Green \mathbf{B} valgono le seguenti relazioni

$$\mathbf{B} = \mathbf{FF}^t = (\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{I} + \mathbf{H})^t \simeq \mathbf{I} + 2\mathbf{E}, \quad (1.5.34)$$

$$\mathbf{B}^2 \simeq \mathbf{I} + 4\mathbf{E}; \quad (1.5.35)$$

assumendo che le funzioni f_0, f_1, f_2 siano sviluppabili in serie di potenze degli invarianti principali di \mathbf{B} in un intorno di $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, si ottiene, a meno di termini del second'ordine

$$f_i \simeq a_i + b_i(I_B - 3) \simeq a_i + 2b_i I_E, \quad (1.5.36)$$

¹¹ $O(3) = \{\mathbf{Q} : E_3 \rightarrow E_3 \mid \mathbf{Q}^t\mathbf{Q} = \mathbf{I}\}$.

¹²Non saranno, in questa sede, considerati fenomeni termici, così che le relazioni (1.5.33)₁, (1.5.33)₂, (1.5.33)₄ non saranno tenute in considerazione.

con i coefficienti a_i verificanti, essendo $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ per $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, la condizione

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0. \quad (1.5.37)$$

Sotto queste ipotesi segue che

$$\mathbf{T} = \lambda I_E \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}, \quad (1.5.38)$$

dove i coefficienti λ e μ sono detti **coefficienti di Lamé**.

Esprimendo la (1.5.38) per componenti si ha

$$T_{ij} = \lambda E_{hh} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}, \quad (1.5.39)$$

sicché, contraendo gli indici

$$T_{hh} = 3\lambda E_{hh} + 2\mu E_{hh} = (3\lambda + 2\mu) E_{hh}, \quad (1.5.40)$$

da cui segue

$$I_T = (3\lambda + 2\mu) I_E. \quad (1.5.41)$$

Se, dunque, $(3\lambda + 2\mu) \neq 0$, si ricava la relazione inversa che esprime la deformazione a partire dallo stato di tensione

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I_T \mathbf{I}. \quad (1.5.42)$$

Supposto che il sistema sia sottoposto ad una trazione uniforme $\mathbf{t} = t \mathbf{e}_i$ lungo il vettore \mathbf{e}_i della base (\mathbf{e}_i) , $i = 1, 2, 3$, si ha che l'unica componente non nulla del tensore \mathbf{T} è $T_{11} = t$; allora, dalle (1.5.40) è possibile fornire una interpretazione fisica dei coefficienti di Lamé. Possono, infatti, provarsi le seguenti relazioni

$$E_Y = \frac{t}{E_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (1.5.43)$$

$$\sigma = -\frac{E_{22}}{E_{12}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (1.5.44)$$

dove E_Y è detto **modulo di Young** e quantifica il rapporto tra la trazione per unità di superficie e la dilatazione lineare prodotta lungo la stessa direzione, e σ è detto **modulo di Poisson** ed indica il rapporto tra la contrazione in direzione ortogonale a \mathbf{t} e la dilatazione lungo \mathbf{t} .

1.6 Equazioni dell'elasticità lineare

Si consideri un solido elastico in una configurazione di equilibrio C^* priva di tensioni. Se le sollecitazioni, lo spostamento \mathbf{u} , il gradiente di spostamento \mathbf{H} , il campo cinetico \mathbf{v} ed il gradiente di velocità $\nabla \mathbf{v}$ sono tutte quantità del primo ordine, così che possano essere trascurate le loro potenze ed i loro prodotti, è possibile sviluppare una teoria della elasticità lineare.

Sotto tali condizioni è lecito, dunque, scrivere il campo di accelerazione definito in (1.3.4) come segue

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \simeq \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.6.1)$$

Si vuole operare la scrittura delle equazioni dell'elasticità lineare in forma lagrangiana, sebbene le espressioni delle leggi di bilancio derivate nelle sezioni 1.4-1.5 siano state fornite in termini euleriani. A tal fine è possibile dimostrare¹³ che il tensore degli sforzi di Cauchy \mathbf{T} ed il suo corrispettivo in termini lagrangiani, il **tensore di Piola-Kirchhoff** \mathbf{T}^* , differiscono per termini di ordine superiore al primo, e lo stesso vale per gli sforzi specifici \mathbf{t} e \mathbf{t}^* ed i versori normali \mathbf{n} ed \mathbf{n}^* alle frontiere ∂C e ∂C^* , così che in una teoria lineare essi possono convenientemente identificarsi. Supposto che l'evoluzione del sistema avvenga a temperatura uniforme e costante, è possibile, allora, esprimere il tensore degli sforzi nella forma

$$T_{ij} = C_{ijhk} E_{hk}, \quad (1.6.2)$$

¹³Per una trattazione completa si veda [1], sezione 5.7, pp. 152-156, sezione 6.3, pp. 173-176.

con $C_{ijhk} = C_{jihk} = C_{ijkh} = C_{hkij}$ **tensore di elasticità lineare**.

Dalla conservazione della massa di un volume materiale c nel passaggio da C^* a $C(t)$ segue

$$\int_c \varrho dc = \int_{c^*} \varrho^* dc^*, \quad (1.6.3)$$

così, essendo $dc = Jdc^*$, si ha

$$\int_{c^*} (\varrho J - \varrho^*) dc^*, \quad (1.6.4)$$

e dall'arbitrarietà di c^* si ottiene

$$\varrho = \frac{\varrho^*}{J}. \quad (1.6.5)$$

Ricordando che $J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{H})$, è possibile verificare che a meno di termini del second'ordine la densità di massa può esprimersi come segue

$$\varrho = \varrho^*(I - I_E). \quad (1.6.6)$$

Sostituendo, dunque, le equazioni, (1.6.1), (1.6.2), (1.6.6) nel sistema delle equazioni del moto (1.4.27), si perviene alla scrittura generale del **problema fondamentale dell'elastodinamica lineare**, il quale può essere formulato come un **problema misto al contorno** del tipo

$$\begin{cases} \varrho^* \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(C_{ijhk} \frac{\partial u_h}{\partial X_k} \right) + \varrho^* b_i, & \text{in } C^*, \\ C_{ijhk} \frac{\partial u_h}{\partial X_k} n_j = t_i(\mathbf{X}, t), & \forall \mathbf{X} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in C^*, \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in C^*, \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}, & \forall \mathbf{X} \in \Sigma_2, \end{cases} \quad (1.6.7)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale a ∂C^* , Σ_1 è la parte della frontiera ∂C^* ove agiscono le forze superficiali $\mathbf{t}(\mathbf{x})$, e Σ_2 è una parte fissa di ∂C^* , con $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial C^*$. Se, nello specifico, $\Sigma_2 = \emptyset$, il problema sarà un **problema al contorno di pura trazione**, mentre per $\Sigma_1 = \emptyset$ sarà detto **problema al contorno di puro spostamento**.

In particolare, per un solido elastico lineare omogeneo ed isotropo, ricordando la (1.5.39) e considerando la (1.6.2), si ottiene

$$C_{ijhk} = \lambda \delta_{ij} \delta_{hk} + \mu (\delta_{ih} \delta_{jk} + \delta_{jh} \delta_{ik}). \quad (1.6.8)$$

Sostituendo la (1.6.8) nel sistema (1.6.7), si perviene alla formulazione del problema dell'elastodinamica lineare per solidi omogenei ed isotropi, consistente nella determinazione di un campo di spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ che soddisfi il seguente sistema delle **equazioni di Navier-Cauchy** con condizioni iniziali e al contorno

$$\begin{cases} \varrho^* \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \varrho^* \mathbf{b}, & \text{in } C^*, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \lambda I_E \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} + 2\mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in C^*, \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in C^*, \\ \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}, & \forall \mathbf{X} \in \Sigma_2. \end{cases} \quad (1.6.9)$$

Si enuncerà, ora, senza dimostrazione¹⁴, un teorema concernente l'unicità per il problema al contorno (1.6.7).

¹⁴Un discorso completo può trovarsi in [1], sezioni 10.2-10.3 pp. 327-333, appendice A pp. 463-470.

Teorema 1.6.1 (di unicità per (1.6.7)). *Sia il tensore di elasticità lineare C_{ijhk} positivamente definito, ovvero*

$$C_{ijhk}E_{ij}E_{hk} > 0, \quad (1.6.10)$$

ed esista una soluzione $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ del problema misto (1.6.7), allora tale soluzione è unica.

Nel caso in cui il materiale elastico lineare sia isotropo, si può mostrare che la (1.6.10) è soddisfatta se e solo se

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0. \quad (1.6.11)$$

Capitolo 2

Teoria di Hadamard

The study of waves is important to virtually every branch of science and engineering. Indeed, waves are also important to everyday life. Sound waves allow us to hear, and electromagnetic waves allow us to see.

D. S. Drumheller, *Introduction to Wave Propagation in Nonlinear Fluids and Solids*, Cambridge University Press.

Benché non vi sia una definizione rigorosa ed universalmente accettata in ambito fisico del concetto di onda, essa può intuitivamente essere considerata come un fenomeno che goda di certe proprietà di propagazione e/o di oscillazione. Formalmente i fenomeni ondulatori sono descritti da campi dipendenti da una o più variabili spaziali e dal tempo che soddisfano un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE). Dato un generico sistema di PDEs non è, tuttavia, agevole riconoscere che possa ammettere soluzioni di tipo ondulatorio, così che si rende necessaria una valutazione a posteriori del carattere delle stesse.

Se il sistema di PDEs è lineare (come, ad esempio, nel caso dell'equazione d'onda di D'Alembert), e non sono presenti fenomeni di dissipazione, è possibile cercare soluzioni particolari di tipo sinusoidale, ed in virtù del principio di sovrapposizione combinarle tramite il **metodo di Fourier** per ottenere la soluzione generale del problema. Nel caso in cui si voglia, tuttavia, analizzare sistemi non lineari, l'approccio prima descritto non è perseguibile. Si introdurrà, dunque, un metodo più generale dovuto ad Hadamard, nel quale i fronti d'onda sono interpretati come superfici singolari in moto coincidenti con le superfici caratteristiche di un problema di Cauchy per il sistema di PDEs preso in esame. Tale approccio, nel caso di sistemi lineari, è dimostrabile rimandare agli stessi risultati ottenuti tramite il metodo di Fourier; nel caso si considerino, invece, sistemi di PDEs quasi lineari, ad oggi non esiste una dimostrazione analitica che il metodo restituisca effettivamente le caratteristiche reali della propagazione ondosa, ma solo verifiche sperimentali a posteriori.

Dopo un breve richiamo alla classificazione delle PDEs quasi lineari del second'ordine, che verrà generalizzata al caso di sistemi quasi lineari del primo, si esporranno cenni alla teoria delle superfici singolari, fisse e in moto, ed infine si presenterà la teoria delle onde ordinarie di discontinuità alla luce dei fondamentali risultati ottenuti da Hadamard circa la propagazione ondosa in mezzi continui.

2.1 Equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

Si consideri in un dominio $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ l'equazione differenziale alle derivate parziali **quasi lineare** del second'ordine

$$a_{ij}(\mathbf{x}, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = h(\mathbf{x}, u, \nabla u), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.1.1)$$

Se i coefficienti a_{ij} risultano indipendenti da u e ∇u l'equazione è **semilineare**; se, inoltre, la funzione h dipende linearmente da u e ∇u , l'equazione è **lineare**. È possibile, a questo punto, formulare il seguente **problema di Cauchy**: sia Σ_{n-1} una ipersuperficie (n-1)-dimensionale regolare ed orientabile contenuta in Ω , e sia \mathbf{N} il campo dei versori normali a Σ_{n-1} , si vuole determinare una funzione $u(\mathbf{x})$ che risolva il seguente problema

$$\begin{cases} a_{ij}(\mathbf{x}, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = h(\mathbf{x}, u, \nabla u), & i, j = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Sigma_{n-1}, \\ \frac{du}{dn} \equiv \nabla u \cdot \mathbf{N} = d_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Sigma_{n-1}, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

dove $u_0(\mathbf{x})$ e $d_0(\mathbf{x})$ sono funzioni assegnate su Σ_{n-1} corrispondenti ai valori di $u(\mathbf{x})$ e della sua derivata normale su questa ipersuperficie.

Al fine di semplificare tale problema si introdurrà un sistema di coordinate dette **coordinate di Gauss** (ν_1, \dots, ν_n) , definite in un intorno di Σ_{n-1} . Dato un sistema cartesiano di coordinate (O, \mathbf{u}_i) in \mathfrak{R}^n , siano $x_i = r_i(\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ con $i = 1, \dots, n$ le equazioni parametriche di Σ_{n-1} ; in un intorno di questa ipersuperficie si consideri il sistema

$$x_i = r_i(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) + \nu_n N_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1.3)$$

con ν_n distanza di un punto arbitrario di Σ_{n-1} lungo la normale. Si verifica banalmente che l'equazione $\nu_n = 0$ definisce l'ipersuperficie Σ_{n-1} .

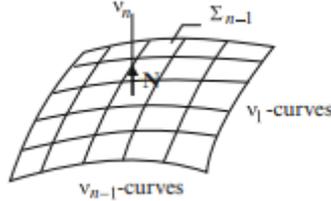


Figura 2.1: Superficie di Cauchy.

Il sistema (2.1.3) definisce una trasformazione di coordinate

$$(\nu_1, \dots, \nu_n) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \quad (2.1.4)$$

in un intorno di Σ_{n-1} , e la matrice Jacobiana della (2.1.3) calcolata in $\nu_n = 0$ risulta

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \nu_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \nu_{n-1}} & N_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \nu_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \nu_{n-1}} & N_n \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

Si osservi, inoltre, che per le proprietà delle superfici regolari, i primi n-1 vettori colonna (\mathbf{e}_i) di J sono tangenti alle n-1 curve coordinate di Σ_{n-1} e tra loro indipendenti.

Essendo \mathbf{N} normale a Σ_{n-1} , essa risulta indipendente dai vettori (\mathbf{e}_i) , ne consegue che lo Jacobiano è non nullo, e può ottenersi la trasformazione inversa dalla (2.1.3)

$$\nu_i = \nu_i(x_1, \dots, x_n). \quad (2.1.6)$$

Nelle coordinate di Gauss così introdotte, l'equazione della ipersuperficie Σ_{n-1} diviene

$$\nu_n(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (2.1.7)$$

e i dati di Cauchy (2.1.2)₂ e (2.1.2)₃ assumono le seguenti espressioni semplificate

$$\begin{cases} u(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) = u_0(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_n} = d_0(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}). \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Si procederà, ora, alla classificazione delle PDEs del second'ordine dopo aver enunciato un teorema fondamentale di esistenza locale.

Teorema 2.1.1 (di Cauchy-Kovalevskaya). *Se i coefficienti a_{ij} , la funzione u , i dati di Cauchy (2.1.2)₂, (2.1.2)₃ e la rappresentazione implicita (2.1.7) di Σ_{n-1} sono funzioni analitiche dei loro argomenti, ed inoltre Σ_{n-1} soddisfa la condizione*

$$a_{ij}(\mathbf{x}, u, \nabla u) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_{n-1}, \quad (2.1.9)$$

allora esiste un'unica soluzione analitica del problema di Cauchy (2.1.2) in un intorno di Σ_{n-1} .

Una ipersuperficie $(n-1)$ -dimensionale Σ_{n-1} di equazione $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ è detta **superficie caratteristica** (o **superficie di Mach**) rispetto al problema di Cauchy (2.1.2) se $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ è soluzione della equazione

$$a_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0. \quad (2.1.10)$$

In tale caso il problema di Cauchy è mal posto, nel senso che non v'è possibilità di determinare univocamente le derivate parziali $\frac{\partial^r u}{\partial \nu_n^r}$, per $r \geq 2$ a partire dai dati di Cauchy assegnati. A tal proposito vale la pena osservare che, nel caso l'equazione sia lineare o semilineare, le superfici caratteristiche dipendono unicamente dall'equazione e non dai dati di Cauchy.

D'altro canto, nel caso quasi-lineare, la (2.1.10) consente di definire la funzione $f(\mathbf{x})$ purché i valori di u e ∇u siano noti in ogni punto. Poiché tali quantità sono univocamente definite dall'equazione e dai dati di Cauchy, e sono continue nell'attraversamento della superficie caratteristica Σ_{n-1} , la (2.1.10) può essere considerata come un'equazione nell'incognita $f(\mathbf{x})$ purché la soluzione della (2.1.1) sia nota almeno da un lato di Σ_{n-1} . A tal fine si osserva che generalmente è possibile trovare una soluzione della (2.1.1) nella forma $u_0 = \text{cost.}$ Per tale motivo, trattando equazioni quasi-lineari, supporremo sempre nota una soluzione u_0 tramite la quale valutare gli a_{ij} in ogni punto \mathbf{x} .

Tuttavia, essendo la (2.1.10) una PDE non-lineare del primo ordine nella funzione incognita $f(x_1, \dots, x_n)$, è complesso determinare le superfici caratteristiche della (2.1.1).

Si supponga, ora, che per un punto fissato $\mathbf{x} \in \Omega$ vi siano superfici caratteristiche Σ_{n-1} contenenti \mathbf{x} ; essendo le componenti del versore \mathbf{N} , normale ad una soluzione Σ_{n-1} della (2.1.10), $N_i = \frac{(\partial f / \partial x_i)}{|\nabla f|}$, la (2.1.10) può scriversi nella seguente forma

$$a_{ij}(x, u_0, \nabla u_0) N_i N_j \equiv a_{ij}^0(\mathbf{x}) N_i N_j = 0. \quad (2.1.11)$$

L'insieme dei vettori verificanti la (2.1.11) forma un cono $A_{\mathbf{x}}$. Si noti, infatti, che $\mathbf{N} = 0$ è soluzione della (2.1.11), ed inoltre se \mathbf{N} è una soluzione, allora anche $\mu \mathbf{N}$ sarà soluzione $\forall \mu \in \mathfrak{R}$.

Si possono, a questo punto, classificare le PDEs quasi-lineari del second'ordine in ogni $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ in base alle caratteristiche degli autovalori della matrice simmetrica $a_{ij}^0(\mathbf{x})$:

1. L'equazione (2.1.1) si dirà **ellittica** in \mathbf{x} (e rispetto ad una soluzione u_0 , se è quasi-lineare) se tutti gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di a_{ij}^0 sono positivi, o, analogamente, se la forma quadratica $a_{ij}^0 N_i N_j$ è definita positiva. In questo caso esisterà una trasformazione $(x_i) \rightarrow (\bar{x}_i)$ che consentirà di scrivere nel punto \mathbf{x} la forma quadratica $a_{ij}(\mathbf{x}) N_i N_j$ nella forma canonica $\lambda_1 \bar{N}_1^2 + \dots + \lambda_n \bar{N}_n^2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. In termini geometrici, per equazioni ellittiche $A_{\mathbf{x}}$ in \mathbf{x} è immaginario; gli autovalori a_{ij} sono positivi, e non vi sono soluzioni reali della (2.1.10).
2. L'equazione (2.1.1) si dirà **parabolica** in \mathbf{x} (e rispetto ad una soluzione u_0 , se è quasi-lineare) se almeno un autovalore di a_{ij}^0 è nullo. In questo caso esisterà una trasformazione $(x_i) \rightarrow (\bar{x}_i)$ che consentirà di scrivere nel punto \mathbf{x} la forma quadratica $a_{ij}(\mathbf{x}) N_i N_j$ nella forma canonica $\lambda_1 \bar{N}_1^2 + \dots + \lambda_m \bar{N}_m^2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$, $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Inoltre, l'iperpiano $\bar{N}_1 = \dots = \bar{N}_m = 0$ è contenuto nel cono $A_{\mathbf{x}}$.
3. L'equazione (2.1.1) si dirà **iperbolica** in \mathbf{x} (e rispetto ad una soluzione u_0 , se è quasi-lineare) se tutti gli autovalori di a_{ij}^0 , eccetto uno hanno il medesimo segno, ed il rimanente ha segno opposto. In questo caso esisterà una trasformazione $(x_i) \rightarrow (\bar{x}_i)$ che consentirà di scrivere nel punto \mathbf{x} la forma quadratica $a_{ij}(\mathbf{x}) N_i N_j$ nella forma canonica $\lambda_1 \bar{N}_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} \bar{N}_{n-1}^2 - \lambda_n \bar{N}_n^2$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ aventi il medesimo segno, e λ_n avente segno opposto. Inoltre, $\forall \mathbf{x}$, $A_{\mathbf{x}}$ è un cono reale.

2.2 Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine

I risultati ottenuti nella precedente sezione verranno, ora, generalizzati ad un sistema di PDEs del primo ordine¹.

Sia $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ punto di un dominio $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$, e sia $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x}))$ una funzione vettoriale di m componenti, ciascuna dipendente da n variabili (x_1, \dots, x_n) . Si supponga che la funzione soddisfi il sistema di m PDEs

$$\begin{cases} \left(A_{11}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + A_{1m}^1 \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \right) + \dots + \left(A_{11}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + A_{1m}^n \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) = c_1, \\ \vdots \\ \left(A_{m1}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + A_{mm}^1 \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \right) + \dots + \left(A_{m1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \dots + A_{mm}^n \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right) = c_m, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dove

$$A_{jh}^i = A_{jh}^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad c_i = c_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (2.2.2)$$

sono funzioni continue dei loro argomenti. L'indice $i = 1, \dots, n$ è l'indice delle variabili indipendenti x_i ; $j = 1, \dots, m$ è l'indice di equazione; $h = 1, \dots, m$ è l'indice delle funzioni u_h .

Il sistema (2.2.1), facendo uso della convenzione di Einstein sugli indici ripetuti, può essere scritto in forma matriciale come

$$\mathbf{A}^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{c}, \quad (2.2.3)$$

dove

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} A_{11}^i & \dots & A_{1m}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}^i & \dots & A_{mm}^i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Il problema di Cauchy per il sistema (2.2.3) consiste nel trovare una soluzione al sistema che soddisfi i dati di Cauchy

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{n-1}, \quad (2.2.5)$$

¹È evidente, infatti, che ogni PDEs di ordine superiore al primo possa essere ricondotta ad un sistema di un numero opportuno di PDEs del primo.

dove Σ_{n-1} è una superficie regolare di \mathfrak{R}^n .

Come nella precedente sezione, si introducono le coordinate gaussiane (ν_1, \dots, ν_n) , così da rappresentare Σ_{n-1} tramite l'equazione $\nu_n = f(\mathbf{x}) = 0$. In tali coordinate il sistema (2.2.3) assume la forma

$$\mathbf{A}^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{A}^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu_h} \frac{\partial \nu_h}{\partial x_i} = \left(\mathbf{A}^i \frac{\partial \nu_h}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu_h} = \mathbf{c}, \quad (2.2.6)$$

mentre i dati di Cauchy divengono

$$\mathbf{u}(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, 0) = \bar{\mathbf{u}}_0(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}). \quad (2.2.7)$$

Essendo $A_{jh}^i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $c_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ funzioni analitiche dei loro argomenti, la soluzione può essere espressa in serie di potenze di ν_n

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\nu_1, \dots, \nu_{n-1}) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu_n} \right)_{\mathbf{x}_0} \nu_n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \nu_n^2} \right)_{\mathbf{x}_0} \nu_n^2 + \dots, \quad (2.2.8)$$

con $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}$. Il sistema (2.2.6) può essere scritto nella forma

$$\left(\mathbf{A}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu_h} \Big|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{F}, \quad (2.2.9)$$

dove \mathbf{F} è determinata dai dati di Cauchy. Questa espressione evidenzia il fatto che $\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu_h} \right)_{\mathbf{x}_0}$ è determinato se e solo se

$$\det \left(\mathbf{A}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \neq 0. \quad (2.2.10)$$

Tale condizione consente di determinare tutte le derivate $\frac{\partial^r \mathbf{u}}{\partial \nu_n^r}$ in ogni $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}$; è inoltre possibile dimostrare che la serie (2.2.8) converge uniformemente ad una soluzione del problema di Cauchy (2.2.6), (2.2.7).

Si passa, ora, alla classificazione dei sistemi di PDEs del prim'ordine, analogamente a quanto fatto nella precedente sezione.

Una ipersuperficie $(n-1)$ -dimensionale Σ_{n-1} di equazione $f(\mathbf{x}) = 0$ è detta **superficie caratteristica** per il problema di Cauchy (2.2.6), (2.2.7), se è soluzione della equazione

$$\det \left(\mathbf{A}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (2.2.11)$$

Come si è osservato per una PDE del second'ordine, se il sistema (2.2.3) è quasi-lineare, allora la matrice \mathbf{A}^i dipende dalla soluzione \mathbf{u} del sistema e dal punto \mathbf{x} . La (2.2.11) consente, in linea di principio, di trovare la funzione $f(\mathbf{x})$ se è assegnata una soluzione \mathbf{u}_0 ; la classificazione di un sistema quasi-lineare dipenderà, dunque, da tale soluzione.

La determinazione di superfici caratteristiche richiede, nuovamente, la risoluzione di una PDE del primo ordine. Si noti che se esiste una soluzione f di (2.2.11), allora il versore \mathbf{N} normale alla superficie caratteristica $f = \text{cost}$ ha componenti N_i proporzionali alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, e vale la seguente condizione

$$\det(\mathbf{A}^i N_i) = 0. \quad (2.2.12)$$

I versori \mathbf{N} , inoltre, giacciono su un cono, poiché se \mathbf{N} risolve (2.2.12), anche $\mu \mathbf{N}$ per μ reale sarà soluzione di (2.2.12).

Supposto che $\det \mathbf{A}^1 \neq 0$, dalla (2.2.12) segue che

$$\det(\mathbf{A}^1)^{-1} \det(\mathbf{A}^i N_i) = \det((\mathbf{A}^1)^{-1} \mathbf{A}^i N_i) = 0, \quad (2.2.13)$$

ovvero

$$\det \left(\mathbf{I} N_1 + \sum_{\alpha=2}^n \mathbf{B}^\alpha N_\alpha \right) = 0, \quad \mathbf{B}^\alpha = (\mathbf{A}^1)^{-1} \mathbf{A}^\alpha. \quad (2.2.14)$$

Dato un vettore arbitrario (N_α) di \mathfrak{R}^{n-1} , esistono vettori normali in \mathbf{x} ad una superficie caratteristica se l'equazione algebrica di ordine m (2.2.14) ammette una soluzione reale N_1 . La (2.2.14) rappresenta, inoltre, l'equazione caratteristica del problema agli autovalori

$$\left(\sum_{\alpha=2}^n \mathbf{B}^\alpha N_\alpha \right) \mathbf{v} = -N_1 \mathbf{v}, \quad (2.2.15)$$

le radici della (2.2.14) saranno, dunque, gli autovalori cambiati di segno della matrice

$$\mathbf{B} \equiv \sum_{\alpha=2}^n \mathbf{B}^\alpha N_\alpha. \quad (2.2.16)$$

Il sistema (2.2.3) potrà, allora, essere classificato come segue:

1. Il sistema (2.2.3) si dirà **ellittico** in \mathbf{x} (o per la soluzione \mathbf{u}_0 se è quasi-lineare) se per ogni \mathbf{N} la (2.2.14) non ammette alcuna soluzione reale N_i , ossia non vi è alcun vettore normale alle superfici caratteristiche passante per un punto arbitrario $\mathbf{x} \in \Omega$. Di conseguenza, i sistemi ellittici non ammettono superfici caratteristiche.
2. Il sistema (2.2.3) si dirà **iperbolico** in \mathbf{x} (o per la soluzione \mathbf{u}_0 se è quasi-lineare) se per ogni \mathbf{N} la (2.2.14) ammette solo radici reali, alcune di esse eventualmente coincidenti, e gli autovettori corrispondenti formano una base di \mathfrak{R}^m .
3. Il sistema (2.2.3) si dirà **totalmente iperbolico** in \mathbf{x} (o per la soluzione \mathbf{u}_0 se è quasi-lineare) se per ogni \mathbf{N} la (2.2.14) ammette solo radici reali e distinte, e gli autovettori corrispondenti formano una base di \mathfrak{R}^m .
4. Il sistema (2.2.3) si dirà **parabolico** in \mathbf{x} (o per la soluzione \mathbf{u}_0 se è quasi-lineare) se per almeno una radice della (2.2.14) la dimensione del corrispondente sottoinsieme di autovettori è minore della sua molteplicità algebrica.

Nei casi 2-4, per ogni vettore $\tilde{\mathbf{N}} = (N_2, \dots, N_n) \in \mathfrak{R}^{n-1}$ esistono molteplici valori di N_1 (con un massimo di m) che soddisfano la (2.2.16). In questo caso il cono $A_{\mathbf{x}}$ è a più falde.

2.3 Sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine

Sovente nello studio di fenomeni fisici ci si trova in presenza di sistemi quasi-lineari del second'ordine di m equazioni

$$A_{HK}^{ij} \frac{\partial^2 u_K}{\partial x_i \partial x_j} + f_H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = 0, \quad H, K = 1, \dots, m, \quad (2.3.1)$$

nelle funzioni incognite u_1, \dots, u_m dipendenti dalle variabili x_1, \dots, x_n . In questo caso la classificazione del sistema può essere eseguita in due modi. Il primo consiste nel trasformare (2.3.1) in un sistema del prim'ordine di $m(1+n)$ equazioni ottenute aggiungendo le mn equazioni ausiliarie

$$\frac{\partial u_H}{\partial x_j} = \nu_{Hj}, \quad H = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.3.2)$$

e riscrivendo la (2.3.1) nella forma

$$A_{HK}^{ij} \frac{\partial \nu_{Kj}}{\partial x_i} + f_H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = 0, \quad H, K = 1, \dots, m. \quad (2.3.3)$$

Nell'applicazione di tale metodo vi è, però, lo svantaggio dell'enorme aumento del numero di equazioni.

Un secondo approccio più comodo consiste nello scrivere il sistema (2.3.1) in forma matriciale

$$\mathbf{A}^{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = 0. \quad (2.3.4)$$

Procedendo come nella precedente sezione, è possibile definire per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \mathbf{f} = 0, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{n-1}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{n}} \equiv \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{d}_0(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Sigma_{n-1}, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

le superfici caratteristiche mediante la condizione

$$\det \left(\mathbf{A}^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (2.3.6)$$

Il versore \mathbf{N} , normale alla superficie caratteristica di equazione $f = cost$, soddisfa, dunque, la seguente condizione

$$\det(\mathbf{A}^{ij} N_i N_j) = 0, \quad (2.3.7)$$

la quale definisce, per ogni \mathbf{x} , un cono.

2.4 Superfici singolari

2.4.1 Superfici singolari fisse

Sia C un dominio compatto di E_3 con frontiera regolare ∂C , sia, poi, σ una superficie regolare orientata ed \mathbf{n} il versore ad essa normale; si ipotizzi che σ divida C in due regioni C^- e C^+ , con C^+ contenente \mathbf{n} . Sia, ora, $\psi(P)$ una funzione di classe $C^1(C \setminus \sigma)$ dotata dei seguenti limiti finiti

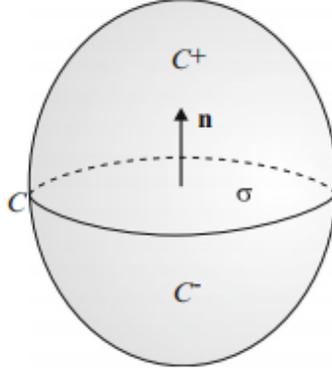


Figura 2.2: Superficie singolare.

$$\lim_{P \rightarrow \mathbf{r}, P \in C^+} \psi(P) \equiv \psi^+(\mathbf{r}), \quad (2.4.1)$$

$$\lim_{P \rightarrow \mathbf{r}, P \in C^-} \psi(P) \equiv \psi^-(\mathbf{r}), \quad (2.4.2)$$

$\forall \mathbf{r} \in \sigma$. Si supponga, inoltre, che $\psi^+(\mathbf{r})$ e $\psi^-(\mathbf{r})$ siano continue su σ . Si definisce **salto** di $\psi(P)$ nell'attraversamento di σ

$$[[\psi(\mathbf{r})]] \equiv \psi^+(\mathbf{r}) - \psi^-(\mathbf{r}). \quad (2.4.3)$$

Se $[[\psi(\mathbf{r})]]$ non si annulla per qualche $\mathbf{r} \in \sigma$, allora σ è detta **superficie singolare di ordine zero** per ψ . Analogamente, se $[[\psi(\mathbf{r})]] = 0$ su σ ed esistono continui i limiti

$$\lim_{P \rightarrow \mathbf{r}, P \in C^+} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(P) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^+(\mathbf{r}), \quad (2.4.4)$$

$$\lim_{P \rightarrow \mathbf{r}, P \in C^-} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(P) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^-(\mathbf{r}), \quad (2.4.5)$$

la superficie σ è detta **superficie singolare di ordine uno** per ψ se, in qualche punto di σ , il salto $\left[\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\mathbf{r})\right]\right]$ non si annulla.

Si può, così, estendere la definizione a **superfici singolari di ordine k** per ψ , ove ψ può essere anche componente di un campo vettoriale o tensoriale.

Si enuncia, ora, il seguente risultato.

Teorema 2.4.1 (di Hadamard). *Sia ψ funzione di classe $C^1(C \setminus \sigma)$ e sia σ superficie singolare di ordine uno per ψ , allora, per ogni curva regolare γ di σ si ha*

$$\boldsymbol{\tau} \cdot [[\nabla\psi]] = 0, \quad (2.4.6)$$

con $\boldsymbol{\tau}$ versore tangente a γ .

La (2.4.6) è detta **condizione di compatibilità geometrica** per una discontinuità debole del campo ψ , ed esprime il risultato secondo il quale se $[[\psi]] = 0$, solo la derivata normale può presentare discontinuità, ed il termine “geometrica” si riferisce al seguente risultato.

Teorema 2.4.2 (di Maxwell). *Nelle ipotesi del teorema di Hadamard, vale la seguente relazione*

$$[[\nabla\psi]]_{\mathbf{r}} = a(\mathbf{r})\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{r} \in \sigma. \quad (2.4.7)$$

La quantità a sarà detta **ampiezza di discontinuità**.

Il teorema può essere formulato in versione tensoriale²

$$[[\nabla\mathbf{T}]]_{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \sigma, \quad (2.4.8)$$

con \mathbf{T} e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ r-tensori. Per un campo vettoriale \mathbf{v} si ottiene:

Teorema 2.4.3 (di Weingarten). *Sia $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ campo vettoriale su σ ,*

$$[[\nabla\mathbf{v}]]_{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{a}(\mathbf{r}), \quad (2.4.9)$$

$$[[\nabla \cdot \mathbf{v}]]_{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}), \quad (2.4.10)$$

$$[[\nabla \times \mathbf{v}]]_{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}). \quad (2.4.11)$$

Se σ è una superficie singolare del second'ordine per la funzione $\psi \in C^2(C \setminus \sigma)$ e si applica la (2.4.9) a $\nabla\psi$, si ottiene

$$\left[\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_i}\right]\right] = n_j a_i. \quad (2.4.12)$$

Poiché è possibile invertire l'ordine di derivazione, si ottiene

$$n_j a_i = n_i a_j, \quad (2.4.13)$$

e, dunque,

$$\frac{a_i}{n_i} = \frac{a_j}{n_j} \equiv \lambda. \quad (2.4.14)$$

Pertanto la (2.4.12) diviene

$$[[\nabla\nabla\psi]]_{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}(\lambda(\mathbf{r})), \quad (2.4.15)$$

e per un generico r-tensore \mathbf{T} si scrive

$$[[\nabla\nabla\mathbf{T}]]_{\mathbf{r}} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (2.4.16)$$

con $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ r-campo tensoriale.

²Il simbolo \otimes indica il prodotto tensoriale, così definito: siano V_1, \dots, V_k spazi vettoriali, il loro prodotto tensoriale è una coppia (T, ϕ) , dove T è uno spazio vettoriale e $\phi: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow T$ è una applicazione multilineare tale che per ogni spazio vettoriale W e per ogni $F: V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ multilineare esiste un'unica $\tilde{F}: T \rightarrow W$ lineare tale che $F = \tilde{F} \circ \phi$.

2.4.2 Superfici singolari in moto

Sovente, in meccanica dei continui, ci si trova in presenza di superfici singolari rispetto ad un campo che si muovono indipendentemente dalle particelle del sistema. In particolare, queste, trovano applicazione nella teoria di Hadamard per le onde di discontinuità, rappresentando, come si vedrà, proprio i fronti d'onda di onde ordinarie e d'urto. Pertanto saranno di seguito esposti fondamentali risultati di cinematica delle superfici singolari in moto.

Sia $f(\mathbf{r}, t) = 0$ l'equazione di una superficie in moto $\Sigma(t)$. Dato un punto $\mathbf{r} \in \Sigma(t)$, si consideri la retta a di equazione $\mathbf{r} + s\mathbf{n}$, con \mathbf{n} versore normale a $\Sigma(t)$ in \mathbf{r} . Se $f(\mathbf{r}, t + \tau) = 0$ è l'equazione di $\Sigma(t + \tau)$, sia \mathbf{y} il punto d'intersezione di a con $\Sigma(t + \tau)$. La distanza $s(\tau)$ tra $\Sigma(t)$ e $\Sigma(t + \tau)$ valutata lungo la normale ad \mathbf{r} consente di definire la **velocità normale** di $\Sigma(t)$ come di seguito

$$c_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(\tau)}{\tau} = s'(0). \quad (2.4.17)$$

Essendo $s(\tau)$ implicitamente definita dalla equazione

$$f(\mathbf{r} + s\mathbf{n}, t + \tau) \equiv \varphi(s, t) = 0, \quad (2.4.18)$$

segue per il teorema del Dini

$$s'(0) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)_{(0,0)} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\nabla f \cdot \mathbf{n}}. \quad (2.4.19)$$

Essendo ∇f parallelo ad \mathbf{n} , ed avendo la medesima orientazione, dalla (2.4.19) si ottiene

$$c_n = s'(0) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|}. \quad (2.4.20)$$

La velocità della superficie rispetto alle particelle materiali che istante per istante giacciono su di essa è detta **velocità locale di propagazione** ed è data da

$$c_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.4.21)$$

dove \mathbf{v} è la velocità delle particelle materiali nella configurazione attuale.

Se in luogo di una rappresentazione implicita della superficie se ne sceglie una parametrica $\mathbf{r} = \mathbf{g}(u_\alpha, t)$ con u_α , $\alpha = 1, 2$, parametri sulla superficie, allora si ottiene $f(\mathbf{g}(u_\alpha, t), t) = 0$ e dalla (2.4.20) si ricava che

$$c_n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \quad (2.4.22)$$

È possibile dimostrare che la velocità c_n della superficie è indipendente dalla rappresentazione parametrica scelta.

Una superficie in moto $\Sigma(t)$ si dirà **singolare di ordine $k \geq 0$** rispetto al campo $\psi(\mathbf{x}, t)$ se è singolare di ordine k la superficie fissa \mathbb{S} di \mathfrak{R}^4 definita da $f(\mathbf{r}, t) = 0$.

Conviene, a questo punto, riscrivere le relazioni ricavate per una superficie singolare fissa in termini delle variabili quadridimensionali (x_i, t) per la superficie \mathbb{S} . Il versore normale alla superficie avrà la seguente forma

$$\mathbf{N} = \frac{\left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t} \right)}{\left| \left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right|}. \quad (2.4.23)$$

Ricordando la (2.4.20) e osservando che il versore normale \mathbf{n} alla superficie $f(\mathbf{r}, t) = 0$ in \mathfrak{R}^3 , a t fissato, è

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \quad (2.4.24)$$

è possibile riscrivere la (2.4.23) come

$$\mathbf{N} = \frac{|\nabla f|}{\left| \left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right|} (\mathbf{n}, -c_n) \equiv \beta(\mathbf{n}, -c_n). \quad (2.4.25)$$

Con tale notazione, se $\Sigma(t)$ è una superficie singolare di ordine 1 rispetto al campo tensoriale $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$, allora si avranno le seguenti condizioni di salto

$$[[\nabla \mathbf{T}]] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4.26)$$

$$\left[\left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right] \right] = -c_n \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4.27)$$

$$\text{con } \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \frac{|\nabla f|}{\left| \left(\nabla f, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right|}.$$

Se la superficie è singolare di ordine 2, varranno le seguenti condizioni di salto

$$[[\nabla \nabla \mathbf{T}]] = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4.28)$$

$$\left[\left[\nabla \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} \right] \right] = -c_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4.29)$$

$$\left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial t^2} \right] \right] = c_n^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (2.4.30)$$

2.5 Onde ordinarie

Sia C una regione di \mathfrak{R}^n ; si indichi con Σ_{n-1} una ipersuperficie che divide tale regione in due parti C^- e C^+ , dove C^+ contiene il versore \mathbf{N} normale a Σ_{n-1} . Se \mathbf{u} è una funzione di classe C^1 in $C \setminus \Sigma_{n-1}$, ed è soluzione del sistema (2.2.6) in entrambe le regioni C^- e C^+ , sussiste il seguente teorema.

Teorema 2.5.1. *La superficie Σ_{n-1} è una superficie singolare del prim'ordine rispetto alla funzione $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ se e solo se è una superficie caratteristica per il problema di Cauchy (2.2.6) – (2.2.7).*

Dimostrazione. Sia Σ_{n-1} una superficie singolare del prim'ordine per la funzione $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Dalla (2.4.8) segue la condizione di salto attraverso Σ_{n-1}

$$\left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{a} N_i, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}, \quad (2.5.1)$$

con \mathbf{a} campo vettoriale ad m componenti; inoltre, poiché $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ soddisfa la (2.2.3) in C^- e C^+ , nel limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}$ si ottiene

$$\mathbf{A}^i \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0}^{\pm} = \mathbf{c}, \quad (2.5.2)$$

così che risulta

$$\mathbf{A}^i \left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{0}. \quad (2.5.3)$$

Dalla (2.5.1), notando che $N_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, dove $f(\mathbf{x}) = 0$ è l'equazione della superficie Σ_{n-1} , può concludersi che

$$\left(\mathbf{A}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mathbf{x}_0} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (2.5.4)$$

Se la superficie Σ_{n-1} è singolare, allora il campo \mathbf{a} è non nullo in qualche punto $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}$; ovvero il determinante dei coefficienti del sistema (2.5.4) nell'incognita \mathbf{a} deve essere nullo. Dalla (2.2.11) si evince che Σ_{n-1} sia superficie caratteristica.

Inversamente, se vale la (2.2.11), allora la (2.5.1) è soddisfatta da un vettore non nullo \mathbf{a} e Σ_{n-1} è superficie singolare del prim'ordine. \square

In virtù del teorema qui esposto, si dirà la (2.5.4) **sistema dei salti** associato a (2.2.3).

Per evidenziare il ruolo di questo teorema nell'analisi della propagazione ondosa, si supponga di rappresentare un fenomeno fisico tramite il sistema quasi-lineare del prim'ordine (2.2.6), le cui incognite sono funzioni delle variabili indipendenti $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, \mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^4$. Si consideri una superficie in moto $S(t)$ di equazione $f(t, \mathbf{x}) = 0$, la quale suddivida una regione $V \subset \mathfrak{R}^3$ in due zone $V^-(t)$ e $V^+(t)$, con il versore normale a $S(t)$ orientato verso $V^+(t)$.

Se la soluzione $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ di (2.2.6) presenta una discontinuità nelle derivate prime attraverso $S(t)$, allora si dirà rappresentare una **onda ordinaria**; se a presentare la discontinuità è la funzione stessa, allora $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ rappresenterà una **onda d'urto**. La superficie $S(t)$ sarà detta **fronte d'onda**, e $V^+(t)$ sarà la regione verso cui essa si muoverà con velocità normale c_n . Per tale ragione si diranno $V^-(t)$ **regione perturbata** e $V^+(t)$ **regione imperturbata**. Da qui segue che il fronte d'onda di un'onda ordinaria è una superficie singolare del prim'ordine rispetto alla soluzione $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ di (2.2.3) o, equivalentemente, una superficie caratteristica per il problema di Cauchy (2.2.3)-(2.2.5) ad esso associato, mentre il fronte d'onda di un'onda d'urto è superficie singolare di ordine zero.

A questo punto è possibile avvalersi della teoria delle superfici singolari, così come di quella delle superfici caratteristiche, per determinare il fronte d'onda $f(t, \mathbf{x})$. L'aspetto rilevante consiste nel fatto che il sistema (2.2.3) predice la propagazione di onde ordinarie se e solo se le sue caratteristiche sono reali, ovvero se il sistema è iperbolico.

Si potrebbe, a questo punto, obiettare che la definizione qui data di onda è piuttosto lontana dall'idea intuitiva del fenomeno fisico; ad esempio una generica soluzione dell'equazione di d'Alembert può essere espressa sotto forma di serie di Fourier di onde elementari. Può essere, tuttavia, verificato a posteriori, che in tutti i casi in cui si riesca a determinare una soluzione del tipo onda, le proprietà di propagazione dell'onda ottenuta coincideranno con quelle ricavate dalla teoria delle onde ordinarie.

Se l'evoluzione di un'onda è rappresentata dal seguente sistema di PDEs del prim'ordine

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{b}, \quad (2.5.5)$$

allora il sistema dei salti associato sarà

$$-c_n \mathbf{a} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})_{\mathbf{r}} n_i \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (2.5.6)$$

con c_n velocità del fronte d'onda, \mathbf{n} versore normale alla superficie e \mathbf{a} vettore delle discontinuità delle derivate prime. Si introdurrà, a questo punto, il **tensore acustico**, ovvero la matrice $m \times m$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})_{\mathbf{r}} n_i, \quad (2.5.7)$$

con m numero di incognite, ossia di componenti di $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$; il sistema (2.5.6) diverrà

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = c_n \mathbf{a}. \quad (2.5.8)$$

Questa equazione porta al seguente risultato dovuto ad Hadamard.

Teorema 2.5.2. *Dato lo stato imperturbato $\mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t)$ attraverso il quale si propaga un'onda ordinaria, la matrice \mathbf{Q} è una funzione nota di \mathbf{r} e t , data la continuità di $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ su $S(t)$. Fissata una direzione di propagazione \mathbf{n} , la velocità di propagazione coincide con gli autovalori della matrice \mathbf{Q} , e le discontinuità delle derivate prime sono gli autovettori di \mathbf{Q} .*

Si osservi che l'esistenza di onde ordinarie richiede che gli autovalori e autovettori di \mathbf{Q} siano reali. Una volta determinata la velocità di propagazione $c_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}^+, \mathbf{n})$, l'evoluzione del fronte d'onda può essere derivata riferendosi alla velocità di propagazione di $S(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}^+, \mathbf{n})|\nabla f|. \quad (2.5.9)$$

Essendo $S(t)$ superficie in moto, $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$; inoltre $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e c_n è funzione omogenea di grado zero rispetto a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Dunque la (2.5.9) assume la forma della **equazione iconale**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_n \left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}^+, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (2.5.10)$$

Il problema fisico, rappresentato da un sistema di m PDEs del second'ordine in m incognite dipendenti da x_1, \dots, x_n , può essere ricondotto ad un nuovo sistema del primo ordine di mn equazioni in mn incognite, introducendo le nuove incognite

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu_{ij}, \quad (2.5.11)$$

e le seguenti equazioni

$$\frac{\partial \nu_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \nu_{ih}}{\partial x_j}, \quad (2.5.12)$$

le quali esprimono l'invertibilità delle derivate seconde delle funzioni u_i .

Poiché tale procedimento aumenta di molto il numero di equazioni da risolvere, è più conveniente estenderlo a sistemi del second'ordine.

Se l'evoluzione del fenomeno è rappresentata dal seguente sistema del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{B}_{ij}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (2.5.13)$$

allora un'onda ordinaria è definita come una superficie singolare del second'ordine $S(t)$ della soluzione $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, ovvero come una superficie attraverso la quale alcune delle derivate seconde sono discontinue, per tale ragione è talvolta chiamata **onda di accelerazione**; analogamente $S(t)$ è un'onda d'urto se la funzione o le sue derivate prime sono discontinue nell'attraversamento di $S(t)$. Scritto il sistema (2.5.13) nelle regioni V^- e V^+ , considerando il limite $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r} \in S(t)$ e sottraendo membro a membro, si ottiene il sistema dei salti associato alla equazione (2.5.13)

$$\left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] \right]_{\mathbf{r}} + \mathbf{B}_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})_{\mathbf{r}} \left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right]_{\mathbf{r}} = \mathbf{0}. \quad (2.5.14)$$

Richiamando le formule ricavate per le condizioni di salto nella sezione (2.4.2), si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \mathbf{n}) \mathbf{a} \equiv \mathbf{B}_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})_{\mathbf{r}} n_i n_j \mathbf{a} = c_n^2 \mathbf{a}, \quad (2.5.15)$$

con $\mathbf{n} = (n_i)$ versore normale a $S(t)$ e \mathbf{a} vettore delle discontinuità.

È dovuto, nuovamente, ad Hadamard il seguente risultato.

Teorema 2.5.3. *Dato lo stato imperturbato $\mathbf{u}^+(\mathbf{x}, t)$ attraverso il quale si propaga un'onda ordinaria $S(t)$, la matrice \mathbf{Q} è una funzione nota di \mathbf{r} e t , data la continuità di $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ su $S(t)$. Fissata una direzione di propagazione \mathbf{n} , la velocità di propagazione coincide con le radici degli autovalori della matrice $\mathbf{B}_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})_{\mathbf{r}} n_i n_j$, e le discontinuità delle derivate prime sono i suoi autovettori.*

2.6 Linearizzazione ed onde

Si è già osservato quanto sia complesso ottenere una soluzione per il sistema (2.5.5). È possibile, tuttavia, osservare che nell'ipotesi in cui $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, qualsiasi funzione vettoriale costante $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ è soluzione del sistema.

Si supponga di conoscere una soluzione \mathbf{u}_0 di (2.5.5), e ci si domandi sotto quali condizioni la funzione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}, \quad (2.6.1)$$

dove \mathbf{v} è una "piccola perturbazione" allo stato imperturbato \mathbf{u}_0 , sia ancora una soluzione del sistema.

Si dirà che \mathbf{v} è una **piccola perturbazione** se $|\mathbf{v}|$ e $|\nabla\mathbf{v}|$ sono quantità del prim'ordine, così che i loro prodotti e le loro potenze possano essere trascurate. Si mostrerà che tale assunzione implica che \mathbf{v} sia soluzione del sistema (2.5.5) linearizzato, così che si sarà in grado di applicare numerose tecniche per ricavarne una espressione analitica. Si noti che l'assunzione di piccola perturbazione, per essere consistente, richiede *la stabilità dello stato imperturbato*, a causa della natura non lineare del sistema; potrebbero, infatti, verificarsi situazioni nelle quali una soluzione corrispondente ai dati iniziali $\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0$, con \mathbf{v}_0 piccolo, non rimanga sempre dell'ordine di \mathbf{v}_0 od esista solo entro un intervallo di tempo finito. In entrambi questi casi la soluzione del problema linearizzato non è una soluzione approssimata del problema non lineare.

Si consideri il seguente esempio.
Sia data l'equazione non lineare

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.6.2)$$

che ammette la soluzione $u_0 = 0$. Le curve integrali del campo vettoriale $\mathbf{V} \equiv (1, u)$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, \\ \frac{dx}{ds} = u, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

ovvero

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x(t)). \quad (2.6.4)$$

Su tali curve dalla (2.6.2) si ottiene

$$\frac{du}{ds} = 0, \quad (2.6.5)$$

e cioè che $u(t, x(t))$ è costante, così che si può porre

$$u(t, x(t)) = u(0, x(0)) \equiv u_0(\xi), \quad (2.6.6)$$

con $\xi = x(0)$. Segue dalla (2.6.4) che lungo le linee

$$x - u_0(\xi)t = \xi, \quad (2.6.7)$$

la soluzione $u(t, x)$ di (2.6.2) è costante, così che si ha

$$u = u_0(x - u_0(\xi)t), \quad (2.6.8)$$

che è una soluzione di tipo onda. Si nota, dunque, che dato il valore $u_0(\xi)$ della funzione u sull'asse Ox , la soluzione di (2.6.2) è determinata; se, inoltre, $u_0(\xi)$ non dovesse essere costante, allora le linee (2.6.7) non sarebbero parallele e si intersecherebbero in qualche punto del piano (t, x) e le onde sarebbero onde d'urto.

Si consideri, ora, il problema di Cauchy per la (2.6.2) con condizioni iniziali

$$u_0(\xi) = 1 + v_0(\xi), \quad (2.6.9)$$

con $v_0(\xi)$ del prim'ordine. Se la (2.6.2) viene linearizzata in un intorno di $u = 1$, si ottiene per la perturbazione v l'equazione

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.6.10)$$

che va risolta con il dato di Cauchy $v_0(\xi)$. Applicando il metodo precedente si osserva che $v(t, x)$ è costante lungo le linee parallele

$$x - t = \xi, \quad (2.6.11)$$

ed assume la forma

$$v(t, x) = v_0(x - t) = v_0(\xi). \quad (2.6.12)$$

In questa situazione la soluzione lineare è definita ad ogni istante t e rappresenta un'onda che si muove con velocità costante e pari ad 1.

Se è possibile operare la linearizzazione del sistema (2.5.5), sostituendo la (2.6.1) nel sistema e trascurando i termini non lineari di $|\mathbf{v}|$ e $|\nabla \mathbf{v}|$, si ottiene che la perturbazione \mathbf{v} dev'essere soluzione del sistema lineare

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \mathbf{0}. \quad (2.6.13)$$

In questa situazione è possibile tentare di ottenere la soluzione come serie di Fourier di onde elementari, si può, cioè, verificare se un'onda sinusoidale di ampiezza \mathbf{A} , lunghezza d'onda λ , e propagantesi nella direzione del versore normale \mathbf{n} con velocità U , scritta nella forma

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A} \sin \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), \quad (2.6.14)$$

sia soluzione del sistema (2.6.13).

Essendo

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{2\pi}{\lambda} U \mathbf{A} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), \quad (2.6.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{2\pi}{\lambda} n_i \mathbf{A} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), \quad (2.6.16)$$

e sostituendo le precedenti relazioni nella (2.6.13) si ottiene

$$-U \mathbf{A} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_0) n_i \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (2.6.17)$$

che è proprio la (2.5.6) con l'assunzione $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$.

Si giunge alla conclusione che un'onda piana sinusoidale è soluzione del sistema lineare (2.6.13) se e solo se la velocità di propagazione è autovalore del tensore acustico

$$\mathbf{Q}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_0, \mathbf{n}) \equiv \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}^i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}_0) n_i, \quad (2.6.18)$$

e la sua ampiezza è il corrispondente autovettore.

Capitolo 3

Propagazione ondosa

It is a widespread belief that classical mechanics is a dead subject, that its foundations were made clear long ago, and that all that remains to be done is to solve special problems. This is not so.

W. Noll, *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*.

In questo capitolo verrà presentata l'applicazione della teoria matematica esposta nel secondo capitolo alle equazioni di Eulero per i fluidi perfetti ed a quelle dell'elastodinamica lineare ricavate in sezione (1.6), al fine di determinare la propagazione di onde ordinarie.

3.1 Onde ordinarie in fluidi perfetti

Si esporranno, ora, due possibili approcci alla determinazione di onde ordinarie in fluidi perfetti: il primo consisterà in una applicazione della teoria delle perturbazioni considerando onde come piccole perturbazioni di uno stato indisturbato, il secondo farà uso della teoria di Hadamard delle onde ordinarie di discontinuità.

Si prenda in esame un fluido perfetto compressibile con densità di massa uniforme ϱ_0 in assenza di forze di massa. Si consideri un moto generato da una piccola perturbazione, ovvero per il quale \mathbf{v} e $\sigma \equiv \varrho - \varrho_0$ sono quantità del primo ordine, così come le loro derivate. Le equazioni di Eulero (1.5.24) possono essere scritte nella seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\varrho} + \varrho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \varrho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p(\varrho) = -p'(\varrho) \nabla \varrho, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

e possono essere linearizzate. Sviluppando in serie e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ottengono le quantità

$$p'(\varrho) = p'(\varrho_0) + p''(\varrho_0)\sigma, \quad (3.1.2)$$

$$\dot{\varrho} = \dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \sigma \simeq \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad (3.1.3)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \simeq \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (3.1.4)$$

e il sistema (3.1.1) diviene

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -p'(\varrho_0) \nabla \sigma. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Si vuole ottenere una soluzione del sistema che sia un'onda sinusoidale bidimensionale propagantesi nella direzione del vettore \mathbf{n} con velocità U e lunghezza d'onda λ , ovvero che abbia la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), \quad \sigma = b \sin \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut). \quad (3.1.6)$$

Notando che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\frac{2\pi}{\lambda} U \mathbf{a} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), & \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -\frac{2\pi}{\lambda} U b \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), & \nabla \sigma &= \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} b \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - Ut), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

e, sostituendo le (3.1.7) nel sistema (3.1.5), si ottiene

$$\begin{cases} -Ub + \varrho_0 \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \varrho_0 U \mathbf{a} = p'(\varrho_0) b \mathbf{n}, \end{cases} \quad (3.1.8)$$

e cioè

$$\begin{cases} (p'(\varrho_0) - U^2) b = 0, \\ (p'(\varrho_0) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - U^2) \mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = 0. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Considerando un sistema di riferimento con asse Ox orientato lungo \mathbf{n} , si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned} U &= 0, & \text{se } \mathbf{a} \perp \mathbf{n}, \\ U &= \pm \sqrt{p'(\varrho_0)}, & \text{se } \mathbf{a} \parallel \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

dove l'autovalore 0 ha molteplicità algebrica 2. Si è, così, provata l'esistenza di **onde longitudinali** propagantesi con velocità $\sqrt{p'(\varrho_0)}$, detta **velocità del suono**. Introdotto il rapporto $M = \frac{v}{U}$, detto **numero di Mach**, se risulta $M > 1$ il moto sarà detto supersonico, se, invece, $M < 1$, sarà detto subsonico; se ci si ritrova nel primo caso si può verificare l'insorgere di onde d'urto.

Si applicherà, ora, il metodo di Hadamard.

Sia $S(t)$ il fronte d'onda di un'onda di discontinuità per il sistema non lineare (3.1.1), il sistema dei salti associato può scriversi

$$\begin{aligned} (c_n - v_n) b &= \varrho \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}, \\ \varrho (c_n - v_n) \mathbf{a} &= p'(\varrho) b \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

dove c_n è la velocità di propagazione di $S(t)$, ed \mathbf{a} e b sono le discontinuità delle derivate prime di \mathbf{v} e ϱ . Ricavando b dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene la relazione

$$(c_n - v_n)^2 \mathbf{a} = p'(\varrho) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}), \quad (3.1.12)$$

ovvero

$$(p'(\varrho) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I}(c_n - v_n)^2) \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (3.1.13)$$

La (3.1.13) mostra che i quadrati delle velocità relative sono pari agli autovalori del tensore acustico

$$p'(\varrho) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (3.1.14)$$

ed i vettori delle discontinuità \mathbf{a} sono i relativi autovettori. Le velocità di avanzamento relative sono

$$c_n = v_n \pm \sqrt{p'(\varrho)}, \quad \text{se } \mathbf{a} \parallel \mathbf{n}, \quad (3.1.15)$$

così che, se lo stato indisturbato è a riposo, si ottiene il medesimo risultato della (3.1.10)₂.

3.2 Onde ordinarie in sistemi elastici

Si applicherà, ora, la teoria sviluppata nel Capitolo 2 alle equazioni dell'elasticità lineare.

Dapprima sarà richiamato il tensore acustico \mathbf{Q} , al quale saranno ricondotte le principali caratteristiche di propagazione delle onde, poi saranno enunciati una serie di risultati volti a garantire l'unicità delle soluzioni ondulatorie alle equazioni dell'elastodinamica lineare. Il discorso sarà, infine, specializzato al caso di continui elastici omogenei ed isotropi, presentando due possibili approcci alla risoluzione del problema.

Teorema 3.2.1. *L'ampiezza di un'onda ordinaria che si propaga nella direzione \mathbf{n} è un autovettore del tensore acustico $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$, e le sue velocità normali c_n sono legate agli autovalori positivi Λ di $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ tramite la relazione*

$$c_n = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{\varrho^*}}. \quad (3.2.1)$$

Dimostrazione. Applicando le (2.5.13) e (2.5.14) al sistema (1.6.7)₁, si ottiene il seguente sistema dei salti

$$\varrho^* \left[\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] \right] = C_{ijhk} \left[\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_h \partial x_k} \right] \right]. \quad (3.2.2)$$

Imponendo le (2.4.28)-(2.4.30) si ricava il problema agli autovalori

$$(\mathbf{Q}(\mathbf{n}) - \varrho^* c_n^2 \mathbf{I}) \mathbf{a} \equiv (\mathbf{Q}(\mathbf{n}) - \Lambda \mathbf{I}) \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (3.2.3)$$

dove \mathbf{a} è l'ampiezza della discontinuità, \mathbf{n} il versore normale alla superficie $\sigma(t)$, e $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ è il tensore acustico

$$Q_{ij}(\mathbf{n}) = C_{ijhk} n_h n_k. \quad (3.2.4)$$

□

Al fine di garantire unicità della soluzione delle equazioni di Navier-Cauchy (in base al teorema enunciato in sezione (1.6)) saranno fondamentali i seguenti risultati.

Teorema 3.2.2. *Se il tensore di elasticità è definito positivo, allora il tensore acustico è simmetrico e definito positivo.*

Dimostrazione. La simmetria del tensore acustico (3.2.4) discende dalla simmetria del tensore di elasticità. Inoltre, per ogni \mathbf{v} vale la seguente condizione

$$Q_{ij}(\mathbf{n}) v_i v_j = C_{ijhk} v_i v_j n_h n_k = \frac{1}{4} C_{ijhk} (v_i n_h + v_h n_i)(v_j n_k + v_k n_j). \quad (3.2.5)$$

Essendo il tensore $v_i n_h + v_h n_i$ simmetrico e \mathbf{C} definito positivo, allora si ha

$$Q_{ij}(\mathbf{n}) v_i v_j > 0. \quad (3.2.6)$$

□

Fissata una direzione di propagazione \mathbf{n} , un'onda è detta

1. **onda longitudinale** se vale la relazione

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{n} \quad (\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}); \quad (3.2.7)$$

2. **onda trasversale** se risulta

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{n} \quad (\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0). \quad (3.2.8)$$

Teorema 3.2.3. *Sia \mathbf{C} simmetrico e definito positivo, allora data la direzione di propagazione \mathbf{n} sono possibili i seguenti casi:*

1. *esistono onde ordinarie propagantesi nella direzione \mathbf{n} con tre differenti velocità, inoltre le loro ampiezze di discontinuità sono mutualmente ortogonali;*

2. ci sono onde ordinarie propagantesi nella direzione \mathbf{n} con due differenti velocità, la prima delle quali è riferita alle onde la cui ampiezza ha direzione fissa, mentre la seconda a quelle onde che hanno una qualsiasi direzione dell'ampiezza, ma ortogonale a quella delle prime;
3. si osservano onde ordinarie propagantesi nella direzione \mathbf{n} con la stessa velocità e vettore d'ampiezza diretto in qualsiasi direzione;
4. vi è almeno una direzione \mathbf{n}_1 caratterizzata da onde longitudinali e trasversali.

Dimostrazione. I punti (1), (2) e (3) discendono dal teorema 3.2.1, dalla simmetria e dalla definita positività del tensore acustico. Per dimostrare la (4) si noti che, date le (3.2.3), (3.2.7), un'onda ordinaria propagantesi lungo \mathbf{n} è longitudinale se è autovettore del tensore acustico

$$(\mathbf{Q}(\mathbf{n}) - \rho c_n^2 \mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (3.2.9)$$

quindi resta da provare che l'applicazione $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n}$ possieda almeno un autovettore. Essendo $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ definito positivo, si verifica che

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n} > 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n} \neq \mathbf{0}; \quad (3.2.10)$$

da cui segue che la funzione

$$\mathbf{I}(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n}}{|\mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n}|}, \quad (3.2.11)$$

manda versori in versori. Inoltre non può essere che

$$\mathbf{I}(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}, \quad (3.2.12)$$

corrispondente alla situazione

$$\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n}}{|\mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{n}|} = -1, \quad (3.2.13)$$

poiché ciò contraddirebbe la (3.2.10). Applicando il teorema del punto fisso¹ si verifica che la (3.2.11) possiede almeno un punto fisso, e cioè esiste un versore \mathbf{n}_1 tale che

$$\mathbf{I}(\mathbf{n}_1) = \mathbf{n}_1. \quad (3.2.14)$$

Dalla (3.2.11) si nota che

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1 = |\mathbf{Q}(\mathbf{n}_1)\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_1 \equiv \lambda\mathbf{n}_1, \quad (3.2.15)$$

ed il teorema è provato. \square

Direzioni privilegiate di polarizzazione delle onde si avranno unicamente se il continuo esibirà ulteriori simmetrie. Si consideri, ad esempio, il caso di un sistema elastico che nella configurazione iniziale sia isotropo ed omogeneo. Si è visto nella sezione (1.6) che in tal caso il tensore di elasticità assume la forma (1.6.8), ed il tensore acustico si scriverà

$$\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = (\lambda + \mu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu\mathbf{I}. \quad (3.2.16)$$

È fondamentale determinare le condizioni sui coefficienti di Lamé affinché vi sia esistenza e unicità delle soluzioni.

Teorema 3.2.4. *Dato un mezzo elastico lineare isotropo ed omogeneo, se*

$$\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad (3.2.17)$$

il tensore di elasticità è definito positivo e il tensore acustico è simmetrico e definito positivo; inoltre in ogni direzione \mathbf{n} vi sono onde longitudinali che si propagano con le seguenti velocità

$$c_P = \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho^*}}, \quad (3.2.18)$$

¹Ogni funzione continua da un sottinsieme connesso e compatto in se stesso ha almeno un punto fisso.

ed onde trasversali le cui velocità sono

$$c_S = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varrho^*}}. \quad (3.2.19)$$

Le ampiezze di queste onde giacciono in un piano normale ad \mathbf{n} .

Dimostrazione. Considerando la (1.6.8) il tensore di elasticità può essere scritto come di seguito

$$C_{ijhk}\xi_{ij}\xi_{hk} = (\lambda + 2\mu) \sum_{i=1}^3 \xi_{ij}^2 + 2\mu(\xi_{12}^2 + \xi_{13}^2 + \xi_{23}^2), \quad (3.2.20)$$

così che, se vale la (3.2.17), \mathbf{C} è definito positivo, da cui seguono la simmetria e la definita positività del tensore acustico. Il problema agli autovalori per il tensore acustico diventa

$$((\lambda + \mu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu\mathbf{I})\mathbf{a} = \varrho^* c_n^2 \mathbf{a}. \quad (3.2.21)$$

Considerando una base ortogonale con origine nel punto \mathbf{x} del fronte d'onda e l'asse Ox_1 lungo \mathbf{n} , la precedente equazione diviene

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \varrho^* c_n^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (3.2.22)$$

L'equazione caratteristica si scriverà

$$(\lambda + 2\mu - \varrho^* c_n^2)(\mu - \varrho^* c_n^2)^2 = 0, \quad (3.2.23)$$

e le (3.2.18), (3.2.19) risultano provate. Si può, inoltre, notare che gli autovettori corrispondenti al primo valore delle velocità sono del tipo $(a_1, 0, 0)$, con $a_1 \neq 0$, e l'onda è longitudinale; quelli associati al secondo valore sono del tipo $(0, a_2, a_3)$, con $a_2, a_3 \neq 0$, e l'onda è trasversale. \square

Quando c_n è noto, l'evoluzione del fronte d'onda $f = cost$ può essere ricavato dalla equazione

$$c_n = -\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3.2.24)$$

come visto nella sezione (2.4).

Trattando mezzi elastici lineari e isotropi, i risultati del precedente teorema possono essere ottenuti, per altra via, sfruttando il **teorema di Helmholtz**.

Teorema 3.2.5 (di Helmholtz). *Un campo vettoriale \mathbf{u} finito, uniforme, regolare ed annullantesi all'infinito, può essere decomposto nella somma del gradiente di un potenziale scalare ϕ e del rotore di un potenziale vettore Ψ la cui divergenza sia nulla*

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \Psi, \quad (3.2.25)$$

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (3.2.26)$$

Sostituendo (3.2.25) in (1.6.7), si ottiene:

$$\varrho^* \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (3.2.27)$$

e sfruttando le proprietà degli operatori

$$\nabla \left[\varrho^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta\phi \right] + \nabla \times \left[\varrho^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu\Delta\Psi \right] = 0. \quad (3.2.28)$$

La (3.2.28) implica che i potenziali ϕ e Ψ soddisfano l'equazione di D'Alembert

$$\varrho^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\Delta\phi, \quad (3.2.29)$$

$$\varrho^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mu \Delta \Psi. \quad (3.2.30)$$

Il primo campo di spostamento $\mathbf{u}_1 = \nabla \phi$ rappresenta un'onda propagantesi con velocità normale

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho^*}}, \quad (3.2.31)$$

ed essendo

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_1 = 0, \quad (3.2.32)$$

se ne deduce che uno spostamento irrotazionale prodotto dall'onda genera variazioni del volume. Se si considera un'onda piana nella forma

$$\phi = \phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - c_P t), \quad (3.2.33)$$

allora $\mathbf{u}_1 = \nabla \phi = \mathbf{n} \phi$ è parallelo alla direzione di propagazione, e l'onda è longitudinale.

Il campo $\mathbf{u}_2 = \nabla \times \Psi$ descrive onde propagantesi con velocità normale

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho^*}}, \quad (3.2.34)$$

e soddisfacenti le condizioni

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{u}_2 \neq 0. \quad (3.2.35)$$

Considerando, nuovamente, un'onda piana, nella forma

$$\Psi = \Psi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{X} - c_S t), \quad (3.2.36)$$

ed il campo di spostamento $\mathbf{u}_2 = \nabla \times \Psi = \mathbf{n} \times \Psi$, si ottiene la condizione $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ e l'onda è trasversale.

Appendice A

Classificazione di PDEs con Mathematica

A.1 PDEs del second'ordine: PdeEqClass

Il programma classifica PDEs del second'ordine quasi lineari. Data una PDE del tipo (2.1.1), un punto \mathbf{x}_0 ed una soluzione nota $u_0(\mathbf{x})$, il programma determina la matrice dei coefficienti $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e la matrice $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0, u_0, \nabla u_0)$ e restituisce gli autovalori di \mathbf{A} o \mathbf{A}_0 a seconda del dato *option=symbolic* o *option=numeric*. Poiché per una PDE quasi lineare le superfici caratteristiche dipendono dall'equazione e dai dati di Cauchy, nel caso in cui *options=numeric*, il programma fornirà la classificazione della PDE in \mathbf{x}_0 e relativamente alla soluzione u_0 . Nel caso di equazioni semi lineari o lineari, la classificazione dipende unicamente dalle equazioni, e dunque sarà la stessa per qualsiasi \mathbf{x}_0 , inoltre non bisognerà fornire il dato u_0 .

La linea di comando per l'attivazione del programma è:

PdeEqClass[eq,var,unk,point,unk0,option,optionEig], dove:

eq: è la PDE, con le derivate seconde a sinistra ed i rimanenti termini a destra, cioè dovrà essere scritta nella forma: $eq = a_{ij}(x, u, \nabla u)u_{x_i, x_j} == h(x, u, \nabla u)$;

var: variabili indipendenti;

unk: funzione incognita;

point: coordinate di \mathbf{x}_0 ;

unk0: soluzione u_0 se la PDE non è lineare o semi lineare;

option: *symbolic/numeric*;

optionEig: *symbolic/numeric*, controlla gli errori di arrotondamento.

Si è applicato il programma al caso della equazione delle onde di D'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 : \quad (\text{A.1.1})$$

eq: $eq = u_{x,x} - \frac{1}{v^2} u_{t,t} == 0$;

var: $\{x, t\}$;

unk: u ;

point: $\{x_0, t_0\}$;

unk0: *Null* (l'equazione è, infatti, lineare);

option: numeric;

optionEig: symbolic.

In output si è ottenuto:

Matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

Autovalori di A

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{A.1.3})$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{v^2} \quad (\text{A.1.4})$$

L'equazione non può essere classificata poiché non tutti gli autovalori hanno segno definito!

Ma ricordando che $v \in \Re$, la PDE è iperbolica.

Si è, poi, applicato il programma al caso della **equazione di Laplace**

$$v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} = 0 : \quad (\text{A.1.5})$$

eq: eq = v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z} == 0;

var: {x, y, z};

unk: v;

point: {x₀, y₀, z₀};

unk0: v₀;

option: numeric;

optionEig: symbolic.

In output si è ottenuto:

Matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.6})$$

Autovalori di A

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{A.1.7})$$

La Pde è ellittica

A.2 Sistemi del prim'ordine: PdeSysClass

Il programma classifica sistemi di PDEs del prim'ordine quasi lineari. Dato un sistema del tipo (2.2.1), esso può essere scritto nella forma (2.2.3); fornito un punto \mathbf{x}_0 ed una soluzione nota $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, il programma determina le matrici dei coefficienti \mathbf{A}_i e le $\mathbf{A}_i^0 = \mathbf{A}_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{u}_0)$, l'equazione caratteristica (2.2.14) associata a (2.2.3) e le sue soluzioni. Poiché dalla (2.2.15) discende che le radici N_1 della (2.2.14) sono gli opposti degli autovalori della matrice (2.2.16), se *option=numeric*, il programma valuta gli autovalori di \mathbf{B} e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche, ed infine classifica il sistema (2.2.1) in ogni \mathbf{x}_0 .

La linea di comando per l'attivazione del programma è:

PdeSysClass[sys,var,unk,point,unk0,option], dove:

sys: è il sistema di PDEs, con tutti le derivate prime a sinistra ed i rimanenti termini a destra, cioè scritto nella forma

$$\begin{cases} eq1 = (A_{11}^1 u_{1x_1} + \dots + A_{1m}^1 u_{mx_1}) + \dots + (A_{11}^n u_{1x_n} + \dots + A_{1m}^n u_{mx_n}) == c_1, \\ \dots \\ eqm = (A_{m1}^1 u_{1x_1} + \dots + A_{mm}^1 u_{mx_1}) + \dots + (A_{m1}^n u_{1x_n} + \dots + A_{mm}^n u_{mx_n}) == c_m; \end{cases} \quad (\text{A.2.1})$$

var: variabili indipendenti;

unk: funzioni incognite;

point: coordinate di \mathbf{x}_0 ;

unk0: soluzione \mathbf{u}_0 se il sistema non è lineare o semi lineare;

option: *symbolic/numeric*.

Si è applicato il programma all'equazione di D'Alembert

$$\begin{cases} v_x - w_t = 0, \\ w_x - c^2 v_t = 0 : \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

sys:

$$\begin{cases} eq1 = v_x - w_t == 0 \\ eq2 = w_x - c^2 * v_t == 0; \end{cases} \quad (\text{A.2.3})$$

var: $\{x, t\}$;

unk: $\{v, w\}$;

point: $\{x_0, t_0\}$;

unk0: $\{v_0, w_0\}$;

option: *numeric*.

In output si è ottenuto:

Matrici dei coefficienti:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

Equazione caratteristica:

$$-\frac{1}{c^2} + N_1^2 = 0 \quad (\text{A.2.6})$$

Soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$N_1 = -\frac{1}{c} \quad (\text{A.2.7})$$

$$N_1 = \frac{1}{c} \quad (\text{A.2.8})$$

Autovalori di $B = (A_1)^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{c} \quad (\text{A.2.9})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{c} \quad (\text{A.2.10})$$

Molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori distinti di B:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{c} \quad AlgMult = 1 \quad GeomMult = 1 \quad (\text{A.2.11})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{c} \quad AlgMult = 1 \quad GeomMult = 1 \quad (\text{A.2.12})$$

Il sistema, come nel caso precedente, non è stato classificato a causa dell'indeterminazione del segno degli autovalori, dovuta al fatto che non si è imposto $c \in \mathfrak{R}$; eseguendo il programma con un c numero fissato si ottiene che il sistema è totalmente iperbolico.

Si è, inoltre, applicato il programma alle equazioni della fluidodinamica in due dimensioni

$$\begin{cases} \varrho_t + v\varrho_x + \varrho v_x = 0, \\ \varrho v_t + \varrho v v_x + p'(\varrho)\varrho_x = 0 : \end{cases} \quad (\text{A.2.13})$$

sys:

$$\begin{cases} eq1 = \varrho_t + v * \varrho_x + \varrho * v_x == 0, \\ eq2 = \varrho * v_t + \varrho * v * v_x + p'[\varrho]\varrho_x == 0 \end{cases} \quad (\text{A.2.14})$$

var: $\{t, x\}$;

unk: $\{\varrho, v\}$;

point: $\{t_0, x_0\}$;

unk0: $\{\varrho, v\}$;

option: *symbolic.*

In output si è ottenuto:

Matrici dei coefficienti:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.15})$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} v & \varrho \\ p'[\varrho] & v\varrho \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.16})$$

Equazione caratteristica:

$$(v + N_1)^2 - p'[\varrho] = 0 \quad (\text{A.2.17})$$

Soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$N_1 = -v - \sqrt{p'[\varrho]} \quad (\text{A.2.18})$$

$$N_1 = -v + \sqrt{p'[\varrho]} \quad (\text{A.2.19})$$

Il risultato è perfettamente coerente con le soluzioni (3.1.15) ricavate per mezzo della teoria di Hadamard.

Appendice B

Propagazione ondosa con Mathematica

B.1 Onde ordinarie di discontinuità in sistemi del prim'ordine: WavesI

Il programma WavesI determina la forma matriciale, l'equazione caratteristica e le velocità di propagazione delle superfici caratteristiche di un sistema quasi lineare del prim'ordine di PDEs. Dato un sistema del tipo (2.2.1), l'ipersuperficie Σ_{n-1} di equazione $f(\mathbf{x}) = 0$ è superficie caratteristica per il problema di Cauchy (2.2.3)-(2.2.5) se è superficie singolare del primo ordine per la funzione $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, ovvero risolve (2.2.1) in \mathbf{x}_0 . Le c_n , componenti normali della velocità della superficie Σ_{n-1} , si ottengono dalla (2.2.1) e dalle condizioni di salto

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = -c_n \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}, \\ \left[\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = N_{i-1} \mathbf{a}, \quad \forall i = 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (\text{B.1.1})$$

con \mathbf{N} versore normale a Σ_{n-1} in \mathbf{x}_0 e \mathbf{a} campo di discontinuità dello stesso ordine di \mathbf{u} .

La linea di comando per l'attivazione del programma è:

`WavesI[sys,unk,var]`, dove:

sys: è il sistema di PDEs, con tutte le derivate prime a sinistra ed i rimanenti termini a destra, cioè nella forma

$$eqi = A_{ij}^k (u_j)_{x_k} = ci; \quad (\text{B.1.2})$$

unk: funzioni incognite;

var: variabili indipendenti di cui la prima deve essere il tempo.

Si è applicato il programma alla equazione dell'elasticità lineare in due dimensioni

$$\rho^* \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}. \quad (\text{B.1.3})$$

Il programma WavesI, tuttavia, determina le superfici caratteristiche come superfici di discontinuità per le derivate prime delle funzioni incognite considerate; è, dunque, necessario trasformare l'equazione in un sistema del prim'ordine tramite una trasformazione nella quale le nuove incognite coincidano con le derivate prime della funzione u . Questo può essere fatto introducendo le incognite

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \quad (\text{B.1.4})$$

tramite le quali la (B.1.3) è espressa come sistema di PDEs del prim'ordine in sei equazioni nelle tre incognite (B.1.4)

$$\begin{cases} (u_{1,x})_t - (u_{2,x})_x = 0, \\ (u_{1,y})_t - (u_{2,y})_x = 0, \\ (u_{2,x})_y - (u_{3,x})_t = 0, \\ (u_{2,y})_y - (u_{3,y})_t = 0, \\ \varrho(u_{2,x})_t - (\lambda + \mu)[(u_{1,x})_x + (u_{1,y})_x] - \mu[(u_{1,x})_x + (u_{3,x})_y] = 0, \\ \varrho(u_{2,y})_t - (\lambda + \mu)[(u_{3,x})_y + (u_{3,y})_y] - \mu[(u_{2,y})_x + (u_{3,y})_y] = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1.5})$$

sys:

$$\begin{cases} eq1 = (vx)_t - (wx)_x == 0 \\ eq2 = (vy)_t - (wy)_x == 0 \\ eq3 = (wx)_y - (qx)_t == 0 \\ eq4 = (wy)_y - (qy)_t == 0 \\ eq5 = \varrho(wx)_t - (\lambda + \mu)((vx)_x + (vy)_x) - \mu((vx)_x + (qx)_y) == 0 \\ eq6 = \varrho(wy)_t - (\lambda + \mu)((qx)_y + (qy)_y) - \mu((vy)_x + (qy)_y) == 0; \end{cases} \quad (\text{B.1.6})$$

unk: $\{vx, vy, wx, wy, qx, qy\}$;

var: $\{t, x, y\}$.

In output si ottiene:

Forma canonica del sistema:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vx_t \\ vy_t \\ wx_t \\ wy_t \\ qx_t \\ qy_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda - 2\mu & -\lambda - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vx_x \\ vy_x \\ wx_x \\ wy_x \\ qx_x \\ qy_x \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda - \mu & -\lambda - 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vx_y \\ vy_y \\ wx_y \\ wy_y \\ qx_y \\ qy_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.7}) \end{aligned}$$

Equazione caratteristica in forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \end{pmatrix} f_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda - 2\mu & -\lambda - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_x + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda - \mu & -\lambda - 2\mu \end{pmatrix} f_y \right] = 0 \quad (\text{B.1.8}) \end{aligned}$$

Equazione caratteristica esplicita:

$$f_t^2 (\varrho f_t^2 - \mu(f_x^2 + f_y^2)) (\varrho f_t^2 - (\lambda + 2\mu)(f_x^2 + f_y^2)) = 0 \quad (\text{B.1.9})$$

Velocità normale di $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned}
 c_{n,1} &= 0 \\
 c_{n,2} &= -\frac{\sqrt{\mu}}{\rho} \\
 c_{n,3} &= \frac{\sqrt{\mu}}{\rho} \\
 c_{n,4} &= -\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\rho} \\
 c_{n,5} &= \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\rho}
 \end{aligned} \tag{B.1.10}$$

I risultati sono perfettamente consistenti con l'enunciato del teorema 3.2.4.

Al fine di verificare l'esistenza di onde elettromagnetiche, si è, inoltre, applicato il programma alle **equazioni di Maxwell**

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases} \tag{B.1.11}$$

dove \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono, rispettivamente, il **campo elettrico** ed il **campo magnetico**, e μ e ε sono rispettivamente la **costante dielettrica** e la **permeabilità magnetica**. Il sistema può essere riscritto come sistema del prim'ordine nel seguente modo

$$\begin{cases} (E_z)_y - (E_y)_z + \mu(H_x)_t = 0, \\ (E_x)_z - (E_z)_x + \mu(H_y)_t = 0, \\ (E_y)_x - (E_x)_y + \mu(H_z)_t = 0, \\ (H_z)_y - (H_y)_z - \varepsilon(E_x)_t = 0, \\ (H_x)_z - (H_z)_x - \varepsilon(E_y)_t = 0, \\ (H_y)_x - (H_x)_y - \varepsilon(E_z)_t = 0, \end{cases} \tag{B.1.12}$$

dove $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ sono le componenti di \mathbf{E} ed \mathbf{H} lungo gli assi.

sys:

$$\begin{cases} eq1 = (Ez)_y - (Ey)_z + \mu(Hx)_t == 0 \\ eq2 = (Ex)_z - (Ez)_x + \mu(Hy)_t == 0 \\ eq3 = (Ey)_x - (Ex)_y + \mu(Hz)_t == 0 \\ eq4 = (Hz)_y - (Hy)_z - \varepsilon(Ex)_t == 0 \\ eq5 = (Hx)_z - (Hz)_x - \varepsilon(Ey)_t == 0 \\ eq6 = (Hy)_x - (Hx)_y - \varepsilon(Ez)_t == 0 \end{cases} \tag{B.1.13}$$

unk: $\{Ex, Ey, Ez, Hx, Hy, Hz\}$;

var: $\{t, x, y, z\}$.

In output si ottiene:

Forma canonica del sistema:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ex_t \\ Ey_t \\ Ez_t \\ Hx_t \\ Hy_t \\ Hz_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ex_x \\ Ey_x \\ Ez_x \\ Hx_x \\ Hy_x \\ Hz_x \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ex_y \\ Ey_y \\ Ez_y \\ Hx_y \\ Hy_y \\ Hz_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ex_z \\ Ey_z \\ Ez_z \\ Hx_z \\ Hy_z \\ Hz_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1.14})
\end{aligned}$$

Equazione caratteristica in forma matriciale:

$$\begin{aligned}
& \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} f_x + \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_y + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} f_z \right] = 0 \quad (\text{B.1.15})
\end{aligned}$$

Equazione caratteristica esplicita:

$$\varepsilon \mu f_t^2 (-\varepsilon \mu f_t^2 + f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^2 = 0 \quad (\text{B.1.16})$$

Velocità normale di $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned}
c_{n,1} &= 0 \\
c_{n,2} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu}} \\
c_{n,3} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu}}
\end{aligned} \quad (\text{B.1.17})$$

I risultati sono consistenti con la teoria dell'elettromagnetismo classico.

B.2 Onde ordinarie di discontinuità in sistemi del second'ordine: WavesII

Il programma WavesII determina l'equazione caratteristica, le velocità di propagazione delle superfici caratteristiche ed i salti delle derivate seconde di un sistema quasi lineare del second'ordine di PDEs. Nel caso bidimensionale, inoltre, classifica le onde in longitudinali e trasversali in base alle (3.2.7)-(3.2.8). Dato un sistema del tipo (2.3.1), l'ipersuperficie Σ_{n-1} di equazione $f(\mathbf{x}) = 0$ è superficie caratteristica per il problema di Cauchy (2.3.5) se è superficie singolare del secondo ordine per la funzione $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, ovvero risolve (2.3.6) in \mathbf{x}_0 . Le c_n , componenti normali della velocità

della superficie Σ_{n-1} , si ottengono dalla (2.3.6) e dalle condizioni di salto

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = c_n^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}_0 \in \Sigma_{n-1}, \\ \left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial t} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = -c_n N_{i-1} \mathbf{a}, \quad \forall i = 2, \dots, n, \\ \left[\left[\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right]_{\mathbf{x}_0} = N_{i-1} N_{j-1} \mathbf{a}, \quad \forall j = 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (\text{B.2.1})$$

con \mathbf{N} versore normale a Σ_{n-1} in \mathbf{x}_0 e \mathbf{a} campo di discontinuità dello stesso ordine di \mathbf{u} .

La linea di comando per l'attivazione del programma è:

`WavesII[sys,unk,var]`, dove:

sys: è il sistema di PDEs, con le derivate seconde a sinistra ed i rimanenti termini a destra, cioè nella forma

$$eqi = A_{ij}^{HK} (u_j)_{x_H, x_K} == fi; \quad (\text{B.2.2})$$

unk: funzioni incognite;

var: variabili indipendenti di cui la prima deve essere il tempo.

Si è applicato il programma alla equazione dell'elasticità lineare in due dimensioni

$$\varrho^* \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u}; \quad (\text{B.2.3})$$

sys:

$$\begin{cases} eq1 = \varrho (ux)_{t,t} - (\lambda + \mu) ((ux)_{x,x} + (uy)_{x,y}) - \mu ((ux)_{x,x} + (ux)_{y,y}) == 0 \\ eq2 = \varrho (uy)_{t,t} - (\lambda + \mu) ((ux)_{y,x} + (uy)_{y,y}) - \mu ((uy)_{x,x} + (uy)_{y,y}) == 0; \end{cases} \quad (\text{B.2.4})$$

unk: $\{ux, uy\}$;

var: $\{t, x, y\}$.

In output si ottiene:

Equazione caratteristica:

$$(-\lambda - 2\mu + \varrho c_n^2)(-\mu + \varrho c_n^2) = 0 \quad (\text{B.2.5})$$

Velocità normale di $\Sigma(t)$:

$$\begin{aligned} c_{n,1} &= -\frac{\sqrt{\mu}}{\varrho} \\ c_{n,2} &= \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho} \\ c_{n,3} &= -\frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\varrho} \\ c_{n,4} &= \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\varrho} \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

Vettori di salto:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_1 n_1}{n_2} \\ a_2 &= \frac{a_1 n_2}{n_1} \end{aligned} \quad (\text{B.2.7})$$

La velocità $c_{n,1} = -\frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}$ si riferisce ad un'onda trasversale.

La velocità $c_{n,2} = \frac{\sqrt{\mu}}{\varrho}$ si riferisce ad un'onda trasversale.

La velocità $c_{n,3} = -\frac{\sqrt{\lambda+2\mu}}{\sqrt{\varrho}}$ si riferisce ad un'onda longitudinale.

La velocità $c_{n,4} = \frac{\sqrt{\lambda+2\mu}}{\sqrt{\varrho}}$ si riferisce ad un'onda longitudinale.

Si osservi che le onde longitudinali si propagano più velocemente di quelle trasversali, ed ancora una volta il risultato è in accordo con il teorema 3.2.4.

Bibliografia

- [1] A. Romano, A. Marasco, *Continuum Mechanics using Mathematica®*, Birkhäuser, 2014.
- [2] A. Romano, *Meccanica Razionale. Parte II: Meccanica Classica ed elementi di Relatività*, Liguori Editore, Napoli, 1991.
- [3] W. Noll, *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- [4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Course of theoretical physics vol.6. Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1987.
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Fisica teorica 7. Teoria dell'elasticità*, Editori Riuniti, Roma, 1979.
- [6] C. Truesdell, K. R. Rajagopal, *An Introduction to the Mechanics of Fluids*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [7] C. Truesdell, *The Elements of Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1966.