

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea Triennale in Fisica

**Dinamica Newtoniana modificata come
alternativa alla Materia Oscura**

RELATORE:
Prof. Salvatore Capozziello

CANDIDATO:
Lorenzo D’Errico
Matricola N85/727

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Indice

Elenco delle figure	ii
Introduzione	1
1 Il problema della massa mancante	3
1.1 Curve di rotazione delle galassie	3
1.2 Il teorema del viriale, la dinamica newtoniana e Keplero	4
1.3 Curve di rotazione delle galassie a spirale	6
2 Le possibili soluzioni del problema	8
2.1 Materia Oscura o Dinamica Modificata?	8
2.2 Il modello della Materia Oscura	8
2.2.1 Problemi legati al modello	9
2.3 Dinamica Newtoniana Modificata	10
2.3.1 Galassie a bassa ed alta luminosità superficiale	14
2.3.2 Relazione di Tully-Fisher Barionica	16
2.3.3 Problemi relativi al modello	18
2.4 La modifica di Yukawa al potenziale	19
Conclusione	22
Bibliografia	24

Elenco delle figure

1.1	Curva di rotazione galassie a spirale	6
1.2	Esempi di curve di rotazione di galassie a spirale	7
2.1	Esempi di curve di rotazione prodotte da MOND	13
2.2	Curve di rotazione di galassie LSB e HSB	15
2.3	Curve di rotazione di galassie LSB	16
2.4	Esempio di fit per la relazione di Tully-Fisher	17
2.5	Potenziale inverso di Yukawa	20
2.6	Esempi curve di rotazione con modifica del potenziale	20

Introduzione

Negli anni '30 dello scorso secolo l'astronomo svizzero Fritz Zwicky condusse degli studi sull'ammasso della Chioma, un aggregato di migliaia di galassie situato a circa 350 milioni di anni luce dalla Terra. Zwicky eseguì misure di due tipi: stimò la massa totale dell'ammasso a partire dalle galassie che poteva vedere e dalla sua luminosità totale; determinò le velocità radiali a partire dalla misura dello spostamento Doppler della luce emessa. Con questi dati fu in grado di calcolare le energie totali cinetica e gravitazionale contenute nell'ammasso. Secondo tali calcoli le singole galassie si muovevano troppo velocemente perché l'ammasso potesse mantenersi compatto: le galassie non sarebbero state viste raggruppate ma in fuga l'una dall'altra.

Per spiegare tale evidenza Zwicky suppose che l'ammasso contenesse della massa invisibile, cioè materia che esercita attrazione gravitazionale ma che non emette luce, non contribuendo, quindi, alla luminosità totale della galassia. Fu coniato il termine "materia oscura" per descrivere tale componente che, sempre secondo tali calcoli, sarebbe dovuta essere circa 500 volte più grande della materia visibile.

Successivamente, con la nascita dell'astronomia ai raggi X, si poté identificare parte di tale "massa mancante" con gas caldi, i quali, tuttavia, non soddisfacevano l'intero contributo: mancava nel bilancio totale una massa di circa 5-6 volte quella visibile.

All'inizio degli anni '70, Vera Rubin e Kent Ford iniziarono a studiare le cosiddette curve di rotazione delle galassie a spirale, ossia l'andamento della velocità di rotazione all'interno di un sistema astronomico in funzione della distanza dal centro del sistema stesso. La prima curva di rotazione studiata fu quella del Sistema Solare: qui la velocità di rotazione intorno al Sole decresce con la radice quadrata della distanza dal Sole. La curva di rotazione prodotta mediante le osservazioni era consistente con la quasi totalità della massa del sistema localizzata nel centro, ovvero il Sole, e con la legge della gravità di Newton.

Rubin si aspettava di ottenere i medesimi risultati anche per le galassie più lontane, ma ciò che osservò fu inatteso: nelle galassie, ben oltre la massa visibile, la velocità di rotazione a grande distanza dal centro della galassia è pressoché costante.

Nell'ambito della meccanica newtoniana un tale risultato può essere spiegato solo se la distribuzione di massa si estende oltre quella della luce stellare visibile, che equivale a dire che la massa nelle regioni esterne della galassia è oscura. Nell'ambito dell'ipotesi della materia oscura questo implica che ogni galassia è immersa in una componente oscura più estesa all'interno della quale tale materia ha una distribuzione ben precisa: la sua densità decresce con il quadrato della distanza. Tuttavia, l'ipotesi che la materia oscura sia composta da particelle che interagiscono solo gravitazionalmente — materia oscura fredda (CDM dall'acronimo inglese) — incontra difficoltà quando si giunge a scale extragalattiche: le numerose simulazioni eseguite sul comportamento di sistemi costituiti da particelle che interagiscono solo gravitazionalmente in un Universo in espansione forniscono velocità di rotazione lentamente decrescenti che sono in netto disaccordo con l'andamento asintotico piatto delle curve di rotazione osservate. Va nondimeno considerato il fatto che, finora, particelle candidate come costituenti della materia oscura non sono ancora state rilevate — oltre che non previste dal Modello Standard.

Nel 1980 il fisico israeliano Mordechai Milgrom, sulla base dei dati sino ad allora raccolti, affrontò il problema da un punto di vista differente: piuttosto che creare una nuova classe di materia era necessario modificare la teoria newtoniana. La modifica era semplice: quando l'accelerazione a cui è soggetto un corpo diventa minore di un valore critico a_0 dell'ordine di 10^{-10} m/s² la forza non è più proporzionale all'accelerazione ($F = ma$), come prescritto dalla seconda legge di Newton, bensì al suo quadrato ($F = ma^2/a_0$). Da qui il nome MOND (dall'inglese "MOdified Newtonian Dynamics").

Esula dagli scopi di questo lavoro la trattazione circa i possibili problemi legati all'ipotesi della CDM. Sarà invece affrontata nel dettaglio la soluzione proposta da Milgrom, esaminandone la fenomenologia, il potere predittivo a grandi scale e le problematiche legate alla sua definizione come teoria fisica completa ed autonoma.

Capitolo 1

Il problema della massa mancante

1.1 Curve di rotazione delle galassie

Le prime evidenze sperimentali legate alla presenza di Materia Oscura nell'Universo si devono all'astronomo F.Zwicky, che negli anni '30 dello scorso secolo analizzò mediante la legge di Hubble la velocità radiale di molte galassie nell'ammasso della Chioma: il redshift dovuto allo spostamento delle galassie presentava notevoli variazioni in funzione dei componenti del cluster; egli stimò la massa totale del sistema sommando il materiale galattico luminoso, accorgendosi che le velocità di fuga dei singoli elementi risultavano essere sempre superiori a quella totale dell'ammasso, fenomeno che avrebbe comportato la dispersione dell'ammasso stesso.

Negli stessi anni, gli astronomi J.Oort e H.Babcock osservarono la dinamica della materia luminosa della Via Lattea e di Andromeda: ciò che osservarono furono delle discrepanze tra i valori di velocità attesi e misurati.

Le osservazioni compiute da Zwicky, Oort e Babcock, su diverse scale, suggeriscono quindi la presenza nell'Universo di materia non visibile.

L'evidenza più chiara di tale teoria risiede nello studio delle curve di rotazione delle galassie a spirale, sviluppatosi negli anni '70 con l'introduzione della radioastronomia¹ il cui impiego è dovuto alla scoperta della riga a 21cm dell'idrogeno neutro²: dall'analisi di tale riga è stato possibile costruire le curve di rotazione ben oltre il limite ottico, ottenendo risultati più precisi.

¹ la radioastronomia è lo studio dei fenomeni celesti attraverso la misura delle caratteristiche onde radio emesse dai processi fisici che avvengono nello spazio

² è una riga spettrale causata da una variazione energetica dell'idrogeno neutro interstellare, facilmente osservabile tramite i radiotelescopi e quindi largamente usata in astronomia per rivelare la distribuzione di idrogeno neutro nelle Galassie e dunque la loro struttura

1.2 Il teorema del viriale, la dinamica newtoniana e Keplero

Il teorema del viriale è una proposizione che lega la media temporale dell'energia cinetica e di quella potenziale di un sistema stabile di N particelle. Esso afferma che, in un sistema di N particelle che si muovono in una regione limitata di spazio la cui energia totale sia \mathbf{T} , vale la relazione:

$$2\langle T \rangle = - \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{r}_k \rangle$$

dove le parentesi indicano la media temporale ed \mathbf{F}_k rappresenta la forza agente sulla k -esima particella in posizione \mathbf{r}_k . Nel caso particolare di un potenziale dato da una funzione omogenea, nello specifico un potenziale gravitazionale, il teorema assume la seguente forma:

$$2\langle T \rangle = -\langle U \rangle \quad (1.1)$$

Si voglia ora applicare il teorema nello studio delle curve di rotazione delle galassie. L'orbita delle singole stelle è data dalla legge di Keplero: in via del tutto qualitativa si consideri una galassia con bulbo galattico sferico e massa M concentrata nel bulbo, tale che quella presente nel disco sia trascurabile.

Sia R il raggio del bulbo, $M(r)$ la sua massa e ρ la sua densità di massa costante.

Si considerino ora

$$U = -G \frac{M(r)m}{r} \quad T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.2)$$

rispettivamente energia potenziale gravitazionale esercitata sulla particella e la sua velocità cinetica. Sostituendo la 1.2 nella 1.1 si ottiene:

$$2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = G \frac{M(r)m}{r} \quad (1.3)$$

Data la conservazione delle masse, eseguendo qualche passaggio algebrico si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (1.4)$$

Si osservi come lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere ponendo l'uguaglianza tra forza centrifuga e gravitazionale per una particella in moto circolare a distanza r :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$$

Per una distribuzione di massa sferica a densità costante ρ , quindi, l'attrazione gravitazionale non dipende dalla massa presente all'esterno della sfera di raggio r , ma solo da quella al suo interno, $M(r)$.

In particolare, è possibile ricavare diversi andamenti a seconda che la particella si trovi in una posizione radiale maggiore o minore di R :

$$v = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} r \propto r & \text{se } r < R \\ \sqrt{\frac{4\pi G\rho R^3}{3}} \frac{1}{\sqrt{r}} \propto \frac{1}{\sqrt{r}} & \text{se } r > R \end{cases} \quad (1.5)$$

In pratica, la curva di rotazione di una galassia dovrebbe avere un andamento crescente linearmente con r fino al limite del bulbo per poi decrescere come $\frac{1}{\sqrt{r}}$.

Nell'ambito del Sistema Solare la curva di rotazione ricavata è consistente con tutta la quasi totalità della massa del sistema localizzata nel centro, ovvero il Sole, e con la legge universale della gravità di Newton. Essa dunque rappresenta la prima indicazione della validità di questa legge sulla scala di distanze del Sistema Solare.

Un'altra importante osservazione da fare, relativamente al medesimo ambito, è la seguente: consideriamo la 1.3 e moltiplichiamo ambo i membri per la quantità r/m , otteniamo:

$$v^2 r = GM \quad (1.6)$$

Sappiamo inoltre che la velocità tangenziale v è legata a quella angolare w dalla relazione $v = wr$ che, sostituita nella 1.6 restituisce:

$$w^2 r^3 = GM$$

Questa relazione è verificata istante per istante, e possiamo dunque estenderla all'intera orbita. In approssimazione di orbita circolare, eventualmente estendibile con il medesimo risultato ad orbite ellittiche, possiamo porre

$$w = \frac{2\pi}{P} \quad (1.7)$$

dove P rappresenta il periodo, ossia il tempo necessario a compiere l'intera orbita. Sostituendo r con a , semiasse dell'orbita (uguale, in questo caso, al raggio della circonferenza), e considerando la 1.7 si ottiene

$$\frac{4\pi^2 a^3}{P^2} = GM$$

Tuttavia, la quantità $4\pi^2/GM$ è una costante, e possiamo quindi porla uguale a C. Da cui:

$$P^2 = Ca^3$$

La relazione appena ricavata si legge: *il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita.*

Si è dimostrato, in pratica, che la terza legge di Keplero non è altro che il teorema del viriale applicato ad un sistema in equilibrio formato da un pianeta soggetto all'attrazione gravitazionale del Sole.

1.3 Curve di rotazione delle galassie a spirale

Le prime misurazioni effettuate da Rubin sul Sistema Solare produssero curve di rotazione che si rivelarono essere consistenti con il modello newtoniano. I risultati positivi spinsero la scienziata statunitense verso scale di distanze superiori a quelle del Sistema Solare, proponendo il medesimo modello nello studio delle curve di rotazione delle galassie a spirale più distanti. Gli andamenti predetti, però, non furono osservati:

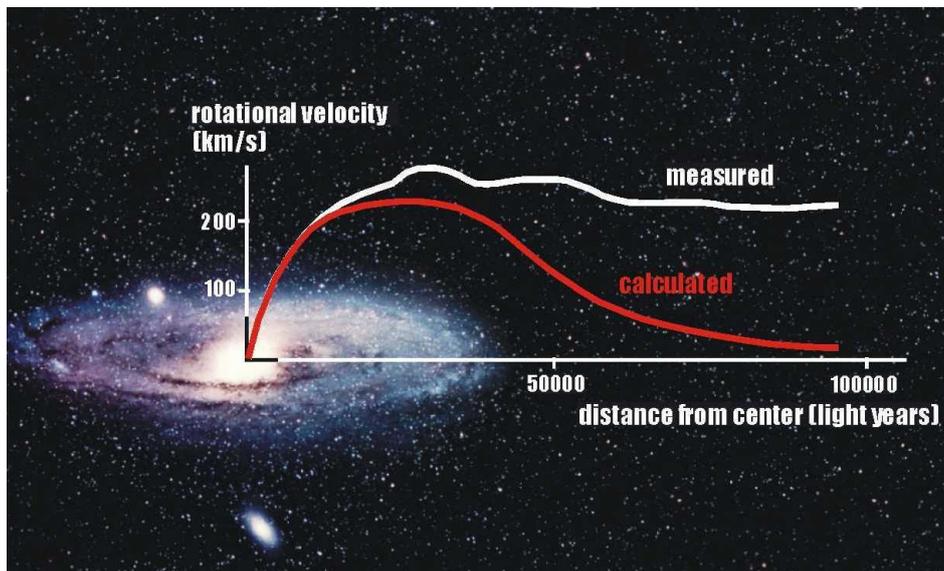


Figura 1.1: Curva di rotazione di una tipica galassia a spirale. Presa da [2].

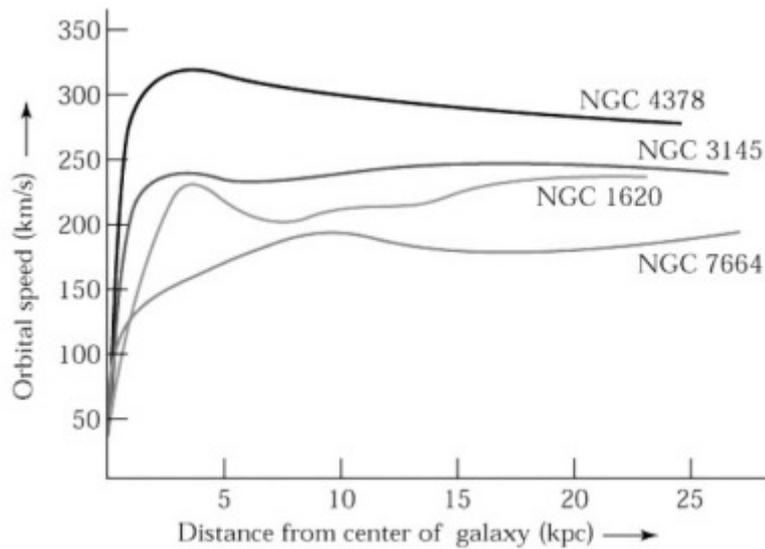


Figura 1.2: Andamento delle curve di rotazione di alcune galassie a disco. Si nota bene il disaccordo con le previsioni kepleriane. Presa da [4].

Se nel limite ottico l'andamento osservato coincideva con quello previsto, lo stesso non accadeva per le regioni individuate dallo studio della riga di 21cm dell'idrogeno, in cui era presente un trend costante. Nella 1.1 è possibile infatti osservare in rosso la curva di rotazione predetta dal modello newtoniano in cui la velocità decresce con la radice del raggio (vedi 1.4) e in bianco quella misurata. Bisogna osservare che, come è possibile vedere dalla figura, la curva si estende ben oltre la regione delle stelle più esterne: qui, come accennato prima, la velocità di rotazione è quella delle nubi di idrogeno ionizzato che ruotano intorno al centro della galassia. Queste nubi emettono radiazione con una certa lunghezza d'onda — la cosiddetta linea $H\alpha$ con $\lambda = 21$ cm, facile da rilevare. Dallo spostamento Doppler di questa linea Rubin poté determinare la velocità orbitale delle nubi periferiche.

Una discrepanza così elevata tra le due velocità venne spiegata con la presenza di una grande quantità di massa al di fuori del bulbo, nel cosiddetto *alone*, che porta ad effetti gravitazionali non spiegabili altrimenti classicamente.

Capitolo 2

Le possibili soluzioni del problema

2.1 Materia Oscura o Dinamica Modificata?

Il "problema della massa mancante" apre di fatto un dibattito destinato a perdurare, e tutt'oggi ancora non risolto, sulle possibili soluzioni al problema:

- la prima soluzione prevede l'introduzione di un nuovo paradigma in cui la materia oscura non-barionica gioca un ruolo centrale;
- la seconda, proposta da Milgrom, propone invece l'introduzione di una modifica alle teorie di Newton.

2.2 Il modello della Materia Oscura

Le evidenze sperimentali susseguitesesi nel corso dello studio dell'Universo hanno portato alla formulazione di una teoria che vede come centrale il ruolo di massa non rilevabile, responsabile di diversi effetti gravitazionali: la particolare forma delle curve di rotazione, la stabilità di queste, la composizione di cluster di galassie, etc. Sono stati diversi i modelli che si sono susseguiti nel tentativo di dare una spiegazione ai fenomeni osservati: modello di sfera isoterma, modello NFW, CDM e Λ CDM. Tuttavia, tali modelli non verranno analizzati in questo lavoro, ma verrà data una rapida occhiata all'approccio generale del metodo.

Riprendiamo la 1.4 già osservata in precedenza: per giustificare l'andamento delle curve di rotazione, la materia presente negli aloni esterni deve assumere una distribuzione di massa proporzionale alla distanza, e cioè $M(r) \propto r$, per spiegare una velocità costante oltre il limite ottico.

Affinché ciò avvenga, compatibilmente con i dati osservati, è necessario porre una condizione sulle curve di rotazione: la densità di massa dell'alone ρ deve avere un andamento del tipo:

$$\rho \propto \frac{1}{r^2}$$

così che sia verificato $M(r) \propto r$.

Esula dai nostri scopi analizzare le problematiche legate ad un simile modello, ma si osservi che, ad esempio, dovendo valere la relazione $M(r) \propto r$, la massa dell'alone stesso dovrebbe crescere costantemente fino ad un valore infinito: è quindi necessario che ad una certa distanza, molto maggiore del limite ottico, l'alone venga troncato, e con esso la sua massa.

Altri problemi legati al modello sono ad esempio il "cusp-core problem", o il "too big to fail problem".

2.2.1 Problemi legati al modello

Ci sono due problemi fenomenologici legati al modello che vanno tuttavia considerati:

- la **cospirazione disco-alone** indica la particolare combinazione di materia luminosa e oscura all'interno di tutte le galassie osservate: nelle curve di rotazione, allontanandosi dal disco galattico, la prima decresce mentre la seconda cresce in modo da dare sempre curve di rotazione piatte. Nel contesto della meccanica newtoniana non vi è spiegazione di tale particolare combinazione;
- all'interno di una stessa galassia, materia luminosa e oscura sono collegate dalla **relazione di Tully-Fisher**: negli '70 i due scienziati compirono numerose osservazioni sulle velocità di rotazione caratteristiche delle galassie v e sulla luminosità intrinseca L delle stesse. Quest'ultima grandezza rappresenta la quantità di energia emessa dalla stella nell'unità di tempo e può essere misurata a partire dalla luminosità apparente se è nota la distanza della galassia. I due scienziati ricavarono una relazione ben precisa tra le due quantità:

$$L \propto v^\alpha \tag{2.1}$$

Mentre la luminosità del disco è data dalla materia luminosa dello stesso, l'ampiezza della curva di rotazione è legata alla quantità di materia oscura presente.

Ancora una volta si osserva una particolare combinazione tra le due quantità. Durante gli anni '90 lo studio delle galassie LSB¹ portò alla

¹dall'inglese, Low Surface Brightness, galassie a bassa luminosità superficiale

determinazione di $\alpha = 4$, mentre utilizzando il modello di Materia Oscura si ottiene $\alpha = 3$.

2.3 Dinamica Newtoniana Modificata

Durante gli anni '80 si iniziò a pensare ad una possibile spiegazione dei fenomeni galattici osservati modificando, però, le leggi della fisica senza ipotizzare la presenza di una notevole quantità di materia non visibile nell'Universo. La teoria MOND fu sviluppata dal fisico israeliano M. Milgrom, che nel 1983 pubblicò tre articoli in cui proponeva una modifica della dinamica newtoniana basata su una scala di accelerazione. Le evidenze mostrate dalle curve di rotazione, l'andamento asintoticamente piatto a grandi distanze spinsero Milgrom ad ipotizzare che i parametri dei sistemi galattici, essendo più grandi di svariati ordini di grandezza rispetto a quelli degli oggetti testati in laboratorio, dovessero essere descritti da una modifica della legge di inerzia che rispettasse le seguenti quattro ipotesi:

1. la forza di inerzia è proporzionale alla massa;
2. l'accelerazione di un oggetto dipende dalla forza nella posizione in cui si trova, dove la forza è dedotta a partire dalla distribuzione delle sorgenti massive;
3. la forza d'inerzia è diretta come l'accelerazione;
4. nel limite delle piccole accelerazioni, l'inerzia diventa quadratica nell'accelerazione (spiegando così la piattezza asintotica delle curve di rotazione).

Milgrom introdusse allora una costante a_0 con le dimensioni di un'accelerazione e propose una riformulazione della seconda legge di Newton:

$$\mathbf{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\mathbf{a} \quad (2.2)$$

dove m è la massa gravitazionale (uguale a quella inerziale), \mathbf{F} è la forza agente sul corpo con accelerazione \mathbf{a} e $\mu(x)$ una **funzione di interpolazione**:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \gg 1 \\ x & \text{se } x \ll 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Nel primo dei due casi, e cioè per $a \gg a_0$, la 2.3 restituisce la seconda equazione di Newton, mentre il secondo caso, $a \ll a_0$, definisce la vera e propria modifica della dinamica.

Furono diverse le ipotesi sulla forma analitica della funzione $\mu(x)$ avanzate dai vari scienziati: ad esempio, nel modello di Sanders, la modifica non veniva effettuata sulla scala di accelerazione ma su quella di lunghezza, pertanto la modifica interveniva sul potenziale gravitazionale introducendo un termine repulsivo alla Yukawa nella forma

$$\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$$

che avrebbe portato ad una velocità di rotazione piatta entro qualche intervallo di r . Tutte le modifiche inerenti a scale di lunghezza avevano un aspetto in comune: uguagliare accelerazione centrifuga e gravitazionale nel limite $r > r_0$ porta ad una relazione per la velocità del tipo

$$v^2 = \frac{GM}{r_0}.$$

Milgrom si rese conto che questo risultato sarebbe stato incompatibile con evidenze sperimentali come la relazione di Tully-Fisher o le osservazioni compiute sulle galassie LSB (per cui galassie più grandi avrebbero dovuto esibire discrepanze maggiori e quelle più piccole discrepanze minori, contrariamente ai dati sperimentali).

Una modifica della legge di gravità relativa all'accelerazione, invece, forniva risultati vicini a quelli ricavati dalle osservazioni non spiegati dalla teoria di Materia Oscura.

Vediamo, quindi, nell'ottica della MOND come sono relazionate l'accelerazione \mathbf{a} di una particella di prova immersa in un campo gravitazionale e quella newtoniana \mathbf{g}_n :

$$\mathbf{g}_n = m\mathbf{a}\mu(a/a_0) \quad (2.4)$$

Si supponga ora di trovarsi in un regime MOND, quindi nel caso $a \ll a_0$, e che la particella di prova compia un moto circolare, con $a = v^2/r$; se il campo gravitazionale è dato da

$$g_n = G\frac{M}{r^2}$$

sostituendo nella 2.4 si ottiene in modulo:

$$\frac{a^2}{a_0} = g_n \quad \rightarrow \quad \frac{v^4}{r^2 \cdot a_0} = G\frac{M}{r^2} \quad (2.5)$$

da cui

$$v^4 = MGa_0 = \text{cost} \quad (2.6)$$

che rappresenta la velocità a grandi distanze dal centro galattico.

Affinché sia soddisfatta l'ultima ipotesi del modello bisogna che la velocità v non solo sia costante ma che produca curve di rotazione asintoticamente

piatte. In seguito a considerazioni fatte sulle galassie a spirale è stato possibile giungere ad una famiglia di funzioni in grado di rispettare tali condizioni, e con il confronto con le osservazioni sperimentali si è riusciti a fornire una prima stima della costante a_0 : è possibile ad esempio scegliere

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Considerazioni sull'andamento della curva portano poi ad un valore di circa $a_0 \sim 10^{-10} \text{ m/s}^2$.

Milgrom quindi propose una modifica della dinamica newtoniana per accelerazioni di circa undici ordini di grandezza inferiori rispetto all'accelerazione di gravità terrestre. Attualmente il valore di a_0 risulta essere

$$a_0 \simeq 1.2 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2.$$

La 2.6 prevede curve di rotazione asintoticamente piatte e una relazione tra massa e luminosità del tipo $M \propto v^4$ — relazione di Tully-Fisher barionica (BTFR)². Tuttavia, tali aspetti rappresentano le basi su cui è stata costruita la MOND e non è perciò propriamente corretto parlare di "predizioni" della teoria. Resta comunque indiscutibile l'efficacia del modello nella produzione di curve di rotazione asintoticamente piatte.

In generale, la determinazione di una curva di rotazione di una galassia a spirale prevede i seguenti step:

- si osserva la distribuzione di materia visibile;
- si calcola l'accelerazione di velocità radiale g_n tramite la formula di Poisson classica valida in regime newtoniano

$$g_n = -\frac{\partial\phi}{\partial R} \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (2.7)$$

- si ricava l'accelerazione effettiva predetta da MOND secondo la relazione 2.4 con a_0 fissato e aggiustando il valore del rapporto massa-luce \mathbf{T} finché non si ottiene una buona interpolazione dei dati.

Tutte le curve di rotazione ricavate a partire dalla teoria MOND hanno sempre fornito ottimi risultati. Inoltre, a partire dai fit, è possibile ricavare il valore di \mathbf{T} caratteristico e confrontarlo con quello determinato a partire dai modelli di formazione delle popolazioni stellari (sviluppatasi separatamente e precedentemente rispetto alla teoria MOND). Nuovamente, i due valori di \mathbf{T} ricavati sono compatibili. Osserviamo alcuni esempi:

²rappresenta una generalizzazione delle relazione di Tully-Fisher considerando la massa barionica totale M della galassia

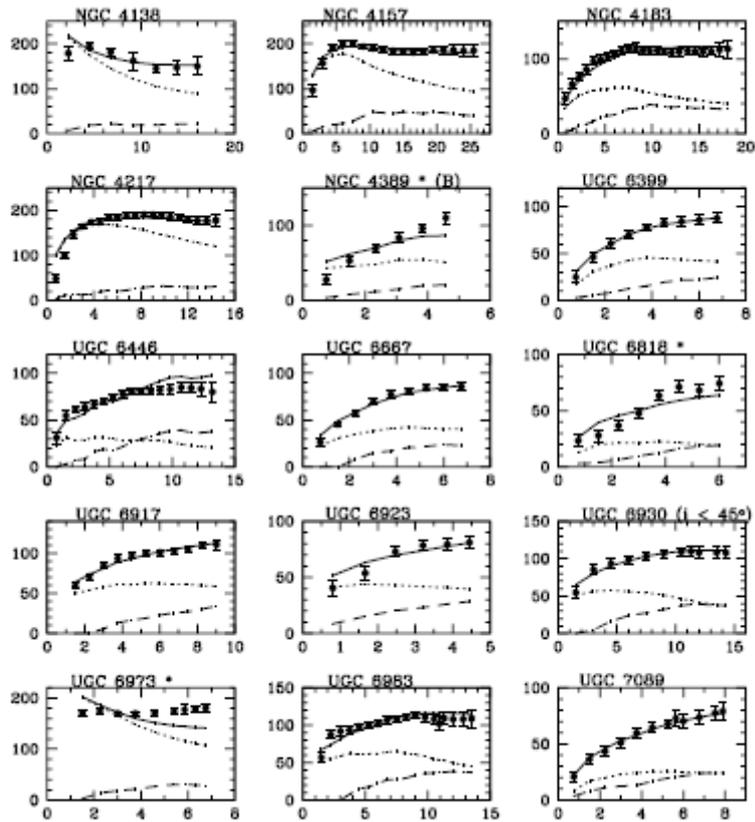


Figura 2.1: Interpolazione di curve di rotazione secondo il modello MOND delle galassie dell'Orsa Maggiore. La distanza (asse delle ascisse) è espressa in kpc e la velocità di rotazione (asse ordinate) in km/s. Le linee puntate e tratteggiate sono le curve di rotazione newtoniane delle componenti visibili e gassose del disco, la linea continua è invece la curva di rotazione MOND. L'unico parametro libero è il rapporto T delle componenti visibili. Presa da [1].

2.3.1 Galassie a bassa ed alta luminosità superficiale

Ci sono altre dirette conseguenze del modello espone da Milgrom nei suoi articoli che possono essere considerate a tutti gli effetti come "predizioni" in quanto non facenti parte delle basi teoriche della MOND.

Esaminiamo nel dettaglio quelle legate alla luminosità superficiale delle galassie: esiste un valore critico di tale parametro (**Legge di Freeman**) pari a

$$\Sigma_m \approx a_0/G \simeq 1.8 \text{ kg/m}^2$$

In funzione del valore di Σ di un certo sistema rispetto al valore critico Σ_m è possibile stabilire il comportamento dello stesso:

- $\Sigma > \Sigma_m$. Ciò indica un'accelerazione interna superiore ad a_0 e quindi un regime vicino a quello newtoniano. Le discrepanze tra massa visibile e quella predetta dal modello newtoniano dovrebbero essere minime nei pressi del disco ottico. Questo è il caso delle galassie HSB³;
- $\Sigma < \Sigma_m$. Qui, invece, vi è un valore inferiore rispetto ad a_0 che indica il regime MOND. La discrepanza dovrebbe essere maggiormente visibile rispetto al regime newtoniano. Questo è il caso delle galassie LSB

E' possibile visualizzare queste differenze graficamente:

³dall'inglese, High Surface Brightness, galassie ad alta luminosità superficiale

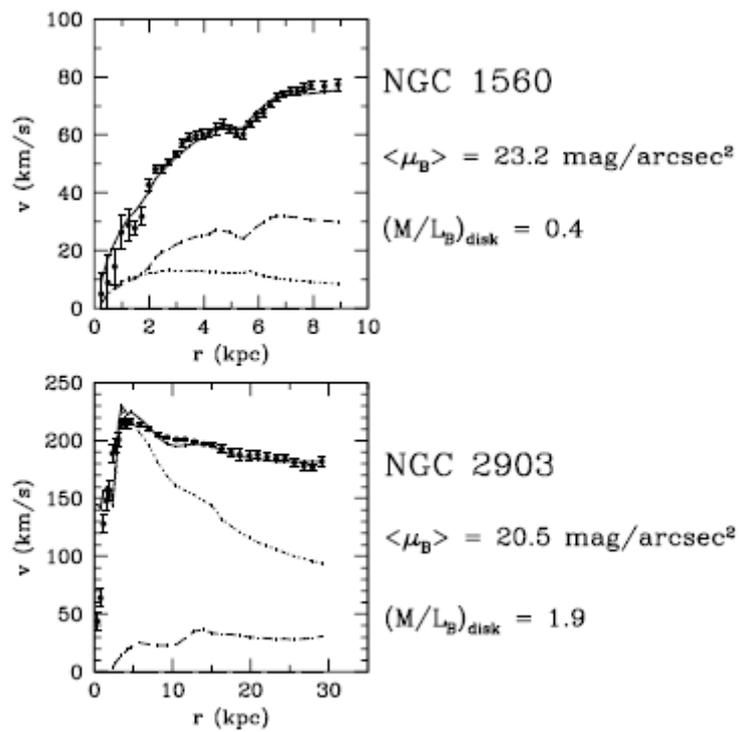


Figura 2.2: I punti mostrano le curve di rotazione di una galassia LSB (NGC 1560) e di una galassia HSB (NGC 2903). Si può osservare per le prime un trend crescente fino al valore costante asintotico, mentre per le seconde un comportamento simile a quello newtoniano nell'intorno del raggio ottico per poi decrescere asintoticamente verso il valore costante. Presa da [1].

Prima ancora della scoperta delle galassie LSB, Milgrom predisse che ci sarebbe dovuta essere una considerevole discrepanza tra massa osservabile e dinamica all'interno del disco luminoso di sistemi simili — qualora esistessero. Tale predizione è stata confermata nel 1998, dai lavori di McGaugh e De Blok.

Si riportano dei grafici di curve di rotazione per galassie LSB:

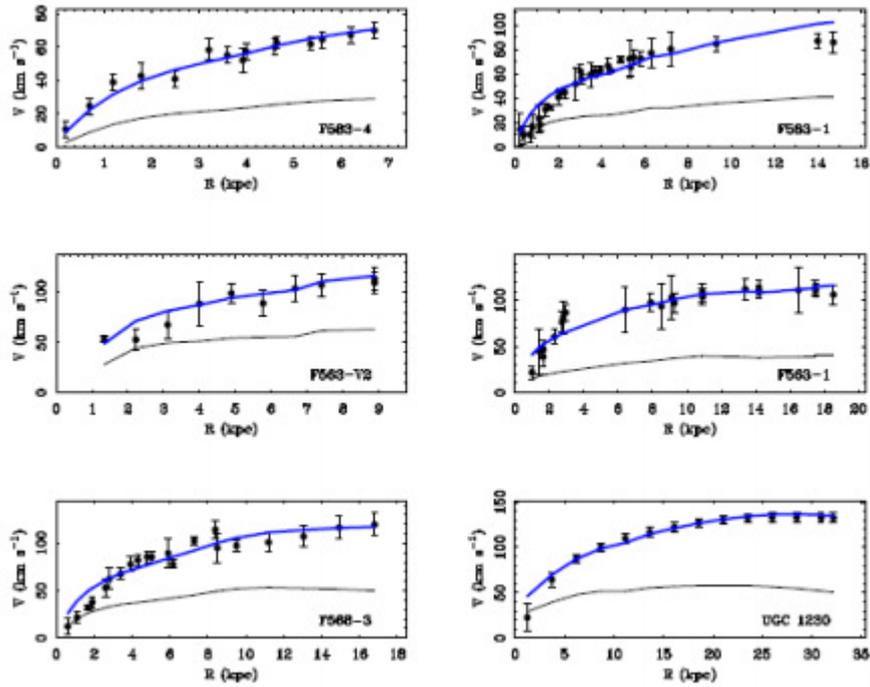


Figura 2.3: Interpolazione di curve di rotazione secondo il modello MOND per galassie LSB. Presa da [4].

Approfondimenti reperibili presso [7].

Una trattazione differente viene invece affrontata in [8].

2.3.2 Relazione di Tully-Fisher Barionica

Si è già discussa a pag.12 l'importanza e le problematiche legate alla relazione di Tully-Fisher barionica. Tale relazione dovrebbe essere la stessa per differenti classi di galassie, indipendentemente dalla scala di lunghezze e luminosità superficiale, con pendenza logaritmica pari a 4.

Per esteso, infatti, è possibile riscrivere la relazione come:

$$\log M = \alpha \log v - \log \beta \quad (2.8)$$

dove M indica la massa barionica presente, v la velocità asintotica di rotazione e α e β sono dei parametri del fit; le evidenze sperimentali forniscono un valore di $\alpha = 4$ con ottima precisione, mentre il modello di Materia Oscura non è in grado di arrivare oltre il valore $\alpha = 3$.

Nel caso della teoria MOND, la relazione di Tully-Fisher barionica appare come naturale conseguenza della 2.6, infatti, applicando la funzione logaritmo ad entrambi i membri si ottiene

$$\log M = 4 \log v - \log(Ga_0). \quad (2.9)$$

Non solo il valore di α è predetto dalla teoria, ma il valore dell'intercetta $\beta = Ga_0$ è consistente con i dati sperimentali.

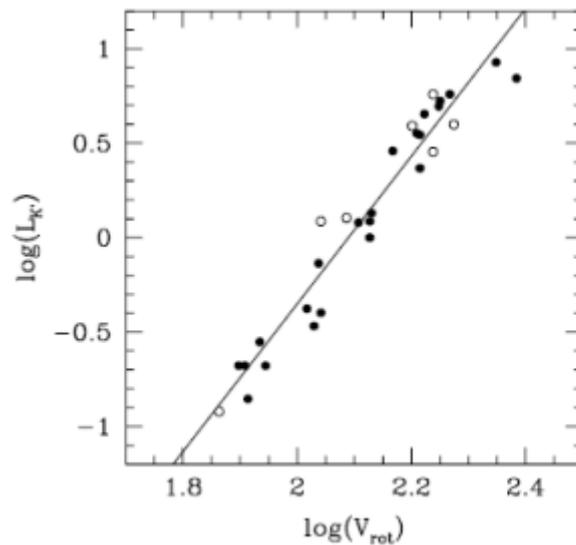


Figura 2.4: La relazione di Tully-Fisher delle spirali dell'Orsa Maggiore vicina all'infrarosso. La velocità di rotazione è asintoticamente costante. I punti non inerenti sono galassie con disturbi della cinematica. La linea di interpolazione ha un ottimo accordo con i dati e presenta una pendenza di 3.9 ± 0.2 come previsto. Presa da [5].

Si osservi come in generale gran parte delle predizioni della MOND siano state formulate ben prima che l'avanzamento tecnologico potesse verificarle, come con la scoperta delle galassie LSB, ad esempio. Inoltre, la teoria è in grado di dare spiegazione ad alcuni di quegli aspetti problematici che il modello di Materia Oscura non è in grado di risolvere.

2.3.3 Problemi relativi al modello

La teoria MOND pur spiegando con ottimo accordo i fenomeni a livello galattico, non è in grado di spiegare in modo ugualmente esatto la dinamica dei corpi presenti nei cluster di galassie. Occorrerebbe considerare un considerevole quantitativo di materia oscura per poterlo fare, compromesso inaccettabile per la teoria stessa.

Con l'avvento della radioastronomia, le rilevazioni consentirono di trovare all'interno dei cluster il quantitativo di materia barionica in forma di gas caldo, quasi nella sua totalità: tali sistemi sono allora predominati da materia barionica che comunque, però, non è in grado da sola di spiegare la dinamica presente. Va tuttavia considerata l'ipotesi che tale materia mancante sia costituita dalle particelle presenti nel Modello Standard: neutrini pesanti sterili con massa di circa 2 GeV^3 potrebbero essere dei validi candidati.

Un'altra evidenza in contraddizione con la teoria MOND riguarda il lensing gravitazionale: tale tecnica indaga la distribuzione di massa di un cluster di galassie mediante l'analisi dei raggi X emessi dai gas nel tentativo di raggiungere l'equilibrio idrostatico. Un esempio degno di nota è quello dell'*ammasso del Proiettile*, formatosi a partire dalla collisione di due cluster a velocità molto elevata. Nella collisione, il gas caldo dissipato emettente raggi X, è stato separato dalle galassie e dalla presunta materia oscura, trovandosi in due luoghi ben definiti e distanti dello spazio. Studiando l'effetto di lente gravitazionale causato da questo ammasso è possibile osservare che la luce proveniente dalle galassie è deflessa attorno a due regioni che non coincidono con quelle in cui è presente il gas. Il modello di Materia Oscura prevede che proprio in tali regioni si trovi la materia oscura separata inizialmente, riuscendo perfettamente a spiegare l'effetto osservato. Tale evidenza è in completa contraddizione rispetto alle teorie MOND, tanto che l'ammasso del Proiettile viene considerato una prova dell'erroneità della teoria stessa.

Bisogna inoltre considerare un ulteriore requisito fenomenologico della MOND: *l'effetto di campo esterno*. Milgrom evidenziò nei suoi articoli che cluster aperti nelle galassie non mostravano evidenze di discrepanza di massa sebbene l'accelerazione interna fosse inferiore ad a_0 . Fu quindi necessario postulare che l'accelerazione esterna del campo della galassia dovesse avere effetti sulla dinamica interna dell'ammasso e che, in generale, la dinamica di ogni sottosistema fosse influenzata dal campo esterno in cui è posto il sistema. Tale supposizione implica che il modello su cui è basata la MOND non rispetta il principio di equivalenza di Einstein nella forma forte, il quale afferma che in un intorno di un punto dello spazio-tempo è possibile trovare un sistema di riferimento localmente inerziale in cui gli effetti della gravità diventano irrilevanti ed è possibile applicare le leggi della Relatività Speciale.

Vanno infine considerati i problemi relativi alla non conservazione del principio di equivalenza in forma debole per cui è necessario generalizzare la MOND attraverso la teoria AQUAL (*A QUAdratic Lagrangian*), e al-

la sua formulazione non relativistica la cui estensione al caso più generale (relativistico) viene affrontata nella teoria TeVeS (*TEnsor-VEctor-Scalar gravity*).

2.4 La modifica di Yukawa al potenziale

In questo paragrafo verrà analizzato un differente approccio alla soluzione del problema della massa mancante che risulterà, sotto particolari ipotesi, riconducibile alle già trattate teorie MOND.

Si assuma l'esistenza di un nuovo tipo di interazione fondamentale, originato dalla materia barionica e simile alla gravità Newtoniana ma che agisca diversamente a seconda della scala di lunghezze considerata, così come l'approccio di Yukawa nello studio dell'interazione forte:

- nullo in prossimità del Sistema Solare
- leggermente attrattivo per range di distanze interstellari
- molto attrattivo per range di distanze comparabili con gli ammassi di galassie
- repulsivo per scale cosmiche.

Il potenziale assume la seguente forma:

$$U(r) \equiv U_0(M)(r - r_0)e^{-\alpha/r} \quad (2.10)$$

dove $U_0(M)$ è la magnitudine che produce il campo (in unità di N/kg), α è una costante di accoppiamento dell'ordine di $2.5 h^{-1} \text{Mpc}^4$ e r_0 è dell'ordine di $50 h^{-1} \text{Mpc}$ (la distanza media tra gli ammassi di galassie).

Definito il parametro $x \equiv r/r_0$ è possibile osservare l'andamento di U/U_0 in funzione di x :

⁴unità di misura spesso utilizzata per le distanze galattiche, dove h è un parametro che varia tra $0.5 < h < 0.75$ per riflettere l'incertezza sul valore della costante di Hubble H per la velocità di espansione dell'Universo

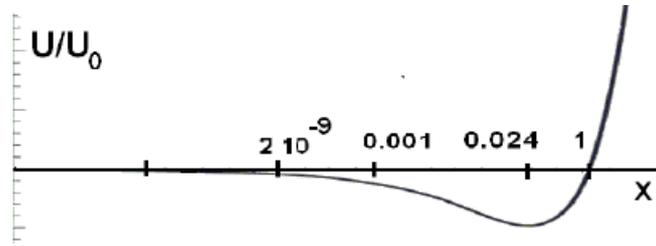


Figura 2.5: Andamento del potenziale inverso di Yukawa in funzione del parametro adimensionale x . Presa da [3].

Si assume quindi che ogni particella con una massa a riposo non nulla è soggetta alla forza gravitazionale Newtoniana secondo le leggi di Gravitazione Universale e ad una forza aggiuntiva che varia con la distanza e che prende il nome di **Potenziale inverso di Yukawa**. Perciò la forza gravitazionale è bimodale (si parla di bi-gravità): varia con l'inverso della radice del raggio per $r \ll 1$ kpc e si comporta in modo molto differente quando $r \sim$ kpc. Bisogna in ogni caso ricordare che tale potenziale va aggiunto a quello usuale Newtoniano.

Si può ottenere, svolgendo uno sviluppo in serie di Taylor della 2.10 troncato al primo ordine per $r \ll r_0$ e sommandolo nella prima delle 1.2, un'espressione per la velocità di rotazione del tipo:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}(1 + \alpha r_0)} \quad (2.11)$$

che giustifica quindi l'andamento asintoticamente piatto della velocità delle curve di rotazione delle galassie a spirale per distanze superiori a quelle del disco ottico: si sono quindi ritrovate le considerazioni della MOND di Milgrom. Alcuni esempi di curve di rotazione simulate sovrapposte a quelle teoriche suggerite dal modello sono visibili nelle seguenti immagini prese da [6]:

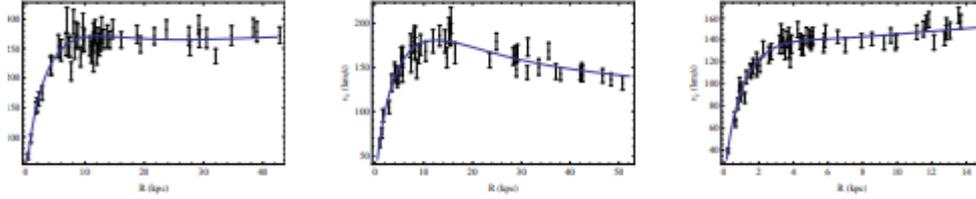


Figura 2.6: Esempi di curve di rotazione simulate sovrapposte a quelle teoriche fornite dal modello. Presa da [6].

Si può verificare che entro scale di distanza dell'ordine del Sistema Solare tale contributo è praticamente nullo, debolmente attrattivo per distanze dell'ordine del kiloparsec, fortemente attrattiva per distanze dell'ordine del megaparsec e repulsiva a scale cosmologiche. E' possibile definire la forma di tale contributo:

$$F_{YI}(r) \equiv -\frac{U_0(M)}{r^2} e^{-\alpha/r} (r^2 + \alpha(r - r_0)) \quad (2.12)$$

Anche qui, con lo stesso procedimento, è possibile ricavare il contributo della forza gravitazionale previsto dalla MOND:

$$F_{YI}(r \ll r_0) \approx \left(\frac{U_0(M)r_0}{2} \right) r^{-1} \quad (2.13)$$

Conclusione

In questo lavoro si sono esaminati i risultati fenomenologici e predittivi del modello MOND — le curve di rotazione piatte, la legge di Tully-Fisher, quella di Freeman, etc. Tale modello prevede una modifica delle leggi di gravitazione Newtoniane escludendo di fatto l'ipotesi di Materia Oscura, anche se, nell'ambito di alcuni dati sperimentali riguardanti i cluster di galassie, si è potuto osservare un distacco dalla teoria che prevederebbe l'introduzione di materia non visibile, in contraddizione con la teoria stessa.

Va inoltre ricordato che, nonostante la teoria sia stata costruita ad hoc per riprodurre i dati osservati, il potere predittivo del modello nei confronti dei dati sperimentali è indiscutibile, e che, inoltre, sono diversi gli aspetti non built-in che la teoria riesce comunque a riprodurre.

Sono stati infine osservati alcuni problemi concettuali del modello, come l'assenza di una teoria fisica sulla quale poggiarsi e di una versione relativistica sperimentalmente verificabile (sebbene la TeVeS abbia fatto grandi passi verso questo obiettivo).

Il problema dunque rimane aperto: sia che si tratti del modello di Materia Oscura, che di quello MOND o di un loro improbabile compromesso, manca un'effettiva evidenza sperimentale che determini la loro validità.

Bibliografia

- [1] Robert H.Sanders & Stacy S.McGaugh, *Modified Newtonian Dynamics as an alternative to Dark Matter*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Volume 40.
In rete all'indirizzo: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0204521>
- [2] Danilo Babusci & Fabio Bossi, *Il problema della materia oscura*.
In rete all'indirizzo: <http://w3.lnf.infn.it/problema-della-materia-oscura/>
- [3] Nelson Falcòn, *MOND with Einstein's cosmological term as alternative to Dark Matter*.
In rete all'indirizzo: <https://www.researchgate.net/publication/253589197/download>
- [4] Benedetta Spina, *Alternative cosmologiche alla Materia Oscura*.
In rete all'indirizzo: http://tesi.cab.unipd.it/56972/1/Tesi_L_Spina_Benedetta.pdf
- [5] Famaey B. & McGaugh Stacy S., *Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions*. In rete all'indirizzo: <https://arxiv.org/abs/1112.3960>
- [6] S.Capozziello & V.F.Cardone, *Systematic biases on galaxy haloes parameters from Yukawa-like gravitational potentials*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 414, Issue 2.
In rete all'indirizzo: <https://arxiv.org/abs/1102.0916>
- [7] S.Capozziello, V.F.Cardone, A.Troisi, *Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of R^n gravity: no need for dark matter?*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 375, Issue 4.
In rete all'indirizzo: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0603522>
- [8] S.Capozziello, P.Jovanovic, V. Borka Jovanovic, D. Borka, *Addressing the missing matter problem in galaxies through a new fundamental gravitational radius*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Volume 2017. In rete all'indirizzo: <https://arxiv.org/abs/1702.03430>