Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea triennale in Fisica

Dagli operatori di Weyl alla quantizzazione stretta attraverso l’esempio del toro non commutativo

Relatore:
Prof. Francesco D’Andrea

Candidato:
Flavio Guadagni
Matricola N85000934

A.A. 2017/2018

Prefazione

Nella loro formulazione, la meccanica classica e la meccanica quantistica fanno utilizzo di strutture matematiche molto differenti. Per quanto riguarda la meccanica classica, le osservabili, ovvero le grandezze fisiche che possono essere misurate, sono rappresentate matematicamente da funzioni reali su una varietà. Al contrario invece, in meccanica quantistica, gli oggetti matematici che rappresentano le osservabili sono operatori autoaggiunti che agiscono su uno spazio di Hilbert. Una prima importante differenza che notiamo tra le osservabili classiche e quantistiche è la seguente: le osservabili classiche, cioè le funzioni, hanno un prodotto commutativo; come è noto, invece, in generale gli operatori lineari su spazi di Hilbert non commutano. In questa tesi vogliamo discutere il seguente problema: esiste una corrispondenza ben definita che è in grado di associare univocamente ad ogni osservabile classica una quantistica e viceversa? Che proprietà ci aspettiamo che tale applicazione rispetti?

Dirac, in [6], propose la seguente definizione: ad ogni osservabile classica f, funzione che per semplicità assumiamo essere infinitamente differenziabile, deve corrispondere un operatore $\hat{f}$ tale che:

1) La mappa $f \mapsto \hat{f}$ è lineare.
2) Se f è una funzione costante, il corrispondente operatore $\hat{f}$ è l'operatore di moltiplicazione per tale costante.
3) Se la parentesi di Poisson di due funzioni f_1 e f_2 vale $\{f_1, f_2\} = f_3$, allora $\hat{f}_1\hat{f}_2 - \hat{f}_2\hat{f}_1 = i\hbar\hat{f}_3$.

Un'applicazione di questo tipo purtroppo non esiste: questo è il contenuto di un celebre teorema "no go", la cui dimostrazione è dovuta a Groenewold e Van Hove in [8] e [17]. Resta allora aperto il problema della quantizzazione: in questa tesi, in particolare, vogliamo illustrare la "quantizzazione stretta", proposta da Rieffel, e dare alcuni esempi su come possano essere quantizzate particolari algebre di funzioni.

La dimostrazione del teorema "no-go" è riportata nel primo capitolo; nel secondo capitolo definiremo una quantizzazione ad hoc per le funzioni sul toro bidimensionale, e i risultati che otterremo ci suggeriranno che la condizione 3) di Dirac va in un certo senso "indebolita". Nel terzo capitolo, invece, illustreremo la "quantizzazione stretta" di Rieffel. Infine, nel quarto capitolo, illustreremo alcuni esempi su come possa essere costruita una quantizzazione stretta su determinate algebre di funzioni ed in particolare ritorneremo sull'esempio delle funzioni sul toro visto però alla luce della definizione di quantizzazione di Rieffel.

Indice

Capitolo 1

Il problema della quantizzazione

1.1 Richiami di dinamica Hamiltoniana

Iniziamo riassumendo alcuni concetti di meccanica Hamiltoniana in una dimensione per poter quindi discutere alcune proprietà delle osservabili classiche. Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove sulla retta reale $\mathbb{R}$, e supponiamo che su tale punto agisca una forza conservativa e che l'energia potenziale del punto materiale sia $V(q)$. Lo stato del sistema ad un determinato istante è rappresentato da un punto di $\mathbb{R}^2$ dove i due assi, che indicheremo con q e p, rappresentano rispettivamente la posizione del punto materiale sulla retta e il momento cinetico coniugato alla coordinata q. Le equazioni che regolano l'evoluzione temporale delle osservabili q e p possono essere messe in una forma particolarmente conveniente se si introduce la *funzione Hamiltoniana* $H(q,p)$ così definita:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Tali equazioni dette *equazioni di Hamilton*, sono le seguenti:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Indichiamo con il simbolo $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'insieme delle funzioni infinitamente differenziabili a valori complessi su $\mathbb{R}^2$ (se non specificato altrimenti, ci riferiremo sempre a funzioni a valori complessi). Matematicamente, le funzioni reali appartenenti a $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, sono le funzioni che interpretiamo come grandezze fisiche osservabili, anche se nel seguito con il termine "osservabili" indicheremo tutte le funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Introduciamo le *parentesi di Poisson*, che indicheremo con le parentesi graffe e per funzioni $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sono così definite:

$$\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \times C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

Notiamo che $\{f, g\} = -\{g, f\}$ e che $\{q, p\} = 1$. Le parentesi di Poisson regolano la dinamica di una qualsiasi osservabile classica. Infatti, è possibile mostrare che l'evoluzione temporale di una qualsiasi osservabile classica $A \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ è governata dall'equazione:

$$\frac{dA}{dt} = \{H, A\}$$

dove la derivata rispetto al tempo della funzione $A(q, p)$ è intesa lungo la soluzione delle equazioni di Hamilton $q(t)$ e $p(t)$.
Prima di procedere, diamo le definizioni di *algebra su un campo* e di *sottoalgebra*, che ci saranno utili in seguito.

Definizione 1.1. *Un'algebra A su un campo K è uno spazio vettoriale A su un campo K dotato di un'operazione interna $\cdot : A \times A \to A$ (che chiameremo moltiplicazione) tale che, per ogni $u, v, w \in A$ e $\alpha, \beta \in K$ valgono le seguenti proprietà:*

1) $(\alpha u + \beta v)w = \alpha(uw) + \beta(vw)$

2) $u(\alpha v + \beta w) = \alpha(uv) + \beta(uw)$

L'algebra è detta commutativa, se, per ogni $v, u \in A$ vale:

$$vu = uv$$

L'algebra è detta con unità se esiste un elemento $1_A \in A$ tale che, per ogni $v \in A$ valga:

$$v \cdot 1_A = 1_A \cdot v = v$$

Noi considereremo sempre algebre sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Definizione 1.2. *Una sottoalgebra B di un'algebra A è un sottoinsieme $B \subseteq A$ che è un'algebra con operazioni ottenute restringendo a B le operazioni di A.*

Notiamo che le funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ formano un'algebra con la moltiplicazione puntuale.

Riassumiamo quindi le principali caratteristiche delle osservabili classiche:

1) Le osservabili classiche sono funzioni infinitamente differenziabili, che, con il prodotto puntuale, formano un'algebra commutativa.

2) L'evoluzione temporale delle osservabili classiche è governata dalle parentesi di Poisson, che sono un'operazione interna tra funzioni infinitamente differenziabili.

1.2 Il principio di corrispondenza

Per descrivere sistemi fisici su scala microscopica, la meccanica classica risulta inadeguata ed è necessario utilizzare la meccanica quantistica. Alla base di queste due teorie vi sono principi completamente differenti che ci consentono di fare previsioni differenti a seconda se decidiamo di descrivere un sistema fisico con l'una o l'altra teoria. Basti pensare, per esempio, che in meccanica quantistica vale il principio di indeterminazione di Heisenberg: $\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Il prodotto tra l'incertezza sulla posizione e l'incertezza sull'impulso deve essere maggiore di una costante, dove $\hbar$ è chiamata costante di Plank ridotta e nel sistema di unità di misura MKS vale $1.054 \times 10^{-34} J \cdot s$. In meccanica classica non esiste un concetto simile, anzi: la soluzione delle equazioni di Hamilton ci consente di conoscere con assoluta precisione posizione e impulso di una particella nello stesso istante di tempo. Date le differenze fra fenomenologia classica e quantistica, nelle due teorie dovranno essere impiegate strutture matematiche differenti: ad esempio, il principio di indeterminazione di Heisenberg è conseguenza del fatto che le osservabili quantistiche hanno un prodotto in generale non commutativo, al contrario delle osservabili classiche.

Descriviamo ora il "principio di corrispondenza", che ci permette di creare una corrispondenza tra osservabili classiche e quantistiche. Supponiamo di voler quantizzare il nostro sistema classico costituito da una particella su una retta, il cui stato ad un certo istante è determinato da un punto di $\mathbb{R}^2$. A questo sistema associamo lo spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e lo stato del nostro sistema, ad un determinato istante, è rappresentato da un vettore di norma unitaria $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Le osservabili sono date da tutti e soli gli operatori lineari autoaggiunti su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Dobbiamo associare alle osservabili classiche q e p degli operatori, che indicheremo con $\hat{q}$ e $\hat{p}$. Le "regole di corrispondenza" stabiliscono che:

$$q \mapsto \hat{q} = q \tag{1.1}$$

$$p \mapsto \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \tag{1.2}$$

È noto che con opportuna scelta dei domini di definizione, tali operatori risultano essere autoaggiunti. Alle parentesi di Poisson è invece associato il commutatore fra operatori:

$$\{\cdot, \cdot\} \mapsto -\frac{i}{\hbar}[\cdot, \cdot]$$

dove il commutatore fra due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ è così definito:

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

e il prodotto di due operatori, applicato ad un vettore ψ è definito come:

$$(\hat{A}\hat{B})\psi := \hat{A}(\hat{B}\psi)$$

A questo punto, notiamo una prima importante proprietà delle osservabili quantistiche: sono elementi di un'algebra non commutativa, al contrario delle osservabili classiche. Dal calcolo diretto si ottiene inoltre la seguente relazione:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}$$

dove abbiamo indicato con $\mathbb{I}$ l'operatore identità[1]. Questa relazione è di fondamentale importanza, poichè conduce al principio di indeterminazione di Heisenberg.

[1] Tale identità fra operatori va intesa su un dominio oppurtuno, che ad esempio può essere l'insieme delle funzioni di classe Schwartz

Sempre applicando le regole di corrispondenza, l'equazione che regola l'evoluzione temporale di una generica osservabile $\hat{A}$ è la seguente: [2]

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]$$

dove l'operatore $\hat{H}$ è l'analogo quantistico della funzione Hamiltoniana $H(q, p)$. Tale equazione corrisponde all'equazione di evoluzione temporale per le osservabili nella rappresentazione di Heisenberg, nella quale si immagina che le osservabili evolvano nel tempo, mentre gli stati rimangano costanti.

Poniamoci ora il problema di quantizzare una qualsiasi osservabile, ovvero una qualsiasi funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Non esiste un modo ovvio per generalizzare le (1.1) e (1.2) ad una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ qualsiasi. Infatti, già se consideriamo polinomi nelle variabili q e p ci imbattiamo in problemi di ordinamento, in quanto il prodotto fra gli operatori quantistici $\hat{q}$ e $\hat{p}$ non è commutativo. Per esempio, alla funzione $f(q, p) = qp = pq$ possiamo associare gli operatori $\hat{q}\hat{p}$ e $\hat{p}\hat{q}$ che sono distinti. Un'altro probelma che si pone è che tramite le regole di corrispondenza non tutte le funzioni reali vengono mappate in operatori autoaggiunti. Ad esempio, consideriamo nuovamente l'operatore $\hat{q}\hat{p}$, ricordando che per due operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ vale $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$ (dove con $^+$ abbiamo indicato l'aggiunto di un operatore), otteniamo:

$$(\hat{q}\hat{p})^+ = \hat{p}^+\hat{q}^+ = \hat{p}\hat{q} \neq \hat{q}\hat{p}$$

Insomma, le regole di corrispondenza non risolvono il nostro problema della quantizzazione, ma alcune sue caratteristiche devono essere rispettate anche da definizioni di quantizzazione più rigorose, come per esempio le regole di commutazione degli operatori $\hat{q}$ e $\hat{p}$.

1.3 Quantizzazione canonica

Vogliamo farci un'idea di quale possa essere una definizione di quantizzazione più rigorosa utilizzando come linee guida alcune proprietà delle regole di corrispondenza, discusse nel paragrafo precedente. Supponiamo sempre di voler quantizzare il sistema costituito da un punto materiale che si muove sulla retta reale. Alziamo leggermente il nostro livello di astrazione: supponiamo che le osservabili quantistiche siano semplicemente elementi di una qualche algebra non-commutativa con unità, senza badare alla loro natura di operatori. Le osservabili classiche, come anche detto in precedenza, sono tutte e sole le funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ infinitamente differenziabili su $\mathbb{R}^2$. Sia $A \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una sottoalgebra e sia C una qualche algebra non commutativa con unità (che indicheremo con $\mathbb{I}$), alla quale appartengono le nostre osservabili quantistiche. Potremmo definire *quantizzazione canonica* della retta reale $\mathbb{R}$ un'applicazione

$$Q : A \to C$$

che per ogni $f, g \in A$ verifichi le seguenti proprietà:

[2]Non discuteremo qui le condizioni per le quali $\frac{d\hat{A}}{dt}$ è ben definito.

1) $Q(1) = \mathbb{I}$

2) $f \mapsto Q(f)$ è lineare

3) $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$

Poniamo $\hat{f} := Q(f)$. Da qui in poi, in questo capitolo, utilizzeremo equivalentemente le due notazioni.

Analizziamo le varie proprietà. La 1) e la 2) sono motivate dalle seguenti osservazioni: supponiamo di avere un'osservabile classica $f(q, p) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ una costante. la 1) e la 2) ci assicurano che:

$$Q(f) = Q(c) = Q(c \cdot 1) = c \cdot Q(1) = c\mathbb{I}$$

In questo modo, se abbiamo un'osservabile classica costante, una misura della corrispondente osservabile quantistica avrà probabilita 1 di dare come risultato c. La proprietà 3) ci garantisce che sia rispettata la regola di commutazione tra gli operatori $\hat{q}$ e $\hat{p}$ che si ottiene tramite le regole di corrispondenza, e generalizza tale regola di commutazione a due qualsiasi osservabili f e g. A queste condizioni è possibile aggiungerne anche una quarta: sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale. Chiediamo che:

4) $Q(\phi \circ f) = \phi(Q(f))$

per ogni $f \in A$. Ciò ci assicura che le funzioni polinomiali di q e p in A vengano trasformate in funzioni polinomiali di $\hat{q}$ e $\hat{p}$ in C. Tale condizione è detta *condizione di von Neumann*.

È interessante notare che la 3) implica anche che l'applicazione Q commuta con l'evoluzione temporale. Infatti, per una qualsiasi osservabile classica $f \in A$, applicando la 3) e le equazioni di evoluzione temporale per le osservabili classiche e quantistiche si ottiene che:

$$Q\left(\frac{df}{dt}\right) = Q(\{f, H\}) = -\frac{i}{\hbar}[Q(f), \hat{H}] = \frac{d}{dt}Q(f)$$

Ciò implica che evolvere temporalmente un'osservabile classica partendo da un determinato istante in cui l'osservabile ha il valore $f(t_0)$ e poi quantizzarla, oppure quantizzarla e poi evolverla temporalmente, sono processi equivalenti.

1.4 Teorema "no-go"

In questo paragrafo vogliamo dimostrare che non esiste una quantizzazione Q con le proprietà che abbiamo descritto precedentemente. Una prima dimostrazione di tale teorema, è dovuta a Groenewold in [5], mentre Van Hove in [17] ha dato una dimostrazione più rigorosa.

Indichiamo con $\mathbb{C}[q, p] \subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ l'insieme di tutti i polinomi nelle variabili q e p. Tale insieme è una sottoalgebra di $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sia invece W un'algebra non commutativa con unità. Supponiamo che essa sia generata da due elementi, che indicheremo con x e y, tali che $[x, y] = -1$. Consideriamo ora una quantizzazione (nel senso del paragrafo precedente) della sottoalgebra $\mathbb{C}[q, p]$:

$$Q : \mathbb{C}[q, p] \mapsto W$$

Vogliamo che l'applicazione Q rispetti le seguenti condizioni:

$$Q(q) := \hat{q} = x$$

$$Q(p) := \hat{p} = -i\hbar y$$

In questo modo, almeno per le funzioni q e p è rispettata la proprietà $[Q(q), Q(p)] = i\hbar Q(\{q, p\})$. Enunciamo il teorema "no-go":

Teorema 1.3 (Teorema "no-go")**.** *Non esiste nessuna applicazione lineare* $Q : \mathbb{C}[q, p] \to W$ *che, per ogni* $f, g \in \mathbb{C}[q, p]$ *soddisfa entrambe le condizioni*

$$[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\}) \tag{1.3}$$

e $\hat{q} = x$, $\hat{p} = -i\hbar y$.

Prima di dimostrare il teorema "no-go", enunciamo alcuni lemmi.

Lemma 1.4. *I monomi* $(x^j y^k)_{j,k \geq 0}$ *formano una base per* W.

Dimostrazione. È chiaro che l'insieme $(x^j y^k)_{j,k \geq 0}$ è un sistema di generatori per W. Dimostramo che gli elementi di tale insieme sono linearmente indipendenti. Condiseriamo la seguente rappresentazione di W su $\mathbb{R}[u, v]$, cioè un applicazione che ad ogni elemento a di W associ un endomorfismo su $\mathbb{R}[u, v]$, che con un abuso di notazione, indicheremo sempre con a:

$$x(u^a v^b) = u^{a+1} v^b$$

$$y(u^a v^b) = a u^{a-1} v^b + u^a v^{b+1}$$

Supponiamo che esistano dei coefficienti c_{jk} tali che $\sum_{j,k} c_{jk} x^j y^k = 0$. Applichiamo entrambi i membri di questa relazione ad $1 \in \mathbb{R}[u, v]$:

$$0 = \sum_{j,k} c_{jk} x^j y^k(1) = \sum_{j,k} c_{jk} x^j(v^k) = \sum_{j,k} c_{jk} u^j v^k$$

ma il polinomio all'ultimo membro è zero se e solo se i coefficienti $c_{jk} = 0$ per ogni j, k. $\square$

Da questo lemma segue immediatamente che anche i monomi $(\hat{q}^j \hat{p}^k)_{j,k \geq 0}$ formano una base per W. Consideriamo adesso due identità che ci saranno utili in seguito, ovvero:

$$[\hat{q}^k, \hat{p}] = i\hbar k \hat{q}^{k-1}$$

$$[\hat{q}, \hat{p}^k] = i\hbar k \hat{p}^{k-1}$$

A titolo di esempio, dimostramo la prima. Applicando più volte l'identità $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ che vale per ogni $a, b, c \in W$, si arriva all'espressione:

$$[\hat{q}^k, \hat{p}] = \sum_{j=1}^{k} \hat{q}^{j-1}[\hat{q}, \hat{p}]\hat{q}^{k-j}$$

essendo $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$, si ha:

$$[\hat{q}^k, \hat{p}] = i\hbar \sum_{j=1}^{k} \hat{q}^{j-1+k-j} = i\hbar k\hat{q}^{k-1}$$

Proviamo ora un altro lemma:

Lemma 1.5. *Se valgono (1.3) e $\hat{q} = x$, $\hat{p} = -i\hbar y$ allora, per ogni ϕ funzione polinomiale, vale la relazione:*

$$Q(\phi(q)) = \phi(\hat{q}),\ Q(\phi(p)) = \phi(\hat{p})$$

detta "regola di von Neumann debole".

Dimostrazione. Come abbiamo dimostrato prima, i monomi formano una base per W, quindi, essendo Q lineare, basta dimostrare che:

$$Q(q^k) = \hat{q}^k \ \text{ e } \ Q(p^k) = \hat{p}^k$$

e ciò deve valere per ogni $k \geq 0$. Per $k = 0$ abbiamo che $Q(1) = Q(\{q, p\}) = (i\hbar)^{-1}[\hat{q}, \hat{p}] = 1$. Per $k = 1$, la proprietà richiesta è verificata per ipotesi. Procediamo per induzione. Supponiamo che la proprietà sia verificata per un qualche k, dimostriamo allora che la stessa identità vale anche per $k+1$. Dato che abbiamo dimostrato che i monomi $(\hat{q}^j\hat{p}^l)_{j,l\geq 0}$ costituiscono una base per W, possiamo scrivere $Q(q^{k+1})$ come:

$$Q(q^{k+1}) = \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}\hat{q}^j\hat{p}^l$$

Tenendo conto delle identità $\{q^{k+1}, q\} = 0$ e $\{q^{k+1}, p\} = q^k$, ricaviamo che:

$$[Q(q^{k+1}), \hat{q}] = i\hbar Q(\{q^{k+1}, q\}) = 0$$

$$[Q(q^{k+1}), \hat{p}] = i\hbar Q(\{q^{k+1}, p\}) = i\hbar Q(q^k) = i\hbar\hat{q}$$

Ma, calcolando le stesse quantità scrivendo $Q(q^{k+1})$ nei termini degli elementi di base, otteniamo:

$$[Q(q^{k+1}), \hat{q}] = \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}[\hat{q}^j\hat{p}^l, \hat{q}] = \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}\hat{q}^j[\hat{p}^l, \hat{q}] = -i\hbar \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}\hat{q}^j\hat{p}^{l-1}$$

e

$$[Q(q^{k+1}), \hat{p}] = \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}[\hat{q}^j\hat{p}^l, \hat{p}] = \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}[\hat{q}^j, \hat{p}]\hat{p}^l = i\hbar \sum_{j,l\geq 0} c_{jl}\hat{q}^{j-1}\hat{p}^l$$

dove abbiamo usato le identità ricavate prima per i commutatori $[\hat{q}^k, \hat{p}]$ e $[\hat{q}, \hat{p}^k]$. Per confronto diretto otteniamo che:

- $c_{jl} \neq 0$ se e solo se $l = 0$ (dalla prima equazione)
- $c_{j,0} \neq 0$ se $j = 0$ oppure $j = k+1$ ed inoltre otteniamo che $c_{k+1,0} = 1$

Andando a sostituire i coefficienti nella combinazione lineare dei termini di base, otteniamo che:

$$Q(q^{k+1}) = \hat{q}^{k+1} + c_{00}$$

e, sviluppando $Q(p^{k+1}) = \sum_{j,l\geq 0} \tilde{c}_{jl}\hat{q}^j\hat{p}^l$ e ripetendo un procedimento analogo otteniamo che:

$$Q(p^{k+1}) = \hat{p}^{k+1} + \tilde{c}_{00}$$

Per completare la dimostrazione ci resta da verificare che i coefficienti c_{00} e $\tilde{c}_{00}$ sono nulli. Utilizzando l'identità $4qp = \{q^2, p^2\}$ otteniamo che:

$$Q(qp) = \frac{1}{4}Q(\{q^2, p^2\}) = \frac{1}{4i\hbar}[Q(q^2), Q(p^2)] = \frac{1}{4i\hbar}[\hat{q}^2 + c_{00}, \hat{p}^2 + \tilde{c}_{00}] = \frac{1}{4i\hbar}[\hat{q}^2, \hat{p}^2]$$

dal calcolo diretto otteniamo che:

$$[\hat{q}^2, \hat{p}^2] = \hat{q}[\hat{q}, \hat{p}^2] + [\hat{q}, \hat{p}^2]\hat{p} = 2i\hbar(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})$$

$$\Rightarrow Q(qp) = \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})$$

Ora, usando l'identità $\{q^{k+1}, qp\} = (k+1)q^{k+1}\hat{}$ otteniamo che:

$$\frac{1}{2}[Q(q^{k+1}), \hat{q}\hat{p} + \hat{p}, \hat{q}] = [Q(q^{k+1}), Q(qp)] = i\hbar Q(\{q^{k+1}, qp\}) = i\hbar(k+1)Q(q^{k+1})$$

ma:

$$i\hbar(k+1)(\hat{q}(k+1) + c_{00}) = \frac{1}{2}[\hat{q}^{k+1} + c_{00}, \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}] = i\hbar(k+1)\hat{q}^{k+1}$$

dove abbiamo ottenuto la seconda uguaglianza utilizzando l'identità $[\hat{q}^k, \hat{p}] = i\hbar k\hat{q}^{k-1}$ precedentemente dimostrata. Per confronto, si ottiene allora che $c_{00} = 0$. Con un procedimento analogo è possibile dimostrare che $\tilde{c}_{00} = 0$. □

Siamo pronti ora a dimostrare il teorema "no-go"

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista un'applicazione Q che rispetti le proprietà 1), 2) e 3) descritte precedentemente. Usando l'identità $q^2p = \frac{1}{6}\{q^3, p^2\}$, otteniamo:

$$i\hbar Q(q^2p) = \frac{i\hbar}{6}Q(\{q^3, p^2\}) = \frac{1}{6}[\hat{q}^3, \hat{p}^2] = \frac{1}{6}([\hat{q}^3, \hat{p}]\hat{p} + \hat{p}[\hat{q}^3, \hat{p}]) = \frac{i\hbar}{2}(\hat{q}^2\hat{p}, \hat{p}\hat{q}^2) =$$

$$= i\hbar\hat{q}\hat{p}\hat{q}$$

Abbiamo provato quindi che

$$Q(q^2p) = \hat{q}\hat{p}\hat{q}$$

Analogamente si può provare che:

$$Q(qp^2) = \hat{p}\hat{q}\hat{p}$$

Ora, secondo la proprietà 3) della nostra quantizzazione, dovrebbe valere

$$[Q(q^3), Q(p^3)] = i\hbar Q(\{q^3, p^3\})$$

Ma dato che

$$\{q^3, p^3\} = 9q^2p^2 = 3\{q^2p, qp^2\}$$

si dovrebbe avere

$$[Q(q^3), Q(p^3)] = 3i\hbar Q(\{q^2p, qp^2\}) = 3[Q(q^2p), Q(qp^2)]$$

Ma, dal calcolo diretto, si ha:

$$[Q(q^3), Q(p^3)] - 3[Q(q^2p), Q(qp^2)] = [\hat{q}^3, \hat{p}^3] - 3[\hat{q}\hat{p}\hat{q}, \hat{p}\hat{q}\hat{p}] = -3i\hbar \neq 0$$

Siamo arrivati quindi ad un assurdo, cioè siamo arrivati a contraddire (1.3). Non esiste quindi un'applicazione di tale tipo. $\square$

Nel prossimo capitolo, daremo un esempio nel quale la relazione (1.3) è rispettata a meno di termini di ordine superiore in $\hbar$, ciò suggerisce che in una definizione di quantizzazione tale condizione non va del tutto scartata, ma in un certo senso indebolita.

Capitolo 2

L'esempio del toro

Vogliamo in questo capitolo illustrare un particolare esempio che ci suggerirà che la (1.3) va indebolita: la quantizzazione delle funzioni sul toro. Definiremo una mappa di quantizzazione per le funzioni sul toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$ e vedremo che la condizione $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$ è rispettata solo a meno di termini di ordine superiore in $\hbar$. Ciò suggerisce che, in una definizione di quantizzazione, tale condizione va indebolita.

2.1 Gli operatori di Weyl

Iniziamo questa sezione descrivendo alcune idee e processi che conducono alla definizione degli *operatori di Weyl.*

Una forma esplicita di quantizzazione può essere ottenuta intuitivamente nella seguente maniera: consideriamo una funzione $f(q,p) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Indicando con $\tilde{f}(\alpha, \beta)$ la sua trasformata di Fourier (ammettendo che essa esista), la funzione f può essere scritta come:

$$f(q,p) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha,\beta) e^{i(\alpha p + \beta q)} d\alpha d\beta$$

Una possibile idea di quantizzazione è quella di associare ad ogni funzione la seguente osservabile quantistica:

$$Q(f) := \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\alpha,\beta) Q(e^{i(\alpha p + \beta q)}) d\alpha d\beta$$

dove la quantizzazione dell'esponenziale si ottiene sostituendo alle variabili q e p i rispettivi operatori di Schrödinger $\hat{q} = q$ e $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}$ che agiscono su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$Q(e^{i(\alpha q + \beta p)}) := e^{i(\alpha \hat{q} + \beta \hat{p})}$$

Ovviamente andrebbero chiariti molti aspetti matematici in questo procedimento: innanzitutto, non tutte le funzioni infinitamente differenziabili posseggono trasormata di Fourier, si pensi già per esempio alle semplici funzioni $f(q,p) = q$ oppure $g(q,p) = p$. In realtà, è noto che tali trasformate possono essere effettuate se si introduce il concetto di *distribuzione*; tale argomento però esula dagli scopi di questa tesi e perciò non verrà trattato. Un'altro problema concettuale che si pone è quello di definire l'integrale di un operatore. Nel prossimo paragrafo considereremo una classe di funzioni per la quale si può applicare un procedimento analogo a quello appena illustrato, senza che si pongano tali complicazioni tecniche.

Vogliamo ora calcolare esplicitamente come un operatore $e^{2\pi i(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})}$ agisce su una funzione $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. È noto che gli operatori e^A con $A = i\alpha\hat{q}$ e e^B con $B = i\beta\hat{p}$ sono degli operatori unitari ben definiti e vale la seguente relazione, detta *formula di Baker-Campbell-Hausdorff*:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2.1}$$

Nel caso degli operatori di Schrödinger sappiamo che vale la relazione $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}$. Invertendo la (2.1) otteniamo che:

$$e^{i(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})} = e^{i\alpha\hat{q}}e^{i\beta\hat{p}}e^{\alpha\beta\frac{\hbar}{2}}$$

Effettuiamo alcuni cambi di notazioni: poniamo $\alpha = 2\pi a$, $\beta = 2\pi b$, $\hbar = -\frac{\theta}{2\pi}$, $q = -2\pi\hbar t$. Con abuso di notazione, indicheremo $\psi(q) = \psi(-2\pi\hbar t)$ semplicemente con $\psi(t)$. Otteniamo allora:

$$(e^{2\pi i(a\hat{q}+b\hat{p})}\psi)(t) = e^{-\pi i\theta ab}e^{2\pi i\theta at}\psi(t-b)$$

Definiamo ora, per $\hbar \neq 0$ e quindi per $\theta \neq 0$:

$$W_\theta(a,b) := e^{2\pi i(a\hat{q}+b\hat{p})}$$

Tali operatori, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, sono chiamati *operatori di Weyl*.

Calcoliamo le regole di commutazione tra due operatori di Weyl corrispondenti a parametri reali diversi.

Proposizione 2.1. *Il prodotto da due operatori di Weyl $W_\theta(a,b)$ e $W_\theta(c,d)$ è dato da:*

$$W_\theta(a,b)W_\theta(c,d) = e^{\pi i\theta(ad-bc)}W_\theta(a+c,b+d)$$

Vale inoltre la seguente regola di commutazione:

$$[W_\theta(a,b), W_\theta(c,d)] = 2i\sin(\pi\theta(ad-bc))W_\theta(a+c,b+d)$$

Dimostrazione. Iniziamo calcolando il prodotto:

$$W_\theta(a,b)W_\theta(c,d)\psi(q) = W_\theta(a,b)e^{-\pi i\theta cd}e^{2\pi i\theta ct}\psi(t-d) = e^{-\pi i\theta cd}W(a,b)(e^{2\pi i\theta ct}\psi(t-d)) =$$

$$= e^{-\pi i\theta cd}e^{-\pi i\theta ab}e^{2\pi i\theta at}e^{2\pi i\theta c(t-b)}\psi(t-d-b) =$$

$$= e^{-\pi i\theta(ab+cd)}e^{-\pi i\theta(ad)}e^{-\pi i\theta cb}e^{\pi i\theta ad}e^{\pi i\theta cb}e^{2\pi i\theta at}e^{2\pi i\theta c(t-b)}\psi(t-d-b) =$$

$$= e^{-\pi i\theta(a+c)(b+d)}e^{\pi i\theta ad}e^{\pi i\theta cb}e^{2\pi i\theta at}e^{2\pi ic(t-b)}\psi(t-d-b) =$$

$$= e^{\pi i\theta ad}e^{\pi i\theta cb}e^{-2\pi i\theta ct}e^{2\pi i\theta c(t-b)}e^{-\pi i\theta(a+c)(b+d)}e^{2\pi i\theta(a+c)t}\psi(t-d-b)$$

Notiamo che il termine $e^{-\pi i\theta(a+c)(b+d)}e^{2\pi i\theta(a+c)t}\psi(t-d-b)$ corrisponde all'operatore $W_\theta(a+c,b+d)$ applicato alla funzione $\psi(t)$. Possiamo allora scrivere:

$$W_\theta(a,b)W_\theta(c,d)\psi(q) = e^{\pi i\theta ad}e^{\pi i\theta cb}e^{-2\pi i\theta ct}e^{2\pi i\theta c(t-b)}W_\theta(a+c,b+d)\psi(t) =$$

$$= e^{\pi i\theta(ad-bc)}W_\theta(a+c,b+d)\psi(t)$$

Il prodotto tra due operatori di Weyl è quindi dato da:

$$W_\theta(a,b)W_\theta(c,d) = e^{\pi i\theta(ad-bc)}W_\theta(a+c,b+d) \tag{2.2}$$

Possiamo ora calcolare il commutatore:

$$[W_\theta(a,b),W_\theta(c,d)]\psi(q) = (e^{\pi i\theta(ad-bc)} - e^{-\pi i\theta(ad-bc)})W_\theta(a+c,b+d)\psi(t) =$$

$$= 2i\sin(\pi\theta(ad-bc))W_\theta(a+c,b+d)\psi(t)$$

Otteniamo quindi in definitiva:

$$[W_\theta(a,b),W_\theta(c,d)] = 2i\sin(\pi\theta(ad-bc))W_\theta(a+c,b+d)$$

□

2.2 Quantizzazione del toro

In questo paragrafo vogliamo applicare un'idea di quantizzazione analoga a quella descritta nel paragrafo precedente, ma che non presenti i problemi matematici del caso della quantizzazione di tutte le funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Restringiamo l'insieme da quantizzare alle funzioni infinitamente differenziabili su $\mathbb{R}^2$ periodiche in entrambe le variabili di periodo 1. Tali funzioni possono essere pensate come delle funzioni di due variabili angolari, ovvero delle funzioni infinitamente differenziabili definite sul toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$. Tutte le funzioni infinitamente differenziabili su $\mathbb{T}^2$ possono essere espanse in serie di Fourier, cioè ogni $f(q,p) \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ può essere scritta nella seguente forma:

$$f(q,p) = \sum_{m,n} a_{mn}e^{2\pi i(mq+np)}$$

con $m,n \in \mathbb{Z}$ e i coefficienti a_{mn} rispettano la condizione di *decrescita rapida*, ovvero:

$$\sup_{m,n\in\mathbb{Z}} (1+m^2+n^2)^k|a_{mn}|^2 < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La sottoalgebra A che vogliamo quantizzare è costituita dalle combinazioni lineari finite degli elementi $u := e^{2\pi imq}$ e $v := e^{2\pi inp}$, con $m,n \in \mathbb{Z}$. Una quantizzazione delle funzioni u e v si ottiene definendo:

$$Q(u^m v^n) = Q(e^{2\pi i(mq+np)}) := W_\theta(m,n)$$

Estendiamo tale applicazione alle combinazioni lineari finite degli elementi u e v per "linearità", ovvero:

$$Q(\sum_{m,n} a_{mn} u^m v^n) := \sum_{m,n} a_{mn} Q(u^m v^n) = \sum_{m,n} a_{mn} W_\theta(m, n)$$

Notiamo che non abbiamo più i problemi tecnici che avevamo nell'idea di quantizzazione del paragrafo precedente. Questo perchè la sottoalgebra che stiamo quantizzando è costituita da combinazioni finite di funzioni periodiche (e comunque, come già detto prima, ogni funzione infinitamente differenziabile sul toro può essere espansa in serie di Fourier). Inoltre, non compaiono integrali di operatori, ma solo somme di operatori che sono operazioni ben definite. Vogliamo verificare se l'applicazione Q rispetta tutte le condizioni che, nel primo capitolo, abbiamo chiesto essere rispettate da una quantizzazione, ovvero:

1) $Q(1) = \mathbb{I}$

2) $f \mapsto Q(f)$ è lineare

3) $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$ per ogni $f, g \in A$

La funzione costante 1 su $\mathbb{T}^2$ si ottiene ponendo $a_{00} = 1$ e tutti gli altri coefficienti $a_{mn} = 0$, e si verifica immediatamente che la quantizzazione di tale funzione corrisponde all'operatore identità:

$$Q(1) = W_\theta(0, 0)$$

La seconda proprietà è verificata per costruzione. Resta da verificare se viene rispettata anche la terza proprietà. Notiamo che se tale proprietà è verificata da due funzioni $u^a v^b$ e $u^c v^d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, allora è verificata per ogni coppia di funzioni di A. Iniziamo quindi col calolare la parentesi di Poisson tra $f := u^a v^b$ e $g := u^c v^d$.

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} = (2\pi i)^2 (bc - ad) e^{2\pi i((a+c)p+(b+d)q)}$$

La quantizzazione di tale parentesi di Poisson è:

$$Q(\{f, g\}) = (2\pi i)^2 (bc - ad) Q(e^{2\pi i((a+c)p+(b+d)q)}) = (2\pi i)^2 (bc - ad) W_\theta(a + c, b + d)$$

Possiamo ora ricavare la relazione tra commutatore e parentesi di Poisson:

$$[Q(f), Q(g)] = -2i \sin(\pi\theta(ad - bc)) \frac{Q(\{f, g\})}{4\pi^2(ad - bc)}$$

Sviluppando in serie di Taylor l'espressione $\sin(\pi\theta(ad - bc))$, otteniamo:

$$[Q(f), Q(g)] = \frac{-2i\pi\theta(ad - bc)}{4\pi^2(ad - bc)} Q(\{f, g\}) + \mathcal{O}(\hbar^2) = -\frac{i\theta}{2\pi} Q(\{f, g\}) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

dove con $\mathcal{O}(\hbar^2)$ indichiamo termini di ordine superiore di $\hbar$. Ricordando che $\hbar = -\frac{\theta}{2\pi}$, otteniamo:

$$[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\}) + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{2.3}$$

Abbiamo quindi ottenuto che la relazione tra commutatore e parentesi di Poisson richiesta dalla quantizzazione canonica del primo capitolo è rispettata solo a meno di termini di ordine superiore in $\hbar$. Questo risultato è coerente con il teorema *no-go*: non possiamo aspettarci che esista una quantizzazione che verifichi esattamente (1.3).

2.3 Il toro non commutativo

Vogliamo ora analizzare la struttura algebrica degli operatori $W_\theta(m, n)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$. Innanzitutto notiamo che la quantizzazione delle funzioni u e v definite precedentemente da come risultato gli operatori:

$$U_\theta := Q(u) = W_\theta(1, 0), \quad V_\theta := Q(v) = W_\theta(0, 1)$$

Tali operatori non sono altro che gli esponenziali degli operatori posizione e impulso nella rappresentazione di Schrödinger della meccanica quantistica. Questi agiscono su una funzione $\psi(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ nella seguente maniera:

$$U_\theta \psi(q) = e^{2\pi i\theta t}\psi(t)$$

$$V_\theta \psi(q) = \psi(t - 1)$$

Intuitivamente, questi operatori possono essere pensati a loro volta come funzioni definite sul toro, ma tali che il loro prodotto sia deformato in modo da renderlo non commutativo, possiamo cioè pensare tali operatori come funzioni su un "toro non commutativo". Illustriamo ora questo concetto in maniera più rigorosa.

Nel paragrafo precedente abbiamo definito un'applicazione:

$$Q : \mathbb{C}[u, v] \to \mathcal{B}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$$

dove $\mathcal{B}(\mathcal{L}(\mathbb{R}))$ è l'insieme degli operatori limitati su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (ovvero l'insieme degli operatori con norma operatoriale finita [1]), e $\mathbb{C}[u, v]$ è l'insieme dei polinomi nelle funzioni u e v. Tale applicazione Q può essere estesa a tutto $C^\infty(\mathbb{T}^2)$:

$$Q\left(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn}u^m v^n\right) := \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{mn}e^{\pi i\theta}W_\theta(m, n)$$

La serie di operatori che compare a destra converge in norma operatoriale e da come risultato un operatore limitato e ben definito. Ora sia $\mathcal{A}_\theta \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ la più piccola sotto-*-algebra [2] contenente U_θ e V_θ, che sia chiusa rispetto alla topologia indotta dalla norma operatoriale. Con questa definizione, $\mathcal{A}_\theta$ contiene $Q(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ ed è detta

[1] La definizione di norma operatoriale sarà richiamata nel prossimo capitolo.

[2] Anche le definizioni di *-algebra e di C*-algebra verranno richiamate nel prossimo capitolo

C*-algebra del toro non commutativo. Notiamo che $\mathcal{A}_\theta \neq Q(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Vale inoltre la seguente relazione:

$$U_\theta V_\theta = e^{2\pi i\theta} V_\theta U_\theta$$

. Riassumiamo i risultati ottenuti:

1) Arrestando lo sviluppo in serie della (2.3) all'ordine 0 in $\hbar$ otteniamo le legge di commutazione delle osservabili classiche, che fanno parte di un'algebra commutativa e quindi hanno commutatore nullo. All'ordine 0 l'applicazione Q coincide con l'identità su $\mathbb{T}^2$.

2) Arrestando lo sviluppo in serie della (2.3) all'ordine 1 in $\hbar$ otteniamo la legge di commutazione delle osservabili quantistiche, che coincide con la (1.3)

3) In questo specifico esempio, per ottenere la legge di commutazione della quantizzazione canonica, abbiamo dovuto arrestare all'ordine 1 lo sviluppo in serie della relazione di commutazione che abbiamo ricavato. Tale relazione, quindi, non è rispettata in maniera esatta (senza termini di ordine superiore).

Tutto ciò è coerente col teorema *no-go* illustrato nel capitolo 1: non possiamo aspettarci che una quantizzazione rispetti la relazione $[Q(f), Q(g)] = i\hbar Q(\{f, g\})$ poichè una quantizzazione di tale tipo non esiste. Nel prossimo capitolo introdurremo una nuova definizione di quantizzazione, la *Quantizzazione stretta*, dovuta a Rieffel.

Capitolo 3

Quantizzazione stretta

3.1 C*-Algebre: definizioni ed esempi

In questo capitolo vogliamo dare la definizione di *quantizzazione stretta*, proposta da Rieffel e Landsman e che si basa sul concetto di *C*-algebra*. Diamo alcune definizioni preeliminari.
Ricordiamo che una *norma* su uno spazio vettoriale V è un'applicazione $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ che, $\forall \psi, \phi \in V, \forall c \in \mathbb{C}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1) $||\psi|| = 0 \Longleftrightarrow \psi = 0$

2) $||c\psi|| = |c|\,||\psi||$

3) $||\psi + \phi|| \leq ||\psi|| + ||\phi||$

Un'algebra normata A è un algebra su uno spazio vettoriale normato che, $\forall a, b, \in A$ rispetta la seguente proprietà:

$$||ab|| \leq ||a||\,||b||$$

Un' *algebra di Banach* è un'algebra normata e completa, cioè tale che ogni successione di Cauchy di elementi dell'algebra converge ad un elemento dell'algebra.

Una **-algebra* è un algebra A dotata di un'*involuzione*, cioè un'applicazione $* : A \to A$ tale che, $\forall a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ si ha:

1) $(a^*)^* = a$

2) $(a + b)^* = a^* + b^*$

3) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

4) $(ab)^* = b^* a^*$

Una *C*-algebra* è una *-algebra di Banach la cui norma soddisfa la seguente identità, detta *C*-identità*:

$$||a^* a|| = ||a||^2$$

Una norma che rispetta tale proprietà è detta *C*-norma*.

Diamo ora alcuni esempi di C*-Algebra. Consideriamo l'insieme $M_n(\mathbb{C})$ delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti complessi. Per ogni $a \in M_n(\mathbb{C})$ definiamo la *norma operatoriale*:

$$||a||_{op} = \sup_{v \neq 0} \frac{||a \cdot v||_2}{||v||_2}$$

Dove $v = (v^1, ..., v^n) \in \mathbb{C}^n$, nel prodotto v è inteso come vettore colonna e con $|| \cdot ||_2$ abbiamo indicato la norma euclidea in $\mathbb{C}^n$:

$$||v||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |v^i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Dimostriamo che la norma operatoriale è una C*-norma. Notiamo innanzittutto che la norma operatoriale è data equivalentemente da:

$$||a||_{op} = \sup_{||v||_2 = 1} ||a \cdot v||_2$$

Consideriamo quindi un vettore $v \in \mathbb{C}^n$ tale che $||v||_2 = 1$. Iniziamo col dimostrare che $||a||_{op} = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}$ dove λ_{max} è il più grande autovalore della matrice a^*a. Infatti abbiamo che (indichiamo con $(\cdot, \cdot)$ il prodotto scalare hermitiano di $\mathbb{C}^n$):

$$||a \cdot v||_2^2 = (a \cdot v, a \cdot v) = (v, a^* a \cdot v)$$

Essendo a^*a una matrice hermitiana, esiste una matrice unitaria u e una matrice diagonale d tale che $d = u^* a^* a u$. Ponendo $w = u^* v$, otteniamo:

$$||a \cdot v||_2^2 = (v, udu^* \cdot v) = (u^* \cdot v, du^* \cdot v) = (w, d \cdot w) = \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 \lambda_i \leq \lambda_{max} \sum_{i=1}^{n} |w_i|^2 =$$

$$= \lambda_{max}$$

dove λ_i sono gli autovalori della matrice a^*a e nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che anche la norma del vettore w è 1 poichè l'applicazione di una matrice unitaria ad un vettore ne conserva la norma. L'uguaglianza vale solo nel caso in cui w è autovettore di a^*a corrispondente a λ_{max}. Abbiamo ottenuto quindi che $||a||_{op} = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}$. La norma della matrice a^*a sarà quindi λ_{max}, da ciò otteniamo la tesi.

Un primo esempio di C*-algebra è quindi dato dalle matrici $M_n(\mathbb{C})$ con norma operatoriale e involuzione data dalla coniugazione hermitiana ($(v_{ij})^* = \bar{v}_{ji}$). Consideriamo ora altri due esempi importanti in Fisica.

Esempio 3.1. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Come prima, definiamo la norma operatoriale per un operatore lineare F su $\mathcal{H}$:

$$||F|| = \sup_{||\psi||_{\mathcal{H}} = 1} ||F\psi||_{\mathcal{H}}$$

Dove con $|| \cdot ||_{\mathcal{H}}$ abbiamo indicato la norma nello spazio di Hilbert indotta dal prodotto scalare interno. Un operatore è detto *limitato* se ha norma finita. L'insieme degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ con norma data dalla norma operatoriale e con involuzione data dalla coniugazione hermitiana forma una C*-algebra.

Esempio 3.2. Sia M una varietà differenziabile. Consideriamo i due seguenti insiemi:

1) L'insieme $C_b(M)$ delle funzioni continue e limitate su M:

$$C_b(M) := \{f \in C(M) : ||f||_\infty := \sup_{x \in M} |f(x)| < +\infty\}$$

La funzione $||.||_\infty : C(M) \to \mathbb{R}_0^+$ è una norma su $C(M)$ ed è detta *sup-norma*.

2) L'insieme $C_0(M)$ delle funzioni delle funzioni che si annullano all'infinito su M, ovvero l'insieme delle funzioni tali che l'insieme $\{x \in M : |f(x)| > \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0\}$ è compatto in M.

Gli insiemi $C_0(M)$ e $C_b(M)$ con il prodotto puntuale, norma data dalla *sup-norma*, e involuzione data dalla coniugazione complessa formano delle C*-algebre. Notiamo che nel caso in cui M è una varietà compatta, l'insieme $C(M)$ delle funzioni continue su M forma una C*-algebra.

Prima di procedere diamo altre due definizioni riguardanti le C*-algebre. Un *morfismo* di C*-algebre A e B è un morfismo fra A e B che commuta con l'involuzione: $\phi(a^*) = \phi(a)^*$. Una rappresentazione di una C*-algebra A è un morfismo $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dove $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è la C*-algebra formata dagli operatori lineari sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Un importante teorema afferma che per ogni C*-algebra A esiste uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ed una rappresentazione $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tale che se $\pi(a)\psi = 0 \forall \psi \in \mathcal{H}$, allora anche $a = 0$.

3.2 Quantizzazione stretta di algebre di Poisson

In questo paragrafo introduciamo il concetto di quantizzazione stretta, seguendo principalmente [10].

In meccanica classica, come abbiamo visto precedentemente, le osservabili sono costituite da funzioni infinitamente differenziabili. Nell'esempio unidimensionale del primo capitolo tali funzioni erano definite su $\mathbb{R}^2$, nel caso generale abbiamo a che fare con funzioni a valori complessi definite su una varietà differenziabile M. Abbiamo anche visto che l'operazione fra funzioni che interviene nell'evoluzione temporale di osservabili classiche è costituita dalle parentesi di Poisson, che nel primo capitolo abbiamo definito tramite una formula esplicita. Possiamo però definire le parentesi di Poisson anche in maniera algebrica:

Definizione 3.3. *Un'*algebra di Poisson *è un'algebra associativa $\mathcal{P}$ con un'ulteriore operazione interna, detta* parentesi di Poisson $\{\cdot,\cdot\} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *che, $\forall A, B \in \mathcal{P}$, rispetti le seguenti proprietà:*

1) $\{A, B\} = -\{B, A\}$

2) $\{A, B\}^* = \{A^*, B^*\}$

3) $\{A,\{B,C\}\}+\{B,\{C,A\}\}+\{C,\{A,B\}\}=0$

4) $\{A,BC\}=\{A,B\}C+B\{A,C\}$

Ovviamente le parentesi di Poisson definite esplicitamente nel primo capitolo rispettano tutte le proprietà precedenti. Diamo ora un'altra definizione:

Definizione 3.4. *Una* varietà di Poisson *è una varietà differenziabile M con delle parentesi di Poisson definite su $C^\infty(M)$*

Le funzioni infinitamente differenziabili su M formano quindi un'algebra di Poisson. Consideriamo una varietà di Poisson M compatta: in questo modo le funzioni continue sulla varietà formano una C*-algebra, come già detto in precedenza. È possibile dimostrare che, se M è compatta, l'insieme $C^\infty(M)$ delle funzioni infinitamente differenziabili è denso in $C(M)$, ovvero l'algebra di Poisson delle funzioni infinitamente differenziabili su M è densa nella C*-algebra delle funzioni continue su M. Questa precisazione è importante per dare una definizone di quantizzazione in grado di riprodurre il caso classico nel caso in cui $\hbar=0$, come vedremo in seguito.

Il nostro scopo è quello di quantizzare un'algebra di Poisson $\mathcal{P}$, alla quale appartengono le nostre osservabili classiche, in elementi di una C*-algebra $\mathcal{A}^\hbar$ che corrispondono ad operatori autoaggiunti su uno spazio di Hilbert, ovvero ad osservabili quantistiche. La nostra quantizzazione, sarò perciò un'applicazione del tipo:

$$Q_\hbar:\mathcal{P}\to\mathcal{A}^\hbar$$

Uno degli scopi della quantizzazione stretta è quello di voler riprodurre la meccanica classica nel limite $\hbar\to 0$. Per fare ciò, supponiamo che $\hbar$ appartenga ad un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ tale che 0 sia un punto di accumulazione per I.

In questo contesto, diciamo che un elemento di una *-algebra o di una C*-algebra è autoaggiunto se coincide con la sua involuzione. Nel caso di funzioni $C^\infty(M)$ gli elementi autoaggiunti sono le funzioni a valori reali. Ovviamente una buona definizione di quantizzazione deve mappare elementi autoaggiunti di $\mathcal{P}$ in elementi autoaggiunti di $\mathcal{A}^\hbar$, cioè vogliamo, che per ogni $f\in\mathcal{P}$ venga preservata l'operazione *:

$$Q_\hbar(f^*)=Q_\hbar(f)^*$$

Ciò implica che per ogni $f\in\mathcal{P}$ tale che $f^*=f$, vale $Q_\hbar(f)^*=Q_\hbar(f)$. Notiamo che poichè l'algebra $\mathcal{A}^\hbar$ è non commutativa, tale applicazione non è un morfismo. Ciò implica che la quantizzazione dell'algebra di Poisson è invariante sotto l'operazione * ma non costituisce una sotto-*-algebra di $\mathcal{A}^\hbar$. Possiamo ora dare la definizione di *quantizzazione stretta.*

Definizione 3.5 (Quantizzazione stretta di un'algebra di Poisson)**.** *Sia $I\subset\mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che 0 sia un punto di accumulazione per I. Una quantizzazione stretta dell'algebra di Poisson $(\mathcal{P},\{\cdot,\cdot\})$, è una famiglia di applicazioni, una per ogni $\hbar\in I$:*

$$Q_\hbar:\mathcal{P}\to\mathcal{A}^\hbar$$

dove $\mathcal{A}^\hbar$ è una C-algebra, l'applicazione $Q_\hbar$ preserva l'operazione *, per $\hbar = 0$ l'applicazione Q_0 corrisponde all'identità su $\mathcal{P}$ e per ogni $f, g \in \mathcal{P}$ siano soddisfatte le seguenti proprietà (indichiamo con $||\cdot||_\hbar$ la C*-norma di $\mathcal{A}^\hbar$):*

1) ***Condizione di Dirac.*** *Per $\hbar$ tendente a zero, vale la relazione*

$$\lim_{\hbar\to 0} ||\frac{[Q_\hbar(f), Q_\hbar(g)]}{i\hbar} - Q_\hbar(\{f,g\})||_\hbar = 0$$

2) ***Condizione di von Neumann.*** *Vale la relazione:*

$$\lim_{\hbar\to 0} ||Q_\hbar(f)Q_\hbar(g) - Q_\hbar(fg)||_\hbar = 0$$

3) ***Condizione di Rieffel.*** *L'applicazione $I \ni \hbar \mapsto ||Q_\hbar(f)||_\hbar$ è continua.*

L'applicazione $Q_\hbar$ viene inoltre detta quantizzazione per deformazione stretta, se, in aggiunta alle altre proprietà vale anche:

4) ***Condizione di deformazione.*** *L'applicazione $Q_\hbar$ è iniettiva ed inoltre l'insieme $Q_\hbar(\mathcal{P})$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione, $Q_\hbar(f)Q_\hbar(g) \in Q_\hbar(\mathcal{P})$ per ogni $f, g \in \mathcal{P}$, cioè l'insieme $Q_\hbar(\mathcal{P})$ è una sotto-*-algebra di $\mathcal{A}^\hbar$.*

La condizione di Dirac indebolisce la condizione che avevamo richiesto alla quantizzazione canonica nel primo capitolo, ovvero non richiediamo che $[Q_\hbar(f), Q_\hbar(g)] = i\hbar Q_\hbar(\{f,g\})$ sia rispettata esattamente, ma solo che la "distanza" di questi due elementi in $\mathcal{A}^\hbar$ tenda a zero per $\hbar \to 0$. Ciò è in accordo col risultato ottenuto nel capitolo precedente, in quanto quantizzando le funzioni sul toro tale relazione era verificata solo al primo ordine in $\hbar$.

Di tale quantizzazione possono essere date delle definizioni che implicano condizioni di continuità più forti; tali condizioni sono importanti nel caso in cui si vuole ottenere la meccanica classica per $\hbar \to 0$. Per fare ciò introduciamo il concetto di *campo continuo di C*-algebre*. Partiamo con alcune definizioni preeliminari.

Sia I come sopra, e sia $\prod_{\hbar\in I}\mathcal{A}^\hbar$ il prodotto cartesiano delle C*-algebre al variare di $\hbar \in I$. Tale prodotto cartesiano può essere considerato un fibrato tangente sulla varietà I, Gli elementi K di $\prod_{\hbar\in I}\mathcal{A}^\hbar$ possono essere viste come delle sezioni del fibrato tangente, ovvero come delle applicazioni $I \ni \hbar \mapsto K(\hbar) \in \prod_{\hbar\in I}\mathcal{A}^\hbar$ che ad ogni elemento $\hbar \in I$ associa un elemento $K(\hbar)$ del fibrato tangente. Possiamo dotare $\prod_{\hbar\in I}\mathcal{A}^\hbar$ di somma, prodotto, involuzione e moltiplicazione per uno scalare eseguendo le rispettive operazioni in maniera puntuale. Con queste operazioni, $\prod_{\hbar\in I}\mathcal{A}^\hbar$ è una *-algebra. Definiamo ora il *campo continuo di C*-algebre*.

Definizione 3.6 (Campo continuo di C*-algebre)**.** *Un campo continuo di C*-algebre $(\{\mathcal{A}^\hbar\}_{\hbar\in I}, \mathcal{K})$ è una sotto-*-algebra $\mathcal{K} \subset \prod_{\hbar\in I}\mathcal{A}^\hbar$ tale che siano rispettate le seguenti condizioni:*

1) *L'applicazione $I \ni \hbar \mapsto ||K(\hbar)||_\hbar$ è continua per ogni $K \in \mathcal{K}$.*

2) *Per ogni* $\hbar \in I$*, l'insieme* $\{K(\hbar) : K \in \mathcal{K}\}$ *coincide con* $\mathcal{A}^\hbar$*.*

3) $\mathcal{K}$ *è localmente completo, ovvero, sia* $K \in \mathcal{K}$*, allora per ogni* $\hbar_0 \in I$ *e per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un elemento* $H \in \mathcal{K}$ *e un intorno* U_0 *di* $\hbar_0$ *tale che* $||K(\hbar) - H(\hbar)||_\hbar < \varepsilon$ *per ogni* $\hbar \in U_0$*.*

Gli elementi di $\mathcal{K}$ sono detti *sezioni continue*. Un campo continuo di C*-algebre è quindi una collezione di applicazioni che ad ogni $\hbar$ fanno corrispondere un elemento di $\mathcal{A}^\hbar$. Inlotre, fissato $\hbar$, tutte gli elementi $K \in \mathcal{K}$, calcolati in $\hbar$, costituiscono tutta l'algebra $\mathcal{A}^\hbar$. Sussiste il seguente lemma:

Lemma 3.7. *Sia* $K \in \mathcal{K}$ *e* $u : I \to \mathbb{C}$ *una funzione continua, allora l'applicazione* $\hbar \mapsto u(\hbar)K(\hbar)$ *appartiene a* $\prod_{\hbar \in I} \mathcal{A}^\hbar$*.*

Dato un campo continuo di C*-algebre, le sezioni limitate e continue $K \in \mathcal{K}$ costituiscono una C*-algebra con la seguente C*-norma:

$$||K||_{sup} := \sup_{\hbar \in I} ||K(\hbar)||_\hbar$$

Introduciamo la notazione $ev_\hbar(K) := K(\hbar)$. Diamo ora la definizione di quantizzazione continua.

Definizione 3.8 (quantizzazione continua)**.** *Sia* $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\})$ *un'algebra di Poisson,* $\mathcal{K} \subset \prod_{\hbar \in I} \mathcal{A}^\hbar$ *un campo continuo di C*-algebre, con I come sopra e sia Q un'applicazione lineare che commuta con l'involuzione:*

$$Q : \mathcal{P} \to \mathcal{K}$$

La tripla $(\{\mathcal{A}^\hbar\}_{\hbar \in I}, \mathcal{K}, Q)$ *è detta quantizzazione continua dell'algebra di Poisson* $(\mathcal{P}, \{\cdot,\cdot\})$ *se sono valide le seguenti condizioni:*

1) *L'algebra di Poisson* $\mathcal{P}$ *è una sottoalgebra di* $\mathcal{A}^0$ *e* $ev_0(Q(f)) = f$ *per ogni* $f \in \mathcal{P}$*.*

2) *La condizione di Dirac è verificata per l'applicazione* $Q_\hbar := ev_\hbar \circ Q$*,* $\hbar \in I$*.*

Per come l'abbiamo definita, la quantizzazione continua è quindi caratterizzata da tre elementi: il primo $\{\mathcal{A}^\hbar\}_{\hbar \in I}$ individua la C*-algebra alla quale appartengono le osservabili quantistiche, il secondo elemento $\mathcal{K}$ indiviua le particolari sezioni continue scelte e quindi individua il comportamento della funzione $\hbar \mapsto ||K(\hbar)||_\hbar$, il terzo elemento Q individua la relazione presente tra osservabili classiche e le sezioni continue. Notiamo che se $(\{\mathcal{A}^\hbar\}_{\hbar \in I}, \mathcal{K}, Q)$ è una quantizzazione continua, allora la coppia $(\mathcal{A}^\hbar, Q_\hbar)_{\hbar \in I}$ è una quantizzazione stretta, dove $Q_\hbar$ è definito come prima, cioè $Q_\hbar = ev_\hbar \circ Q$. Infatti, La condizione di Dirac è verificata per costruzione dell'applicazione $Q_\hbar$. Resta da dimostrare che sia verificata anche la condizione di von Neumann, ovvero che, per ogni $f, g \in \mathcal{P}$, sia rispettata la condizione:

$$\lim_{\hbar \to 0} ||Q_\hbar(f)Q_\hbar(g) - Q_\hbar(fg)||_\hbar = 0$$

Per verificare ciò, poniamo $K = Q(f)Q(g) - Q(fg)$, per definizione sarà quindi $K(\hbar) = Q_\hbar(f)Q_\hbar(g) - Q_\hbar(fg)$.

Dalla definizione di quantizzazione continua, sappiamo che $Q_0(f) = f \;\; \forall f \in \mathcal{P}$, avremo che quindi $K(0) = fg - fg = 0$. Invece, dalla definizione di campo continuo di C*-algebre sappiamo che l'applicazione $\hbar \mapsto ||K(\hbar)||_\hbar$ è continua per ogni $K \in \mathcal{K}$. Essendo tale applicazione continua e valendo $K(0) = 0$ per $\hbar = 0$, è verificata la condizione di von Neumann.

Abbiamo quindi verificato che ad ogni quantizzazione continua corrisponde una quantizzazione stretta. Per quanto riguarda l'opposto, sussiste il seguente risultato:

Teorema 3.9. *Sia $(\mathcal{A}^\hbar, Q_\hbar)_{\hbar \in I}$ una quantizzazione stretta dell'algebra di Poisson $(\mathcal{P}, \{\cdot, \cdot\})$ tale che la copertura *-algebrica di $Q_\hbar(\mathcal{P})$ è densa in $\mathcal{A}^\hbar$ per ogni $\hbar \in I$. Le seguenti asserzioni sono allora equivalenti:*

1) *L'applicazione $I \in \hbar \mapsto ||P(Q_\hbar(f_1) \cdots Q_\hbar(f_m))||_\hbar$ (dove P è una qualsiasi funzione polinomiale di grado m) è continua per ogni $f_k \in \mathcal{P}$ e $m \in \mathbb{N}$.*

2) *Esiste una quantizzazione continua $(\{\mathcal{A}^\hbar\}_{\hbar \in I}, \mathcal{K}, Q)$ che soddisfa la relazione $Q_\hbar = \alpha_\hbar \circ Q$ per ogni $\hbar \in I$.*

Per tutte le definizioni precedenti abbiamo dato proprietà riguardanti solo il limite $\hbar \to 0$, ed è per questo che la quantizzazione di un'algebra di Poisson non è univoca. Diamo allora la definizione di *quantizzazioni strette equivalenti*:

Definizione 3.10. *Due quantizzazioni strette $(\mathcal{A}^\hbar, Q_\hbar)$ e $(\mathcal{A}'^\hbar, Q'_\hbar)$ della stessa algebra di Poisson $(\mathcal{P}, \{\cdot, \cdot\})$ sono dette equivalenti se $\mathcal{A}^\hbar = \mathcal{A}'^\hbar$ per ogni $\hbar \in I$ e se l'applicazione:*

$$\hbar \mapsto ||Q_\hbar(f) - Q'_\hbar(f)||_\hbar$$

è continua per ogni $f \in \mathcal{P}$.

Essendo, per definizione di quantizzazione stretta $Q_0(f) = Q'_0(f) = f$, segue che $\lim_{\hbar \to 0} ||Q_\hbar(f) - Q'_\hbar(f)|| = 0$.

Concludiamo ora con la seguente osservazione. Siano $Q : \mathcal{P} \to \mathcal{A}^\hbar$ e $Q' : \mathcal{P} \to \mathcal{A}^\hbar$ due quantizzazioni continue dell'algebra di Poisson $\mathcal{P}$ tali che $\mathcal{K} = \prod_{\hbar \in I} \mathcal{A}^\hbar$ sia lo stesso campo continuo di C*-algebre. Allora le quantizzazioni strette $Q_\hbar$ e $Q'_\hbar$ associate a tali quantizzazioni continue sono equivalenti.

Capitolo 4

Esempi di quantizzazione stretta

In quest'ultimo capitolo vogliamo dare alcuni esempi su come si possa costruire una quantizzazione stretta a partire da una determinata algebra di funzioni. Considereremo, in particolare, due esempi: l'algebra delle funzioni infinitamente differenziabili su una varietà di Poisson M e l'algebra delle funzioni infinitamente differenziabili sul toro $\mathbb{T}^2$. Nel caso della quantizzazione delle funzioni sul toro, ritroveremo le stesse regole di commutazione alle quali obbediscono gli operatori di Weyl, introdotti nel capitolo 2.

4.1 Quantizzazione stretta tramite azioni di $\mathbb{R}^d$

Sia M una varietà di Poisson. In questa sezione vogliamo definire su $C^\infty(M)$ un prodotto, che indicheremo con $\times_\hbar$ e una C*-norma, che indicheremo con $|| \cdot ||_\hbar$, e illustreremo in che modo da queste strutture possiamo ottenere una quantizzazione stretta. Per fare ciò, diamo le seguenti definizioni:

Definizione 4.1 (Gruppo di Lie)**.** *Un gruppo di Lie è un gruppo dotato di struttura di varietà differenziabile, tale che l'operazione di moltiplicazione e l'operazione di inversione sono due applicazioni differenziabili.*

Definizione 4.2 (Azione di gruppi di Lie su varietà)**.** *Sia G un gruppo di Lie e sia M una varietà. Un'azione liscia di G su M è un'applicazione $\beta : G \times M \to M$ di classe C^∞ tale che, indicando con $\beta_g(p)$ l'immagine della coppia $(g, p) \in G \times M$ per ogni $g_1, g_2 \in G$ e per ogni $p \in P$ si ha:*

$$\beta_{g_1}(\beta_{g_2}(p)) = \beta_{g_1 g_2}(p)$$

$$\beta_e(p) = p$$

dove e è l'elemento neutro del gruppo.

Definiamo anche l'azione di un gruppo di Lie su un'algebra:

Definizione 4.3 (Azione di un gruppo di Lie su un'algebra). *Un'azione di un gruppo di Lie G su un'algebra $\mathbb{A}$ è un'applicazione $\alpha : G \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che, per ogni $a, b \in \mathbb{A}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $g \in G$ valgono le seguenti proprietà:*

$$\alpha_g(ab) = \alpha_g(a)\alpha_g(b)$$

$$\alpha_g(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \lambda_1 \alpha_g(a) + \lambda_2 \alpha_g(b)$$

Vogliamo ora esporre alcuni risultati, tutti dimostrati da Rieffel in [14], su come sia possibile costruire una quantizzazione stretta tramite il prodotto $\times_\hbar$. Definiamo tale prodotto tramite un'azione liscia di un gruppo di Lie su una varietà.

Sia:

$$\beta : \mathbb{R}^d \times M \to M$$

$$v, p \mapsto \beta_v(p)$$

un'azione liscia di $\mathbb{R}^d$ su M, dove $v \in \mathbb{R}^d$ e $p \in M$. Richiediemo inoltre una condizione tecnica sull'azione α: richiediamo che essa sia fortemente continua, cioè che per ogni elemento p di M la funzione $\mathbb{R}^d \ni v \mapsto \alpha_v(p) \in M$ è continua rispetto alle rispettive topologie. A partire da un'azione liscia di $\mathbb{R}^d$ su M fortemente continua è possibile definire un'azione liscia di $\mathbb{R}^d$ su $C^\infty(M)$ nella seguente maniera:

$$\alpha : \mathbb{R}^d \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

$$\alpha_v(f)(p) := f(\beta_v(p))$$

Consideriamo in generale una C*-algebra $\mathbb{A}$ ed un'azione fortemente continua di $\mathbb{R}^d$ su $\mathbb{A}$: $\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, con $d = 2n$ un numero pari. Supponiamo che su tale C*-algebra siano definite delle parentesi di Poisson. Prima di andare avanti, facciamo un'osservazione: è possibile definire delle parentesi di Poisson, ad esempio per funzioni f, g differenziabili su $\mathbb{R}^n$, tramite una matrice antisimmetrica θ_{ij} nella seguente maniera:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{n} \theta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

Allo stesso modo, se consideriamo algebre astratte, è possibile definire una parentesi di Poisson su un'algebra mediante una matrice antisimmetrica. Noi considereremo la seguente matrice antisimmetrica a blocchi $d \times d$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

dove con I abbiamo indicato la matrice identità $\frac{d}{2} \times \frac{d}{2}$ e con 0 la matrice $\frac{d}{2} \times \frac{d}{2}$ contenente tutti elementi nulli. Notiamo che nel caso $d = 2$, per funzioni definite su $\mathbb{R}^2$, otteniamo la definizione di parentesi di Poisson data nel primo capitolo. Indichiamo ora con $\mathbb{A}^\infty$ l'insieme degli elementi $a \in \mathbb{A}$ tale che l'applicazione $G \ni g \mapsto \alpha_g(a)$ è un'applicazione differenziabile. Dati due elementi $a, b \in \mathbb{A}^\infty$ possiamo allora definire il prodotto deformato $\times_\hbar$ su $\mathbb{A}^\infty$ nella seguente maniera:

$$a \times_\hbar b := \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \alpha_x(a)\alpha_y(b) e^{\frac{2i}{\hbar} x \cdot Jy} dxdy$$

Si verifica che tale prodotto è associativo, ed inoltre, se al posto della matrice J sostituiamo la matrice nulla otteniamo che $a \times_\hbar b = ab$, ovvero il prodotto deformato si riduce al prodotto della C*-algebra. Inoltre vale la relazione:

$$(a \times_\hbar b)^* = b^* \times_\hbar a^*$$

In [14], Rieffel dimostra che esiste una norma $||\cdot||_\hbar$ su $\mathbb{A}^\infty$ tale che esiste una C*-algebra $\mathcal{A}^\hbar$ chiusura di $(\mathbb{A}^\infty, \times_\hbar)$ in tale norma. Definiamo allora la seguente applicazione:

$$Q_\hbar : \mathbb{A}^\infty \to \mathcal{A}^\hbar$$

$$\mathbb{A}^\infty \ni a \mapsto a \in \mathcal{A}^\hbar$$

ovvero l'applicazione $Q_\hbar$ è linclusione di $\mathbb{A}^\infty$ in $\mathcal{A}^\hbar$. Rieffel dimostra che tale applicazione è una quantizzazione stretta dell'algebra $\mathbb{A}^\infty$.

4.2 Quantizzazione stretta di $C^\infty(\mathbb{T}^2)$

Consideriamo nuovamente l'esempio delle funzioni infinitamente differenziabili sul toro: stavolta alla luce della quantizzazione stretta. Giungeremo al risultato che le funzioni sul toro quantizzato formano un'algebra isomorfa all'algebra generata dagli operatori di Weyl, che abbiamo precedentemente chiamato come algebra del toro non commutativo. Come nel paragrafo precedente, definiremo un'azione di $\mathbb{R}^2$ su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ per poter poi definire un prodotto deformato $\times_\hbar$ su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Come detto precedentemente, ogni funzione $F \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ può essere scritta nella seguente maniera:

$$F(q,p) = \sum_{m,n} a_{mn} U^m V^n$$

con $U(q,p) = e^{2\pi i q}$ e $V(q,p) = e^{2\pi i p}$e $m, n \in \mathbb{Z}$ e i coefficienti a_{mn} rispettano la condizione di decrescita rapida. Consideriamo ora l'azione α di $\mathbb{R}^2$ su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ che agisce sulle funzioni $U(q,p)$ e $V(q,p)$ nella seguente maniera (sia $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$):

$$\alpha_w(U) = e^{2\pi i(q+w_1)}$$

$$\alpha_w(V) = e^{2\pi i(p+w_2)}$$

Estendiamo tale azione a tutte le funzioni sul toro per linearità. Possiamo ora definire, per due funzioni $F, G \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, il prodotto $\times_\hbar$:

$$F \times_\hbar G = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \alpha_u(F)\alpha_v(G) e^{\frac{2i}{\hbar}(u_1 v_2 - u_2 v_1)} dudv$$

con $u = (u_1, u_1), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Prima di procedere alla costruzione della quantizzazione stretta, enunciamo il seguente risultato:

Proposizione 4.4. *Per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, vale:*

$$U^aV^b \times_\hbar U^cV^d = e^{\pi i\theta(ad-bc)}U^{a+c}V^{b+d}$$

con $\theta = -2\pi\hbar$.

Dimostrazione. Effettuiamo il calcolo diretto:

$$U^aV^b\times_\hbar U^cV^d = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} e^{a2\pi i(q+u_1)}e^{b2\pi i(p+u_2)}e^{2\pi i(q+v_1)}e^{d2\pi i(p+v_2)}e^{\frac{2i}{\hbar}(u_1v_2-u_2v_1)}dudv =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 U^{a+c}V^{b+d}\int_{-\infty}^{+\infty} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} du_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a2\pi iu_1}e^{b2\pi iu_2}e^{2i(c\pi-\frac{u_2}{\hbar})v_1}dv_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i(d\pi+\frac{u_1}{\hbar})}dv_2$$

Ricordiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk = 2\pi\delta(x)$$

Dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac, che agisce su una funzione $f(x)$, continua intorno a 0, nella seguente maniera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

Continuando il calcolo del prodotto deformato, otteniamo che:

$$U^aV^b \times_\hbar U^cV^d =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)(2\pi)^2U^{a+c}V^{b+d}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a2\pi iu_1}\delta\left(2\left(d\pi+\frac{u_1}{\hbar}\right)\right)du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b2\pi iu_2}\delta\left(2\left(c\pi-\frac{u_2}{\hbar}\right)\right)du_2$$

Per effettuare tali integrali, usiamo il seguente risultato:

$$\int_a^b \delta(g(x))f(x)dx = \sum_{x_k\in(a,b)} \frac{1}{|g'(x_k)|}f(x_k)$$

dove i punti x_k sono i punti nei quali la funzione $g(x)$ si annulla, $g'(x)$ è la derivata prima della funzione $g(x)$. Otteniamo quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a2\pi iu_1}\delta\left(2\left(d\pi+\frac{u_1}{\hbar}\right)\right)du_1 = \frac{\hbar}{2}e^{-ad2\pi^2 i\hbar}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{b2\pi iu_2}\delta\left(2\left(c\pi-\frac{u_2}{\hbar}\right)\right)du_2 = \frac{\hbar}{2}e^{bc2\pi^2 i\hbar}$$

In definitiva, otteniamo:

$$U^aV^b \times_\hbar U^cV^d = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2(2\pi)^2U^{a+c}V^{b+d}e^{-2\pi^2 i\hbar(ad-bc)} =$$

$$= U^{a+c}V^{b+d}e^{\pi i\theta(ad-bc)}$$

□

Notiamo che tale relazione è del tutto simile al prodotto di due operatori di Weyl (2.2). È possibile infatti costruire un isomorfismo tra l'insieme $(C^\infty(\mathbb{T}^2), \times_\hbar)$ delle funzioni infinitamente differenzibili su $\mathbb{T}^2$ con prodotto deformato e l'insieme $Q(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ della quantizzazione delle funzioni sul toro tramite gli operatori di Weyl. Infatti, consideriamo l'applicazione

$$\mathcal{F} : U^a V^b \mapsto W_\theta(a, b)$$

ed estendiamola alle combinazioni lineari di $U^a V^b$ per linearità. Tale applicazione definisce un isomorfismo di algebre, ovvero un'applicazione lineare, biettiva e che rispetta la condizione

$$\mathcal{F}(U^a V^b \times_\hbar U^c V^d) = \mathcal{F}(U^a V^b)\mathcal{F}(U^c V^d)$$

L'algebra $(C^\infty(\mathbb{T}^2), \times_\hbar)$ e l'algebra $Q(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ risultano quindi essere isomorfe.

Definiamo ora una norma su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Ad ogni funzione F infinitamente differenziabile sul toro associamo un'applicazione L_F che agisce su una funzione $G \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$:

$$L_F G := F \times_\hbar G$$

Poniamo quindi:

$$||F||_\hbar := ||L_F||_{op}$$

dove con $||\cdot||_{op}$ abbiamo indicato la norma operatoriale dell'applicazione L_F. Indichiamo con $C_\hbar$ l'insieme $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ma con il prodotto dato da $\times_\hbar$, con norma data da $||\cdot||_\hbar$ e con involuzione data dalla coniugazione complessa. Definiamo allora la quantizzazione $Q_\hbar$:

$$Q_\hbar : C^\infty(\mathbb{T}^2) \to C_\hbar$$

$$Q_\hbar : C^\infty(\mathbb{T}^2) \ni F \mapsto F \in C_\hbar$$

Con questa definizione di $Q_\hbar$, la condizione di Dirac della quantizzazione stretta, per due funzioni $F, G \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ diventa:

$$\lim_{\hbar \to 0} ||\frac{F \times_\hbar G - G \times_\hbar F}{i\hbar} - \{F, G\}||_\hbar = 0$$

Ricordiamo che le parentesi di Poisson sono calcolate col prodotto ordinario di $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. In [12] Rieffel dimostra che al variare di $\hbar$ le chiusure in norma $||\cdot||_\hbar$ degli insiemi $C_\hbar$ formano un campo continuo di C*-algebre, e che l'applicazione $Q_\hbar$ soddisfa le proprietà di una quantizzazione stretta. Quindi C_0 coincide con $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ con la moltiplicazione puntuale e la *sup-norma*. La quantizzazione delle funzioni sul toro, quindi, da come risultato elementi che formano un'algebra sul toro non commutativo.

Conclusioni

Abbiamo iniziato questa tesi illustrando alcuni aspetti generali della quantizzazione: ci è sembrato naturale chiedere che una quantizzazione rispetti (1.3). Il teorema "no-go" sancisce che non esiste una quantizzazione che rispetti tale proprietà e l'esempio del toro ci ha suggerito che tale relazione va indebolita. La quantizzazione stretta di Rieffel indebolisce (1.3) e si propone come una possibile definizione di quantizzazione.

Abbiamo anche illustrato degli esempi concreti su come si possa costruire una quantizzazione stretta soffermandoci soprattutto sul toro bidimensionale, che costituisce uno degli esempi più studiati. Un altro tra gli esempi di quantizzazione stretta più importanti, non trattato in questa tesi, è la deformazione della sfera; una trattazione di questo argomento è stata sviluppata da A. Connes ed altri autori in [2], [3], [4]. Inoltre, Rieffel in [13] fornisce un metodo per costruire quantizzazioni strette su una varietà M: tale costruzione si basa su azioni di $\mathbb{R}^d$ su M tramite il quale si può costruire un prodotto deformato tra funzioni.

Un problema che resta aperto è il costruire una quantizzazione stretta su funzioni definite su varietà che non ammettono azioni di $\mathbb{R}^d$ alle quali quindi non si può applicare la costruzione di Rieffel. Una prima generalizzazione è stata sviluppata in [1], nella quale si costruiscono delle deformazioni strette a partire da azioni di particolari gruppi (gruppi Kähleriani di Lie) su varietà, senza considerare nello specifico azioni di $\mathbb{R}^d$. Nonostante ciò, come nel caso di azioni di $\mathbb{R}^d$, non tutte le varietà ammettono azioni di tali gruppi. Ad oggi non esiste un metodo generale per costruire una quantizzazione stretta su una qualsiasi varietà differenziabile.

Bibliografia

[1] P. Bieliavsky, V. Gayral, *Deformation Quantization for Actions of Khählerian Lie Groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, 2015

[2] A. Connes and M. Dubois-Violette, *Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. Spherical manifolds and related examples*, Comm. Math. Phys., 230(3):539–579, 2002.

[3] A. Connes and M. Dubois-Violette. *Noncommutative finite dimensional manifolds. II. Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres*, Comm. Math. Phys., 281(1):23–127, 2008.

[4] A. Connes and G. Landi, *Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations*, Comm. Math. Phys., 221(1):141–159, 2001.

[5] K.R. Davidson, *C*-algebras by Example*, American Mathematical Society, 1996

[6] P.A.M. Dirac, *The fundamental equations of quantum mechanics*, Proc. Rpy. Soc. London ser. A, 1925

[7] C. Esposito, *Formality theory, from Poisson structures to Deformation Quantization*, Springer, 2015

[8] H.J. Groenewold, *On the principles of elementary quantum mechanics*, Physica 12, 1946

[9] S. Gutt, *Deformation Quantization and Group Actions*, Springer, 2017

[10] R. Honneger, A. Rieckers, *Some Continuous Field Quantization, Equivalent to the C*-Weyl Quantization*, Publication of the Research Institute for Mathematical, 2005

[11] N.P. Landsman, *Mathematical topics between Classical and Quantum Mechanics*, Springer, 1998

[12] M.A. Rieffel, *Deformation Quantization of Heisenberg Manifold*, Commun. Math. Phys. 122, 1989

[13] M.A. Rieffel, *Non-Commutative Tori - A Case Study of Non-Commutative Differentiable Manifold*, Contemporary Mathematics 105, 1990

[14] M.A. Rieffel, *Deformation Quantization for Actions of R^d*, Memoirs of the American Mathematical Society 506, 1993

[15] M.A. Rieffel, *Quantization and C*-algebras*, Contemporary Mathematics 167, 1994

[16] M.A. Rieffel, *Questions on Quantization*, Contemporary Mathematics 228, 1998

[17] L. Van Hove, *Sur Certaines représentasions unitaries d'un groupe infini de transformations*, Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique XXVI, 1951

[18] J.C. Varilly, *An introduction to Noncommutative Geometry*, European Mathematical Society, 2006

[19] S. Waldmann, *Poisson-Geometrie und Deformations-quantisierung*, Springer, 2007