

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea Triennale in Fisica

**Correzioni relativistiche
alla teoria delle orbite newtoniane**

Relatore:
Prof. Salvatore Capozziello

Candidato:
Giuseppe Filiberto
Vitale
Matricola N85/781

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Indice

Introduzione	1
1 <i>Orbite Newtoniane</i>	3
1.1 Leggi di conservazione	3
1.2 Equazioni del moto	5
1.3 Energia e orbite	7
2 <i>Correzione Relativistica</i>	9
2.1 Soluzione di Schwarzschild	9
2.2 Orbite relativistiche	11
3 <i>Analisi correzione di Yukawa</i>	15
3.1 Problema dei due corpi con potenziale di Yukawa	15
3.2 Equazioni delle orbite	18
Conclusioni	21
Bibliografia	21

Introduzione

Dall'alba dei tempi l'umanità si interroga sul movimento dei corpi celesti, ma solo attorno al 1600 si potè fornire fondamenta matematiche e scientifiche solide. Grandi scienziati come Galileo, Copernico e Keplero iniziarono ad interrogarsi sulle orbite dei pianeti e sul migliore modo per osservarli, ma solo Newton con una teoria elegante introdusse le leggi della dinamica e dedusse tutti i moti dei corpi celesti grazie all'introduzione di un'interazione a distanza chiamata gravitazionale.

Era il 1687 quando scrisse *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, testo in tre libri nei quali enunciò le leggi della gravitazione universali. All'interno discute dell'interazione generale tra due corpi per la quale diede una soluzione esatta ma non fornì indicazioni per l'interazione ben più difficile tra n corpi.

Solo nell'800' ad opera di Laplace, Poisson e Gauss nacque la teoria delle perturbazioni che diede un metodo per calcolare approssimativamente il moto di n corpi in interazione [1]. Grazie ad essa si potè spiegare la precessione del perielio di diversi corpi celesti, dovuta all'asfericità di quest'ultimi o a perturbazioni di corpi esterni.

Nel 1857 però Le Verrier osservò come in base alle osservazioni, la precessione di Mercurio fosse 43" d'arco per secolo più veloce rispetto ai risultati teorici ottenuti in precedenza. Si pensò in un primo momento che si doveva tenere conto dell'asfericità del sole o di qualche pianeta come Vulcano -da Le Verrier ipotizzato- per spiegare questa discrepanza, ma solo la nascita della Relatività Generale risolse la questione.

Era il 1915 ed Albert Einstein finì di redigere la Relatività Generale, che assieme alla Relatività Ristretta nata precedentemente nel 1905 diede il colpo finale a concetti ormai creduti assoluti. Si assiste alla morte del tempo e dello spazio assoluto, per dare alla vita il concetto di spazio-tempo [2]. La teoria è costellata da tantissime verifiche sperimentali che oltre a quella della verifica della precessione di Mercurio, vanta l'osservazione fatta pochi anni dopo nel 1919 da Arthur Eddington con l'osservazione di stelle altrimenti invisibili dietro il disco solare dovuto all'effetto di lente gravitazionale del sole, l'osservazione di buchi neri, e la recente scoperta delle onde gravitazionali fatte nel 2016 è causate dalla collisione di due buchi neri massivi. Nonostante le verifiche sperimentali la teoria non è infallibile.

Attorno agli anni 30' ad opera di F. Zwicky e 40 anni dopo ad opera di Vera Rubin e Kent Ford si fecero delle osservazioni circa la velocità delle stelle all'interno delle galassie. Ci si aspettava che la velocità delle stelle lontane sarebbe stata minore quanto maggiore è la loro lontananza dal centro della galassia. Tale risultato però, non fu quello ottenuto. Essi scoprirono che la velocità delle stelle distanti era sempre la stessa, sebbene la distanza fosse enorme. Si aprirono due filoni di ricerca in grado di spiegare questa divergenza teorica. Uno è il filone della materia oscura, la ricerca di una particella interagente molto poco con la materia ordinaria e poco autointeragente con sé stessa tra cui ricordiamo le particelle Wimp (*Weakly Interacting Massive Particle*), gli assioni e i neutralini ecc., in grado di spiegare quella massa mancante producente quell'effetto. L'altro filone è quello delle teorie MOND (*MOdified Netownian Dynamics*) nelle quali si sostiene che la materia oscura non esista poichè si suppone che la Relatività Generale non funzioni correttamente su scale cosmologiche e che le equazioni che la descrivono debbano essere corrette [3].

Lo scopo della tesi segue i passaggi qui descritti, ovvero:

- Fornire una trattazione quanto più completa delle orbite newtoniane;
- Sviluppare, nel limite delle conoscenze acquisite durante il triennio, la trattazione del problema del moto in un campo gravitazionale nella Relatività Generale e osservare come il problema del perielio si risolve in modo esatto;
- Affrontare il problema della "massa mancante" dal punto di vista delle teorie MOND ed in particolar modo della $f(R)$ gravity theory che presuppone un potenziale di Yukawa dalla quale emerge in modo naturale un'evoluzione delle orbite kepleriane sotto opportune condizioni.

Capitolo 1

Orbite Newtoniane

In questo capitolo si ricaveranno alcune leggi di conservazioni e a partire da queste ultime ricaveremo le equazioni delle orbite e le suddivideremo in base al particolare valore dell'energia del sistema. Verrà utilizzato un approccio che tiene conto del sistema di riferimento del centro di massa che semplificherà le leggi ricavate [4].

1.1 Leggi di conservazione

Consideriamo due particelle di massa m_1 ed m_2 con raggi vettori rispettivamente r_1 e r_2 attratti gravitazionalmente. Le equazioni del moto si scriveranno come:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|^3}(r_1 - r_2) \\ \frac{dp_2}{dt} &= +\frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|^3}(r_1 - r_2)\end{aligned}\quad (1.1)$$

dove $p_i = m_i \frac{dr_i}{dt}$ indica il momento della particella i -esima e G indica la costante gravitazionale. Sommando membro a membro otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2) = 0$$

Indicando con $P = p_1 + p_2$ il momento totale del sistema dei due corpi, otteniamo la prima legge di conservazione, quella del momento totale del sistema in assenza di forze esterne

$$P = \text{cost.}$$

Adesso con una trasformazione Galileiana, ci si pone in un sistema di riferimento dove $P' = 0$. Ciò lo si ottiene con una trasformazione del tipo

$$P \rightarrow P' = P - Mv$$

dove poniamo $v = \frac{P}{M}$ e dove $M = m_1 + m_2$ indica la massa totale del sistema. In questo modo le equazioni del moto si riscrivono come

$$P = 0, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{-Gm_1m_2}{r^3}r$$

qui $r = |r|$ con $r = r_1 - r_2$, e $p = p_1 - p_2$. Si introduca il vettore posizione del centro di massa

$$R = \frac{m_1r_1 + m_2r_2}{m_1 + m_2}$$

in questo modo si può riscrivere:

$$P = M \frac{dR}{dt}$$

ma dal momento che $P = 0$ otteniamo che $R = \text{cost}$. Con una traslazione dell'origine ci si posiziona in un sistema di riferimento dove $R = 0$, e questo sistema non è altri che il *sistema del centro di massa*. In questo nuovo sistema possiamo riscrivere

$$p = \mu \frac{dr}{dt}$$

dove $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ è la massa ridotta del sistema. L'equazione (1.1) può quindi essere riscritta come:

$$\mu \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{-G\mu M}{r^2} \hat{r} \quad (1.2)$$

dove $\hat{r} = \frac{r}{r}$ è il versore radiale. Moltiplicando scalarmente l'equazione (1.2) con $\frac{dr}{dt}$ possiamo ottenere altre due leggi di conservazione. Prima di tutto facciamo le seguenti osservazioni:

- $\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$,
- $\frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$,

riscrivendo la (1.2) con queste considerazioni otteniamo quindi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\gamma}{r} \right) = 0$$

dove $\gamma = G\mu M$.

Questo significa che la quantità all'interno della parentesi è uguale ad una costante:

$$\frac{p^2}{2\mu} - \frac{\gamma}{r} = E = \text{cost}. \quad (1.3)$$

dove E è l'energia. Infatti osservando bene l'equazione si vede come il primo termine non sia altro che un termine di energia cinetica mentre il secondo un termine di energia potenziale, e la loro somma non è altro che l'energia totale del sistema. Ora moltiplicando vettorialmente la (1.2) con r dal momento che r e $\frac{dr}{dt}$ sono collineari otteniamo:

$$\mu \frac{d}{dt} \left(r \times \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (r \times p) = 0$$

dunque possiamo definire la quantità *momento angolare* $L = r \times p$ ed ottenere l'equazione

$$\frac{dL}{dt} = 0 \implies L = \text{cost.}$$

dalla quale si deduce la conservazione del momento angolare. Conseguenza immediata di questa conservazione è che se L è uguale ad una costante, è costante anche in direzione, e dal momento che è ortogonale al piano individuato dai vettori r e v , questi ultimi devono stare sempre su questo piano, ciò significa che un eventuale moto avviene in un piano che rimane fisso nel tempo [5].

1.2 Equazioni del moto

Riscrivendo il *momento angolare* in coordinate polari

$$L = r^2 \frac{d\phi}{dt} = r^2 \dot{\phi} \quad (1.4)$$

e considerando che:

$$L^2 = (r \times p)^2 = r^2 p^2 - (r \cdot p)^2 \rightarrow p^2 = \frac{L^2}{r^2} + p_r^2$$

dove $p_r = \hat{r} \cdot p$ è la componente radiale della quantità di moto. Sostituendo questa espressione nella (1.3) otteniamo

$$\frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r} = E$$

ma sostituendo $p_r = \mu \frac{dr}{dt}$,

$$\frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r} = E \quad (1.5)$$

Osservazione fondamentale è che dalla (1.1) in cui avevamo sei funzioni del tempo dovute alle sei componenti dei vettori r_1 e r_2 , grazie all'uso di due

costanti del moto quali L e E , ci si è ricondotti ad un paio di equazioni differenziali nelle coordinate $r(t)$ e $\phi(t)$. Dalla (1.5) si può definire un potenziale efficace $V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}$ composto da un primo termine di repulsione e da un secondo di attrazione gravitazionale. La contrapposizione tra repulsione e attrazione fornisce l'indicazione dell'esistenza di un minimo. Infatti differenziando V_{eff} rispetto ad r otteniamo $r_0 = \frac{L^2}{\gamma\mu}$ e quindi

$$V_{eff}^{min} = E_{min} = -\frac{\gamma\mu}{2L^2}$$

Dal momento che l'energia cinetica è non negativa avremo che:

$$E \geq E_{min} = -\frac{\gamma\mu}{2L^2}$$

Quando $E_{min} < E < 0$ la traiettoria si trova tra il valore più piccolo r_{min} e il valore più grande r_{max} che si possono ricavare dalla condizione $E = V_{eff}$ cioè:

$$r_{min,max} = -\frac{\gamma}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu E}}$$

dove il segno positivo (negativo) corrisponde a r_{max} (r_{min}). Per $E > 0$ solo il segno positivo da un valore accettabile poichè col segno negativo la radice sarebbe negativa. Si risolvino ora le equazioni differenziali (1.4) e (1.5). Si ha che

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r}\right)$$

in questo modo la (1.5) la si può riscrivere, tenendo conto della variabile ausiliaria $u = \frac{1}{r}$ come

$$u'^2 + u^2 - \frac{2\gamma\mu}{L^2} u = \frac{2\mu E}{L^2} \quad (1.6)$$

dove si è posto $u' = \frac{du}{d\phi}$ e dove si è diviso il tutto con $\frac{L^2}{2\mu}$. Differenziando rispetto a ϕ , otteniamo

$$u' \left(u'' + u - \frac{\gamma\mu}{L^2} \right) = 0 \quad (1.7)$$

$u' = 0$ si vedrà corrispondere al moto circolare, mentre la quantità in parentesi ha soluzione

$$u = \frac{\gamma\mu}{L^2} + C \cos(\phi + \alpha) \implies r = \left[\frac{\gamma\mu}{L^2} + C \cos(\phi + \alpha) \right]^{-1} \quad (1.8)$$

Quest'ultima espressione è la forma comune delle sezioni coniche espresse nelle coordinate polari. Le costanti C e α sono due costanti di integrazione

del secondo ordine. Per trovare C basta sostituire la (1.8) nella (1.6), con un paio di passaggi si trova che

$$C^2 = \frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\gamma\mu}{L^2}\right)^2$$

1.3 Energia e orbite

Discriminiamo ora le varie orbite in base all'energia.

$E = E_{min}$	orbite circolari
$E_{min} < E < 0$	orbite ellittiche
$E = 0$	orbite paraboliche
$E > 0$	orbite iperboliche

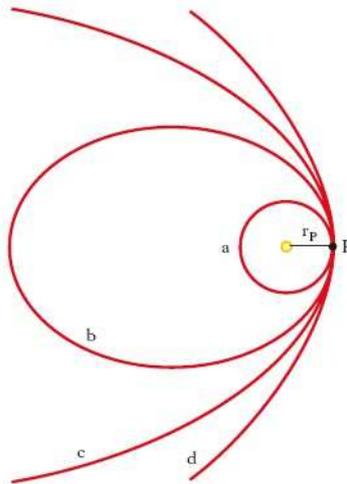


Figura 1.1: Traiettorie newtoniane: nel caso della curva d si ha una traiettoria iperbolica, per la curva c una traiettoria parabolica, per la curva b una traiettoria ellittica, per la curva a una traiettoria circolare

- **Orbite circolari:** queste ultime corrispondono alla risoluzione dell'equazione differenziale $u' = 0$ dalla quale si trova la condizione $r_0 = \frac{L^2}{\mu\gamma}$ ovvero il valore che rende minimo il potenziale efficace. Le due particelle si muovono quindi in centri concentrici con raggi inversamente proporzionali alle loro masse e sono sempre in opposizione.

- **Orbite ellittiche:** scegliendo $\alpha = 0$, l'asse maggiore corrisponderà a $\phi = 0$ otteniamo quindi

$$r|_{\phi=0} = r_{min} = \left[\frac{\gamma\mu}{L^2} + C \right]^{-1}$$

e

$$r|_{\phi=\pi} = r_{max} = \left[\frac{\gamma\mu}{L^2} - C \right]^{-1}$$

dal momento che $r_{max} + r_{min} = 2a$ dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse, si ottiene per a

$$a = \frac{\gamma\mu}{L^2} \left[\left(\frac{\gamma\mu}{L^2} \right)^2 + C^2 \right]^{-1}$$

e sostituendo C

$$a = -\frac{\gamma}{2E}$$

Inoltre indicando con $r|_{\phi=\frac{\pi}{2}} = l = \frac{L^2}{\gamma\mu}$ il *semi-latus rectum* otteniamo per l'equazione della traiettoria

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos\phi}$$

dove $\epsilon = \sqrt{\frac{1-l}{a}}$ è l'eccentricità dell'ellisse.

- **Orbite paraboliche e iperboliche:** queste corrispondono alla condizione $E \geq 0$ e dove $\epsilon \geq 1$ dove i segni di uguale corrispondono a orbite paraboliche. In modo da avere sempre delle r positive si deve restringere l'intervallo dell'angolo ϕ in modo tale che

$$1 + \epsilon \cos\phi > 0$$

cioè $\phi \in (-\pi, \pi)$ in questo modo le traiettorie non saranno più chiuse.

Capitolo 2

Correzione Relativistica

La risoluzione analitica delle equazioni di campo di Einstein, in generale, sono molto difficili a causa della non linearità di queste ultime. Una soluzione esatta delle equazioni del campo però è data da Karl Schwarzschild nel 1916 per i problemi a simmetria sferica nel vuoto. Le sezioni saranno divise in una prima parte alla ricerca della metrica di Schwarzschild ed in una seconda allo sviluppo delle equazioni delle orbite a partire da questa metrica che permette una risoluzione analitica più conveniente.

2.1 Soluzione di Schwarzschild

Un campo gravitazionale a simmetria sferica è descritta in tutta generalità da una metrica del tipo

$$ds^2 = A(r, t)c^2 dt^2 - B(r, t)dr^2 - 2C(r, t)drdt - D(r, t)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.1)$$

dove A,B,C,D sono funzioni arbitrarie dello spazio e del tempo. Con le sostituzioni

$$r' = F(r, t), \quad t' = G(r, t)$$

è possibile ottenere

$$C' = 0, \quad D' = r'^2$$

Scegliendo inoltre una forma esponenziale per i coefficienti A' e B' , la (2.1) diventa

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.2)$$

dove ν e λ sono funzioni di r e t e

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Per scrivere le equazioni di campo nel vuoto

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.3)$$

abbiamo bisogno del tensore di Ricci, $R_{\alpha\beta}$, che si ottiene tramite contrazione dal tensore di Riemann e quest'ultimo sarà ricavato tramite i simboli di Christoffel. Per calcolare quest'ultimi abbiamo bisogno della lagrangiana

$$L = e^\nu (\dot{x}^0)^2 - e^\lambda (\dot{x}^1)^2 - r^2 (\dot{x}^2)^2 - r^2 \sin^2 \theta (\dot{x}^3)^2 \quad (2.4)$$

dove

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi$$

da inserire nelle equazioni di *Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$$

ed esplicitarle rispetto alle derivate di ordine massimo. Dopo una serie di calcoli laboriosi [6] si possono ottenere dalla (2.3) le componenti del tensore di Ricci. Indicando con $_t$ e $'$ la derivata rispettivamente rispetto a t e ad r troviamo

$$\begin{aligned} R_{01} &= \frac{1}{cr} \lambda_t = 0 \\ R_{00} &= \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\nu'' + \frac{1}{2} \nu'^2 - \frac{1}{2} \nu' \lambda' + 2 \frac{\nu'}{r} \right) = 0 \\ R_{11} &= \frac{1}{2} \left(\nu'' + \frac{1}{2} \nu'^2 - \frac{1}{2} \nu' \lambda' - 2 \frac{\lambda'}{r} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ricava che λ non dipende dal tempo. Sottraendo membro a membro invece le due espressioni delle ultime due equazioni eguagliate a zero si ottiene

$$\nu' + \lambda' = 0$$

da cui si ricava

$$\nu' = -\lambda' \quad (2.5)$$

e

$$\nu + \lambda = cost.$$

La costante d'integrazione dovendo essere nulla affinché abbia a grandi distanze una metrica piatta cioè per $r \rightarrow \infty$, $e^\nu \rightarrow 1$, $e^\lambda \rightarrow 1$ deve essere che

$$e^\nu = e^{-\lambda} \quad (2.6)$$

Sostituendo la (2.5) in R_{00} si ha infine

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 + 2 \frac{\nu'}{r} \right) = 0$$

che può essere riscritta come

$$\frac{1}{r} (r e^\nu)'' = 0$$

che integrata dà

$$(re^\nu)' = cost.$$

Integrando quest'ultima si ricava

$$re^\nu = Ar + B \rightarrow e^\nu = A + \frac{B}{r}$$

Il limite per grandi distanze ci fornisce il valore di A. Infatti

$$r \rightarrow \infty, \quad e^\nu = A + \frac{B}{r} = 1$$

implica che $A = 1$.

Il limite per i campi deboli invece determina B

$$e^\nu = g_{00} = 1 - \frac{2U}{c^2} = 1 - \frac{2G_N M}{rc^2}$$

Definendo la grandezza

$$R_S = \frac{2G_N M}{c^2} \tag{2.7}$$

che ha le dimensioni di una lunghezza ed utilizzando la (2.6), si ha

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{R_S}{r}$$

la metrica (2.2) assume quindi la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} - r^2 d\Omega^2 \tag{2.8}$$

Questa equazione determina completamente il campo gravitazionale nel vuoto creato da una qualsiasi distribuzione di massa a simmetria sferica. R_S è detto *raggio di Schwarzschild* e rappresenta il raggio che un corpo di massa M deve avere affinché la velocità di fuga sia uguale a quella della luce. Infatti il corpo nero è un corpo per cui il suo raggio è inferiore al raggio di Schwarzschild.

2.2 Orbite relativistiche

Le equazioni del moto si faranno discendere da un principio variazionale

$$\delta \int L ds = 0$$

dove L è la lagrangiana data dall'equazione (2.4) riscritta come

$$L = e^\nu (\dot{x}^0)^2 - e^\lambda (\dot{r})^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \tag{2.9}$$

Osserviamo come l'equazione di *Eulero-Lagrange* per $x^2 = \theta$ è

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2$$

ha soluzione per $\theta = \pi/2$, e quindi come nel caso classico il moto si svolge sul piano r e ϕ , quindi θ scompare come variabile dinamica. Le equazioni per $x^0 = ct$ e $x^3 = \phi$ ammettono due integrali primi, poiché la lagrangiana non dipende esplicitamente né da x^0 né da x^3

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \dot{x}^0 = l, \quad r^2 \dot{\phi} = h, \quad (2.10)$$

che corrispondono rispettivamente ai classici integrali dell'energia e del momento angolare. Invece per $x^1 = r$ usiamo, invece dell'equazione del secondo ordine dedotta dal principio variazionale, direttamente l'integrale primo per $L = 1$. Ricordando che $e^\nu = e^{-\lambda} = (1 - R_S/r)$, l'equazione (2.9) si scriverà

$$L = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) (\dot{x}^0)^2 - \frac{(\dot{r})^2}{1 - \frac{R_S}{r}} - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 1$$

Sostituendo in questa equazione i valori ottenuti in (2.10) e tenendo conto che $\theta = \pi/2 \rightarrow \dot{\theta} = 0$, $\sin^2 \theta = 1$ si ottiene

$$l^2 - \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) = 1 - \frac{R_S}{r} \quad (2.11)$$

Introducendo il cambiamento di variabile

$$u(\phi) = \frac{1}{r} \quad (2.12)$$

ed utilizzando la notazione

$$u' = \frac{du}{d\phi}$$

con la seconda delle (2.10) otteniamo che

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -r^2 \dot{\phi} u' = -h u' \quad (2.13)$$

Inserendo la (2.13) e la (2.12) nella (2.11), si ottiene

$$l^2 - h^2 (u')^2 - h^2 u^2 (1 - R_S u) = 1 - R_S u$$

Quest'espressione mediante quadratura fornirebbe direttamente il risultato $u = u(\phi)$, tuttavia poiché il risultato è complicato, è preferibile per i nostri scopi derivare la (2.11) rispetto a ϕ ed eliminare lo soluzione $u' = 0 \rightarrow r = \text{cost}$. Considerando che dalla (2.13) si ottiene

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\phi} \right) = -h \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) = -h \dot{\phi} u'' = -\frac{h^2}{r^2} u'' = -h^2 u^2 u''$$

si ottiene

$$u'' + u = \frac{R_S}{2h^2} + \frac{3}{2}R_S u^2 \quad (2.14)$$

Quest'equazione deve essere confrontata con quella ottenuta nel caso newtoniano (1.7). Come si vede, l'analogia è perfetta se si considera che a basse velocità dalla seconda delle (2.10), si ricava che

$$h \cong r^2 \frac{1}{c} \dot{\phi} = \frac{L}{c}$$

Da questa equazione, considerando che $\frac{R_S}{2} = \frac{GM}{L^2}$ (Eq.(2.7)), segue che

$$\frac{R_S}{2h^2} \cong \left(\frac{GM}{c^2} \right) \left(\frac{c^2}{L^2} \right) = \frac{GM}{L^2} \rightarrow \frac{\gamma\mu}{L^2}$$

Dove l'ultima uguaglianza è valida nel caso considerassi soluzioni delle orbite newtoniane a due corpi (vedi sezione (1.2)). Si noti che il termine $\frac{\gamma\mu}{L^2}$ qui presente compare nell'equazione (1.7). Di conseguenza gli effetti dovuti alla Relatività Generale sul moto della particella di prova è da imputare al secondo termine del secondo membro della (2.14) che è nuovo rispetto all'equazione newtoniana (1.7). Questo termine è tuttavia piccolo, infatti

$$\frac{\frac{3}{2}R_S u^2}{\frac{R_S}{2h^2}} = 3h^2 u^2 \cong \frac{3L^2}{r^2 c^2} = 3 \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

Si possono quindi utilizzare metodi perturbativi ed è proprio a causa di questo termine che le orbite saranno aperte. La soluzione della (2.14) la si può calcolare decomponendola in una parte di ordine zero e una di primo ordine, cioè

$$u = u_0 + \epsilon u_1$$

dove u_0 è la soluzione newtoniana data da

$$u_0 = \frac{R_S}{2h^2} + C \cos \phi$$

e

$$\epsilon \ll 1, \quad u_1 = C \cos \phi + P$$

dove P indica termini periodici non importanti ai fini delle misure. Il risultato finale sarà quindi dato da

$$u = \frac{R_S}{2h^2} + C \cos(1 - \epsilon)\phi + \epsilon P$$

da cui si vede che la linea che unisce afelio (punto più distante dell'orbita dal centro gravitazionale) e perielio (punto più vicino), precede ed avanza nella direzione stessa del moto della quantità

$$\Delta\phi = 2\pi\epsilon = \frac{3\pi R_S^2}{2h^2}$$

per ogni rivoluzione, ed è questo il fenomeno dell'avanzamento del perielio. Si preferisce misurare non tanto l'avanzamento che si verifica in una singola rivoluzione ma quella che si accumula in un secolo. Indicando con S tale avanzamento e con T il periodo di rivoluzione del corpo celeste in secoli, troviamo che

$$S = \Delta\phi \frac{1}{T} \cong \frac{6\pi}{T} \left(\frac{GM}{c^2} \right) \left(\frac{GM}{L^2} \right)$$

Per orbite quasi circolari, si ha

$$T \sim r^{\frac{3}{2}}, \quad L \sim r^{\frac{1}{2}}$$

Inserendo questi valori all'interno di S si ha

$$S \sim r^{-\frac{5}{2}}$$

Risulta quindi evidente che le migliori misure si otterranno per i pianeti più interni, ed è proprio con Mercurio che si osservano i dati più attendibili. Infatti l'avanzamento teorico del perielio di Mercurio, ammonta ad una correzione di 43" d'arco per secolo, in accordo praticamente perfetto con le osservazioni astronomiche.

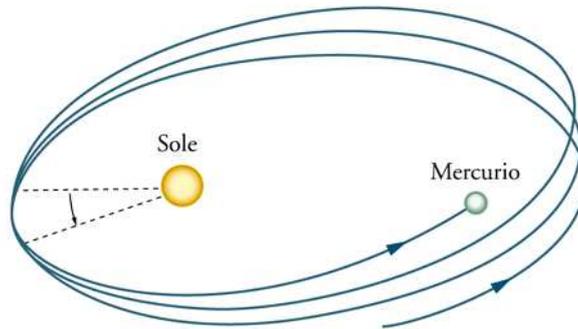


Figura 2.1: Precessione del perielio di Mercurio

Capitolo 3

Analisi correzione di Yukawa

Nel limite di campo debole, da alcuni modelli gravitazionali modificati emerge naturalmente una spiegazione in grado di descrivere la natura dell'universo senza la presenza della materia e dell'energia oscura. Queste teorie prevedono gravitoni, particelle mediatrici dell'interazione gravitazionale, molto massive che modificano oltre certe scale l'intensità del campo gravitazionale. Proprio nel limite di campo debole emerge una modifica alla Yukawa per le leggi di Newton. In particolare, uno di questi modelli è la $f(R)$ -gravity, dove lo scalare di Ricci R , da cui dipende l'azione di *Einstein-Hilbert*, è rimpiazzato da una generica funzione $f(R)$. Da questo modello emerge un potenziale newtoniano modificato nella forma

$$\phi(r) = -\frac{GM}{(1+\delta)r}(1 + \delta e^{-r/\lambda}) \quad (3.1)$$

dove M è la massa della sorgente gravitazionale, r la distanza di una particella test dalla sorgente, G la costante Newtoniana, δ la forza della correzione di Yukawa e λ la distanza oltre la quale la forza della correzione di Yukawa agisce. In questo capitolo si mostrerà, in un approccio semiclassico, come i moti delle orbite dedotte dal potenziale gravitazionale modificato (3.1) siano ricavabili dalle orbite Kepleriane con eccentricità rivista. Nella prima sezione si introdurranno le equazioni del moto, nella seconda si calcoleranno le equazioni delle orbite [7].

3.1 Problema dei due corpi con potenziale di Yukawa

Si consideri una particella massiva m interagente col campo gravitazionale di un corpo M . Le equazioni del moto nel sistema di riferimento del centro di massa in coordinate polari (r, φ) sono

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\phi(r)$$

e

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) \quad (3.2)$$

L'energia totale del sistema può essere scritta come

$$E_T = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{GmM}{(1+\delta)r} (1 + \delta e^{-r/\lambda}) \quad (3.3)$$

dove $\mu = \frac{mM}{m+M}$ è la massa ridotta e $\phi(r)$ è il potenziale modificato (3.1). Usando la conservazione del momento angolare della (3.2) riscriviamo l'energia totale come funzione dipendente solo dalla parte radiale

$$E_T = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GmM}{(1+\delta)r} (1 + \delta e^{-r/\lambda}) \quad (3.4)$$

L'equazione (3.4) è l'unica di cui si ha bisogno per poter descrivere il moto delle orbite imperturbate. Tuttavia possiamo dedurre oltre dal potenziale efficace definito come

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GmM}{(1+\delta)r} - GmM \frac{\delta}{(1+\delta)r} e^{-r/\lambda} \quad (3.5)$$

Qui il primo termine rappresenta una forza repulsiva dovuta al momento angolare, il secondo termine rappresenta l'attrazione gravitazionale e il terzo è una forza addizionale dovuta al termine di Yukawa del potenziale gravitazionale modificato agente sulla particella. Il potenziale effettivo richiede ulteriori considerazioni: si richiede che $\delta \neq -1$ in modo da non avere una singolarità nel secondo e terzo termine; se $\delta > -1$ il secondo termine rimane attrattivo mentre il terzo repulsivo; se $\delta < -1$ il secondo termine diviene repulsivo mentre il terzo attrattivo; se $\delta > 0$ sia il secondo che il terzo termine sono attrattivi.

Si è raffigurato il potenziale ed il potenziale effettivo in funzione di r/λ mostrando la loro dipendenza dalla forza del termine di Yukawa δ . Si vede come il potenziale effettivo dipenda fortemente da δ , infatti per $-1 < \delta < 0$ sia ha un minimo più accentuato, dovuto al fatto che la massa effettiva $M' = \frac{M}{1+\delta}$ diventa più larga.

Differenziando la (3.5) rispetto alla coordinata radiale per la ricerca del minimo si ottiene

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{L^2}{\mu r} = \frac{GmM(\delta e^{-r/\lambda} + 1)}{\delta + 1} + \frac{\delta GmM e^{-r/\lambda}}{(\delta + 1)\lambda}$$

La seconda derivata e la condizione sul momento angolare ci porta ad ottenere

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = \frac{GmM e^{-r/\lambda}}{(\delta + 1)r^3} \left[\delta \left(-\lambda^{-2} r^2 + \lambda^{-1} r + 1 \right) + e^{r/\lambda} \right]$$

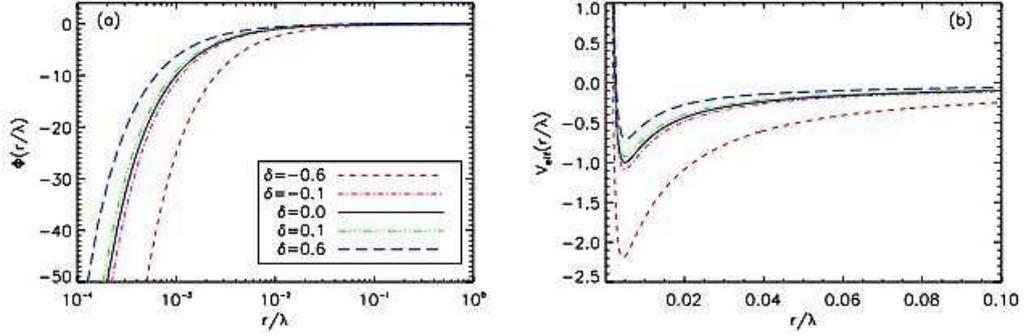


Figura 3.1: Potenziale gravitazionale e potenziale effettivo come funzione della distanza dalla sorgente gravitazionale M . Le linee continue nere riguardano il caso newtoniano con $(\delta = 0)$, le linee colorate le correzioni.

Un minimo per il potenziale effettivo esiste se

$$g(x) \equiv \delta \left(-x^2 + x + 1 \right) + e^x > 0$$

dove $x \equiv r/\lambda$. La condizione è soddisfatta nei seguenti casi: (i) $\delta > -1$ per $x \rightarrow 0$ ovvero per $r \ll \lambda$ che è la configurazione di sistemi astrofisici la cui dinamica avviene su scale paragonabili ai moti planetari intorno ad una stella, (ii) $\delta > -e$ per $x \rightarrow 1$ cioè $r \cong \lambda$ ovvero per dinamiche che tengono conto di scale galattiche e (iii) $\forall \delta$ nel limite $x \rightarrow \infty$ cioè $r \gg \lambda$ che tiene conto di scale extragalattiche e cosmologiche. Di seguito verrà trattato il caso di moti planetari alla quale siamo interessati e per cui il termine esponenziale nell'equazione precedente può essere espanso secondo Taylor

$$e^{\pm x} \approx 1 \pm x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

Analizziamo le condizioni per l'esistenza di un minimo per il potenziale efficace agli ordini $\mathcal{O}(x^2)$ e $\mathcal{O}(x^3)$.

- $\mathcal{O}(x^2)$: a quest'ordine di approssimazione, il potenziale effettivo diventa

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GmM}{r} + \frac{\delta GmM}{(\delta + 1)\lambda}$$

trovando un minimo in

$$r_{min} = \frac{L^2}{2\mu GmM} \quad (3.6)$$

che è lo stesso valore del caso newtoniano. Mentre il potenziale effettivo minimo è shiftato rispetto a quello Newtoniano

$$V_{eff}^{min} = -\frac{1}{2}GmM \left(\frac{G\mu mM}{L^2} - \frac{2\delta}{(\delta + 1)\lambda} \right)$$

- $\mathcal{O}(\mathbf{x}^3)$: il potenziale effettivo può essere riscritto come

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GmM}{r} + \frac{\delta GmM}{(\delta+1)\lambda} - \frac{\delta GmMr}{2(\delta+1)\lambda^2}$$

dal momento che trattiamo casi $\delta \ll 1$, si ha una piccolissima deviazione dal caso Newtoniano quindi è lecito riutilizzare la (3.6) ed ottenere

$$V_{eff}^{min} = -\frac{1}{2}GmM \left(\frac{G\mu m M}{L^2} - \frac{2\delta}{(\delta+1)\lambda} \right) - \frac{L^2\delta}{2(\delta+1)\lambda^2\mu}$$

3.2 Equazioni delle orbite

Calcoliamo ora le orbite chiuse nelle approssimazioni di $\mathcal{O}(x^2)$ e $\mathcal{O}(x^3)$ e si dimostra come sotto condizioni di eccentricità e della posizione del *latus rectum*, l'orbita può essere riscritta nelle formule Kepleriane, dove la correzione di Yukawa è nascosta all'interno dei parametri orbitali.

- **Approssimazione $\mathcal{O}(x^2)$** : riscriviamo la componente della velocità come

$$\dot{r} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}$$

al secondo ordine l'equazione dell'energia può quindi essere riscritta come

$$E_T = \frac{L^2}{2\mu} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GmM}{r} + \frac{GmM\delta}{(1+\delta)\lambda}$$

Da quest'ultima equazione possiamo ottenere l'equazione differenziale

$$u'^2 + u^2 - 2\beta_0 u = \beta_1 \quad (3.7)$$

dove $u \equiv \frac{1}{r}$, $u' = \frac{du}{d\varphi}$, $\beta_0 = \frac{\mu\gamma}{L^2}$, $\beta_1 = \frac{2\mu E_T}{L^2} - \frac{2\mu\gamma}{L^2\lambda} \frac{\delta}{1+\delta}$ e $\gamma = GmM$ e differenziandola otteniamo

$$u' (u'' + u - \beta_0) = 0 \quad (3.8)$$

Dal momento che cerchiamo una soluzione Kepleriana, possiamo eseguire il seguente *ansatz*

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{l} (1 + \epsilon \cos \varphi) \quad (3.9)$$

dove l è il *latus rectum* ed ϵ l'eccentricità. Inserendo la (3.9) in (3.8), otteniamo una condizione per il *latus rectum*

$$l = \frac{1}{\beta_0}$$

Sostituendo la (3.9) nella (3.7), otteniamo per l'eccentricità

$$\epsilon^2 = 1 + l^2\beta_1$$

che in termini dell'energia del sistema può essere riscritta come

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{2L^2}{\mu\gamma} \frac{\delta}{(1+\delta)\lambda} + \frac{2E_T L^2 \mu}{\mu^2 \gamma^2}$$

nella quale per $\delta = 0$ ritorniamo al caso Newtoniano

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2E_T L^2 \mu}{\mu^2 \gamma^2}$$

Questa variazione nell'eccentricità non è purtroppo misurabile con le osservazioni date dalla misure dei parametri orbitali, siccome l'energia totale è una teoria variabile-dipendente. Inoltre si nota come fissata l'energia e il momento angolare essi corrispondono ad un moto orbitale con eccentricità che dipende fortemente dalla forza δ della correzione di Yukawa.

- **Approssimazione $\mathcal{O}(\mathbf{x}^3)$** : Approssimando l'equazione di Yukawa al terzo ordine, l'equazione differenziale si riscrive come

$$u'^2 + u^2 - 2\beta_0 u - \beta_2 \frac{1}{u} = \beta_1 \quad (3.10)$$

dove β_0 e β_1 sono i valori precedentemente utilizzati, mentre

$$\beta_2 = \frac{\mu\gamma\delta}{2L^2\lambda(1+\delta)}$$

Derivando l'equazione (3.10) otteniamo

$$u' \left(u'' + u + \frac{\beta_2}{u^2} - \beta_0 \right) = 0 \quad (3.11)$$

Inserendo la (3.9) nella (3.11) e valutando l'espressione in $\varphi = [0; \pi]$ che corrisponde alla minima e alla massima distanza delle due masse, otteniamo le due condizioni:

$$(1 - l\beta_0)\epsilon^2 + 2(1 - l\beta_0)\epsilon - l\beta_0 + l^3\beta_2 + 1 = 0$$

$$(1 - l\beta_0)\epsilon^2 - 2(1 - l\beta_0)\epsilon - l\beta_0 + l^3\beta_2 + 1 = 0$$

Sottraendo le due condizioni otteniamo un'espressione per il *latus rectum* perfettamente uguale al caso precedente. Inserendo invece (3.9) nella (3.10) otteniamo la seguente condizione per l'eccentricità

$$\epsilon^2 = 1 + l^2\beta_1 - 4\beta_2 = 1 - \frac{2L^2}{\mu\gamma} \frac{\delta}{(1+\delta)\lambda} + \frac{2E_T L^2 \mu}{\mu^2 \gamma^2} - \frac{2\mu\gamma\delta}{L^2\lambda(1+\delta)}$$

dove con $\beta_2 = 0$ otteniamo la condizione per l'eccentricità precedente, mentre per $\delta = 0$, riotteniamo il caso Newtoniano. Il terzo ordine di approssimazione è più largo del secondo e la differenza dovuta ai due ordini non è trascurabile

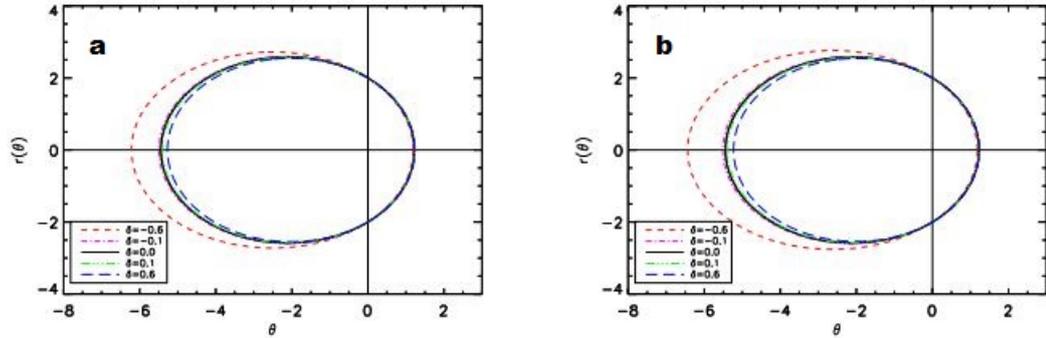


Figura 3.2: Illustrazione dell'effetto del potenziale modificato gravitazionale sui parametri orbitali. L'energia e il momento angolare sono settati in modo da avere un $\epsilon = 0.5$ nel caso Newtoniano con $\delta = 0$. Si mostrano le diverse soluzioni orbitali con diversa eccentricità causata dal termine di Yukawa.

Grazie ad osservazioni astronomiche fatte sulla precessione dei pianeti del sistema solare e in particolare quella di Saturno, si è potuta ottenere una stima per il valore minimo e massimo di δ , la forza della correzione di Yukawa, fissando λ , la distanza alla quale agisce il termine di Yukawa, a 5000 AU ad un valore di $[2.70; 6.70] \times 10^{-9}$.

Con queste osservazioni non si è voluto dire che dal momento che emerge in modo naturale la formulazione di Newton con eccentricità modificata dalla $f(R)$ -gravity nel limite di campo debole, essa debba essere quella giusta. Solo le future osservazioni astronomiche, e quindi la natura stessa dell'universo, discriminerà tra le teorie *MOND* e le teorie che sono alla ricerca della *materia oscura* per fornire una soluzione al problema della "massa mancante".

Conclusioni

Da questo lavoro di tesi emergono le seguenti conclusioni:

- Si è data una formulazione più o meno completa del moto orbitale Newtoniano, che non presenta il caso di orbite aperte a meno che non si considerino teorie perturbative aggiuntive.
- Nel caso si consideri la Relatività Generale, otteniamo delle orbite aperte dovute al fatto che questa teoria può essere vista come una perturbazione al caso Newtoniano.
- Con la Relatività Generale è possibile fornire una misura perfetta della precessione dell'orbita di mercurio attorno al sole e più in generale mostra come il fenomeno è rilevate per i pianeti più vicini alla sorgente gravitazionale
- Tra le teorie MOND che cercano di spiegare *il problema della massa mancante*, quella della *f(R)-gravity* nel limite di campo debole mostra come emerge una modifica del potenziale gravitazionale con correzione alla Yukawa, dalla quale fuoriescono orbite Kepleriane con eccentricità modificata. Si fornisce inoltre un possibile valore della forza del termine di Yukawa.

Bibliografia

- [1] Massimo Ventriglia, *Correzioni relativistiche alle orbite dei pianeti*.
- [2] Carlo Rovelli, *L'ordine del tempo*. Adelphi.
- [3] Alberto Casas, *La materia oscura-L'elemento più misterioso dell'universo*. RBA.
- [4] Mariafelicia De Laurentis, *The Newtonian and relativistic theory of orbits and the emission of gravitational waves*, in rete all'indirizzo <https://arxiv.org/abs/1004.0922>
- [5] P.Mazzoldi, M.Nigro, C.Voci, *Elementi di fisica-Meccanica*. EdiSES.
- [6] S.Capozziello, M.Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*. Liguori Editore.
- [7] I.De Martino, R.Lazkoz, M. De Laurentis, *Analysis of the Yukawa gravitational potential in $f(R)$ gravity I: semiclassical periastron advance*, in rete all'indirizzo <https://arxiv.org/abs/1801.08135>.