

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Frazione di materia oscura nelle galassie ellittiche

Relatori:

Prof. Giovanni Covone
Dott. Crescenzo Tortora

Candidato:

Ciro Bruscano
Matricola N85000680

A.A. 2017/2018

Indice

1	La materia oscura	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Il problema della massa mancante	4
1.3	Il lensing gravitazionale	8
1.4	Le galassie	15
2	Lenti gravitazionali	19
2.1	Equazione della lente	19
2.2	Potenziali effettivi e distorsioni	22
2.3	Tipologie di lenti gravitazionali	25
3	Analisi dei dati	31
3.1	Caratteristiche delle galassie ellittiche	32
3.2	Calcolo della massa nel raggio di Einstein	34
3.3	Elaborazione dei dati	35
3.4	Conclusioni	43
A	Derivazione dell'angolo di deflessione	49
B	Lente a simmetria assiale	51

Sommario

In questa tesi si presenta il concetto di materia oscura e i motivi che hanno spinto i fisici ad introdurlo e, dopo alcune nozioni sulle galassie, si affronta il problema della determinazione della frazione di materia oscura nelle galassie ellittiche. Tale determinazione è possibile grazie all'effetto di lensing gravitazionale, il quale consiste in una deflessione della luce intorno ad un corpo dotato di massa, grazie al quale possiamo risalire alla massa del corpo stesso. Infatti, potremo determinare la massa totale di un campione di galassie ellittiche tramite questo effetto e successivamente sottrarre a questi valori la parte di massa emettente onde elettromagnetiche (massa luminosa o stellare).

Capitolo 1

La materia oscura

In questo capitolo verranno introdotti i concetti di materia oscura e di lensing gravitazionale e sarà trattata una breve descrizione delle galassie esistenti nel nostro universo.

1.1 Introduzione

Prima di introdurre il concetto di materia oscura, descriviamo brevemente il modello cosmologico oggi generalmente accettato. La Relatività Generale fornisce in contesto teorico per lo studio dell'evoluzione e della struttura della distribuzione di materia su grande scala.

Dal punto di vista osservativo, l'Universo osservabile è una sfera con un raggio di 46 miliardi di anni luce.

Una soluzione all'equazione di campo della Relatività Generale che descrive le osservazioni astronomiche quali radiazione cosmica di fondo e la struttura a grande scala dell'universo è la metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker [1], grazie alla quale vediamo un universo isotropo ed omogeneo non statico¹. Su di essa si basa il modello cosmologico Λ CDM, ovvero Lambda Cold Dark Matter (dove la costante cosmologica Λ descrive la cosiddetta energia oscura), secondo il quale la materia che riusciamo a vedere è solamente una piccola porzione di universo, formato da altre due componenti chiamate *energia oscura* e *materia oscura*. Quest'ultima è formata da particelle che non interagiscono elettromagneticamente e che hanno velocità non relativistiche (difatti l'aggettivo "cold" sta ad indicare una materia oscura lenta, ossia non relativistica).

¹L'universo è omogeneo e isotropo su scale della decina di kpc

I parametri descrittivi del modello cosmologico standard sono:

- Λ è la costante cosmologica che descrive l'energia di vuoto dell'universo e spiega, in linea teorica, l'espansione accelerata di quest'ultimo
- H_0 è la costante di Hubble
- Ω è il rapporto tra densità media di materia e densità di energia critica²

La costante di Hubble è strettamente legata all'espansione dell'universo in quanto descrive quanto velocemente le galassie si allontanano tra loro.

Infine il modello cosmologico standard dà delle stime di composizione di massa dell'universo, infatti, secondo gli ultimi studi, l'universo è composto dal 26.8% di materia oscura, dal 4.9% di materia ordinaria e dal 68.3% di energia oscura

1.2 Il problema della massa mancante

Le prime idee sulla presenza di una "massa mancante" risalgono al 1933, anno in cui l'astronomo svizzero Fritz Zwicky, studiando il moto degli ammassi di galassie della Chioma di Berenice³ e della Vergine, trovò che la massa totale calcolata a partire da misure di luminosità differiva totalmente dalla massa calcolata usando la dispersione di velocità delle galassie all'interno degli ammassi [2].

Egli procedette nel seguente modo: misurò individualmente le luminosità delle singole galassie all'interno degli ammassi, per poi sommarle ed ottenere la luminosità degli ammassi, ed usò la relazione massa-luminosità, la quale viene usata per le stelle ma può essere adattata anche per le galassie, per ricavarne appunto la massa. Il secondo set di dati venne ottenuto misurando la dispersione di velocità delle galassie all'interno degli ammassi, ovvero misurò la variabilità statistica delle velocità delle singole galassie sulla velocità media dell'ammasso di galassie per poi applicare il teorema del viriale. La massa ottenuta col secondo metodo risultava essere ben 400 volte più grande della massa misurata a partire dalla luminosità.

Pare ovvio che la relazione massa-luminosità, dipendendo dal tipo di popolazione stellare, insieme al fatto che si stavano vedendo galassie e non stelle,

²La densità di energia critica, uguale a circa $5 \cdot 10^{-30} \frac{g}{cm^3}$, è la densità che avrebbe un ipotetico universo piatto

³Un aggregato di migliaia di galassie, largo circa 20 milioni di anni luce, a circa 350 milioni di anni luce dalla Terra

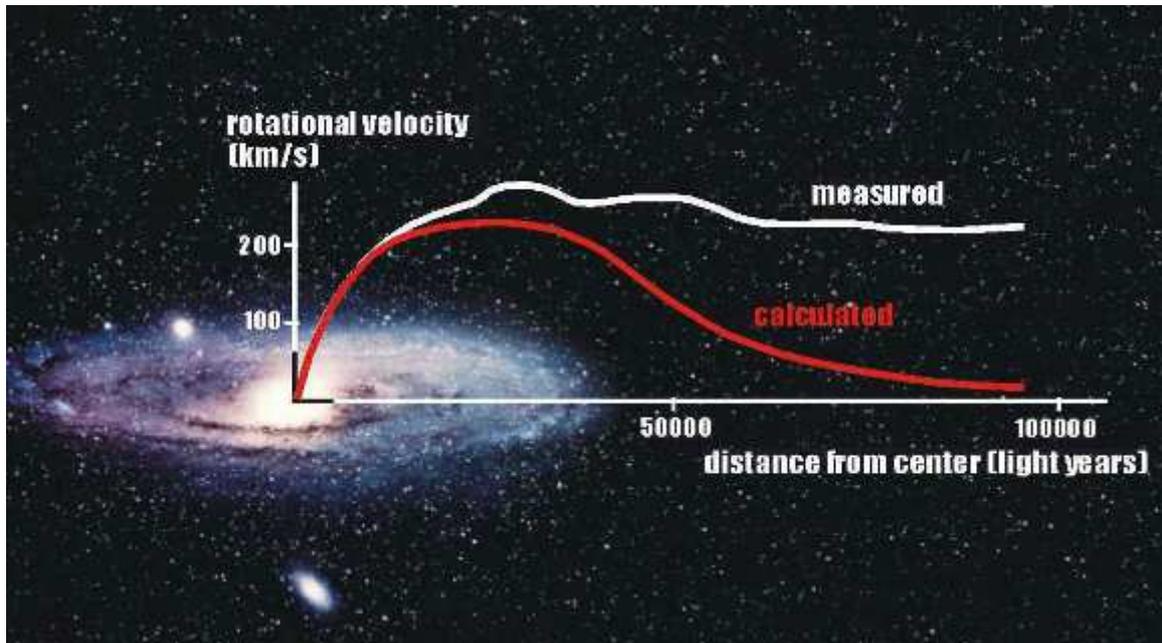


Figura 1.1: Ben nota curva di rotazione di una galassia a spirale. Si può notare che l'andamento costante continua anche molto al di fuori della galassia, il che ci fa pensare che il disco di materia oscura che circonda la galassia sia molto più vasto di quest'ultima

induce a degli errori che però non sono tali da poter colmare il gap di massa. A questo proposito si iniziò a parlare di massa mancante, anche se, come è ben noto, si dovrà aspettare l'inizio degli anni settanta prima di vedere uno studio sistematico di tale fenomeno. In quegli anni, gli astronomi Rubin e Ford misurarono la velocità di rotazione delle stelle e dei gas più esterni e confrontarono i loro risultati con i modelli teorici [3]. Questi ultimi prevedevano un andamento della curva di rotazione di tipo kepleriano, rapidamente decrescente per zone molto lontane dal centro delle galassie osservate, mentre i due astronomi notarono che le stelle esterne ruotavano intorno al centro delle varie galassie con velocità a volte superiore a quelle di stelle interne. È importante precisare un punto. Come si vede dalla figura, la curva si estende ben aldilà della regione delle stelle più esterne. In questa regione la velocità di rotazione è quella delle nubi di idrogeno ionizzato che ruotano intorno al centro della galassia. Queste nubi emettono una radiazione elettromagnetica con una determinata lunghezza d'onda (la cosiddetta linea $H\alpha$, con $\lambda = 21$ cm). È dallo spostamento Doppler di questa linea che Vera Rubin fu in grado di determinare la velocità orbitale delle nubi periferiche.

Un utile esercizio è quello di studiare il moto di una stella che ruota

intorno al nucleo della sua galassia e di trovare la densità di massa stellare nei seguenti casi:

1. Andamento kepleriano della curva di rotazione
2. Andamento costante della curva di rotazione

Si può mostrare che per avere un andamento costante nella curva di rotazione bisogna avere una densità che decresca più lentamente di ciò che vediamo dai dati fotometrici dalle galassie e in più si nota che la massa della galassia deve aumentare con l'aumentare della distanza dal centro.

Da ciò si è indotti a pensare che nelle galassie studiate dagli astronomi Vera Rubin e Kent Ford ci fosse un tipo di materia che interagisce gravitazionalmente con il centro della galassia ma che è invisibile a qualsiasi radiazione elettromagnetica, il che la rende invisibile ad ogni strumento a nostra disposizione che si basa sulle onde elettromagnetiche. La materia oscura.

Un'altra prova a favore dell'esistenza di una materia particolare, diversa dalla materia che riusciamo a vedere con le onde elettromagnetiche, è data dall'osservazione del Bullet Cluster (Ammasso Proiettile). Questo particolare ammasso di galassie, distante 3,7 miliardi di anni luce dalla terra, situato nella costellazione della Carina, è il risultato dello scontro di due ammassi di galassie.

Ne è stata tracciata la distribuzione di massa sia studiando la luminosità dell'ammasso sia guardando gli effetti di lensing gravitazionale e si può notare, come nella figura 1.2, non solo che le due distribuzioni non coincidono ma che la parte centrale dell'immagine, in rosa, è la parte di massa degli ammassi di galassie che hanno partecipato alla collisione mentre la parte in blu è la massa che non ha interagito ed è, infatti, rimasta nella parte esterna della collisione con una forma pressoché inalterata da quella originale[4]. Da questa semplice immagine si può vedere come nell'urto hanno preso parte due tipi di materia, di cui uno non collisionale.

Un'ulteriore considerazione viene dalla cosmologia, infatti, se al momento della creazione del C.M.B. (Cosmic Microwave Background, ovvero Fondo Cosmico a Microonde) nell'Universo fossero stati presenti solamente fotoni e materia ordinaria, l'entità attuale delle fluttuazioni nella distribuzione di temperatura del CMB sarebbero state molto più grandi di quelle che osserviamo. Lo studio dettagliato di queste ultime ci permette di stabilire che il contributo di materia oscura nella distribuzione di massa dell'universo è circa del 26.8%.

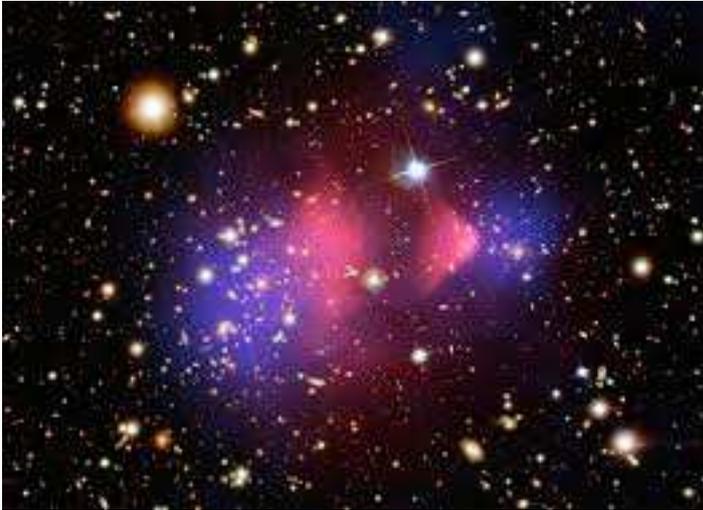


Figura 1.2: Distribuzione di massa del Bullet Cluster che discrimina la componente di materia barionica, in rosa, dalla componente di materia oscura, in blu.

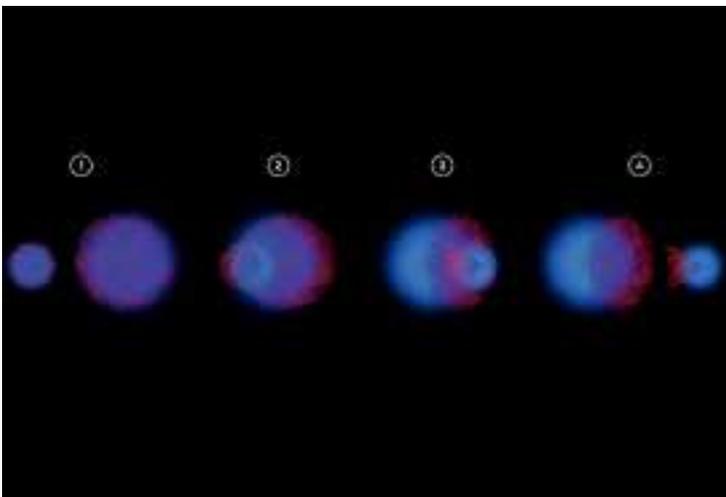


Figura 1.3: Sequenza evolutiva del Bullet Cluster che mostra come sia avvenuta la collisione e la differenza di comportamento tra materia barionica collisionale e materia oscura non collisionale

Come detto, non è nota in dettaglio la natura fisica della materia oscura. Non è compito di questa tesi spiegare le diverse teorie proposte, per cui parleremo brevemente solo dell'ipotesi momentaneamente più accreditata nell'ambito scientifico. La materia oscura è considerata essere composta da particelle elementari neutre e particolarmente massive, che interagiscono fra loro e con la materia ordinaria solo tramite gravità (motivo per la quale si hanno curve di rotazione diverse da quelle teoriche) e tramite interazione nucleare debole. Si pensa che tali particelle siano elettricamente neutre a causa della mancanza di emissione di onde elettromagnetiche mentre, visto il loro netto effetto gravitazionale, pare ovvio che siano massive[5]. Le particelle in considerazione hanno l'acronimo di WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) e fanno parte della categoria di particelle che prendono il nome di *materia esotica*.

Attualmente la punta di diamante nella caccia alla materia oscura è l'esperimento DarkSide, il quale sfrutta dell'argon radiopuro, ovvero a bassissimo contenuto di radioattività (Argon 39), per cercare collisioni tra i nuclei del poc'anzi citato argon e la materia oscura. In linea di principio la materia oscura, urtando dei nuclei di argon, dovrebbero produrre dei rinculi a basse energie (< 100 keV) da parte di quest'ultimi, rilevabili mediante sensori particolari. Tutto l'apparato sperimentale si trova sotto chilometri di roccia del Gran Sasso, il massiccio montuoso più alto degli Appennini, per ridurre al minimo rumori di fondo quali, ad esempio, il passaggio di particelle ad alta energia che potrebbero interagire con i bersagli dei rivelatori, dando falsi segnali. Non si hanno ancora segnali certi della materia oscura, ma essa rimane tutt'oggi la teoria più usata nello spiegare le strane anomalie fisiche che si incontrano nello studio delle curve di rotazione delle galassie o nella distribuzione di massa di queste ultime.

1.3 Il lensing gravitazionale

Dedicheremo questo paragrafo all'introduzione del lensing gravitazionale e ne vedremo l'utilizzo in un caso abbastanza semplice. Vedremo invece un utilizzo indirizzato ad ottenere un risultato utile per questa tesi nel secondo capitolo, dove inizieremo a collegare le varie nozioni riportate in questo primo capitolo usandole per uno scopo ben preciso.

Il lensing gravitazionale è un effetto dovuto alla curvatura della luce intorno ad un oggetto massivo, come pianeti, stelle, galassie o ammassi di galassie. Esistono vari tipi di lensing gravitazionale:

- Strong Lensing

- Microlensing
- Weak Lensing

Analizzeremo in dettaglio il motivo di tali suddivisioni e la differenza di effetti da loro portata verso la fine del capitolo ma è intuitivo pensare, leggendo le varie suddivisioni, che il caso di *strong lensing* tratta di un effetto di curvatura della luce molto accentuata mentre il *microlensing* studia un effetto minimo, a volte non visibile direttamente. Il *weak lensing* è un effetto intermedio che ha alcune caratteristiche del primo caso e altre del secondo caso e sarà ampiamente usato in questo capitolo.

L'effetto di lensing gravitazionale è rigorosamente descritto dalla teoria della relatività generale, mentre delle prime idee sulla possibilità che un corpo potesse deflettere la luce erano già state prese in considerazione dal noto fisico inglese Isaac Newton, il quale però non sapeva come descrivere correttamente il fenomeno. Il calcolo fu compiuto, nell'anno 1783, dall'astronomo John Mitchell, che inviò una lettera al fisico scozzese Henry Cavendish nella quale scrisse di un metodo per poter calcolare la riduzione della velocità della luce a causa dell'effetto della gravità.[6]

Facciamo notare che, sebbene il calcolo che riporteremo in appendice, sia erroneo solo per un fattore 2 da quello esatto, le ipotesi di partenza non richiedono un grande sviluppo matematico, semplicità che rende interessante il procedimento che illustreremo.

Le ipotesi di partenza sono:[7]

- La luce è composta da piccoli corpuscoli.
- In accordo al principio di equivalenza, l'accelerazione di un corpo in un campo gravitazionale è indipendente dalla sua massa, struttura e composizione.
- Questo corpo soggetto al campo gravitazionale è soggetta ad un'accelerazione che segue l'equazione:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3} \quad (1.1)$$

Abbiamo segnato con \vec{r} il vettore posizione del corpo all'interno del campo gravitazionale di una massa M

La soluzione dell'equazione precedente, se si pone che il corpo di massa m non definita viaggia con la velocità della luce, è una particolare curva, facente

parte della classe delle sezioni coniche, chiamata iperbole. Essa può essere descritta tramite le equazioni

$$r = \frac{R(1+e)}{1+e \cos\varphi} \quad (1.2)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{GMR(1+e)} \quad (1.3)$$

Nell'equazione sovrastante R la distanza di "minimo avvicinamento" del corpo di massa m al corpo di massa M , ovvero la più piccola distanza che possa esistere tra i due corpi, e è la cosiddetta ellitticità ed indica quanto è schiacciata la curva rispetto ad una circonferenza mentre φ è chiamata anomalia ed è l'angolo tra un asse arbitrario (in genere, per comodità di calcolo, viene scelto l'asse x , sul quale giace la distanza R) e il raggio vettore del corpo di massa m all'istante t . R e φ , entrambe funzioni del tempo, insieme ad e , istante per istante descrivono la cinematica della nostra massa m .

Con queste ipotesi, δ , metà dell'angolo di cui viene deflesso il corpuscolo di luce, nel passare attraverso il campo gravitazionale del corpo di massa M è data dall'equazione

$$\sin \delta = \frac{1}{e} \quad (1.4)$$

Con

$$e = \frac{Rc^2}{GM} + 1 \quad (1.5)$$

Per provare sperimentalmente questa teoria dovremmo osservare un pianeta od una stella che deflette un raggio luminoso, e ciò è possibile durante un'eclissi solare. Se immettiamo i valori del Sole, ovvero la sua massa ed il suo raggio, avremo come risultato che l'angolo di deflessione, pari a due volte δ sarà:

$$\vartheta = 2\delta = 0''.875 \quad (1.6)$$

L'angolo è uguale alla metà di quello misurato nel 1919 da Arthur Eddington, predetto qualche anno prima da Albert Einstein che risultava essere dunque 1.75 secondi d'arco.[8]

La differenza di questo fattore 2 è dovuto alla geometria dello spazio-tempo intorno al Sole che risulta essere curvato dalla massa del Sole stesso.

Per calcolare correttamente l'angolo di deflessione dovremmo introdurre dei concetti di relatività generale e di geometria differenziale, cosa che non

competete a questa tesi, dunque useremo un metodo alternativo che sfrutta il calcolo variazionale, grazie al quale ci limiteremo solo ad un usare il concetto di spazio di Minkowski e di metrica perturbata.

Partendo dalle equazioni di campo della relatività generale, la deflessione della luce può essere calcolata studiando le curve geodetiche, ovvero le curve con minor lunghezza che congiungono due punti dello spazio. Ciò può essere descritto equivalentemente dal principio di Fermat, come nell'ottica geometrica.

Un raggio di luce che attraversi mezzi ad indici di rifrazione diversa viaggerà, secondo il principio di Fermat, lungo linee spezzate con velocità date dall'equazione

$$v = \frac{c}{n} \quad (1.7)$$

Abbiamo indicato con c la velocità della luce nel vuoto e con n l'indice di rifrazione.

Il raggio di luce, che incide con un angolo ϑ_i rispetto alla normale al piano e viene rifratto di un angolo ϑ_r segue la legge

$$\sin \vartheta_i = n \sin \vartheta_r \quad (1.8)$$

Il principio di Fermat afferma che la luce, nel partire da un punto A ed arrivare in un punto B, deve percorrere il percorso per cui il tempo di percorrenza è minimo. Se prendiamo la curva descritta dal raggio di luce e la spezziamo in tratti dl infinitesimi si avrà che il tempo impiegato dalla luce per percorrere uno di questi tratti infinitesimi in un mezzo ad indice di rifrazione n sarà

$$dt = \frac{dl}{v} \quad (1.9)$$

Usando la 1.7, si traduce nell'equazione

$$dt = \frac{ndl}{c} \quad (1.10)$$

Il tempo totale impiegato dalla luce per passare da un punto all'altro sarà la somma di tutti questi dt , che si traduce, ovviamente, nell'integrale

$$T = \int dt = \int \frac{n}{c} dl \quad (1.11)$$

Vogliamo, ora, che questo tempo sia il minimo possibile, quindi vogliamo minimizzare l'equazione precedente. Tale procedimento prende il nome di calcolo delle variazioni.

Prima di procedere dobbiamo trovare un'espressione per il nostro indice di rifrazione e qui non possiamo fare a meno di utilizzare la nostra prima approssimazione: assumeremo di stare in regime di weak lensing, ovvero che il valore assoluto del potenziale ϕ del nostro caso sia molto più piccolo di c^2 , quindi si ha

$$\frac{|\phi|}{c^2} \ll 1 \quad (1.12)$$

Quest'approssimazione è valida nella maggior parte dei casi di interesse astrofisico, ad esempio, per un ammasso di galassie si ha $|\phi| < 10^{-4}c^2 \Rightarrow \frac{|\phi|}{c^2} \ll 1$

Uno spazio privo di perturbazioni è descritto dalla metrica di Minkowski

$$\eta_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La quale matrice si traduce in

$$ds^2 = \eta_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (1.13)$$

Un corpo di massa M , che funge da lente debole, perturba la metrica di Minkowski trasformandola nella seguente metrica

$$g_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{2\phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \frac{2\phi}{c^2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1 - \frac{2\phi}{c^2}) \end{pmatrix}$$

La matrice appena scritta restituisce l'equazione

$$ds^2 = g_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu = (1 + \frac{2\phi}{c^2})c^2 dt^2 - (1 - \frac{2\phi}{c^2})d\vec{x}^2 \quad (1.14)$$

La luce si propaga secondo la legge $ds^2 = 0$ dalla quale si ottiene

$$(1 + \frac{2\phi}{c^2})c^2 dt^2 = (1 - \frac{2\phi}{c^2})d\vec{x}^2 \quad (1.15)$$

La velocità della luce nel campo gravitazionale è dunque

$$\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = \sqrt{\frac{(1 + \frac{2\phi}{c^2})}{(1 - \frac{2\phi}{c^2})}} c \approx (1 + \frac{2\phi}{c^2})c \quad (1.16)$$

L'indice di rifrazione da noi cercato, ottenibile invertendo l'equazione 1.7, è dunque

$$n = \frac{1}{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)} \approx 1 - \frac{2\phi}{c^2} \quad (1.17)$$

Notiamo che il nostro potenziale ϕ è attrattivo, quindi n è maggiore di 1 e la velocità risulta essere minore della velocità della luce nel vuoto, in accordo con la relatività ristretta, secondo la quale nulla può avere una velocità maggiore della luce nel vuoto.

Ora possiamo andare a minimizzare il nostro integrale, ovvero a scegliere il cammino $x(l)$, che va da un punto A ad un punto B (con A e B punti fissati), per il quale si ha un valore minimo dell'equazione 1.11. Nel calcolo delle variazioni tutto ciò corrisponde a trovare un percorso per la quale sia nulla la variazione di un determinato funzionale, che nel caso nostro risulta essere $n[x(l)]$. Dunque la condizione che andremo a sviluppare sarà

$$\delta \int_A^B n[x(l)] dl = 0 \quad (1.18)$$

Parametrizziamo la nostra curva usando un parametro arbitrario λ grazie al quale scriveremo

$$dl = \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| d\lambda \quad (1.19)$$

L'equazione 1.18 diventa

$$\delta \int_A^B n[x(\lambda)] \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| d\lambda = 0 \quad (1.20)$$

Questa equazione conduce all'equazione di Eulero che, se maneggiata in un adeguato modo, ci darà un'equazione per trovare l'angolo di deflessione da noi cercato.⁴

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}_{\perp} \phi dz \quad (1.21)$$

Se la massa M che funge da lente gravitazionale può essere considerata puntiforme e il potenziale è $\phi = -\frac{GM}{r}$ dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ allora l'angolo di deflessione sarà:

$$|\hat{\alpha}| = 4 \frac{GM}{bc^2} \quad (1.22)$$

⁴Per compattezza i calcoli sono riportati in appendice

Come già precisato questo angolo è stato misurato sperimentalmente nel caso del Sole da Arthur Eddington, nel 1919 e fu una delle prime conferme sperimentali della relatività generale. Si può notare dall'equazione 1.22 come l'angolo di deflessione dipenda direttamente dalla massa, quindi possiamo sovrapporre gli effetti di tanti punti di massa che fungono, nel loro insieme, come un'unica lente gravitazionale. Facciamo notare anche l'utilità nella nostra tesi dell'angolo di deflessione, infatti, come già detto nel sommario, misurato l'angolo di deflessione si può risalire alla massa della lente, che è comprensiva di massa ordinaria e materia oscura.

Dai calcoli precedenti si evince come sia importante differenziale i vari tipi di lensing gravitazionale e come essi portino a risultati diversi. Il regime di *strong lensing* riguarda galassie o ammassi di galassie e richiede che la lente abbia una densità di massa elevata. Ciò produce tipi diversi di immagine, anche in base all'allineamento tra sorgente, lente ed osservatore, come archi, croci o persino anelli di Einstein.

Il regime di *microlensing*, invece, comporta delle complicanze di ragione sperimentale. Difatti non è quasi mai possibile capire se si sta osservando un effetto di microlensing guardando una sola immagine con una minima porzione di cielo (cosa non vera nel caso di strong lensing, dove, anche in porzioni piccole di cielo si riescono a scorgere distintamente degli archi o degli anelli) ma si deve ricorrere a metodi più raffinati che non verranno qui discussi.

Il *weak lensing* non mostra i propri segni tramite degli archi gravitazionali, a causa della densità non sufficientemente elevata della galassia o dell'ammasso che funge da lente e come nel caso del microlensing si devono osservare grandi aree di cielo e fare delle indagini statistiche.

Gli effetti osservativi caratteristici del lensing sono:

1. Immagini multiple: Nel caso di una lente puntiforme, come si può vedere nel secondo capitolo, si hanno due geodetiche, ovvero due percorsi di minimo cammino, che porteranno dunque alla formazione di due immagini della stessa sorgente. Nel caso di lenti estese il numero di immagini possono essere anche maggiori di due.
2. Ritardo temporale: Percorsi differenti possono portare a tempi differenti di cammino, il che può portare all'osservazione dello stesso fenomeno più di una volta. Un esempio è il ritardo di Shapiro[9].
3. Immagini deformate: Una sorgente non puntiforme può vedere alcune delle sue parti essere deflesse in modo differente da altre, dando quindi come risultato delle immagini distorte

4. Fenomeni acromatici: Come visto in precedenza, la condizione fondamentale per avere delle geodetiche è di imporre $ds^2 = 0$ il che non dipende dalla frequenza dei raggi luminosi e quindi dalla lunghezza d'onda.

1.4 Le galassie

Una galassia è un complesso sistema autogravitante, ovvero tenuto insieme dalla forza di gravità generata dalla propria massa ed è formato da stelle, ammassi/sistemi stellari, polveri e gas.

Esse contano dalle poche decine di milioni di stelle, come le galassie nane, alle migliaia di miliardi di stelle, come nel caso delle galassie giganti. Le galassie hanno un diametro che va tra i 1000 e i 100000 parsec⁵ e sono classificate con uno schema chiamato "Sequenza di Hubble". Le galassie in tale classificazione sono suddivise in:

- Galassie ellittiche
- Galassie a spirale
- Galassie lenticolari
- Galassie a spirale barrata⁶
- Galassie irregolari

Le galassie ellittiche, classificate con la lettera "E" nella Sequenza di Hubble, hanno un profilo ellissoidale. Esse hanno una quantità bassa di materia interstellare, dunque la loro massa è concentrata negli ammassi/sistemi stellari. Un importante conseguenza della poca materia interstellare è il numero esiguo di creazione di nuove stelle, quindi le galassie ellittiche sono formate da stelle "vecchie" ed evolute, orbitanti intorno ad un comune centro di gravità in direzioni casuali. Le galassie ellittiche di maggior grandezza vengono classificate come ellittiche giganti e si pensa che molte galassie ellittiche si siano formate dallo scontro di due galassie. Un'ulteriore divisione di tali galassie prevede un numero che va da 0 a 7, in base alla loro ellitticità.

Le galassie a spirale si riconoscono per la loro tipica forma di cui si distingue la zona centrale, detta bulge, e le zone esterne, chiamate bracci. Il

⁵1 parsec è circa 3.26 anni luce, ovvero circa $3.08 \cdot 10^{16}$ metri

⁶Un esempio ben noto di galassia a spirale barrata è la nostra galassia, la Via Lattea, la cui "barra" è stata scoperta nel 2005 ed ha una lunghezza stimata di 27000 anni luce

bulge è un "rigonfiamento" che si trova al centro della galassia ed è composta di stelle di popolazione II, ovvero stelle "vecchie" e spesso ha al suo centro un buco nero supermassiccio. Il disco centrale, piatto, che circonda il bulge è formato da stelle di popolazione I, molto giovani, e nubi di gas.

Le galassie lenticolari hanno caratteristiche comuni alle galassie ellittiche e alle galassie a spirale, hanno un disco (anche se senza bracci) come le galassie a spirale e hanno una bassa presenza di materia interstellare come le galassie ellittiche.

Le galassie a spirale barrata sono galassie a spirale con una "linea" di stelle che attraversano il bulge. Particolarità di tali galassia è che i bracci non partono dal bulge, bensì dalla barra.

Le galassie a spirale intermedia sono classificate come intermedie tra le galassie a spirale e le galassie a spirale barrata.

Le galassie irregolari non presentano, come dice il nome, una struttura regolare e non ha caratteristiche simili alle altre galassie fin'ora elencate. L'irregolarità può essere causata da parecchi fenomeni, quali formazione tramite fusione di galassie o deformazioni a causa di effetti gravitazionali di galassie vicine.⁷ Queste galassie sono formate da stelle di popolazione I e sono in genere ricche di gas e mezzi interstellari. Si tende a suddividere le galassie irregolari in irregolari di tipo I e II, dove le prime presentano delle strutture ma, nel complesso, non ha una regolarità particolare, mentre le seconde hanno irregolarità in ogni zona della galassia non presentando nessun tipo di struttura, quindi non classificabile in nessun modo.

Chiudiamo il capitolo con una delle più importanti scoperte in ambito astronomico che coinvolge le galassie, ovvero l'aumento della distanza relativa fra di esse. Si è osservato che questo allontanamento segue la legge:

$$V = H_0 d \quad (1.23)$$

Il valore H_0 è chiamato costante di Hubble, mentre d è la distanza tra la Terra e la galassia osservata [10].

Com'è noto dall'elettromagnetismo, una sorgente di onde elettromagnetiche in allontanamento viene osservata con una lunghezza d'onda spostata verso il rosso, ovvero verso lunghezze d'onda maggiori. Conosciuta tale variazione di lunghezza d'onda è possibile ricavare la velocità con cui la galassia si sposta. La variazione della lunghezza d'onda è descritta dal parametro z

⁷Un esempio è dato dalle nubi di Magellano, due galassie irregolari, l'una molto massiva dell'altra

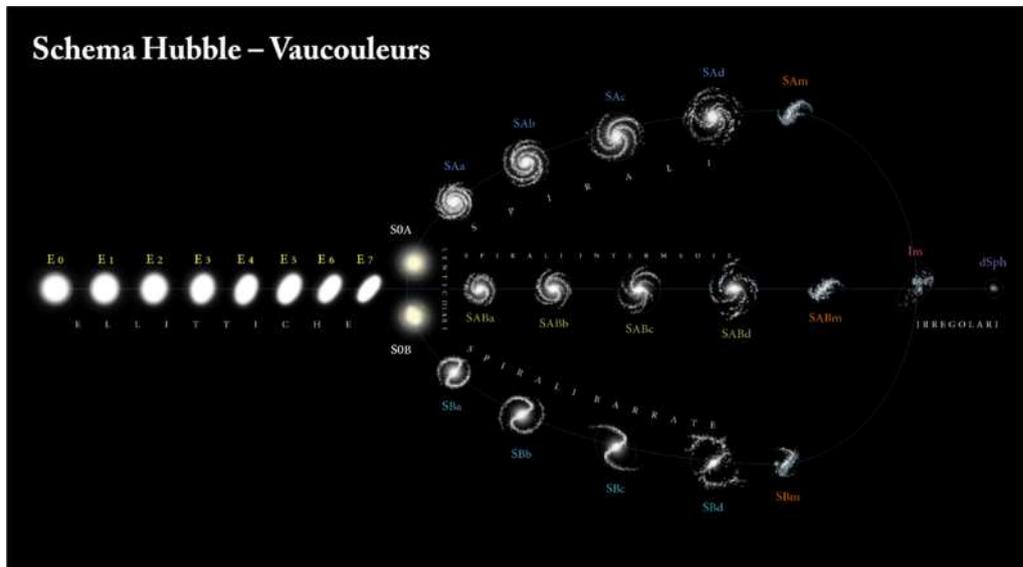


Figura 1.4: Sequenza di Hubble aggiornata alle attuali conoscenze astronomiche sulle galassie. È ben visibile la forma a diapason della sequenza originale del 1926, perfezionata poi nel 1936.

chiamato redshift

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (1.24)$$

Con λ_0 si intende la lunghezza d'onda emessa mentre λ è la lunghezza d'onda osservata. Il redshift permette di calcolare anche la distanza fra l'osservatore e la galassia osservata usando, se non si considerano distanze cosmologiche, l'equazione 1.23 la cui velocità è determinata grazie all'effetto Doppler.⁸

⁸La 1.23 non è utilizzabile quando si hanno distanze cosmologiche

Capitolo 2

Lenti gravitazionali

In questo capitolo sfrutteremo i risultati ottenuti dal calcolo dell'angolo di deflessione del capitolo precedente per costruire un modello di lente gravitazionale e lo useremo per poter collegare tale angolo alla massa della lente. In particolare notiamo, dall'equazione 1.22, come è possibile sovrapporre linearmente gli effetti di tanti punti di massa per creare un'unica lente gravitazionale.

2.1 Equazione della lente

Supponiamo di avere N punti massivi su di un piano con massa M_i e distanza \vec{r}_i dall'origine. L'angolo di deflessione di un raggio luminoso che attraversa il piano a distanza \vec{r} dall'origine sarà

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{4G}{c^2} \sum_{i=1}^N \frac{M_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \quad (2.1)$$

Consideriamo ora una lente gravitazionale con una distribuzione tridimensionale di materia. Prima di procedere nei calcoli notiamo che le grandezze fisiche della lente come, ad esempio, lo spessore, è trascurabile rispetto alle distanze in gioco, come la distanza tra la lente stessa e l'osservatore.

Possiamo dunque considerare lo spessore della nostra lente come trascurabile e dunque usare il modello di lente planare, nel quale tutta la massa della lente è distribuita su di un piano.¹ Con questa approssimazione la massa della lente è ben descritta dalla sua densità superficiale e se si considera

¹In questo modello anche la sorgente è approssimata, per lo stesso ragionamento, ad un piano massivo, chiamato sorgente planare

la lente composta da un numero N molto grande di punti² allora massa che appare nella 1.22 può essere scritta sotto forma di integrale e la 2.1 diventa

$$\hat{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \int \frac{\Sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (2.2)$$

$\Sigma(\vec{r}')$ è la densità superficiale. Essa è legata alla densità volumica della lente:

$$\Sigma(\vec{r}') = \int \rho(\vec{r}', z) dz, \quad (2.3)$$

dove \vec{r}' è un vettore bidimensionale giacente sul piano della lente e z è l'asse perpendicolare alla lente, ovvero lo spessore di quest'ultima.

Procediamo col sviluppare questo modello di lente, considerando una concentrazione di massa con un redshift z_L corrispondente ad una distanza angolare D_L . Questa lente deflette i raggi che provengono dalla sorgente a redshift Z_S a cui corrisponde una distanza angolare D_S .

Definiamo l'asse ottico come la retta che congiunge osservatore e lente gravitazionale. Consideriamo la nostra sorgente ad una distanza angolare β dall'asse ottico che si traduce in una distanza lineare, giacente sul piano della sorgente, pari a $\vec{\eta} = \vec{\beta} D_S$ con D_S la distanza tra osservatore e piano della sorgente. L'angolo di deflessione, $\vec{\alpha}$, dato dall'equazione 1.21, ha un parametro d'urto sul piano della lente pari a $\vec{\xi} = \vec{\theta} D_L$ dove $\vec{\theta}$ è la distanza angolare tra osservatore e lente, quindi l'osservatore, a causa della deflessione della luce, vede la luce della sorgente proveniente da una distanza angolare $\vec{\theta}$.

Se $\vec{\theta}$, $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$ sono angoli piccoli, allora la posizione della sorgente e dell'osservatore sono legate dalla relazione

$$\vec{\theta} D_S = \vec{\beta} D_S + \vec{\alpha} D_{LS}, \quad (2.4)$$

D_{LS} , nell'equazione sovrastante, è la distanza tra piano della lente e piano della sorgente. Definiamo l'angolo ridotto come

$$\alpha(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (2.5)$$

L'equazione (2.4) diventa

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \alpha(\vec{\theta}) \quad (2.6)$$

²Se uno dei punti in questione fosse una stella avremmo un numero davvero elevato di punti anche per la galassia più piccola

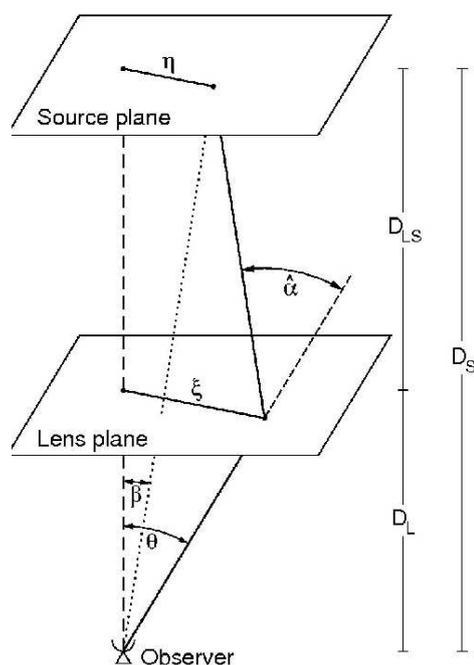


Figura 2.1: Illustrazione di un classico caso di un sistema di lensing gravitazionale nel caso del modello della lente planare.

La relazione così ottenuta è chiamata *equazione della lente* e viene a volte espressa in forma adimensionale tramite le sostituzioni

$$\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}; \vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\eta_0} \quad (2.7)$$

Nell'equazione di sopra $\vec{\xi}_0$ e $\vec{\eta}_0$ sono delle lunghezze di scala rispettivamente sul piano della lente e sul piano dell'osservatore, legate dalla relazione

$$\vec{\eta}_0 = \vec{\xi}_0 \frac{D_S}{D_L} \quad (2.8)$$

Come appena detto, usando le sostituzioni 2.7 si ottiene, con l'ausilio della sostituzione

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \hat{\alpha}(\xi_0, \vec{x}) \quad (2.9)$$

Si ottiene l'equazione

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) \quad (2.10)$$

2.2 Potenziali effettivi e distorsioni

Una distribuzione di massa estesa è caratterizzata dal suo potenziale effettivo, ottenuto proiettando il potenziale newtoniano tridimensionale sul piano della lente.

$$\hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_L, \vec{\theta}, z) dz \quad (2.11)$$

Anche questo potenziale può essere reso adimensionale tramite una sostituzione

$$\Psi = \frac{D_L^2}{\xi_0^2} \hat{\Psi} \quad (2.12)$$

Questo potenziale soddisfa due importanti proprietà:

1. Il gradiente del potenziale ci dà l'angolo riscalato $\vec{\alpha}(\vec{x})$

$$\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{x}) \quad (2.13)$$

2. Il laplaciano del potenziale, ovvero il gradiente di $\vec{\alpha}(\vec{x})$ è proporzionale ad una quantità che prende il nome di convergenza.

$$\nabla_x^2 \Psi(\vec{x}) = 2k(\vec{x}) \quad (2.14)$$

La convergenza non è altro che una densità superficiale adimensionale.

$$k(\vec{x}) = \frac{\Sigma(\vec{x})}{\Sigma_{cr}} \quad (2.15)$$

La Σ_{cr} che compare nell'equazione è la densità superficiale critica, una quantità che caratterizza i vari tipi di lenti. Qui vediamo anche una notevole importanza della nostra convergenza, la quale ci dà un'idea di quanto sia grande la densità superficiale della lente e, quindi, può essere usata per distinguere i vari tipi di lensing.

La prima proprietà si può dimostrare eseguendo il calcolo del gradiente del potenziale.

$$\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}) = \xi_0 \frac{D_{LS} D_L}{\xi_0^2 D_S} \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}_\perp \int \Phi(\vec{x}, z) dz \quad (2.16)$$

\vec{x} è un vettore bidimensionale perpendicolare che giace nel piano della lente, ovvero perpendicolare all'asse z , quindi si può portare l'operatore gradiente all'interno del segno di integrale.

$$\vec{\nabla}_x \Psi(\vec{x}) = \frac{D_{LS} D_L}{\xi_0 D_S} \frac{2}{c^2} \int \vec{\nabla}_\perp \Phi(\vec{x}, z) dz = \vec{\alpha}(\vec{x}) \quad (2.17)$$

La dimostrazione della seconda proprietà è qui omessa, essendo più elaborata, e verrà riportata in appendice.

Come già introdotto nel primo capitolo, un ulteriore effetto del lensing gravitazionale è quello di deformare la sorgente, fino a farla apparire sotto forma di archi. Questa distorsione può essere vista come una variazione, mediante allargamenti o restringimenti, di alcune zone della sorgente,³ quindi, riprendendo l'equazione della lente, avremo che la distorsione A sarà uguale a

$$A = \frac{\Delta \vec{y}(\vec{x})}{\Delta \vec{x}} \quad (2.18)$$

Se la distorsione non è particolarmente accentuata, quindi se non abbiamo a che fare con archi gravitazionali, possiamo linearizzare la 2.18 scrivendo

$$A = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \quad (2.19)$$

In componenti diventa

$$A = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.20)$$

Per compattezza scriveremo

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j} = \Psi_{ij} \quad (2.21)$$

I punti per i quali si annulla il determinante di A formano, sul piano della lente, delle curve chiamate curve critiche mentre, sul piano della sorgente, i punti formano le curve caustiche. Quando una sorgente entra o esce da una curva caustica, le immagini aumentano o diminuiscono di un fattore 2.

Un'altra importante matrice è la matrice di shear, che quantifica la proiezione del campo gravitazionale che descrive la distorsione delle sorgenti di sfondo.

$$\Gamma = (A - \text{tr} A I)_{ij} \quad (2.22)$$

³Ovviamente non è la sorgente ad essere distorta, bensì l'immagine che noi vediamo a causa della deflessione della luce

Dalla quale possiamo definire il vettore di shear $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ sul piano della lente, con $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22})$ e $\gamma_2 = \Psi_{12} = \Psi_{21}$.

Ricordando la 2.14 si ha, in componenti, che la convergenza è uguale a

$$k(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.23)$$

Scrivendo per estesa la matrice A, otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \Psi_{11} & -\Psi_{12} \\ -\Psi_{21} & 1 - \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

L'equazione sovrastante può essere scritta in funzione della convergenza e dello shear

$$A = \begin{pmatrix} 1 - k - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - k + \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Questa scrittura ci mostra come la convergenza agisce solo sulla diagonale principale ma non rende tutti i particolari celati da questa matrice. Infatti, notiamo come si può mettere in evidenza il termine 1-k sulla diagonale principale e scrivere questa matrice come somma di due matrici. Il risultato di tale operazione sarà

$$A = (1 - k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

Da qui si capisce precisamente come agisce la convergenza e lo shear, infatti la prima ci indica come si ridimensiona l'immagine in tutte le direzioni di un fattore costante mentre il secondo indica come si deforma la sorgente lungo una direzione privilegiata. Ad esempio, una sorgente circolare abbastanza piccola da essere comparata alla grandezza della lente verrà, a causa del lensing gravitazionale, vista dall'osservatore come un'ellisse⁴ con semiassi maggiore e minore rispettivamente uguali a

$$a = \frac{r}{1 - k - \gamma} ; \quad b = \frac{r}{1 - k + \gamma} \quad (2.24)$$

Dove r è il raggio della sorgente circolare.

⁴Ovviamente quando sia k che γ sono diversi da 0

2.3 Tipologie di lenti gravitazionali

Abbiamo fin'ora parlato di lenti gravitazionali generiche, ricavando delle equazioni generali, indipendenti dal tipo di forma della lente, come nel caso dell'angolo di deflessione. Ora però, in questa sezione, ci occuperemo di illustrare alcuni modelli di lenti e trovando delle quantità di interesse fisico per la nostra tesi.

Ciò che faremo, dopo aver introdotto il modello di lente puntiforme e dopo aver parlato delle lenti assialmente simmetriche e della *Sfera Singolare Isoterma*⁵ sarà trovare delle equazioni che collegano la massa delle lenti agli angoli di deflessioni generati dalle lenti stesse. La massa in questione sarà comprensiva di materia oscura e, nell'analisi dati, ci limiteremo a sottrarre la massa della componente barionica⁶ per ricavare la massa di materia oscura.

Come detto, il primo modello di lente, che servirà solo come esempio per comprendere il modo esatto di utilizzare la teoria fin qui sviluppata, è quello della lente puntiforme.

Nel primo capitolo avevamo trovato che l'angolo di deflessione di una massa le cui dimensioni possono essere considerate trascurabili rispetto alle grandezze fisiche in gioco quali distanza lente-osservatore e distanza lente-sorgente è

$$\hat{\alpha} = -\frac{4GM}{c^2b} \vec{e}_r \quad (2.25)$$

In questa equazione M è la massa della lente ed \vec{e}_r è il versore radiale. Grazie alla simmetria del problema non ci sono direzioni preferenziali e dunque il nostro versore radiale può essere preso come versore che cade lungo un asse del nostro sistema di riferimento. Ora il problema è spostato in una dimensione, quella dell'asse considerato, e l'equazione diventa

$$\hat{\alpha} = -\frac{4GM}{c^2b} = -\frac{4GM}{c^2D_L\theta} \quad (2.26)$$

L'equazione riporta il parametro d'urto in funzione della sua lunghezza angolare, ovvero

$$b = D_L\theta \quad (2.27)$$

⁵In realtà, per studiare il lensing prodotto dalle galassie ellittiche dovremmo utilizzare un modello di lente chiamato *Ellissoide Singolare Isoterma*, che però richiede una quantità di dati maggiori di quelli che disponiamo.

⁶Questo tipo di massa sarà un dato noto nel nostro caso ma si fa notare che il procedimento per avere il suddetto dato è laborioso ma non è scopo di questa tesi mostrarlo. Non sarà dunque trattato

Passando all'angolo riscalato, ovvero moltiplicando l'angolo di deflessione per $\frac{D_{LS}}{D_S}$ si ottiene l'equazione della lente nel caso di modello puntiforme

$$\beta = \theta - \frac{4GM}{c^2 D_L \theta} \frac{D_{LS}}{D_S} \quad (2.28)$$

Se scriviamo $\sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L}} = \theta_E$ l'equazione diventa

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (2.29)$$

L'angolo θ_E è chiamato angolo di Einstein ed è importante nel lensing perché, nel caso di sorgente, lente e osservatore allineati, l'immagine che si verrà a creare, se si ha simmetria assiale, è una circonferenza chiamata anello di Einstein, caratterizzato, come ogni circonferenza, dal proprio raggio, chiamato raggio di Einstein, che è uguale a

$$R_E = D_L \theta_E \quad (2.30)$$

In più le sorgenti che sono più vicine di circa θ_E all'asse ottico sono nel regime di strong lensing e sono significativamente ingrandite, mentre le sorgenti che si trovano al di fuori dell'anello di Einstein subiscono un ingrandimento minore[11].

Possiamo rendere l'equazione adimensionale dividendo per θ_E operando le sostituzioni $y = \frac{\beta}{\theta_E}$, $x = \frac{\theta}{\theta_E}$

$$x^2 - xy - 1 = 0 \quad (2.31)$$

Questa equazione ammette due soluzioni reali, ovvero la formazione di due immagini.

Non sempre, però, possiamo fare l'approssimazione di lente puntiforme e quindi bisogna ricorrere a modelli più realistici, quali lenti di una certa forma. Un primo caso di lente non puntiforme è la classe di lenti a simmetria assiale, la cui densità superficiale è indipendente dalla posizione angolare rispetto al centro della lente. Scegliamo l'asse ottico in modo tale che intercetti il piano della lente nel centro della lente stessa, il che implica $\Sigma(\vec{R}) = \Sigma(|\vec{R}|)$.

Per questo genere di lente, l'angolo di deflessione, dimostrato in appendice, risulterà essere

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4GM(\xi)}{c^2 \xi} \quad (2.32)$$

Possiamo scrivere l'equazione in forma adimensionale:

$$\alpha(x) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \hat{\alpha}(\xi_0 x) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \frac{4GM(\xi_0 x)}{c^2 \xi} \frac{\pi \xi_0}{\pi \xi_0} \quad (2.33)$$

$$\alpha(x) = \frac{M(\xi_0 x)}{\pi \xi_0^2 \Sigma_{cr}} \frac{1}{x} = \frac{m(x)}{x} \quad (2.34)$$

Dove si è introdotta la massa adimensionale $m(x)$.

L'equazione della lente diventa

$$y(x) = x - \frac{m(x)}{x} \quad (2.35)$$

Per studiare distorsioni e ingrandimenti dovuti a questo tipo di lente bisogna calcolare la matrice dell'equazione 2.19.

A questo scopo scriviamo l'equazione 2.34 in forma vettoriale

$$\alpha(\vec{x}) = \frac{m(\vec{x})}{x^2} \vec{x} \quad (2.36)$$

con $\vec{x} = (x_1, x_2)$

Eseguendo i calcoli, si ottiene la matrice

$$A = -\frac{dm(x)}{dx} \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Da questa matrice possiamo ricavare le componenti dello shear e la convergenza

$$k(x) = \frac{1}{2x} \frac{dm(x)}{dx} \quad (2.38)$$

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) \left(\frac{2m(x)}{x^4} - \frac{dm(x)}{dx} \frac{1}{x^3} \right) \quad (2.39)$$

$$\gamma_2(x) = x_1 x_2 \left(\frac{dm(x)}{dx} \frac{1}{x^3} - \frac{2m(x)}{x^4} \right) \quad (2.40)$$

Altre informazioni che possiamo ricavare dalle equazioni 2.35 e 2.36 sono le linee caustiche e critiche, le quali si ottengono annullando il determinante della matrice Jacobiana nell'equazione 2.37.

Uno dei modelli di lenti a simmetria assiale più usati nel caso del lensing gravitazionale è il modello della *Sfera Singolare Isoterma*, nel quale si assume che la materia della galassia che funge da lente si comporti come un gas ideale confinato in un potenziale a simmetria sferica.

Se si assume che il gas sia ideale ed in equilibrio termico a temperatura costante T , possiamo utilizzare la legge dei gas perfetti

$$p = \frac{\rho k T}{m} \quad (2.41)$$

Nell'espressione compaiono p , la pressione del gas, ρ ed m che sono rispettivamente densità e massa della lente.

Se il gas è anche in equilibrio idrostatico possiamo utilizzare l'equazione di struttura stellare, vista la similitudine tra una stella ed una galassia nel modello SIS, che descrive questo equilibrio.

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad (2.42)$$

Ma se differenziamo la 2.41 rispetto ad r si ottiene

$$\frac{dp}{dr} = \frac{kT}{m} \frac{d\rho}{dr} \quad (2.43)$$

Combinando le equazioni 2.42 e 2.43 si arriva all'equazione differenziale

$$\frac{kT}{m} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} \quad (2.44)$$

Imponendo la relazione $m\sigma_v = kT$, dove σ_v indica la dispersione di velocità del gas di particelle e risolvendo l'equazione differenziale si ottiene la densità della lente

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2} \quad (2.45)$$

Questa equazione è utile per trovare la distribuzione di massa⁷ della nostra lente, infatti essa è

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.46)$$

Sostituendo la densità poc'anzi calcolata ed integrando si ottiene

$$M(r) = \frac{2r\sigma_v^2}{G} \quad (2.47)$$

Notiamo che vi sono dei problemi legati a questo modello, infatti la densità di massa risulta infinita andando verso il centro mentre la massa tende ad incrementare andando verso l'esterno. Tali problemi vengono risolti imponendo che la massa totale sia racchiusa all'interno del raggio di Einstein e usando il modello della *Sfera Singolare non Isoterma* (NIS).

⁷Comprensiva, in questo caso, anche della componente di materia oscura

Il modello è però ampiamente utilizzato perché riproduce l'andamento piatto della curva di rotazione delle galassie a spirale. Infatti, imponendo che una stella o del gas nella parte esterna della galassia sia soggetta ad una forza gravitazionale diretta verso l'interno della galassia stessa ed equilibrata dalla forza centrifuga e ricordando l'equazione della massa per il questo tipo di lente si ottiene

$$v^2 = 2\sigma_v^2 = \text{cost} \quad (2.48)$$

Le galassie ellittiche non hanno una simmetria perfettamente sferica e quindi andrebbe usato un modello che perfeziona questo aspetto, chiamato *Ellissoide Singolare Isothermo* (SIE) di cui il modello SIS rappresenta un caso limite. Non discuteremo di tale modello in questa tesi in quanto non verrà usato a causa della carenza di dati a disposizione.

Capitolo 3

Analisi dei dati

In questo capitolo illustreremo in che modo possiamo ottenere una misura della frazione di materia oscura in una galassia ellittica, dove per frazione di materia oscura si intende il rapporto

$$F_{DM} = \frac{M_{DM}}{M_{tot}}. \quad (3.1)$$

M_{Tot} , nell'equazione sovrastante, è la massa totale del sistema

$$M_{Tot} = M_{DM} + M_{barionica} \quad (3.2)$$

Sostituendo quest'ultima equazione in quella precedente possiamo trovare la frazione di materia oscura senza dover trovare esplicitamente la massa della sola componente di materia oscura

$$F_{DM} = 1 - \frac{M_{Barionica}}{M_{tot}} \quad (3.3)$$

Come si può notare nella equazione sovrastante compare un termine di massa che abbiamo indicato come massa barionica, ovvero protoni, neutroni ed altre particelle elementari chiamate barioni che, a differenza della materia oscura, riusciamo a vedere tramite onde elettromagnetiche. La materia barionica forma sistemi più o meno complessi di materia che partono dai semplici atomi di idrogeno fino a complesse strutture organiche.

Nelle galassie sono presenti, oltre che a stelle/sistemi stellari, anche polveri, gas e mezzi interstellari che tendono a rendere molto difficile la stima della massa barionica all'interno della galassia stessa. Ciò che noi faremo sarà studiare una particolare classe di galassie, le galassie ellittiche, che, come già detto nel primo capitolo, hanno una minima componente di materia interstellare e la massa è concentrata quasi interamente in stelle e sistemi stellari [12].

3.1 Caratteristiche delle galassie ellittiche

Ciò che ci proporremo di fare nelle prossime sezioni sarà calcolare la massa totale, ovvero la massa entro il raggio di Einstein, di 68 galassie che fungono da lenti gravitazionali, schematizzate col modello di Sfera Isoterma Singolare¹ e la massa barionica delle stelle, calcolata a partire da alcune misure della luminosità.

Useremo le equazioni 3.1 e 3.2 per trovare la massa in materia oscura delle galassie e la frazione di materia oscura, analizzeremo gli errori sperimentali e concluderemo l'analisi dati con dei grafici che serviranno a mostrare l'andamento della frazione di materia oscura in funzione del redshift, in funzione della massa totale delle galassie e in funzione della velocità di dispersione di quest'ultime. Prima di iniziare l'analisi dati è bene parlare di alcune caratteristiche delle galassie ellittiche² che riguardano distanze e luminosità:

- Distanze: Nell'equazione del raggio di Einstein si trovano varie distanze stimate usando il già citato redshift. A causa dell'espansione dell'universo le galassie si allontanano le une dalle altre e il risultato di tale processo è uno spostamento verso il rosso degli spettri di assorbimento o emissione delle galassie osservate.

Per redshift dell'ordine di 10^{-2} si hanno distanze abbastanza piccole da poter essere stimate tramite la legge di Hubble e l'effetto doppler, ma per redshift maggiori si hanno distanze così grandi da rendere sbagliata una stima effettuata nel modo appena descritto richiedendo procedimenti più complessi.

Altra conseguenza di dover lavorare con distanze cosmologiche in uno spazio curvo è il non poter usare più il concetto di distanza a cui siamo abituati nella geometria euclidea e di doverne definire uno nuovo. In cosmologia esistono più concetti di distanza, a volte legati fra loro, come la distanza comovente, la distanza luminosità³, la distanza diametro-angolare, ed altre.

Noi useremo il concetto di distanza diametro-angolare, una distanza apparente definita a partire dalla dimensione reale x e dalla dimensione angolare θ dell'oggetto visto dalla terra. Non essendo una distanza reale, dipende dal modello cosmologico che viene usato e, per

¹Si è già spiegato che andrebbe usato un modello più raffinato ma i dati in nostro possesso permettono solo l'uso del modello SIS

²Sono caratteristiche che riguardano le galassie in generali e che quindi valgono anche per le galassie ellittiche

³Ottenuta dalla legge dell'inverso dei quadrati

il modello che attualmente viene usato per descrivere l'universo, la distanza diametro-angolare è una buon'approssimazione della distanza reale. Essa può essere calcolata, nota la metrica che descrive il modello cosmologico in uso, a partire da una stima del redshift.

- **Brillanza superficiale:** È definita come il rapporto tra il flusso uscente di luminosità e l'angolo solido unitario. Può essere definita sia in unità lineari, tramite l'equazione $I = \frac{F}{\Omega}$, sia come magnitudine $\mu = -2.5 \log I + cost$. Il flusso uscente dalla galassia è definito dall'equazione

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} \quad (3.4)$$

L'equazione della brillanza superficiale sarà allora

$$I = \frac{L}{4\pi D^2 \Omega} \quad (3.5)$$

Le curve per cui $I = cost$ si chiamano isofote e la luminosità si può ottenere mediante integrazione. Come vedremo, si può dunque calcolare la massa barionica di una galassia ellittica a partire dalla luminosità ma per conoscere quest'ultima bisogna conoscere il profilo di brillanza superficiale, che è ben descritto dalla legge empirica di de Vaucouleurs.

$$\mu_B(r) = \mu_e + 8.3268 \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \quad (3.6)$$

Dove r_e è il raggio della galassia la cui brillanza superficiale è μ_e

- **Il rapporto massa/luminosità:** Indicato con Γ questo rapporto permette, una volta noto, di poter legare insieme la luminosità di una stella o di una galassia con la propria massa tramite l'equazione

$$M_{Barionica} = \Gamma L = \left(\frac{M}{L} \right) L \quad (3.7)$$

Questo rapporto è spesso maggiore di 1 a causa del fatto che la massa totale ha una componente di massa non emettente onde elettromagnetiche e che quindi non ha contribuito in luminosità.

- **Dispersione di velocità:** Come già accennato la dispersione di velocità determina come varia la velocità di un corpo rispetto alla velocità media

del sistema contenente il corpo stesso. Essa è correlata, tramite la relazione di Faber-Jackson, con la luminosità di una galassia ellittica.

$$L \propto \sigma^4. \quad (3.8)$$

La dispersione di velocità considerata nell'equazione è quella posseduta dalle stelle (o dai sistemi stellari) presenti nella zona più interna della galassia. Notiamo che questo è consistente col modello che stiamo utilizzando: Infatti nel nostro modello abbiamo dovuto, per motivi di divergenza della densità verso il centro, schematizzare la sfera isoterma come contenente la maggior parte della massa in una zona di core, la quale diventa la zona con maggior massa luminosa del sistema. Nota la dispersione di velocità si può risalire alla luminosità e, nota la densità di flusso ottenuta da misure fotometriche, può essere calcolata la distanza⁴ [13].

3.2 Calcolo della massa nel raggio di Einstein

L'analisi dei dati si baserà su poche ed importanti equazioni. Innanzitutto è ovvio che

$$M_{Tot} = M_{DM} + M_{Barionica}. \quad (3.9)$$

Nel nostro caso la massa barionica sarà un dato noto, quindi ci concentreremo sulla massa totale. La massa totale, come sappiamo, è ricavabile mediante effetto di lente gravitazionale, precisamente mediante la misura degli angoli di Einstein che si formano nell'osservazione di determinati fenomeni di lensing.

Noti gli angoli di Einstein, ricaviamo il raggio di Einstein R_e

$$R_e = \theta_e D_L \quad (3.10)$$

L'importanza del raggio di Einstein è che ci da una stima della grandezza della nostra lente che ha dimensioni radiali dell'ordine di tale raggio.

Dall'angolo di Einstein si ricava anche una stima della massa della lente

$$\theta_e = \sqrt{\frac{4GM_{Tot}}{c^2} \frac{D_L D_S}{D_{LS}}} \quad (3.11)$$

Invertendo l'equazione scrivendo M in funzione di θ_e sarà

⁴La distanza qui considerata è la distanza di luminosità

$$M_{Tot} = \frac{\theta_e^2 c^2}{4G} \frac{D_L D_S}{D_{LS}} \quad (3.12)$$

Utilizzando il modello SIS si può ricavare la seguente formula che lega l'angolo di Einstein alla dispersione di velocità delle lente

$$\theta_e = 4\pi \frac{\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \quad (3.13)$$

Dunque la massa sarà data dalla seguente espressione:

$$M_{Tot} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{\sigma_v^4}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S}. \quad (3.14)$$

3.3 Elaborazione dei dati

I dati che presenteremo in questa sezione sono presi dalla Sloan Lens ACS Survey, dove l'acronimo ACS sta per Advanced Camera for Surveys. Le lenti candidate sono scelte spettroscopicamente dal database di spettri di galassie dell'SDSS (Sloan Digital Sky Survey). La survey SLACS è ottimizzata a trovare lenti costituite da galassie early-type sia ellittiche che a spirale. La survey SLACS combina il gran numero di dati della Sloan Digital Sky Survey con le immagini ad alta risoluzione dell'HST (Hubble Space Telescope) per identificare e studiare un grande numero di lenti gravitazionali per una maggior comprensione del fenomeno.

Tutti i target sono stati scelti con redshift che vanno dal 0.063 della galassia SDSSJ1420+6019 fino al 0.513 della galassia SDSSJ0157-0056, dove i redshift considerati sono riferiti alle lenti, e con dispersione di velocità che vanno dai 160 km/s ai 400 km/s [14]. Le immagini dell'HST ci permettono di misurare le grandezze angolari di effetti come gli anelli di Einstein che, combinati con le misure dell'SDSS, ci danno misure sulle masse delle lenti gravitazionali.

Riportiamo di seguito la tabella coi dati riguardanti i redshift e le dispersioni di velocità.

Nome	R.A.	Declinazione	z_{lente}	$z_{sorgente}$	σ_v ($km\ s^{-1}$)
SDSSJ0008-0004	00 ^h 08 ^m 02 ^s .96	-00°04 ^m 08 ^s .2	0.440	1.192	193 ± 36
SDSSJ0029-0055	00 ^h 29 ^m 07 ^s .78	-00°55 ^m 50 ^s .5	0.227	0.931	229 ± 18
SDSSJ0037-0942	00 ^h 37 ^m 53 ^s .21	-09°42 ^m 20 ^s .1	0.195	0.632	279 ± 10
SDSSJ0044+0113	00 ^h 44 ^m 02 ^s .90	01°13 ^m 12 ^s .6	0.120	0.197	266 ± 13
SDSSJ0157-0056	01 ^h 57 ^m 58 ^s .94	-00°56 ^m 26 ^s .1	0.513	0.924	295 ± 47
SDSSJ0216-0813	02 ^h 16 ^m 52 ^s .54	-08°13 ^m 45 ^s .3	0.332	0.523	333 ± 23
SDSSJ0252+0039	02 ^h 52 ^m 45 ^s .21	00°39 ^m 58 ^s .4	0.280	0.982	164 ± 12
SDSSJ0330-0020	03 ^h 30 ^m 12 ^s .14	-00°20 ^m 51 ^s .9	0.351	1.071	212 ± 21
SDSSJ0728+3835	07 ^h 28 ^m 04 ^s .95	38°35 ^m 25 ^s .7	0.206	0.688	214 ± 11
SDSSJ0737+3216	07 ^h 37 ^m 28 ^s .45	32°16 ^m 18 ^s .6	0.322	0.581	338 ± 16
SDSSJ0819+4534	08 ^h 19 ^m 31 ^s .93	45°34 ^m 44 ^s .8	0.194	0.446	225 ± 15
SDSSJ0822+2652	08 ^h 22 ^m 42 ^s .32	26°52 ^m 43 ^s .5	0.241	0.594	259 ± 15
SDSSJ0841+3824	08 ^h 41 ^m 28 ^s .81	38°24 ^m 13 ^s .7	0.116	0.657	225 ± 8
SDSSJ0903+4116	09 ^h 03 ^m 15 ^s .19	41°16 ^m 09 ^s .1	0.430	1.065	223 ± 27
SDSSJ0912+0029	09 ^h 12 ^m 05 ^s .31	00°29 ^m 01 ^s .2	0.164	0.324	326 ± 12
SDSSJ0935-0003	09 ^h 35 ^m 43 ^s .93	-00°03 ^m 34 ^s .8	0.347	0.467	396 ± 35
SDSSJ0936+0913	09 ^h 36 ^m 00 ^s .77	09°13 ^m 35 ^s .8	0.190	0.588	243 ± 11
SDSSJ0946+1006	09 ^h 46 ^m 56 ^s .68	10°06 ^m 52 ^s .8	0.222	0.609	263 ± 21
SDSSJ0955+0101	09 ^h 55 ^m 19 ^s .72	01°01 ^m 44 ^s .4	0.111	0.316	192 ± 13
SDSSJ0956+5100	09 ^h 56 ^m 29 ^s .78	51°00 ^m 06 ^s .6	0.241	0.470	334 ± 15
SDSSJ0959+4416	09 ^h 59 ^m 00 ^s .96	44°16 ^m 39 ^s .4	0.237	0.531	244 ± 19
SDSSJ0959+0410	09 ^h 59 ^m 44 ^s .07	04°10 ^m 17 ^s .0	0.126	0.535	197 ± 13
SDSSJ1016+3859	10 ^h 16 ^m 22 ^s .86	38°59 ^m 03 ^s .3	0.168	0.439	247 ± 13
SDSSJ1020+1122	10 ^h 20 ^m 26 ^s .54	11°22 ^m 41 ^s .1	0.282	0.553	282 ± 18
SDSSJ1023+4230	10 ^h 23 ^m 32 ^s .26	42°30 ^m 01 ^s .8	0.191	0.696	242 ± 15
SDSSJ1029+0420	10 ^h 29 ^m 22 ^s .94	04°20 ^m 01 ^s .8	0.104	0.615	210 ± 9
SDSSJ1032+5322	10 ^h 32 ^m 35 ^s .84	53°22 ^m 34 ^s .9	0.133	0.329	296 ± 14
SDSSJ1100+5329	11 ^h 00 ^m 24 ^s .39	53°29 ^m 13 ^s .9	0.317	0.858	187 ± 23
SDSSJ1106+5228	11 ^h 06 ^m 46 ^s .15	52°28 ^m 37 ^s .8	0.095	0.407	262 ± 9
SDSSJ1112+0826	11 ^h 12 ^m 50 ^s .60	08°26 ^m 10 ^s .4	0.273	0.629	320 ± 20
SDSSJ1134+6027	11 ^h 34 ^m 05 ^s .89	60°27 ^m 13 ^s .5	0.153	0.474	239 ± 11
SDSSJ1142+1001	11 ^h 42 ^m 57 ^s .35	10°01 ^m 11 ^s .8	0.222	0.504	221 ± 22
SDSSJ1143-0144	11 ^h 43 ^m 29 ^s .64	-01°44 ^m 30 ^s .0	0.106	0.402	269 ± 5
SDSSJ1153+4612	11 ^h 53 ^m 10 ^s .79	46°2 ^m 05 ^s .3	0.180	0.875	226 ± 15
SDSSJ1204+0358	12 ^h 04 ^m 44 ^s .07	03°58 ^m 06 ^s .4	0.164	0.631	267 ± 17
SDSSJ1205+4910	12 ^h 05 ^m 40 ^s .44	49°10 ^m 29 ^s .4	0.215	0.481	281 ± 13
SDSSJ1213+6708	12 ^h 13 ^m 40 ^s .58	67°08 ^m 29 ^s .0	0.123	0.640	292 ± 11
SDSSJ1218+0830	12 ^h 18 ^m 26 ^s .70	08°30 ^m 50 ^s .3	0.135	0.717	219 ± 10
SDSSJ1251-0208	12 ^h 51 ^m 35 ^s .70	-02°08 ^m 05 ^s .2	0.224	0.784	233 ± 23

Nome	R.A.	Declinazione	z_{lente}	$z_{sorgente}$	σ_v ($km\ s^{-1}$)
SDSSJ1306+0600	13 ^h 06 ^m 13 ^s .65	06°00 ^m 22 ^s .1	0.173	0.472	237 ± 17
SDSSJ1313+4615	13 ^h 13 ^m 02 ^s .93	46°15 ^m 13 ^s .6	0.185	0.514	263 ± 18
SDSSJ1318-0313	13 ^h 18 ^m 39 ^s .33	-03°13 ^m 34 ^s .2	0.240	1.300	213 ± 18
SDSSJ1330-0148	13 ^h 30 ^m 45 ^s .53	-01°48 ^m 41 ^s .6	0.081	0.711	185 ± 9
SDSSJ1402+6321	14 ^h 02 ^m 28 ^s .21	63°21 ^m 33 ^s .5	0.205	0.481	267 ± 17
SDSSJ1403+0006	14 ^h 03 ^m 29 ^s .49	00°06 ^m 41 ^s .4	0.189	0.473	213 ± 17
SDSSJ1416+5136	14 ^h 16 ^m 22 ^s .34	51°36 ^m 30 ^s .4	0.299	0.811	240 ± 25
SDSSJ1430+4105	14 ^h 30 ^m 04 ^s .10	41°05 ^m 57 ^s .1	0.285	0.575	322 ± 32
SDSSJ1432+6317	14 ^h 32 ^m 13 ^s .34	63°17 ^m 03 ^s .8	0.123	0.664	199 ± 8
SDSSJ1436-0000	14 ^h 36 ^m 27 ^s .54	-00°00 ^m 29 ^s .2	0.285	0.805	224 ± 17
SDSSJ1443+0304	14 ^h 43 ^m 19 ^s .62	03°04 ^m 08 ^s .2	0.134	0.419	209 ± 11
SDSSJ1451-0239	14 ^h 51 ^m 28 ^s .19	-02°39 ^m 36 ^s .4	0.125	0.520	223 ± 14
SDSSJ1525+3327	15 ^h 25 ^m 06 ^s .70	33°27 ^m 47 ^s .4	0.358	0.717	264 ± 26
SDSSJ1531-0105	15 ^h 31 ^m 50 ^s .07	-01°05 ^m 45 ^s .7	0.160	0.744	279 ± 12
SDSSJ1538+5817	15 ^h 38 ^m 12 ^s .92	58°17 ^m 09 ^s .8	0.143	0.531	189 ± 12
SDSSJ1614+4522	16 ^h 14 ^m 37 ^s .74	45°22 ^m 53 ^s .3	0.178	0.811	182 ± 13
SDSSJ1621+3931	16 ^h 21 ^m 32 ^s .99	39°31 ^m 44 ^s .6	0.245	0.602	236 ± 20
SDSSJ1627-0053	16 ^h 27 ^m 46 ^s .45	-00°53 ^m 57 ^s .6	0.208	0.524	290 ± 14
SDSSJ1630+4520	16 ^h 30 ^m 28 ^s .16	45°20 ^m 36 ^s .3	0.248	0.793	276 ± 16
SDSSJ1636+4707	16 ^h 36 ^m 02 ^s .62	47°07 ^m 29 ^s .6	0.228	0.675	231 ± 15
SDSSJ1644+2625	16 ^h 44 ^m 43 ^s .09	26°25 ^m 25 ^s .4	0.137	0.610	229 ± 12
SDSSJ1719+2939	17 ^h 19 ^m 34 ^s .16	29°39 ^m 26 ^s .4	0.181	0.578	286 ± 15
SDSSJ2238-0754	22 ^h 38 ^m 40 ^s .20	-07°54 ^m 56 ^s .0	0.137	0.713	198 ± 11
SDSSJ2300+0022	23 ^h 00 ^m 53 ^s .15	00°22 ^m 38 ^s .0	0.228	0.463	279 ± 17
SDSSJ2303+1422	23 ^h 03 ^m 21 ^s .72	14°22 ^m 17 ^s .9	0.155	0.517	255 ± 16
SDSSJ2321-0939	23 ^h 21 ^m 20 ^s .93	-09°39 ^m 10 ^s .3	0.082	0.532	249 ± 8
SDSSJ2341+0000	23 ^h 41 ^m 11 ^s .57	00°00 ^m 18 ^s .7	0.186	0.807	207 ± 13
SDSSJ2347-0005	23 ^h 47 ^m 28 ^s .08	-00°05 ^m 21 ^s .3	0.417	0.714	404 ± 59

Possiamo dunque ricavare la massa totale delle varie galassie tabulate utilizzando l'equazione 3.14, dove le distanze sono calcolate, a partire dai redshift, tramite un algoritmo scritto in Mathematica.

Riportiamo prima la tabella coi dati fotometrici riguardanti le galassie sopra tabulate, per poi riportare subito dopo un'ulteriore tabella coi risultati. La terza tabella conterrà anche gli errori dei risultati, ottenuti tramite propagazione degli errori, di cui parleremo, insieme alle conclusioni, nella prossima sezione.



Figura 3.1: Immagini di alcune lenti gravitazionali usate nell'analisi dati. Si può notare nitidamente il ben noto anello di Einstein in varie immagini. Alcune galassie non compaiono nelle tabelle a causa dell'incompletezza dei dati ad esse relativi.

Nome	r_{Ein}	$\log[M_{Ein}/M_{\odot}]$	$f_{*,Ein}^{Salp}$
SDSSJ0008-0004	6.59	11.55	0.50 ± 0.16
SDSSJ0029-0055	3.48	11.08	0.89 ± 0.26
SDSSJ0037-0942	4.95	11.47	0.71 ± 0.10
SDSSJ0044+0113	1.72	10.96	0.64 ± 0.13
SDSSJ0157-0056	4.89	11.41	0.90 ± 0.20
SDSSJ0216-0813	5.53	11.69	0.61 ± 0.10
SDSSJ0252+0039	4.40	11.25	0.71 ± 0.21
SDSSJ0330-0020	5.45	11.40	0.69 ± 0.15
SDSSJ0728+3835	4.21	11.30	1.00 ± 0.29
SDSSJ0737+3216	4.66	11.46	0.73 ± 0.12
SDSSJ0819+4534	2.73	11.04	0.57 ± 0.11
SDSSJ0822+2652	4.45	11.38	0.73 ± 0.22
SDSSJ0841+3824	2.96	11.12	0.54 ± 0.18
SDSSJ0903+4116	7.23	11.66	0.62 ± 0.20
SDSSJ0912+0029	4.58	11.60	0.60 ± 0.09
SDSSJ0935-0003	4.26	11.60	0.35 ± 0.05
SDSSJ0936+0913	3.45	11.17	1.03 ± 0.29
SDSSJ0946+1006	4.95	11.46	0.46 ± 0.13
SDSSJ0955+0101	1.83	10.83	0.64 ± 0.09
SDSSJ0956+5100	5.05	11.57	0.62 ± 0.12
SDSSJ0959+4416	3.61	11.23	0.99 ± 0.28
SDSSJ0959+0410	2.24	10.88	0.73 ± 0.11
SDSSJ1016+3859	3.13	11.17	0.84 ± 0.23
SDSSJ1020+1122	5.12	11.54	0.81 ± 0.22
SDSSJ1023+4230	4.50	11.37	0.67 ± 0.19
SDSSJ1029+0420	1.92	10.78	1.23 ± 0.32
SDSSJ1032+5322	2.44	11.05	0.77 ± 0.20
SDSSJ1100+5329	7.02	11.67	0.58 ± 0.09
SDSSJ1106+5228	2.17	10.96	0.95 ± 0.13
SDSSJ1112+0826	6.19	11.65	0.59 ± 0.11
SDSSJ1134+6027	2.93	11.10	0.89 ± 0.24
SDSSJ1142+1001	3.52	11.22	0.68 ± 0.13
SDSSJ1143-0144	3.27	11.29	0.46 ± 0.10
SDSSJ1153+4612	3.18	11.05	0.84 ± 0.25
SDSSJ1204+0358	3.68	11.24	0.71 ± 0.10
SDSSJ1205+4910	4.27	11.40	0.63 ± 0.09
SDSSJ1213+6708	3.13	11.16	0.66 ± 0.14
SDSSJ1218+0830	3.47	11.21	0.72 ± 0.13
SDSSJ1251-0208	3.03	10.98	0.59 ± 0.11

Nome	r_{Ein}	$\log[M_{Ein}/M_{\odot}]$	$f_{*,Ein}^{Salp}$
SDSSJ1306+0600	3.87	11.33	0.47 ± 0.08
SDSSJ1313+4615	4.25	11.38	0.61 ± 0.11
SDSSJ1318-0313	6.01	11.50	0.42 ± 0.08
SDSSJ1330-0148	1.32	10.52	0.69 ± 0.10
SDSSJ1402+6321	4.53	11.46	0.70 ± 0.10
SDSSJ1403+0006	2.62	10.98	0.94 ± 0.18
SDSSJ1416+5136	6.08	11.56	0.61 ± 0.11
SDSSJ1430+4105	6.53	11.73	0.59 ± 0.16
SDSSJ1432+6317	2.78	11.05	0.69 ± 0.13
SDSSJ1436-0000	4.80	11.36	0.65 ± 0.13
SDSSJ1443+0304	1.93	10.78	0.90 ± 0.13
SDSSJ1451-0239	2.33	10.92	0.80 ± 0.12
SDSSJ1525+3327	6.55	11.68	0.66 ± 0.13
SDSSJ1531-0105	4.71	11.43	0.66 ± 0.13
SDSSJ1538+5817	2.50	10.95	0.84 ± 0.15
SDSSJ1614+4522	2.54	11.86	0.88 ± 0.25
SDSSJ1621+3931	4.18	11.36	0.60 ± 0.09
SDSSJ1627-0053	6.91	11.69	0.80 ± 0.16
SDSSJ1630+4520	3.96	11.25	0.69 ± 0.11
SDSSJ1636+4707	3.07	11.12	0.95 ± 0.18
SDSSJ1644+2625	4.94	11.43	0.81 ± 0.15
SDSSJ1719+2939	3.89	11.28	0.71 ± 0.14
SDSSJ2238-0754	3.89	11.28	0.73 ± 0.11
SDSSJ2300+0840	4.51	11.47	0.58 ± 0.09
SDSSJ2303+1422	4.35	11.42	0.59 ± 0.09
SDSSJ2321-0939	4.50	11.35	0.84 ± 0.15
SDSSJ2341+0000	4.62	11.49	0.67 ± 0.13
SDSSJ2347-0005	6.10	11.67	0.62 ± 0.12

Nome	$M_{Tot}(10^{11}M_{\odot})$	$M_*(10^{11}M_{\odot})$	f_{DM}
SDSSJ0008-0004	0.9 ± 0.7	0.46 ± 0.17	0.50 ± 0.16
SDSSJ0029-0055	1.5 ± 0.5	1.3 ± 0.4	0.11 ± 0.26
SDSSJ0037-0942	2.7 ± 0.4	1.9 ± 0.4	0.29 ± 0.10
SDSSJ0044+0113	0.90 ± 0.18	0.58 ± 0.16	0.36 ± 0.13
SDSSJ0157-0056	3.7 ± 2.3	3.5 ± 1.2	0.04 ± 0.20
SDSSJ0216-0813	4.1 ± 1.1	2.5 ± 0.8	0.39 ± 0.10
SDSSJ0252+0039	0.43 ± 0.12	0.30 ± 0.12	0.29 ± 0.21
SDSSJ0330-0020	1.27 ± 0.5	0.88 ± 0.39	0.31 ± 0.15
SDSSJ0728+3835	0.99 ± 0.20	0.99 ± 0.35	0.00 ± 0.29
SDSSJ0737+3216	5.1 ± 0.9	3.7 ± 0.9	0.27 ± 0.12
SDSSJ0819+4534	0.93 ± 0.13	0.53 ± 0.17	0.43 ± 0.11
SDSSJ0822+2652	2.00 ± 0.5	1.5 ± 0.5	0.27 ± 0.22
SDSSJ0841+3824	0.90 ± 0.13	0.49 ± 0.17	0.46 ± 0.18
SDSSJ0903+4116	1.5 ± 0.7	0.95 ± 0.55	0.38 ± 0.20
SDSSJ0912+0029	3.2 ± 0.5	1.9 ± 0.4	0.40 ± 0.09
SDSSJ0935-0003	5.9 ± 2.0	2.1 ± 0.8	0.65 ± 0.05
SDSSJ0936+0913	1.9 ± 0.3	1.9 ± 0.6	-0.03 ± 0.29
SDSSJ0946+1006	2.2 ± 0.7	0.99 ± 0.32	0.54 ± 0.13
SDSSJ0955+0101	0.36 ± 0.09	0.23 ± 0.07	0.36 ± 0.09
SDSSJ0956+5100	4.6 ± 0.8	2.8 ± 0.7	0.38 ± 0.12
SDSSJ0959+4416	1.5 ± 0.4	1.5 ± 0.6	0.01 ± 0.28
SDSSJ0959+0410	0.53 ± 0.14	0.39 ± 0.12	0.27 ± 0.11
SDSSJ1016+3859	1.3 ± 0.3	1.1 ± 0.4	0.16 ± 0.23
SDSSJ1020+1122	2.6 ± 0.6	2.1 ± 0.7	0.19 ± 0.22
SDSSJ1023+4230	1.6 ± 0.4	1.1 ± 0.4	0.33 ± 0.19
SDSSJ1029+0420	0.63 ± 0.11	0.78 ± 0.24	-0.23 ± 0.32
SDSSJ1032+5322	2.2 ± 0.4	1.7 ± 0.5	0.23 ± 0.20
SDSSJ1100+5329	0.68 ± 0.33	0.40 ± 0.16	0.42 ± 0.09
SDSSJ1106+5228	0.90 ± 0.12	0.86 ± 0.17	0.05 ± 0.13
SDSSJ1112+0826	4.8 ± 1.2	2.8 ± 0.8	0.41 ± 0.11
SDSSJ1134+6027	1.2 ± 0.2	1.1 ± 0.3	0.11 ± 0.24
SDSSJ1142+1001	0.95 ± 0.37	0.64 ± 0.28	0.32 ± 0.13
SDSSJ1143-0144	1.53 ± 0.11	0.71 ± 0.16	0.54 ± 0.10
SDSSJ1153+4612	1.2 ± 0.3	0.97 ± 0.33	0.16 ± 0.25
SDSSJ1204+0358	2.1 ± 0.5	1.5 ± 0.4	0.29 ± 0.10
SDSSJ1205+4910	2.4 ± 0.4	1.5 ± 0.3	0.37 ± 0.09
SDSSJ1213+6708	2.6 ± 0.4	1.7 ± 0.4	0.34 ± 0.14
SDSSJ1218+0830	0.91 ± 0.17	0.65 ± 0.17	0.28 ± 0.13
SDSSJ1251-0208	1.5 ± 0.6	0.88 ± 0.28	0.41 ± 0.11

Nome	$M_{Tot}(10^{11}M_{\odot})$	$M_*(10^{11}M_{\odot})$	f_{DM}
SDSSJ1306+0600	1.2 ± 0.3	0.55 ± 0.18	0.53 ± 0.08
SDSSJ1313+4615	1.9 ± 0.5	1.2 ± 0.4	0.39 ± 0.11
SDSSJ1318-0313	1.2 ± 0.4	0.52 ± 0.20	0.58 ± 0.08
SDSSJ1330-0148	0.33 ± 0.06	0.23 ± 0.08	0.31 ± 0.10
SDSSJ1402+6321	1.9 ± 0.5	1.4 ± 0.4	0.30 ± 0.10
SDSSJ1403+0006	0.8 ± 0.2	0.73 ± 0.27	0.06 ± 0.18
SDSSJ1416+5136	1.8 ± 0.7	1.1 ± 0.4	0.39 ± 0.11
SDSSJ1430+4105	4.5 ± 1.8	2.7 ± 1.2	0.41 ± 0.16
SDSSJ1432+6317	0.57 ± 0.09	0.40 ± 0.09	0.31 ± 0.13
SDSSJ1436-0000	1.8 ± 0.5	1.2 ± 0.4	0.35 ± 0.13
SDSSJ1443+0304	0.63 ± 0.13	0.56 ± 0.14	0.10 ± 0.13
SDSSJ1451-0239	0.86 ± 0.21	0.69 ± 0.20	0.20 ± 0.12
SDSSJ1525+3327	2.3 ± 0.9	1.5 ± 0.6	0.34 ± 0.13
SDSSJ1531-0105	2.6 ± 0.5	1.7 ± 0.4	0.34 ± 0.13
SDSSJ1538+5817	0.47 ± 0.12	0.40 ± 0.12	0.16 ± 0.15
SDSSJ1614+4522	0.52 ± 0.15	0.45 ± 0.18	0.12 ± 0.25
SDSSJ1621+3931	1.4 ± 0.5	0.84 ± 0.31	0.40 ± 0.09
SDSSJ1627-0053	2.9 ± 0.6	2.3 ± 0.6	0.20 ± 0.16
SDSSJ1630+4520	3.0 ± 0.7	2.1 ± 0.6	0.31 ± 0.11
SDSSJ1636+4707	1.4 ± 0.4	1.3 ± 0.4	0.05 ± 0.18
SDSSJ1644+2625	1.1 ± 0.2	0.85 ± 0.24	0.19 ± 0.15
SDSSJ1719+2939	2.8 ± 0.6	2.0 ± 0.6	0.29 ± 0.14
SDSSJ2238-0754	0.61 ± 0.14	0.44 ± 0.12	0.27 ± 0.11
SDSSJ2300+0840	2.2 ± 0.5	1.3 ± 0.3	0.42 ± 0.09
SDSSJ2303+1422	1.6 ± 0.4	0.95 ± 0.28	0.41 ± 0.09
SDSSJ2321-0939	1.03 ± 0.13	0.87 ± 0.19	0.16 ± 0.15
SDSSJ2341+0000	0.88 ± 0.22	0.59 ± 0.19	0.33 ± 0.13
SDSSJ2347-0005	11.4 ± 6.6	7.05 ± 1.89	0.38 ± 0.12

Dove la σ_v è la dispersione di velocità, r_{Ein} è il raggio di Einstein, f_* è la frazione di massa stellare e le quantità con pedice "Ein" sono calcolate entro il raggio di Einstein, mentre le masse totali e barioniche sono state riportate in potenze di masse solari.⁵

⁵Ricordiamo che una massa solare è circa $2 \cdot 10^{30}kg$.

3.4 Conclusioni

Nell'analisi dati precedente abbiamo ommesso le galassie del campione SLACS per le quali non sono disponibili informazioni complete⁶

La misura delle masse (calcolate entro il raggio di Einstein) è basata unicamente sul fenomeno del lensing gravitazionale, quindi è indipendente dallo stato dinamico del sistema e dalla sua composizione materiale.

Possiamo notare, dalle tabelle presenti nella sezione precedente, che gli errori sulle masse totali e masse stellari, sono, in alcuni casi, elevati. Questo è dovuto al modello relativamente semplice che si è adottato ed al fatto che la stima della massa stellare è molto incerta. Come riportato in *SLACS. IX. Colors, Lensing and stellar masses of early-type* [14] gli errori relativi possono arrivare a valori del 30% o più.

In particolare, nel caso della massa totale, si ha un errore che va come σ_v^3 , quindi le galassie con dispersioni di velocità alte avranno degli errori sulla massa notevoli, anche con piccole incertezze sulle quantità fotometriche.

in alcuni casi, un'incertezza calcolata molto alta a causa del processo matematico lungo che, volta per volta, aggiungeva incertezze su incertezze, tramite propagazione degli errori.

I redshift sono invece portati come privi di errori dato che in media l'errore relativo è circa 10^{-4} . Ciò ha semplificato l'analisi degli errori sulle distanze, che sono risultate con incertezze trascurabili.

Un'ultima analisi che faremo sarà studiare, tramite grafici, il comportamento della frazione di materia oscura al variare del redshift della lente, della dispersione di velocità e della massa totale.

⁶Le galassie ommesse sono invece riportate nell'articolo The Sloan Lens ACS Survey. IX. Colors, Lensing and stellar masses of early-type [14]. Per alcune di esse sono mancanti la frazione di massa stellare o il raggio di Einstein.

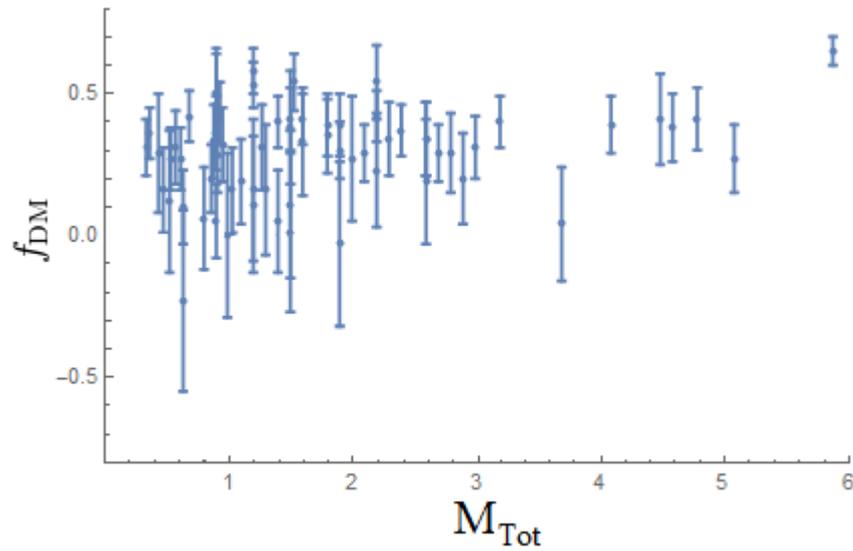


Figura 3.2: Grafico della frazione di materia oscura in funzione della massa rispetto alla massa totale delle galassie. Non sono state inserite le barre di errore orizzontali raffiguranti gli errori sulle masse totali per motivi di ordine e semplicità del grafico.

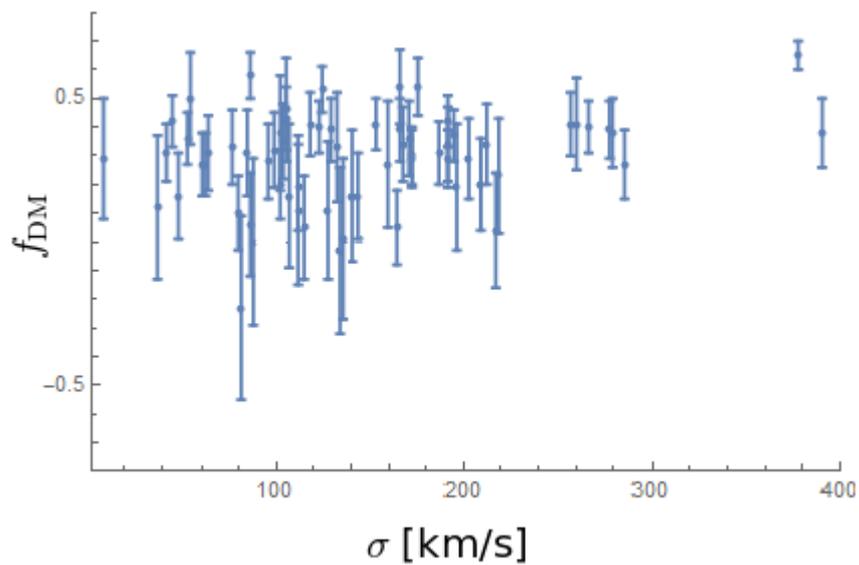


Figura 3.3: Grafico della frazione di materia oscura in funzione della dispersione di velocità. Come nel grafico precedente sono stati omesse le barre di errore orizzontali per una maggiore chiarezza del grafico.

Dai grafici si evince come la frazione di materia oscura aumenti leggermente sia all'aumentare di σ che all'aumentare della massa totale. Ancora qui, gli errori sulla frazione di materia oscura sono elevati a causa del semplice modello usato nei calcoli.

Nel primo grafico si ha una zona di grande densità di punti per masse relativamente piccole, che vanno dalle $0.4 \cdot 10^{11}$ alle $1.5 \cdot 10^{11}$ masse solari. Questa corrisponde, nel secondo grafico, ad una zona simile per dispersioni di velocità intermedie, nell'intervallo da 100 a 200 km/s.

Un interessante andamento della materia oscura si evince dalla Fig. 3.4 che mostra l'andamento della frazione di materia oscura in funzione del redshift. L'andamento mostrato dal grafico è un aumento quasi lineare per redshift che vanno dai 0.1 ai 0.2 e tende a crescere meno rapidamente per redshift che vanno fino ai 0.5.

Per verificare questo andamento abbiamo suddiviso i vari redshift in bin di lunghezza 0.1 da $z = 0$ a 0.5, facendo la media pesata della frazione di materia oscura rispetto ai redshift per ogni bin e poi graficando il risultato, comprensivo di barre di errore. Notiamo una lieve diminuzione del valore medio della frazione di materia oscura con il tempo cosmico; tuttavia, per confermare questa conclusione è necessario una più attenta costruzione del campione di galassie, oltre lo scopo della nostra tesi.

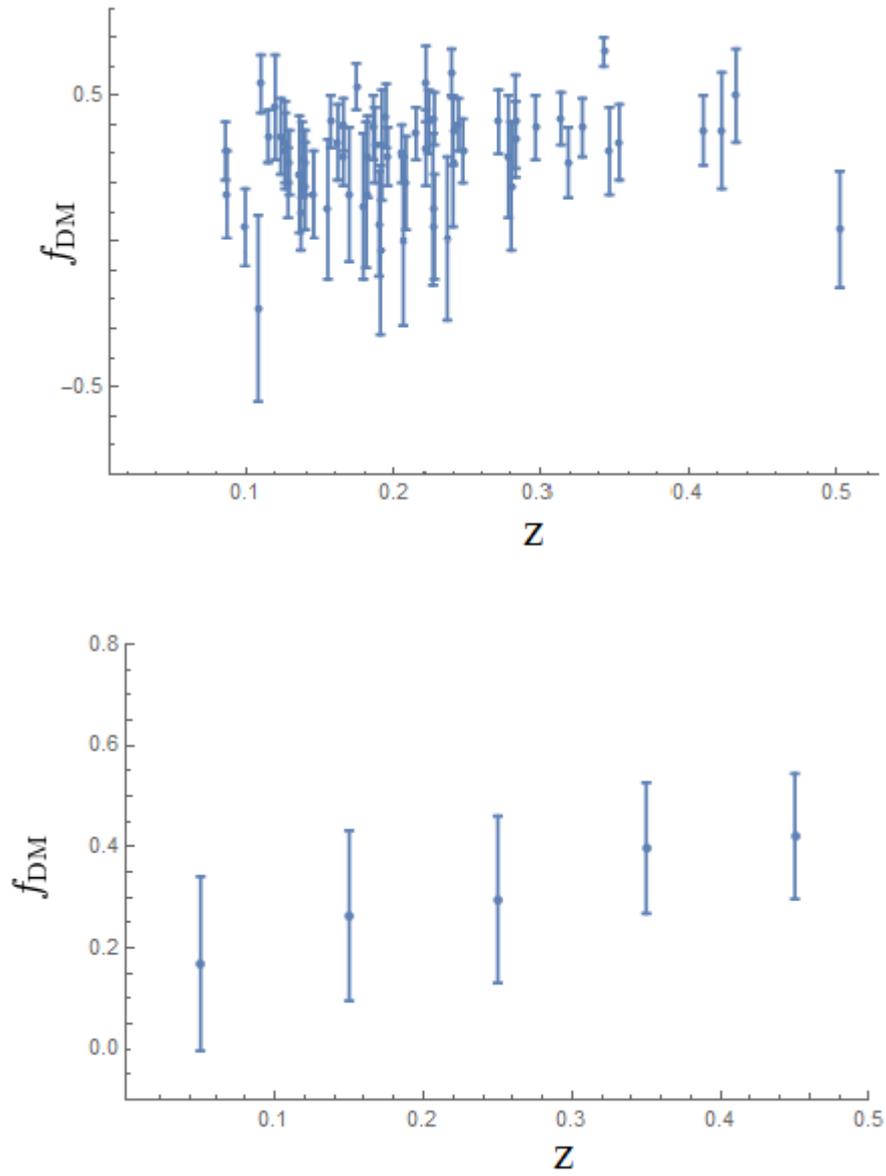


Figura 3.4: Frazione di materia oscura in funzione del redshift. Nel secondo grafico si è scelti come punti sull'asse delle x il valor medio di ogni bin

Bin	Valor medio di f_{DM}
0-0.1	0.17 ± 0.17
0.1-0.2	0.26 ± 0.17
0.2-0.3	0.30 ± 0.16
0.3-0.4	0.40 ± 0.13
0.4-0.5	0.42 ± 0.12

Il lavoro fin qui svolto, che ha portato ai risultati riassunti nella Tabella dei valori medi di f_{DM} , ha come scopo di contribuire allo studio della evoluzione delle galassie ellittiche. Precedenti studi di lenti gravitazionali nella survey KiDS (per la maggior parte galassie ellittiche) hanno trovato un andamento della frazione di materia oscura in funzione di dispersioni di velocità e massa totale simile a quello qui presente. In questa tesi abbiamo considerato un ampio campione di galassie dalla survey SLACS. Rispetto al campione KiDS, abbiamo potuto estendere l'indagine fino a $z \simeq 0.5$ (la survey KiDS è limitata fino a $z \simeq 0.3$).

Nella survey KiDS, analisi precedenti hanno ottenuto il seguente valore della frazione di materia oscura a redshift $z = 0.25$

$$f_{DM} = 0.55 \pm 0.20. \quad (3.15)$$

L'errore sulla frazione di materia oscura è leggermente maggiore rispetto ai valori che abbiamo nella tabella a causa di un numero molto esiguo di dati. Il valore però rispecchia l'andamento visto nella seconda immagine della Figura 3.4.

In questa tesi abbiamo verificato che il lensing gravitazionale è un potente mezzo di analisi per lo studio della struttura delle galassie.

L'analisi qui presentata può essere migliorata in base alle seguenti considerazioni:

- I dati a disposizione in questa tesi sono limitati; un più ampio campione di lenti gravitazionali è necessario per un'approfondita analisi dei comportamenti della componente di materia oscura rispetto ad altri parametri quali redshift o distanze.
- Abbiamo adottato un modello semplice, adeguato alla bassa risoluzione spaziale dei dati osservativi. Il modello della *Sfera Singolare Isoterma* può essere applicato a galassie isolate con un'ellitticità quasi nulla, situazione rara. Necessitano, nel caso di maggiori dati che riguardino vaste aree del cielo, modelli più raffinati che tengano conto delle varie caratteristiche fisiche del campione.

- Anche se la matematica, tramite equazioni e modelli, può spingere la mente e l'immaginazione a vedere l'universo oltre i nostri sensi, abbiamo bisogno di conferme sperimentali che non sempre i nostri moderni telescopi possono dare. Un miglioramento della tecnologia in questa direzione potrebbe non solo dare dati in quantità maggiori, ma anche con una qualità di gran lunga migliore di quella attuale.
- Un importante limite è dato dalla grande errore sul rapporto massa-luminosità, necessario per ottenere le masse barioniche delle galassie. Questo rapporto dipende dal tipo di popolazione stellare e, dunque necessita di analisi dettagliate. Dettagliate analisi spettroscopiche sono necessarie per ridurre l'incertezza su questa grandezza.

Appendice A

Derivazione dell'angolo di deflessione

Partiamo dall'equazione 1.20

$$\delta \int_A^B n[x(\lambda)] \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| d\lambda = 0 \quad (\text{A.1})$$

L'integranda di tale equazione prende il ruolo della Lagrangiana della meccanica analitica con

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \quad (\text{A.2})$$

$$\left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right| = |\dot{\vec{x}}| = (\dot{\vec{x}}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.3})$$

Usando queste espressioni troviamo le equazioni di Eulero per il calcolo variazionale

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (\text{A.4})$$

In questa equazione la Lagrangiana è $L = n[x(\lambda)] \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|$. Svolgendo le derivate rispetto a \vec{x} e $\dot{\vec{x}}$ si ottiene

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = n[x(\lambda)] \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial n[x(\lambda)]}{\partial \vec{x}} |\dot{\vec{x}}| = \vec{\nabla} n[x(\lambda)] |\dot{\vec{x}}| \quad (\text{A.6})$$

$\dot{\vec{x}}$ è, punto per punto, un vettore tangente al percorso compiuto dalla luce e possiamo considerarlo unitario scegliendo opportunamente un certo

parametro λ . Quindi avremo $|\dot{\vec{x}}| = 1$ e $\dot{\vec{x}} = \vec{e}$, le quali, sostituite nella B.6, daranno

$$\frac{d}{d\lambda}(n\vec{e}) - \vec{\nabla}n = 0 \quad (\text{A.7})$$

Eseguendo le derivate si ha

$$n\dot{\vec{e}} = \vec{\nabla} - \vec{e}(\vec{\nabla}n \cdot \vec{e}) \quad (\text{A.8})$$

Il secondo termine del lato destro dell'equazione è la derivata lungo il percorso di luce, quindi l'intero lato destro è il gradiente di n perpendicolare al percorso stesso. Dividendo la B.8 per n si avrà, dunque

$$\dot{\vec{e}} = \frac{1}{n}\vec{\nabla}_{\perp}n = \vec{\nabla}_{\perp}\ln(n[x(\lambda)]) \quad (\text{A.9})$$

Sostituendo il valore di n dato dall'equazione 1.17 si ottiene

$$\dot{\vec{e}} = -\frac{2}{c^2}\vec{\nabla}_{\perp}\Phi \quad (\text{A.10})$$

L'angolo di deflessione si ottiene integrando $-\dot{\vec{e}}$ lungo tutto il cammino percorso dalla luce. Ciò comporterebbe però la conoscenza del cammino che stiamo in realtà cercando. A questo inconveniente si può ovviare ricordando che lì dove la perturbazione è assente non si ha deflessione e quindi si può integrare su tutto lo spazio, avendo lo stesso risultato. L'angolo sarà ora

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}_{\perp}\Phi dz \quad (\text{A.11})$$

L'espressione risultante è ciò che abbiamo nell'equazione 1.21

Appendice B

Lente a simmetria assiale

In generale l'angolo di deflessione è un vettore bidimensionale, ma nel caso di lenti a simmetria assiali possiamo calcolarlo in una sola dimensione, dato che tutti i raggi luminosi che partono dalla sorgente e vanno all'osservatore giacciono in un piano attraversato dal centro della lente, dalla sorgente e dall'osservatore.

Partiamo dall'equazione 2.2

Scegliamo un sistema di riferimento con origine nel centro della lente e, grazie alla simmetria del problema, possiamo prendere il vettore \vec{r} giacente sull'asse x mentre il vettore \vec{r}' sarà un vettore qualsiasi giacente sulla superficie della lente.

Si avrà, dunque:

$$\vec{r} = (R, 0) \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{r}' = (R'_1, R'_2) = R'(\cos \phi, \sin \phi) \quad (\text{B.2})$$

Con $R, R' > 0$ e dove ϕ è l'angolo fra i vettori \vec{r} e \vec{r}'

$$\vec{r} - \vec{r}' = (R - R' \cos \phi, -R' \sin \phi) \quad (\text{B.3})$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \phi \quad (\text{B.4})$$

L'angolo di deflessione scritto nell'integrale dell'equazione 2.2 ammette due componenti

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{4G}{c^2} \int_0^\infty R' \Sigma(R') dR' \int_0^{2\pi} \frac{R - R' \cos \phi}{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \phi} d\phi \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{4G}{c^2} \int_0^\infty R' \Sigma(R') dR' \int_0^{2\pi} \frac{-R' \sin \phi}{R^2 + R'^2 - 2RR' \cos \phi} d\phi \quad (\text{B.6})$$

A causa della simmetria del problema la seconda componente è nulla, quindi il vettore $\hat{\alpha}$ è parallelo ad \vec{r} .

Risolvendo l'integrale D.5, considerando che il primo integrale si annulla per $R' > R$ e che il secondo integrale restituisce 2π , si ha

$$\hat{\alpha}(R) = \frac{4G}{c^2} \frac{2\pi \int_0^R R' \Sigma(R') dR'}{R} = \frac{4GMR}{Rc^2} \quad (\text{B.7})$$

Bibliografia

- [1] Peacock, J. (1999), *Cosmological Physics* (University of Cambridge)
- [2] Zwicky, F. (1937), *ApJ*, 86, 217
- [3] Rubin, V. & Ford, K. (1970), *ApJ*, 159, 379
- [4] Markevitch, M.; Gonzalez, A. H.; Clowe, D.; Vikhlinin, A.; Forman, W.; Jones, C.; Murray, S.; Tucker, W. (2004) *ApJ*, Volume 606, pp. 819-924
- [5] Bertone, G.; Bozorgnia, N.; Kim, J.S.; et al. (2017, ArXiv e-prints [ArXiv eprint[arXiv]1712.04793]
- [6] Meneghetti, M. (2008) *Introduction to Gravitational Lensing*
- [7] Will, C. M. (1988) *Am. J. Phys.*, 56, 5
- [8] Dyson, F. W.; Eddington, A.S.; Davidson, C. (1920) *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 220, 291
- [9] Shapiro, I. I., 1964, *Phys. Rev. Lett.*, 13, 789
- [10] Hubble, E. (1929) *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- [11] Narayan, R. & Bartelmann, M. (1996) *ArXiv Astrophysics e-prints* [ArXiv eprintastro-ph/9606001]
- [12] Carroll B.W. & D.Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*
- [13] Dressler A., Lynden-Bell D., Burstein D., Davies R.L., Faber S.M., Terlevich R., Wegner G., *Spectroscopy and photometry of elliptical galaxies. I-A new distance estimator. The Astrophysical Journal*,313:4258, 1987.

- [14] Auger M.W., Treu. T., Bolton A.S., Gavazzi R., Koopmans L.V.E., Marshall P.J., Bundy K., Moustakas L.A., The Sloan Lens ACS Survey. IX. colors, lensing and stellar masses of early type. *The Astrophysical Journal*, 705:1099–1115, 2009
- [15] Covone, G., Paolillo, M., Napolitano, N.R. et al., 2009, *ApJ*, 691, 531