

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

L'equazione integrale di Abel

Relatore:

Dott. Raffaele Carlone

Correlatore:

Dott. Domenico Finco

Candidato:

Giuseppe Lipardi

Matricola: N85000829

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1	L'equazione integrale di Abel	4
1.1	Su un problema di meccanica	4
1.2	Condizioni di esistenza e unicità	5
2	L'operatore integrale di Abel	11
2.1	Introduzione all'operatore di Abel	11
2.2	Proprietà dell'operatore di Abel	12
2.2.1	Spazi L^p	12
2.2.2	Spazi di Holder	13
2.2.3	Spazi di Sobolev	13
3	FNS Equation	15
3.1	Caso Frazionario FNS Equation come limite	15
3.2	Equazione di Schrödinger frazionaria con nonlinearità concentrata	17
3.2.1	Notazione	17
3.2.2	Caso libero	18
3.2.3	Perturbazione lineare di tipo delta	18
3.2.4	Perturbazione non lineare di tipo delta	19

Introduzione

In questo elaborato di tesi analizzeremo, a partire dal lavoro originale di Niels Henrik Abel del 1823, "Résolution d'un problème de mécanique" [1], una classe di equazioni integrali di particolare interesse per la fisica matematica.

In questo articolo viene proposto un tipo di problema che costituisce il prototipo di un "problema inverso". Con questa locuzione ci si riferisce a problemi fisici o matematici di cui è nota la soluzione a partire da taluni dati iniziali, mentre non risulta banale il ricavare quei dati iniziali dalla conoscenza della soluzione. In particolare, il problema analizzato da Abel consiste nel determinare il profilo di uno "scivolo" a partire dalla conoscenza della dipendenza funzionale fra quota e tempi di arrivo di un punto materiale libero di scivolare sulla curva stessa. Il "problema diretto", ovvero quello di ricavare la dipendenza funzionale fra quota e tempi di arrivo noto il profilo della curva, è completamente conosciuto. Il problema inverso conduce alla risoluzione di equazioni integrali di Volterra di seconda specie del tipo

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{\sqrt{z-y}} dy = f(z) \quad (1)$$

ove f è una funzione nota detta "forzante" e φ è la funzione incognita. L'idea di analizzare problemi inversi per ricavare nuove informazioni sul sistema fisico in analisi è oggi una pratica consolidata e Abel può essere considerato uno dei precursori di tale approccio.

La risoluzione del problema di Abel contiene, in forma embrionale, alcuni concetti estensivamente utilizzati in ambiti molto diversi della matematica applicata (ad esempio nella meccanica del continuo, nella meccanica quantistica e anche nell'analisi dei processi stocastici) e comunemente indicati come calcolo frazionario: in questo lavoro vengono infatti introdotti i concetti di integrale e di derivata di ordine generalizzato a un qualsiasi numero reale. Questi operatori sono comunemente detti integrale frazionario e derivata frazionaria. Il problema legato alla definizione del calcolo frazionario è noto sin dagli albori del calcolo stesso. Fu proprio questo articolo di Abel che permise ai matematici dell'Ottocento di dare una prima sistematizzazione del calcolo frazionario.

Nel lavoro di Abel viene quindi illustrata la stretta connessione fra calcolo frazionario e fisica. L'utilizzo del calcolo frazionario in ambiti diversi dalle applicazioni in meccanica classica richiede l'implementazione dello stesso in spazi funzionali diversi da quello delle funzioni integrabili e l'analisi e lo studio delle sue proprietà di regolarizzazione. Mentre nel primo capitolo è contenuta la trattazione del problema originale, nel secondo discuteremo la formalizzazione rigorosa della "trasformata di Abel" nell'ambito del calcolo frazionario con particolare attenzione alla sua implementazione negli spazi di Sobolev frazionari. Questa scelta è motivata dal modello analizzato nel terzo capitolo dove discuteremo un modello di laplaciano frazionario nonlineare e la risoluzione del corrispondente problema di Cauchy. La motivazione, oltre che matematica, nello studio di questa equazione risiede nel fatto che tale operatore corrisponde al limite continuo del laplaciano discreto con interazioni a

lunga distanza [2]. Vedremo come le proprietà matematiche della “trasformata di Abel” generalizzata siano fondamentali nel problema di buona positura.

La struttura matematica analizzata da Abel origina una struttura del calcolo particolarmente rilevante (vedi [3], [4]) per le applicazioni della fisica matematica ed in particolare dei modelli di meccanica quantistica caratterizzati da interazioni nonlineari concentrate.

Capitolo 1

L'equazione integrale di Abel

1.1 Su un problema di meccanica

Nel 1823 il matematico tedesco Niels Henrik Abel pubblica un articolo dal nome "Résolution d'un problème de mécanique".

In questo articolo viene analizzato un semplice problema meccanico. Il modello è quello di un punto materiale che scivola lungo una guida, senza attrito, soggetto unicamente alla forza peso. Supponendo di conoscere i tempi di percorrenza a partire da una quota arbitraria, in cui ha avuto inizio il moto, si vuole determinare il profilo dello "scivolo".

Riproduciamo qui la trattazione che lo stesso Abel ha dato del problema.

Si consideri il profilo dello scivolo, rappresentato da una curva nel piano xy di equazione $x = \phi(y)$. Il sistema di riferimento viene scelto in modo che $\phi(0) = 0$.

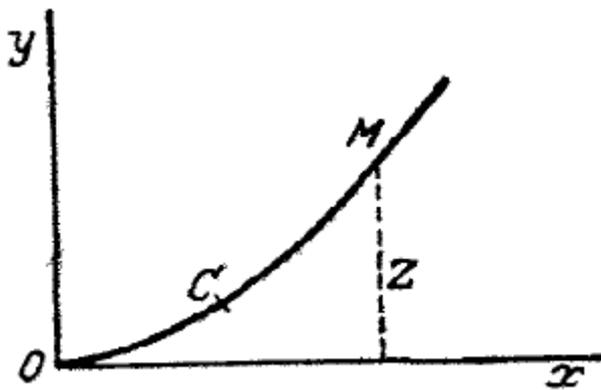


Figura 1.1: Figura tratta dall'articolo "Su un problema di Abel" di Leonida Tonelli [5].

Il punto materiale è soggetto alla sola forza peso ed è libero di scivolare sulla curva. Indichiamo con z la quota iniziale e con y un qualunque valore della quota compreso tra 0 e z . Indichiamo inoltre con τ il tempo di percorrenza per raggiungere l'origine. Vediamo come a partire dalla conoscenza di $\tau = f(z)$ sia possibile ricavare l'equazione della curva $x = \phi(y)$.

Si consideri il sistema di riferimento dell'ascissa curvilinea:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} d\sigma \quad (1.1)$$

ed indichiamo con $v = \frac{ds}{dt}$ la velocità scalare.

Dalla relazione $x = \phi(y)$, abbiamo che possiamo riscrivere (1.1) come

$$s(t) = \int_0^{y(t)} \sqrt{1 + \phi'^2} dy \quad (1.2)$$

A partire dal principio di conservazione dell'energia

$$mgz = \frac{1}{2}mv^2 + mgy, \quad (1.3)$$

si ricava la seguente relazione:

$$\frac{ds}{\sqrt{2g(z-y)}} = dt. \quad (1.4)$$

Dato che $ds = \sqrt{1 + \phi'^2} dy$ e per definizione $t = f(y)$, integrando la (1.4) fra 0 e z si ricava che:

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1 + \phi'^2}}{\sqrt{2g(z-y)}} dy = f(z). \quad (1.5)$$

L'equazione (1.5) risulta essere un'equazione integrale nell'incognita ϕ e avente come "forzante" la funzione $f(z)$.

Mediante la posizione $\sqrt{2g} = 1$ e $\varphi(y) = \sqrt{1 + \phi'^2}$ la (1.5) si scriverà come:

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{\sqrt{z-y}} dy = f(z) \quad (1.6)$$

Nel lavoro originale Abel considera una classe di problemi più generali del tipo:

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{(z-y)^\alpha} dy = f(z). \quad (1.7)$$

La soluzione formale di tale problema, contenuta nel lavoro di Abel, si scrive come

$$\varphi(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(z)}{(y-z)^{1-\alpha}} dz \quad (1.8)$$

per $0 < \alpha < 1$ e dove la funzione Γ è la funzione di Eulero così definita:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.9)$$

1.2 Condizioni di esistenza e unicità

Vogliamo ora indagare le condizioni di esistenza ed unicità della soluzione dell'equazione integrale di Abel:

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{(z-y)^\alpha} dy = f(z) \quad (1.10)$$

con $0 < \alpha < 1$.

Per semplicità studiamo tale equazione per $z \in (0, 1)$. Obiettivo di tale paragrafo sarà dimostrare il seguente teorema che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente perché vi sia una e una sola soluzione.

Teorema 1.2.1.

Sia $0 < \alpha < 1$. Se la funzione $f(z)$ è assolutamente continua in tutto $(0, 1)$, l'equazione integrale di Abel (1.8) ammette una ed una sola soluzione integrabile e tale soluzione è data da

$$\varphi(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{f(z)}{(y-z)^{1-\alpha}} dz$$

o equivalentemente

$$\varphi(y) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[\frac{f(0)}{y^{1-\alpha}} + \int_0^y \frac{f'(z)}{(y-z)^{1-\alpha}} dz \right]$$

Per dimostrare questo teorema avremo bisogno di alcuni risultati contenuti nei prossimi lemmi.

Lemma 1.2.2. Sia $0 < \alpha < 1$ e sia T il triangolo del piano xy avente per vertici i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Se:

1. $A(x, y)$ è una funzione limitata e integrabile in T ;
2. $\varphi(y) \in L^1(0, 1)$;

allora:

a) esiste finito, per quasi ogni $x \in (0, 1)$, l'integrale

$$\int_0^x \frac{A(x, y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y) dy$$

b) esistono finiti, per ogni $z \in (0, 1)$ gli integrali

$$\int_0^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{A(x, y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y) dy; \quad \int_0^z \varphi(y) dy \int_y^z \frac{A(x, y)}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} dx$$

e inoltre risultano uguali.

Dimostrazione.

Consideriamo la funzione

$$h(x, y) = \frac{A(x, y)\varphi(y)}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} \quad (1.11)$$

e mostriamo che $\forall z \in (0, 1)$ il nucleo $h(x, y)$ è integrabile nel triangolo T_z di vertici $(0, 0)$, $(z, 0)$, (z, z) .

Per ipotesi sappiamo che:

$$\exists N > 0 : |A(x, y)| \leq N \quad \forall (x, y) \in T$$

Ne deriva che:

$$|h(x, y)| = \left| \frac{A(x, y)\varphi(y)}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} \right| \leq \frac{N|\varphi(y)|}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha}$$

Ricordando che

$$\int_y^z \frac{1}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1-\alpha}t^\alpha} dt = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad 0 < y < z$$

troviamo che:

$$\begin{aligned} \int_0^z \varphi(y) dy \int_y^z \frac{A(x,y)}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} dx &\leq N \int_0^z |\varphi(y)| dy \int_y^z \frac{A(x,y)}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} dx = \\ &= \frac{N\pi}{\sin \pi\alpha} \int_0^z |\varphi(y)| dy \end{aligned}$$

Dall'ipotesi $\varphi(y)$ sommabile in $(0,1)$. Ne deriva che la funzione $h(x,y)$ è integrabile in $T_z, \forall z \in (0,1)$. Grazie a questo risultato possiamo affermare che per il teorema di Fubini il lemma è dimostrato. \square

Utilizzando il risultato di questo lemma è possibile verificare una condizione di esistenza e unicità più debole per l'equazione integrale di Abel.

Teorema 1.2.3.

Sia $0 < \alpha < 1$ e sia $f(x) \in L^1(0,1)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $\varphi(y) \in L^1(0,1)$ verifichi l'equazione integrale di Abel (1.10) per quasi ogni $x \in (0,1)$ è che soddisfi le seguente equazione

$$\int_0^z \varphi(y) dy = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx \quad \forall z \in (0,1)$$

Osservato che la funzione

$$g(z) = \int_0^z \varphi(y) dy$$

è una funzione assolutamente continua in tutto l'intervallo $(0,1)$ e che si annulla in 0, il teorema è equivalente al seguente enunciato.

Teorema 1.2.4.

Sia $0 < \alpha < 1$ e sia $f(x) \in L^1(0,1)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $\varphi(y) \in L^1(0,1)$ verifichi l'equazione integrale di Abel (1.10) per quasi ogni $x \in (0,1)$ è che l'integrale

$$\int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx$$

sia una funzione della z assolutamente continua in tutto $(0,1)$ e nulla per $z = 0$.

Dimostrazione del Teorema 1.2.3.

Per dimostrare il teorema consideriamo un caso più generale dato da:

$$\int_0^x \frac{A(x,y)\varphi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x)$$

dove $A(x,y)$ è una funzione limitata e integrabile in T (osserviamo che per l'equazione di Abel $A(x,y) = 1$, quindi l'assunzione fatta comprende il caso di nostro interesse).

Supponiamo che l'equazione appena scritta valga per quasi ogni $x \in (0,1)$. Per il lemma 1.2.2, sappiamo che esiste finito il seguente integrale:

$$\int_0^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{A(x,y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y) dy \quad \forall z \in (0,1)$$

Ne deriva che vale l'equazione

$$\int_0^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{A(x,y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y) dy = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx \quad \forall z \in (0,1)$$

Ricordando che nel nostro caso particolare $A(x, y) = 1$ e che

$$\int_y^z \frac{1}{(z-x)^{1-\alpha}(x-y)^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1-\alpha}t^\alpha} dt = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad 0 < y < z$$

abbiamo la tesi.

Supponiamo ora che valga l'uguaglianza

$$\int_0^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{A(x, y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y) dy = \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx \quad \forall z \in (0, 1)$$

che come abbiamo visto è equivalente alla condizione

$$\int_0^z \varphi(y) dy = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx \quad \forall z \in (0, 1)$$

nel caso particolare $A(x, y) = 1$.

Definiamo allora la seguente funzione

$$D(x) = \int_0^x \frac{A(x, y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y) dy - f(x)$$

Grazie al lemma 1.2.2, possiamo riscrivere la nostra ipotesi nel seguente modo

$$\int_0^z \frac{D(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx = 0 \quad \forall z \in (0, 1)$$

Allora tale funzione è integrabile in $(0, 1)$ e in tale intervallo risulta essere integrabile anche $D(x)$ dal momento che si può scrivere come

$$D(x) = \frac{D(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} (z-x)^{1-\alpha}$$

dove $(z-x)^{1-\alpha}$ è una funzione finita e continua delle x in tutto $(0, 1)$.

Vale banalmente la seguente uguaglianza:

$$\int_0^t \frac{dz}{(t-z)^\alpha} \int_0^z \frac{D(x)}{(z-x)^{1-\alpha}} dx = 0 \quad \forall t \in (0, 1)$$

Poiché $D(x)$ rispetta le ipotesi del lemma 1.2.2, è possibile invertire l'ordine delle integrazioni e scrivere

$$\int_0^t D(x) dx \int_x^t \frac{1}{(t-z)^\alpha (z-x)^{1-\alpha}} dz = 0 \quad \forall t \in (0, 1)$$

Ciò equivale a dire

$$\int_0^t D(x) dx = 0 \quad \forall t \in (0, 1)$$

ne deriva che $D(x) = 0$ quasi dappertutto in $(0, 1)$, per cui abbiamo dimostrato la tesi. \square

Ora che abbiamo provato l'esistenza e l'unicità di una soluzione quasi ovunque nell'intervallo $(0, 1)$, ciò che vogliamo fare è esibire una funzione $\varphi(y)$ che verifichi l'equazione integrale di Abel in tutto $(0, 1)$. A questo scopo dobbiamo premettere un lemma.

Lemma 1.2.5.

Sia $0 < \alpha < 1$. Se la funzione $f(x)$ è assolutamente continua in $(0, 1)$, la funzione

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(y)}{(z-y)^\alpha} dy$$

è anch'essa assolutamente continua in $(0, 1)$ e la sua derivata è data quasi dappertutto da

$$F'(z) = \frac{f(0)}{z^\alpha} + \int_0^z \frac{f'(y)}{(z-y)^\alpha} dy$$

Dimostrazione.

Per dimostrare il lemma riscriviamo la funzione $F(z)$ integrando per parti il secondo membro:

$$F(z) = \frac{f(0)}{1-\alpha} z^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^z f'(y)(z-y)^{1-\alpha} dy$$

Osservato che

$$\frac{(z-y)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_y^z \frac{dx}{(x-y)^\alpha} \quad \text{per } 0 < y < z$$

possiamo sostituire tale espressione così da avere :

$$F(z) = \frac{f(0)}{1-\alpha} z^{1-\alpha} + \int_0^z f'(y) dy \int_y^z \frac{dx}{(x-y)^\alpha}$$

Applicando ora il lemma 1.2.2 all'integrale del secondo membro possiamo riscrivere

$$F(z) = \frac{f(0)}{1-\alpha} z^{1-\alpha} + \int_0^z dx \int_0^x \frac{f'(y)}{(x-y)^\alpha} dy$$

E' facile osservare che tale funzione è assolutamente continua in $(0, 1)$: infatti essa si può scrivere come integrale di funzioni sommabili. Ne deriva che la sua derivata è data quasi dappertutto dalle derivate dei due termini del secondo membro; con ciò il lemma è provato. \square

Il lemma appena provato ci permette di affermare che condizione necessaria e sufficiente, perché una funzione $\varphi(y) \in L^1(0, 1)$ verifichi l'equazione integrale di Abel(1.10) per quasi ogni $x \in (0, 1)$, è che la funzione $f(z)$ sia assolutamente continua in tutto $(0, 1)$.

Andiamo infine a dimostrare il teorema 1.2.1.

Dimostrazione del Teorema 1.2.1.

Come abbiamo appena visto, grazie al teorema 1.2.3 e al lemma 1.2.5 sappiamo che la funzione

$$\varphi(y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[\frac{f(0)}{y^{1-\alpha}} + \int_0^y \frac{f'(z)}{(y-z)^{1-\alpha}} dz \right]$$

risolve l'equazione integrale di Abel per quasi ogni $y \in (0, 1)$. Non ci resta che provare che tale espressione verifica l'equazione di Abel $\forall y \in (0, 1)$.

Andiamo quindi a sostituire tale espressione nell'equazione di Abel.

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{(z-y)^\alpha} dy =$$

$$= \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left[f(0) \int_0^z \frac{dy}{y^{1-\alpha} (z-y)^\alpha} + \int_0^z \frac{dy}{(z-y)^\alpha} \int_0^y \frac{f'(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx \right]$$

Il primo integrale del secondo membro è finito e vale

$$\int_0^z \frac{dy}{y^{1-\alpha} (z-y)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

Anche il secondo integrale, in virtù del lemma 1.2.2 esiste sempre finito. Ne deriva che l'espressione al primo membro esiste: ciò che resta da dimostrare è che tale integrale sia uguale a $f(z)$, $\forall z \in (0, 1)$.

Riscriviamo l'espressione:

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{(z-y)^\alpha} dy = f(0) + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^z \frac{dy}{(z-y)^\alpha} \int_0^y \frac{f'(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx$$

Sempre per il lemma 1.2.2 possiamo invertire l'ordine di integrazione:

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{(z-y)^\alpha} dy = f(0) + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^z f'(x) dx \int_x^z \frac{dy}{(z-y)^\alpha (y-x)^{1-\alpha}}$$

Dal momento che

$$\int_x^z \frac{dy}{(z-y)^\alpha (y-x)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

abbiamo la tesi

$$\int_0^z \frac{\varphi(y)}{(z-y)^\alpha} dy = f(0) + \int_0^z f'(x) dx = f(z).$$

□

In conclusione, abbiamo illustrato quali sono le condizioni di esistenza e unicità per una soluzione dell'equazione di Abel nello spazio delle funzioni integrabili ed inoltre si è trovata un'espressione esplicita di tale soluzione. Nel capitolo successivo analizzeremo le proprietà dell'equazione di Abel in spazi funzionali diversi in modo da poterne studiare le applicazioni in altri ambiti, come ad esempio in meccanica quantistica. Questo argomento costituirà l'oggetto del terzo capitolo.

Capitolo 2

L'operatore integrale di Abel

2.1 Introduzione all'operatore di Abel

Nel primo capitolo abbiamo studiato dal punto di vista classico l'equazione integrale di Abel

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha} dy = f(x), 0 < \alpha < 1 \quad (2.1)$$

andando ad analizzare il problema di esistenza e unicità della soluzione nello spazio di Lebesgue $L^1(0, 1)$. Nel corso di questo capitolo analizzeremo l'operatore di Abel nel contesto più generale del calcolo frazionario. In questo capitolo discuteremo, in particolare, alcuni risultati utili a definire le soluzioni di equazioni analoghe alla (2.1) negli spazi di Sobolev.

L'equazione (2.1) rientra nella classe delle equazioni integrali di Volterra del primo tipo

$$K\varphi = \int_0^x k(x-y)\varphi(y) dy = f(x)$$

Il kernel $k(x)$ è un funzione integrabile. Si può verificare il caso in cui esista un altro kernel $l(x)$, detto kernel associato a $k(x)$, anch'esso integrabile e tale che

$$\int_0^x l(x-y)k(y) dy = 1 \quad \forall x > 0$$

Questa condizione è conosciuta come condizione di Sonine e i kernel che la soddisfano sono chiamati kernel di Sonine.

Allora se introduciamo il kernel

$$a(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \quad x > 0, 0 < \alpha < 1$$

possiamo riscrivere l'equazione integrale di Abel in termini dell'operatore, che diremo di Abel,

$$A_\alpha : \varphi \mapsto A\varphi = a \star \varphi(x)$$

così da avere

$$A_\alpha \varphi = \int_0^x a(x-y)\varphi(y) dy = f(x).$$

Il kernel $a(x)$ appena definito risulta essere un kernel di Sonine ed il kernel ad esso associato è

$$b(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad x > 0, 0 < \alpha < 1.$$

Andiamo a verificare che sia soddisfatta la condizione di Sonine

$$\begin{aligned} \int_0^x b(x-y)a(y) dy &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} y^{-\alpha} dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\alpha} dt = 1 \end{aligned}$$

Tale uguaglianza deriva dalla funzione β di Eulero così definita:

$$\beta(r, s) = \int_0^1 (1-t)^{s-1} t^{r-1} dt = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

Nel nostro caso abbiamo che $s = \alpha$ e $r = 1 - \alpha$, da qui abbiamo che vale la condizione di Sonine.

Introdotta l'operatore di Abel, o anche trasformata di Abel, vogliamo ora studiarne le proprietà e in particolare vogliamo vedere come agisce su alcune classi di funzioni.

2.2 Proprietà dell'operatore di Abel

L'operatore di Abel introdotto nella sezione precedente è una generalizzazione del concetto di integrale a un indice reale qualsiasi: infatti di questo ne conserva tutte le proprietà, prima fra tutte la linearità. Allora l'operatore di Abel applicato ad una certa funzione $f(x)$ darà come risultato l'integrale di f di indice α :

$$I_\alpha f(x) = A_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy \quad 0 < \alpha < 1$$

Osserviamo che condizione perché esista tale funzione è che $f(x)$ sia integrabile. Inoltre evidenziamo che, per $\alpha = 0$, l'operatore di Abel fornisce l'integrale intero di $f(x)$.

Una proprietà peculiare dell'operatore integrale di Abel risulta essere la seguente:

$$I_\alpha(I_\beta f) = I_{\alpha+\beta} f \quad 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1 - \alpha.$$

Strettamente connesso all'idea di integrale frazionario vi è il concetto di derivata frazionaria. Dunque se ricordiamo l'equazione integrale di Abel e la sua soluzione, abbiamo che la definizione di questo nuovo operatore, che indicheremo con D_α , è già nota:

$$D_\alpha(I_\alpha \varphi) = \varphi = D_\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}} dy$$

Anche per l'operatore di derivazione D_α , abbiamo che per $\alpha = 1$ questo risulta essere l'usuale derivata della funzione a cui è applicato.

Vogliamo ora andare a definire, sulle classi di funzioni su cui agisce l'operatore di Abel, le proprietà di analiticità: in particolare si vuole studiare se esso sia in grado di mappare all'interno della stessa classe o anche di aumentare la regolarità delle funzioni stesse (per le dimostrazioni delle seguenti proposizioni si rimanda a [3], [4]).

2.2.1 Spazi L^p

Ricordiamo che gli spazi L^p sono gli spazi delle funzioni p -integrabili. Per questi spazi, in relazione alla trasformata di Abel, vale la seguente proposizione

Proposizione 2.2.1.

Siano $0 < \alpha < 1$ e $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. Se $u \in L^p(0, a)$, con $0 < a \leq +\infty$, allora $A_\alpha u \in L^{\frac{p}{1-\alpha p}}(0, a)$

$$\|A_\alpha u\|_{L^{\frac{p}{1-\alpha p}}} \leq c(\alpha, p) \|u\|_{L^p}.$$

2.2.2 Spazi di Holder

Definizione 2.1. Spazio di Holder

Sia $0 < \alpha < 1$. Definiamo $C^{0,\alpha}[0, a]$ spazio di Holder lo spazio delle funzioni $u \in C^0[0, a]$ che verificano la condizione di Holder:

$$[u]_\alpha = \sup_{x,y \in [0,a]} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Per questo spazio funzionale vale la seguente proposizione:

Proposizione 2.2.2.

Siano $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1 - \alpha$. Se $u \in C^{0,\beta}[0, a]$, con $0 < a \leq +\infty$, e $u(0)=0$, allora $A_\alpha u \in C^{0,\alpha+\beta}$ e

$$[A_\alpha u]_{\alpha+\beta} \leq c(\alpha, \beta)[u]_\beta.$$

2.2.3 Spazi di Sobolev

Definizione 2.2. Spazio di Sobolev

Siano $0 < \theta < 1$ e $1 < p < +\infty$. Definiamo $W^{\theta,p}(0, a)$ spazio di Sobolev lo spazio delle funzioni $u \in L^p(0, a)$ tali che

$$[u]_{W^{\theta,p}(0,a)} = \int_0^a \int_0^a \frac{|u(x) - u(t)|^p}{|x - t|^{1+p\theta}} dx dt < \infty$$

Se equipaggiamo tale spazio della norma $\|\cdot\|_{W^{\theta,p}(0,a)}$ data da

$$\|u\|_{W^{\theta,p}(0,a)} = \|u\|_{L^p(0,a)} + [u]_{W^{\theta,p}(0,a)}$$

lo spazio $W^{\theta,p}(0, a)$ è uno spazio di Banach.

Definito tale spazio funzionale andiamo a studiare come agisce l'operatore di Abel su tali funzioni. In particolare valgono le due seguenti proposizioni:

Proposizione 2.2.3.

Siano $0 < \alpha < 1$ e $0 < \theta < 1 - \alpha$. Se $u \in W^{\theta,1}(0, a)$, con $0 < a < +\infty$, allora

$$[A_\alpha u]_{W^{\theta+\alpha-\epsilon,1}(0,a)} \leq c(\alpha, \theta, \epsilon) a^\epsilon ([u]_{W^{\theta,1}(0,a)} + a^{-\theta} \|u\|_{L^1(0,a)}) \quad \text{con } \epsilon > 0.$$

Proposizione 2.2.4.

Siano $0 < \alpha < 1$ e $1 - \alpha < \theta < 1$. Se $u \in W^{\theta,1}(0, a)$, con $0 < a < +\infty$, allora $A_\alpha u \in W^{1,1}(0, a)$ e

$$\left\| \frac{d}{dx} A_\alpha u \right\|_{L^1(0,a)} \leq c(\alpha, \theta) a^{\theta+\alpha-1} ([u]_{W^{\theta,1}(0,a)} + a^{-\theta} \|u\|_{L^1(0,a)}).$$

Infine vogliamo andare a considerare alcuni risultati che ci serviranno nel corso del prossimo capitolo e che descrivono le proprietà di regolarizzazione dell'operatore di Abel negli spazi di Sobolev frazionari $W^{\mu,2}(\mathbb{R}) = H^\mu(\mathbb{R})$. Prima di procedere evidenziamo che diremo $u \in \dot{H}^\mu(\mathbb{R})$ se risulta che $[u]_{H^\mu(\mathbb{R})} < \infty$. Valgono allora i seguenti risultati:

Lemma 2.2.5. Sia $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\ell \in H^\mu(\mathbb{R})$, con $\mu \geq 0$ e $\text{supp}\{\ell\} \subset [0, r]$, per qualche $r \in \mathbb{R}^+$. Allora la funzione

$$\mathcal{L}(t) := \int_0^t \frac{\ell(\tau)}{(t - \tau)^{\frac{1}{2s}}} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

appartiene a $L_{loc}^2(\mathbb{R}) \cap \dot{H}^{\mu+1-\frac{1}{2s}}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\mathcal{L}(t) = (h * \ell)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{dove} \quad h(t) := \frac{H(t)}{t^{\frac{1}{2s}}} \quad (2.3)$$

e H è la funzione di Heaviside. La funzione $h(t)$ appena introdotta a meno di un fattore di proporzionalità è il kernel di Abel con $\alpha = \frac{1}{2s}$. Consideriamo inoltre la funzione così definita:

$$\mathcal{L}_r(t) := (h_r * \ell)(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{con} \quad h_r(t) := \frac{H(t) - H(t-r)}{t^{\frac{1}{2s}}}.$$

e tale che $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_r(t)$, per ogni $t \in [0, r]$. Dalle proprietà della convoluzione ricaviamo:

$$\|\mathcal{L}\|_{L^2(0,r)} \leq \|\mathcal{L}_r\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|h_r\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\ell\|_{L^2(\mathbb{R})} = r^{1-\frac{1}{2s}} \|\ell\|_{L^2(0,r)} < \infty.$$

Ne deriva che $\mathcal{L}(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Mostriamo ora che $\mathcal{L} \in \dot{H}^{\mu+1-\frac{1}{2s}}(\mathbb{R})$.

Dalle proprietà della convoluzione vale la seguente equazione:

$$\widehat{\mathcal{L}}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{h}(k) \widehat{\ell}(k)$$

dove

$$\widehat{h}(k) = \frac{d(s)}{k^{1-\frac{1}{2s}}}, \quad d(s) := \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2s})}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(1 - \frac{1}{2s}).$$

Ne segue

$$\int_{\mathbb{R}} ||k|^{\mu+1-\frac{1}{2s}} \widehat{\mathcal{L}}(k)|^2 dk \leq C_s \int_{\mathbb{R}} ||k|^\mu \widehat{\ell}(k)|^2 dk < \infty,$$

che conclude la dimostrazione. □

Lemma 2.2.6. *Sia $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\ell \in H^\mu(0, r)$, con $\mu \geq 0$ e $r \in \mathbb{R}^+$. Allora:*

(i) *se $\mu \in [0, \frac{1}{2})$, allora $\mathcal{L} \in H^{\mu+1-\frac{1}{2s}}(0, r)$;*

(ii) *se $\mu \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e $\ell(0) = 0$, allora $\mathcal{L} \in H^{\mu+1-\frac{1}{2s}}(0, r)$;*

(con \mathcal{L} definito da (2.2)). Inoltre,

$$\|\mathcal{L}\|_{H^{\mu+1-\frac{1}{2s}}(0,r)} \leq C_r \|\ell\|_{H^\mu(0,r)}.$$

Dimostrazione. Sia

$$\tilde{\ell}(t) := \begin{cases} \ell(t), & \text{if } t \in [0, r], \\ \ell(2r-t), & \text{if } t \in (r, 2r], \\ 0, & \text{if } t \in \mathbb{R} \setminus [0, 2r]. \end{cases}$$

Facilmente si trova

$$\|\tilde{\ell}\|_{H^\mu(0,2r)} \leq 2\|\ell\|_{H^\mu(0,r)},$$

e inoltre vale

$$\|\tilde{\ell}\|_{H^\mu(\mathbb{R})} \leq C \|\tilde{\ell}\|_{H^\mu(0,2r)}.$$

Ne segue che $\tilde{\ell}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 2.2.5 (con supporto in $[0, 2r]$, invece che in $[0, r]$), per cui

$$\tilde{\mathcal{L}}(t) := \int_0^t \frac{\tilde{\ell}(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} d\tau \in L^2_{loc}(\mathbb{R}) \cap \dot{H}^{\mu+1-\frac{1}{2s}}(\mathbb{R}).$$

Infine, osservando che $\tilde{\mathcal{L}}(t) = \mathcal{L}(t)$, per ogni $t \in [0, r]$, abbiamo la tesi. □

Le proprietà di regolarizzazione appena descritte, in particolare quelle viste per gli spazi di Sobolev, saranno essenziali nel corso del successivo capitolo nell'analisi del problema di Cauchy associato all'equazione di Schrodinger frazionaria non lineare.

Capitolo 3

FNS Equation

Le proprietà dinamiche dell'equazione di Schrödinger frazionaria sono, per quanto visto in precedenza, rilevanti sia per l'interesse matematico delle stesse, sia per le applicazioni ai modelli.

Nel primo capitolo abbiamo visto come la trasformata di Abel emerga in maniera naturale in problemi di meccanica classica. Nel secondo capitolo abbiamo poi analizzato le proprietà della trasformata di Abel dal punto di vista matematico. Nel terzo capitolo analizzeremo come il formalismo che abbiamo introdotto si possa applicare a problemi di meccanica quantistica. Nello specifico analizzeremo la risoluzione di alcuni problemi di Cauchy per l'equazione di Schrödinger con interazioni concentrate.

Questo tipo di problemi ha avuto un rilevante interesse fisico matematico per via della "risolubilità". In altri termini le soluzioni dei problemi evolutivi nello schema di interazione semplificata in questione saranno esplicite. Pertanto tutte le informazioni rilevanti sulla dinamica saranno ottenute direttamente dalle soluzioni.

Il calcolo frazionario, ed in particolare la trasformata di Abel, viene applicato a problemi lineari, non lineari, non autonomi e a problemi evolutivi che coinvolgono il laplaciano frazionario. Nel seguito discuteremo l'applicazione al caso frazionario, di recente interesse.

3.1 Caso Frazionario FNS Equation come limite

L'equazione di Schrödinger con laplaciano frazionario $(-\Delta)^\alpha$ può rappresentare il limite continuo di sistemi fisici quantistici discreti in cui le interazioni sul reticolo sono a grande distanza, e decadono come l'inverso di potenze. Nell'articolo [2] è contenuta una derivazione rigorosa di tale limite e sono analizzati casi specifici come ad esempio modelli di trasporto di carica in biopolimeri. Altre possibili applicazioni sono nei modelli di stelle di bosoni pseudorelativistiche [6].

In un lavoro più recente [7] viene analizzata la dinamica di una equazione di Schrödinger con laplaciano frazionario allo scopo di mettere in luce effetti di decoerenza, sempre in ambito biofisico.

In un contesto puramente matematico l'equazione di Schrödinger frazionaria è stata analizzata in relazione alla "weak turbulence theory" poiché esibisce un comportamento anomalo non previsto da tale teoria (vedi [8][9]).

Di tale equazione sono state anche analizzate, nel caso nonlineare, le soluzioni solitoniche e si è trovato che si concentrano lungo equazioni newtoniane nel limite semiclassico [10].

Per comprendere meglio il significato fisico dell'equazione di Schrödinger frazionaria non lineare e della sua soluzione, consideriamo il seguente problema. Prendiamo un reticolo unidimensionale $h\mathbb{Z}$ dove $0 < h < 1$ rappresenta la dimensione della maglia reticolare. Indichiamo inoltre con $x_m = hm$, $m \in \mathbb{Z}$, i punti del reticolo.

Il problema di Cauchy legato all'equazione discreta di Schrödinger non lineare si scriverà nel seguente modo:

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} u_h(t, x_m) = h \sum_{n \neq m} \frac{u_h(t, x_m) - u_h(t, x_n)}{|x_m - x_n|^{1+2s}} \pm |u_h(t, x_m)|^{2\sigma} u_h(t, x_m) \\ u_h(0, x_m) = v_h(x_m) \end{cases} \quad (3.1)$$

Le funzioni d'onda $u_h : [0, T) \times h\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ che risolvono il problema dipendono dal parametro h , ovvero dalla grandezza della maglia. Ciò che si verifica è che, per $0 < s < 1$, al limite per $h \rightarrow 0^+$ le funzioni u_h tendono alla funzione $u : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ che risolve il seguente problema:

$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = c(-\Delta)^s u \pm |u(t, x)|^{2\sigma} u(t, x) \\ u(0, x) = v(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

con $0 < s < 1$.

Il fatto che la soluzione dell'equazione di Schrödinger frazionaria non lineare si presenti come limite della soluzione nel caso discreto per $0 < s < 1$, ovvero nel caso di interazioni a lungo raggio, ci permette di dedurre il significato fisico dei vari termini che compaiono nell'equazione direttamente dal caso discreto.

Il problema (3.1) è stato adoperato per studiare il comportamento di alcuni biopolimeri: in particolare il DNA.

In questo modello il DNA viene trattato come un reticolo unidimensionale i cui siti rappresentano una coppia di basi.

Per tener conto del fatto che ciascun sito sia un oggetto complesso nell'equazione è presente un termine non lineare che rappresenta proprio l'autointerazione per una coppia di basi del filamento con se stessa. Il parametro $\sigma > 0$ ci permette di distinguere al variare di esso diversi tipi di problemi, mentre il caso $+$ e quello $-$ si differenziano per il fatto che il primo descrive un'autointerazione di tipo attrattivo, il secondo invece di carattere repulsivo.

Il termine di sommatoria è utile a schematizzare le interazioni fra i vari siti del reticolo: in particolare tale interazione diminuisce al crescere della distanza fra i siti. Anche in questo caso abbiamo che questa interazione dipende da un parametro, $s > 0$. Il parametro s descrive in che modo decade l'interazione fra i siti: in particolare è utile osservare la differenza fisica che si ha nel modello per $s < 1$ e per $s > 1$.

Per $s < 1$, il termine di interazione fra i diversi siti decade lentamente: ecco perché si parla in tal caso di interazioni a lungo raggio. Tale caso è utile a descrivere il DNA. Infatti all'interno del nucleo questo si presenta come un agglomerato: ciò significa che anche due siti molto distanti fra loro hanno interazione non nulla. Come abbiamo già detto al limite per $h \rightarrow 0^+$ questo tipo di interazione viene descritta dall'operatore $c(-\Delta)^s$ che, a differenza del laplaciano classico, presenta un carattere non locale.

Per $s > 1$, l'interazione decade velocemente: ciò significa che l'interazione ha un carattere esclusivamente locale poiché al crescere della distanza fra i siti l'interazione diviene nulla. In tal caso al limite per $h \rightarrow 0^+$, abbiamo che la soluzione del problema discreto tende alla soluzione del problema di Cauchy associato all'equazione di Schrödinger non lineare; ovvero l'interazione fra i siti è descritta dal laplaciano classico che è un operatore locale.

3.2 Equazione di Schrödinger frazionaria con nonlinearità concentrata

In questa sezione vogliamo analizzare un'equazione di Schrödinger frazionaria con una nonlinearità concentrata. Pur rappresentando una semplificazione rispetto al caso esteso permette di analizzare le peculiarità della dinamica indotta da tale operatore. Prima di procedere nello studio del problema di Cauchy legato all'equazione di Schrödinger frazionaria non lineare, sarà opportuno richiamare nozioni del caso lineare con interazione puntuale.

3.2.1 Notazione

Ricordiamo alcune definizioni che ci serviranno nel corso del capitolo.

Definizione 3.1. Per ogni $s \in (0, 1)$, diciamo laplaciano frazionario $(-\Delta)^s$ l'operatore sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ così definito:

$$(-\Delta)_\Omega^s u(x) := c(s) P.V. \int_\Omega \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{1+2s}} dy$$

dove $c(\cdot)$ è una specifica costante di normalizzazione tale che

$$\widehat{(-\Delta)^s u}(k) := |k|^{2s} \widehat{u}(k),$$

con $\widehat{(\cdot)}$ si è indicata la trasformata di Fourier su \mathbb{R} .

Richiamiamo anche la definizione di spazio frazionario di Sobolev $H^\mu(\Omega)$:

Definizione 3.2. Sia $\mu \in (0, 1)$. Lo spazio frazionario di Sobolev è così definito:

$$H^\mu(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : u \in \dot{H}^\mu(\Omega) \right\} = \left\{ u \in L^2(\Omega) : [u]_{\dot{H}^\mu(\Omega)} < \infty \right\}$$

dove con $[u]_{\dot{H}^\mu(\mathbb{R})}$ si è intesa la seminorma

$$[u]_{\dot{H}^\mu(\Omega)}^2 := \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{1+2\mu}} dx dy.$$

Quando $\Omega = \mathbb{R}$, tale spazio risulta essere equivalente al seguente:

$$H^\mu(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{u}(k)|^2 dk < \infty \right\},$$

dove $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è lo spazio delle distribuzioni temperate e

$$[u]_{\dot{H}^\mu(\mathbb{R})}^2 := \|(-\Delta)^{\mu/2} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |k|^{2\mu} |\widehat{u}(k)|^2 dk$$

Introdotti l'operatore laplaciano frazionario e gli spazi di Sobolev frazionari andiamo ora a studiare il problema di Cauchy per l'equazione frazionaria di Schrödinger nel caso libero e nel caso di perturbazione lineare di tipo delta.

3.2.2 Caso libero

Introduciamo, per ogni $s \in (0, 1)$, l'operatore $\mathcal{H}_s^0 : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ definito nel seguente modo:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_s^0) := H^{2s}(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_s^0 \psi := (-\Delta)^s \psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^0)$$

Tale operatore risulta essere autoaggiunto, quindi per il teorema di Stone il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}_s^0 \psi \\ \psi(0, \cdot) = \psi_0(\cdot) \in H^{2s}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

ha un'unica soluzione

$$\psi(t, x) := (\mathcal{U}_s(t)\psi_0)(x) \in C^0([0, T]; H^{2s}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})), \quad \forall T > 0,$$

con $\mathcal{U}_s(t)$ operatore di evoluzione temporale definito dal kernel integrale:

$$\mathcal{U}_s(t, x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} e^{-i|k|^{2s}t} dk,$$

ovvero

$$\widehat{\mathcal{U}_s(t, \cdot)}(k) = \frac{e^{-i|k|^{2s}t}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Il caso libero dell'equazione frazionaria di Schrödinger ricalca perfettamente quanto si trova nel caso libero dell'equazione di Schrödinger.

3.2.3 Perturbazione lineare di tipo delta

Per definire l'equazione di Schrödinger frazionaria con perturbazione lineare di tipo delta si deve considerare innanzitutto la funzione di Green del laplaciano frazionario che corrisponde alla soluzione in $L^2(\mathbb{R})$ della seguente equazione:

$$((-\Delta)^s + \lambda) \mathcal{G}_s^\lambda = \delta, \quad \forall \lambda > 0, s \in (0, 1]; \quad (3.3)$$

ovvero alla trasformata di Fourier inversa di

$$\widehat{\mathcal{G}_s^\lambda}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(|k|^{2s} + \lambda)}. \quad (3.4)$$

Osserviamo che $\mathcal{G}_s^\lambda \in L^2(\mathbb{R})$ per ogni $s > \frac{1}{4}$ e $\mathcal{G}_s^\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ per ogni $s > \frac{1}{2}$. Possiamo ora definire il seguente operatore \mathcal{H}_s^α . Per ogni $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_s^\alpha : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ con dominio e azione rispettivamente dati da:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_s^\alpha) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \psi = \phi_\lambda - \alpha \mathcal{G}_s^\lambda \psi(0), \phi_\lambda \in H^{2s}(\mathbb{R}), \lambda > 0 \right\}, \quad (3.5)$$

$$(\mathcal{H}_s^\alpha + \lambda)\psi := ((-\Delta)^s + \lambda)\phi_\lambda, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^\alpha). \quad (3.6)$$

Tale operatore è autoaggiunto per costruzione e rappresenta il laplaciano frazionario con perturbazione lineare di tipo delta. Allora il problema

$$\begin{cases} i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}_s^\alpha \psi \\ \psi(0, \cdot) = \psi_0(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^\alpha) \end{cases} \quad (3.7)$$

ammette un'unica soluzione

$$\psi \in C^0([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^\alpha)) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})),$$

Osserviamo che l'operatore \mathcal{H}_s^α è stato considerato come una perturbazione di tipo delta del laplaciano frazionario perché esso è limite, nel senso della norma del risolvete, della seguente successione di operatori autoaggiunti:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_s^\varepsilon) := H^{2s}(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_s^\varepsilon \psi := ((-\Delta)^s + \frac{1}{\varepsilon} V(\frac{\cdot}{\varepsilon})) \psi$$

dove V è un potenziale a supporto compatto e tale che $\alpha = \int_{\mathbb{R}} V(x) dx$. Andiamo infine a studiare il caso di perturbazione non lineare di tipo delta del laplaciano frazionario.

3.2.4 Perturbazione non lineare di tipo delta

La definizione di nonlinearietà concentrata per il laplaciano frazionario viene ricavata per analogia dal caso lineare.

Nel caso lineare la forza dell'interazione è legata al parametro α . Se si vuole ottenere un analogo nonlineare possiamo quindi fare la seguente assunzione:

$$\alpha = \alpha(\psi) = \beta |\psi(0)|^{2\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

L'operatore sarà quindi definito come:

$$\mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n) := \left\{ \psi \in H^s(\mathbb{R}) : \psi = \phi_\lambda - \beta |\psi(0)|^{2\sigma} \psi(0) \mathcal{G}_s^\lambda, \phi_\lambda \in H^{2s}(\mathbb{R}), \lambda > 0 \right\}, \quad (3.8)$$

$$(\mathcal{H}_s^n + \lambda)\psi := ((-\Delta)^s + \lambda)\phi_\lambda, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n).$$

e il problema di Cauchy a esso associato è dato da

$$\begin{cases} \imath \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}_s^n \psi \\ \psi(0, \cdot) = \psi_0(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n). \end{cases} \quad (3.9)$$

Per risolvere questo problema di Cauchy faremo un ansatz sulla struttura delle soluzioni (formula di Duhamel):

$$\psi(t, x) = (\mathcal{U}_s(t)\psi_0)(x) - \imath\beta \int_0^t \mathcal{U}_s(t - \tau, x) |\psi(\tau, 0)|^{2\sigma} \psi(\tau, 0) d\tau. \quad (3.10)$$

ove posto

$$q(t) := \psi(t, 0), \quad (3.11)$$

detta carica, si ha che l'equazione precedente si riscrive come:

$$\psi(t, x) := (\mathcal{U}_s(t)\psi_0)(x) - \imath\beta \int_0^t \mathcal{U}_s(t - \tau, x) |q(\tau)|^{2\sigma} q(\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Imponendo che $\psi(t, x)$ sia soluzione del problema di Cauchy si ricava che $q(t)$ debba risolvere la seguente equazione:

$$q(t) + \imath\alpha(s)\beta \int_0^t \frac{|q(\tau)|^{2\sigma} q(\tau)}{(t - \tau)^{\frac{1}{2s}}} d\tau = f(t) \quad (3.13)$$

dove

$$f(t) := (\mathcal{U}_s(t)\psi_0)(0)$$

e

$$\mathcal{U}_s(t, 0) = \frac{a(s)}{t^{\frac{1}{2s}}}, \quad a(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2|\rho|^{2s}} d\rho = \mathcal{U}_s(1, 0) \in \mathbb{C}. \quad (3.14)$$

Osserviamo che l'equazione che deve risolvere $q(t)$ è un'equazione di Volterra e che nel termine integrale compare proprio il kernel di Abel studiato nel capitolo precedente.

In generale, si possono dimostrare i seguenti risultati (vedi [11])

Teorema 3.2.1. *Siano $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n)$. Allora:*

(i) Buona positura locale. *Esiste $T > 0$ tale che la funzione ψ definita da (3.13)-(3.12) è l'unica soluzione (3.9) (dove l'uguaglianza è nel senso delle funzioni $L^2(\mathbb{R})$). Inoltre,*

$$\psi \in C^0([0, T]; \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n)) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R})).$$

(ii) Leggi di conservazione. *La massa e l'energia, cioè rispettivamente*

$$\begin{aligned} M(t) &= M(\psi(t, \cdot)) := \|\psi(t, \cdot)\| \\ E(t) &= E(\psi(t, \cdot)) := [\psi(t, \cdot)]_{\dot{H}^{s/2}(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta}{\sigma + 1} |\psi(t, 0)|^{2\sigma+2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

sono quantità costanti nell'evoluzione.

(iii) Buona positura globale. *Se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:*

- $\beta \geq 0$,
- $\beta < 0$ e $\sigma < \sigma_c(s) := 2s - 1$,

allora la soluzione è globale nel tempo. Inoltre, quando $\beta < 0$ e $\sigma = \sigma_c(s)$ esiste $C(s, \beta) > 0$ tale che, se $\|\psi_0\| < C(s, \beta)$, allora la soluzione è allo stesso modo globale nel tempo.

(iv) Soluzioni blow-up. *Se $\beta < 0$, $\sigma \geq \sigma_c(s)$ e ψ_0 ha parte regolare $\phi_{\lambda, 0}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e soddisfa*

$$E(\psi_0) < 0,$$

allora esiste $T^ \in [0, \infty)$ tale che*

$$\limsup_{t \rightarrow T^*} |q(t)| = +\infty,$$

ossia la soluzione esplose in un tempo finito.

Di questo teorema tratteremo nel dettaglio solo la dimostrazione della buona positura locale dell'equazione della carica (3.13). Bisogna dimostrare non solo che l'equazione della carica abbia soluzione, e che sia unica ma anche che abbia sufficiente regolarità affinché l'equazione (3.12) restituisca una soluzione del problema di Cauchy tale da appartenere al dominio di operatore $\mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n)$. Prima di procedere con la dimostrazione, verifichiamo il seguente lemma che ci servirà nel seguito.

Lemma 3.2.2. *Sia $\ell \in H^\mu(0, r) \cap C^0[0, r]$, con $r \in \mathbb{R}^+$ e $\mu \in [0, 1]$. Allora, per ogni $\sigma \geq 0$, $|\ell|^{2\sigma} \ell \in H^\mu(0, r)$.*

Dimostrazione. I casi $\mu = 0, 1$ sono banali (ricordiamo che $H^0 = L^2$). Allora, consideriamo il caso $\mu \in (0, 1)$. Dal momento che

$$||\ell(t)|^{2\sigma}\ell(t) - |\ell(\tau)|^{2\sigma}\ell(\tau)| \leq C\|\ell\|_{C^0[0,r]}^{2\sigma}|\ell(t) - \ell(\tau)|, \quad \forall t, \tau \in [0, r],$$

abbiamo facilmente che la tesi è vera. \square

Come primo passo verifichiamo che l'equazione della carica ammetta una soluzione unica in un intervallo sufficientemente piccolo.

Proposizione 3.2.3. *Sia $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n)$. Allora esiste un tempo $T \in \mathbb{R}^+$ tale che (3.13) ha una soluzione unica $q \in C^0[0, T]$.*

Dimostrazione. Per i dettagli sulla dimostrazione si guardi [11]. La dimostrazione nello spazio delle funzioni continue è standard e contenuta in testi classici delle equazioni integrali. Per tale motivo risulta solo necessario verificare che la forzante $f(t)$ ed il nucleo integrale dell'equazione della carica soddisfino le richieste di regolarità del teorema.

Definiamo

$$h(t, \tau, q) := \alpha(s)\beta \frac{|q|^{2\sigma}q}{(t - \tau)^{\frac{1}{2s}}}.$$

Per il [12, Corollario 2.7], risulta allora solo necessario verificare che:

- (i) f sia continua su $[0, \infty)$;
- (ii) per ogni $\tilde{t} \in \mathbb{R}^+$ e per ogni insieme limitato $B \subset \mathbb{C}$, allora esiste una funzione misurabile $m(t, \tau)$ tale che

$$|h(t, \tau, q)| \leq m(t, \tau) \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \leq \tilde{t}, \quad \forall q \in B,$$

$$\sup_{t \in [0, \tilde{t}]} \int_0^t m(t, \tau) d\tau < \infty \quad \text{e} \quad \int_0^t m(t, \tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0;$$

- (iii) per ogni intervallo compatto $I \subset [0, \infty)$, per ogni funzione continua $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ e ogni $t_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_I (h(t, \tau, \varphi(\tau)) - h(t_0, \tau, \varphi(\tau))) d\tau = 0;$$

- (iv) per ogni $\tilde{t} \in \mathbb{R}^+$ per ogni insieme limitato $B \subset \mathbb{C}$, allora esiste una funzione misurabile $n(t, \tau)$ tale che

$$|h(t, \tau, q_1) - h(t, \tau, q_2)| \leq n(t, \tau)|q_1 - q_2| \quad \forall 0 \leq \tau \leq t \leq \tilde{t}, \quad \forall q_1, q_2 \in B,$$

$$n(t, \cdot) \in L^1(0, t), \quad \forall t \in [0, \tilde{t}], \quad \text{e} \quad \int_t^{t+\varepsilon} n(t + \varepsilon, \tau) d\tau \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

I punti (ii)–(iv) possono essere dimostrati facilmente ponendo m, n uguali al kernel di Abel $\frac{1}{2s}$, a meno di costanti moltiplicative, ed analizzandone le proprietà di integrabilità (si guardi a [13], [14], [15]).

Rimane quindi da dimostrare la proprietà (i), ovvero la regolarità del termine forzante dell'equazione integrale. Innanzitutto notiamo che la condizione iniziale del problema di Cauchy è nel dominio di operatore, $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n)$, e quindi, ricordando che $\psi_0(0) = q(0)$ si ha

$$f(t) = (\mathcal{U}_s(t)\phi_{\lambda,0})(0) - \beta|q(0)|^{2\sigma}q(0)(\mathcal{U}_s(t)\mathcal{G}_s^\lambda)(0) =: f_1(t) + f_2(t). \quad (3.16)$$

Discutiamo i due termini separatamente. Innanzitutto, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ricava che per tutti i $T \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \|f_1\|_{L^2(0,T)}^2 &\leq C_s \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi_\lambda(k)| dk \right)^2 dt \\ &\leq C_s \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|k|^2)^s |\phi_\lambda(k)|^2 dk \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(|k|^2+1)^s} dk \right) dt \\ &\leq C_s T \|\phi_{\lambda,0}\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.17)$$

D'altra parte denotando con $\widehat{\phi}_p$ la parte pari di $\widehat{\phi}_{\lambda,0}$, e ponendo $\omega = k^{2\sigma}$, si ricava che

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ik^{2s}t} \widehat{\phi}_p(k) dk = \frac{1}{2\pi s} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \underbrace{H(\omega) \frac{|\omega|^{\frac{1}{2s}} \widehat{\phi}_p(|\omega|^{\frac{1}{2s}})}{|\omega|}}_{=:G(\omega)} d\omega = \frac{\widehat{G}(t)}{s\sqrt{2\pi}} = \frac{\check{G}(-t)}{s\sqrt{2\pi}} \quad (3.18)$$

(dove con H abbiamo indicato la funzione di Heaviside), si ha che

$$\widehat{f}_1(\omega) = \frac{G(-\omega)}{s\sqrt{2\pi}}.$$

Allora, con lo stesso cambio di variabile usato in precedenza

$$\begin{aligned} [f_1]_{\dot{H}^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi s^2} \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{3-\frac{1}{2s}} |G(-\omega)|^2 d\omega \leq C_s \int_0^\infty \frac{\omega^{3+\frac{1}{2s}}}{\omega^2} |\widehat{\phi}_p(|\omega|^{\frac{1}{2s}})|^2 d\omega \\ &\leq C_s \int_0^\infty k^{4s} |\widehat{\phi}_p(k)|^2 dk \leq C_s \int_0^\infty |k|^{4s} |\widehat{\phi}_{\lambda,0}(k)|^2 dk < \infty, \end{aligned} \quad (3.19)$$

dal fatto che, per ipotesi, $\phi_{\lambda,0} \in H^{2s}(\mathbb{R})$ e utilizzando l'equazione (3.17), si ottiene $f_1 \in H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0,T)$, per tutti $T \in \mathbb{R}^+$.

Analizziamo ora f_2 . Consideriamo

$$f_3(t) := -\frac{f_2(t)}{\beta|q(0)|^{2\sigma}q(0)}. \quad (3.20)$$

Sappiamo che $g_s^\lambda \in H^s(\mathbb{R})$, e ragionando come in (3.17), si ricava che $f_3 \in L_{loc}^2([0,\infty))$. D'altra parte, con lo stesso ragionamento usato per la (3.18), si ricava che

$$f_3(t) = C_s \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \underbrace{H(\omega) \frac{|\omega|^{\frac{1}{2s}}}{|\omega|(|\omega|+\lambda)}}_{=:F(\omega)} d\omega = C_s \check{F}(-t), \quad (3.21)$$

e allora

$$[f_3]_{H^\mu(\mathbb{R})}^2 = C_s \int_0^\infty \frac{\omega^{2(\mu-1)+\frac{1}{s}}}{(\omega+\lambda)^2} < \infty, \quad \forall \mu \in [0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2s}]. \quad (3.22)$$

Quindi, dal momento che $\frac{3}{2} - \frac{1}{2s} \in (\frac{1}{2}, 1]$ per $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, abbiamo che f_3 sia continua su $[0,\infty)$, e con questo la dimostrazione si conclude. \square

Ci dobbiamo occupare ora della regolarità Sobolev delle soluzioni dell'equazione della carica. Per questo scopo risulta conveniente definire l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni, $[0, T^*)$, dell'equazione (3.13) ove

$$T^* := \sup\{T > 0 : \text{esista un'unica soluzione } q \in C^0[0, T] \text{ di (3.13)}\}. \quad (3.23)$$

Proposizione 3.2.4. *Sia $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ e $\psi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_s^n)$. Allora la soluzione q di (3.13), definita nella 3.2.3, appartiene a $H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0, T)$ per ogni $T \in (0, T^*)$.*

Dimostrazione della proposizione 3.2.4. Fissiamo arbitrariamente un tempo $T \in (0, T^*)$. La dimostrazione consta di due parti.

Parte(i): regolarità del termine forzante. Vogliamo dimostrare che $f \in H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0, T)$. Nella proposizione precedente abbiamo già dimostrato che $f_1(t) := (\mathcal{U}_s(t)\phi_{\lambda,0})(0)$ appartiene a $H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0, T)$, dove stiamo considerando la decomposizione di f vista in (3.16); dunque concentriamoci su f_2 .

In (3.22), abbiamo dimostrato che f_3 , e quindi f_2 (guarda (3.20)), appartiene a $H^\mu(0, T)$ per ogni $\mu \in [0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2s})$, tale grado di regolarità non basta ai nostri scopi. Mostriamo ora che manipolando opportunamente f_3 , si riesce a trovare che questo termine ha la giusta regolarità.

Posto

$$b(s) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\imath|\rho|^{2s}} - 1}{|\rho|^{2s}} d\rho,$$

possiamo definire

$$\tilde{f}_3(t) := f_3(t) - f_3(0) - t^{1-\frac{1}{2s}} b(s).$$

Adoperando il cambio di variabile $\omega = k^{2s}$ e il teorema fondamentale del calcolo troviamo che

$$\tilde{f}_3(t) = -\frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\imath k^{2s}t} - 1}{k^{2s}(k^{2s} + \lambda)} dk = -\frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{(e^{-\imath\omega t} - 1)\omega^{\frac{1}{2s}}}{\omega^2(\omega + \lambda)} d\omega = \frac{\imath\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega^{\frac{1}{2s}}}{\omega(\omega + \lambda)} \int_0^t e^{-\imath z\omega} dz d\omega.$$

Ne segue che

$$\dot{\tilde{f}}_3(t) = \frac{\imath\lambda}{\pi} \int_0^\infty e^{-\imath\omega t} H(\omega) \frac{|\omega|^{\frac{1}{2s}}}{|\omega|(|\omega| + \lambda)} d\omega$$

e perciò, argomentando come visto in (3.21)-(3.22), si ha che $\dot{\tilde{f}}_3 \in H^\nu(\mathbb{R})$ per ogni $\nu \in [0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2s})$. Allora, $\tilde{f}_3 \in H^\mu(\mathbb{R})$ per ogni $\mu \in [0, \frac{5}{2} - \frac{1}{2s})$, che chiaramente implica $\tilde{f}_3 \in H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(\mathbb{R})$.

Riscriviamo ora $f_2(t)$ in termini di $\tilde{f}_3(t)$:

$$f_2(t) = -\beta|q(0)|^{2\sigma} q(0) \mathcal{G}_s^\lambda(0) - \beta|q(0)|^{2\sigma} q(0) b(s) t^{1-\frac{1}{2s}} - \beta|q(0)|^{2\sigma} q(0) \tilde{f}_3(t).$$

Dal momento che

$$t^{1-\frac{1}{2s}} = \frac{2s-1}{2s} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} d\tau$$

e visto che (richiamando (3.14))

$$b(s) = \frac{-\imath}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 e^{-\imath z k^{2s}} dz dk = \frac{-\imath}{\pi} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2s}} \int_0^\infty e^{-\imath\rho^{2s}} d\rho dz = \frac{-\imath a(s) 2s}{2s-1}.$$

risulta che l'equazione della carica (3.13) può essere riscritta così da ottenere

$$q(t) = \underbrace{\tilde{f}(t) - \imath a(s) \beta \int_0^t \frac{|q(\tau)|^{2\sigma} q(\tau) - |q(0)|^{2\sigma} q(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2s}}} d\tau}_{=: \eta(t)}, \quad (3.24)$$

dove

$$\tilde{f}(t) = f_1(t) - \beta|q(0)|^{2\sigma}q(0)\mathcal{G}_s^\lambda(0) - \beta|q(0)|^{2\sigma}q(0)\tilde{f}_3(t)$$

appartiene a $H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0, T)$.

Parte(ii): argomento di bootstrap. Ora è possibile applicare l'argomento di bootstrap all'equazione (3.24) così da avere che $q \in H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0, T)$.

Dalla proposizione precedente sappiamo che l'unica soluzione q di (3.24) appartiene a $L^2(0, T) \cap C^0[0, T]$.

Allora, dal Lemma 3.2.2, risulta che $|q(\cdot)|^{2\sigma}q(\cdot) - |q(0)|^{2\sigma}q(0) \in L^2(0, T) \cap C^0[0, T]$.

A tale quantità è applicato il kernel di Abel quindi per il Lemma 2.2.6 (item (i)) si ha che $\eta \in H^{1-\frac{1}{2s}}(0, T) \cap C^0[0, T]$, cosicché $q \in H^{1-\frac{1}{2s}}(0, T) \cap C^0[0, T]$.

Mediante un processo iterativo si trova che $q \in H^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4s}}(0, T) \cap C^0[0, T]$. □

Evidenziamo che l'argomento di bootstrap si regge proprio sulle proprietà di regolarizzazione del kernel di Abel: infatti partendo da una regolarità minima ($q \in L^2(0, T) \cap C^0[0, T]$), garantita dal fatto che q è soluzione di (3.24), si trova che a ciascuna iterazione q acquisisce un grado di regolarità maggiore in virtù delle proprietà dell'operatore di Abel. In questo modo q riesce a raggiungere il grado di regolarità massimo che è fissato dal termine forzante $f(t)$.

La necessità che q abbia una certa regolarità deriva dal fatto che da essa dipende la soluzione $\psi(t, x)$ del problema di Cauchy. Allora la regolarità di q si trasmette a $\psi(t, x)$ e un'opportuna regolarità per q può far sì che $\psi(t, x)$ appartenga ancora al dominio di operatore. Questa condizione è essenziale per studiare la soluzione $\psi(t, x)$ come flusso che parte dalla condizione iniziale ψ_0 ed evolve nel dominio di operatore.

Bibliografia

- [1] Niels Henrik Abel. *Résolution d'un problème de mécanique*, volume 1 of *Cambridge Library Collection - Mathematics*, page 97–101. Cambridge University Press, 2012.
- [2] Gigliola Staffilani Kay Kirkpatrick, Enno Lenzmann. *On the Continuum Limit for Discrete NLS with Long-Range Lattice Interactions*, volume 317. Springer, 02 2013.
- [3] R. Gorenflo and S. Vessella. *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [4] St. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Transl. from the Russian*. New York, NY: Gordon and Breach, 1993.
- [5] L. Tonelli. *Su un problema di Abel*, volume 99. 1928.
- [6] Rupert L Frank and Enno Lenzmann. *Uniqueness and Nondegeneracy of Ground States for $(-\Delta)^s Q + Q - Q^{\alpha+1} = 0$ in \mathbb{R}* . 2010.
- [7] Kay Kirkpatrick and Yanzhi Zhang. *Fractional Schrödinger dynamics and decoherence*, volume 332. Elsevier, 2016.
- [8] David Cai, Andrew J Majda, David W McLaughlin, and Esteban G Tabak. *Dispersive wave turbulence in one dimension*, volume 152. Elsevier, 2001.
- [9] AJ Majda, DW McLaughlin, and EG Tabak. *A one-dimensional model for dispersive wave turbulence*, volume 7. Springer, 1997.
- [10] Andrea Sacchetti. *Stationary solutions of a fractional Laplacian with singular perturbation*. 2018.
- [11] Raffaele Carlone, Domenico Finco, and Lorenzo Tentarelli. *Nonlinear singular perturbations of the fractional Schrödinger equation in dimension one*. 2018.
- [12] Richard K Miller. *Nonlinear Volterra integral equations*. Number 48. WA Benjamin, 1971.
- [13] Riccardo Adami, Gianfausto Dell'Antonio, Rodolfo Figari, and Alessandro Teta. *The Cauchy problem for the Schrödinger equation in dimension three with concentrated nonlinearity*, volume 20. 2003.
- [14] Riccardo Adami and Alessandro Teta. *A class of nonlinear Schrödinger equations with concentrated nonlinearity*, volume 180. Academic Press, 2001.
- [15] Raffaele Carlone, Michele Correggi, and Lorenzo Tentarelli. *Well-posedness of the two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with concentrated nonlinearity*. 2018.