

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

**Formulazione della meccanica quantistica attraverso
integrali di cammino**

Relatori:
Prof. Gennaro Miele

Candidato:
Luigi Guardascione
Matricola: N85000941

Anno Accademico 2017/2018

Thirty-one years ago, Dick Feynman told me about his ‘sum over histories’ version of quantum mechanics. ‘The electron does anything it likes’, he said. ‘It goes in any direction at any speed, forward and backward in time, however it likes, and then you add up the amplitudes and it gives you the wavefunction.’ I said to him, ‘You’re crazy’.

But he wasn’t.

F.J. Dyson

Indice

1	Integrale dei cammini	1
1.1	Ampiezza di probabilità	1
1.2	Integrale sui cammini	4
1.2.1	Trasformazioni canoniche	4
1.2.2	Costruzione dell'integrale dei cammini	7
1.3	Confronto con altri formalismi	8
1.3.1	Dalla formulazione di Heisenberg agli integrali di cammino	8
1.3.2	Il principio di indeterminazione	10
1.3.3	Principio di indeterminazione	12
1.3.4	Dagli integrali di cammino alla formulazione di Schrodinger	14
1.3.5	Limite classico	16
2	Applicazioni integrale dei cammini	17
2.1	Oscillatore armonico	17
2.1.1	Oscillatore armonico libero	17
2.1.2	L'oscillatore armonico forzato	19
2.2	Particelle in un campo elettromagnetico	23
2.2.1	Dinamica classica	24
2.2.2	Formulazione degli integrali di cammino	24
2.3	L'effetto Aharonov-Bohm	26
3	Metodi perturbativi in meccanica quantistica	28
3.1	L'espansione perturbativa	28
3.2	Scattering tra un atomo e un elettrone	30
3.3	Sezione d'urto	33
	Riferimenti bibliografici	35

Sommario

La meccanica quantistica è stata costruita a partire da analogie con la meccanica hamiltoniana. Questo è dovuto al fatto che, le coordinate canoniche ed i momenti coniugati, risultano avere un semplice analogo quanto meccanico su cui costruire una teoria hamiltoniana corrispondente alla classica. In questa formulazione un sistema quantistico si trova, all'istante iniziale, in un autostato di un sistema completo di operatori che commutino tra loro e tra l'operatore hamiltoniano e l'evoluzione nel tempo dello stato è ottenuta applicando l'operatore hamiltoniano allo stato iniziale.

Risulta quindi evidente come, in questa formulazione, il tempo abbia una posizione privilegiata. Purtroppo questo comporta, in una generalizzazione relativistica, la spiacevole situazione in cui le leggi non sono covarianti a vista.

Ciò spinse Dirac a ricercare una nuova formulazione che trattasse il tempo e le coordinate spaziali in modo equivalente. Per farlo tornò alla meccanica classica della quale, come sappiamo, esiste un'altra formulazione ovvero quella lagrangiana dove il tempo non viene esplicitato dall'inizio. In questa formulazione il problema del moto è risolto studiando un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine o, alternativamente, richiedendo che il funzionale d'azione sia stazionario. Purtroppo non è possibile una trasposizione in chiave quantistica delle equazioni di Euler-Lagrange altrettanto diretta. In meccanica quantistica infatti, non ha senso parlare di traiettoria della particella e non hanno senso le derivate di un'ipotetica lagrangiana rispetto alle coordinate e alle velocità delle particelle. Ciò che invece è possibile, è riportare in chiave quantistica le idee della meccanica lagrangiana e non le equazioni.

Per farlo partiremo da un "gedankenexperiment" basato sull'esperimento della doppia fenditura di Young e, dopo aver giustificato in modo più formale i risultati ottenuti e mostrato l'equivalenza con le altre formulazioni della meccanica quantistica, proseguiremo mostrando, attraverso qualche esempio pratico, i vantaggi di questa interpretazione della meccanica quantistica. Concluderemo, infine, mostrando come trattare sistemi dove non è possibile esprimere in modo esatto la soluzione del kernel e per i quali è necessario trovare una soluzione approssimata.

Capitolo 1

Integrale dei cammini

È noto che, in meccanica quantistica, non è possibile predire il risultato esatto di un esperimento ma solo la probabilità dei possibili esiti. Risulta quindi evidente che, per costruire una teoria quantistica, bisogna per prima cosa formulare le leggi con cui vadano calcolate le probabilità.

1.1 Ampiezza di probabilità

Iniziamo studiando l'esperimento di Young della doppia fenditura. In questo esperimento si ha un fascio collimato di elettroni (o fotoni o altre particelle) che incide su uno schermo dopo esser passato attraverso una lastra sulla quale sono incise due fenditure fig.1.1. Classicamente, indicando con $P_1(x)$ la probabilità che la particella arrivi in x passando per la fenditura 1 e con $P_2(x)$ la probabilità che la particella arrivi in x passando per la fenditura 2, ci aspettiamo che la probabilità che la particella arrivi in x , dopo un qualsiasi percorso, sia:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (1.1)$$

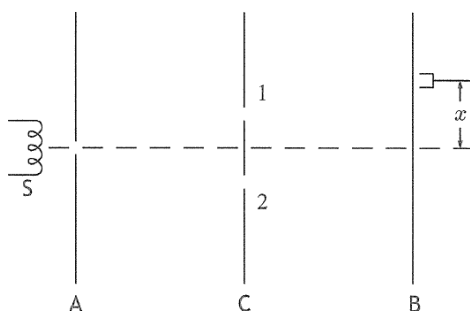


Figura 1.1: Schematizzazione dell'apparato per l'esperimento delle due fenditure di Young

Considerando equiprobabili i casi in cui l'elettrone passi per la prima o per la seconda fenditura si ottiene la distribuzione di probabilità mostrata in fig.1.2 che però non coincide con i risultati sperimentali.

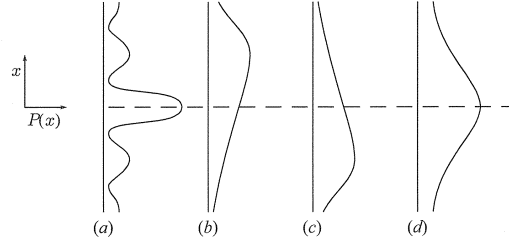


Figura 1.2: a) Risultati sperimentali; b) Risultati attesi se la particella passasse attraverso la prima fenditura; c) Risultati attesi se la particella passasse attraverso la seconda fenditura; d) risultati attesi classicamente.

Possiamo formulare la legge corretta per $P(x)$ dicendo che quest'ultima è il modulo quadro di un certo numero complesso $\phi(x)$ detto ampiezza di probabilità. Per ottenere $\phi(x)$ bisogna sommare $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ che rappresentano, rispettivamente l'ampiezza di probabilità che la particella arrivi in x passando per la fenditura 1 e 2. Si ottiene quindi:

$$P(x) = |\phi(x)|^2 \quad (1.2)$$

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) \quad (1.3)$$

Nonostante i due percorsi sembrino indipendenti, la probabilità totale non risulta pari alla (1.1); a questo punto si è davanti ad un bivio: o è sbagliata la premessa, cioè che i due percorsi non sono in realtà indipendenti, oppure è sbagliato il metodo con cui si arriva alla (1.1), ossia non bisogna calcolare le probabilità sommando le probabilità per tutte le alternative.

Per definire la nuova legge per il calcolo delle probabilità è utile definire i due significati della parola "alternativa": al primo associamo un concetto di esclusione e, per questo tipo, continuiamo a considerare valida la (1.1); al secondo associamo il concetto di interferenza e, in questo caso, vanno considerate valide la (1.2) e la (1.3). Possiamo riassumere il precedente ragionamento nel seguente postulato:

- **Postulato I** Se una misura ideale è effettuata per determinare se il percorso della particella cade in una certa regione dello spazio allora, la probabilità di ottenere un risultato affermativo, sarà la somma di contributi complessi. Uno per ogni percorso che cade nella regione. Dove non misura ideale abbiamo inteso una misura alla quale non posso aggiungere altre informazioni ripetendo la stessa senza disturbare il sistema.

Vediamo ora come esprimere l'ampiezza di probabilità di un determinato evento. Consideriamo una particella che vada da a a b in un certo intervallo di tempo t seguendo un

certo percorso. Associando una certa ampiezza di probabilità ad ogni percorso possibile, l'ampiezza totale sarà data dalla somma di ogni contributo. Per chiarire questo concetto riprendiamo in esame l'esperimento di Young. Immaginiamo di porre un'altra lastra tra D la sorgente e le due fenditure. Su quest'ultima si creino dei buchi indicati con $D_1, D_2 \dots D_N$. La particella ora potrà seguire un qualsiasi percorso e, trovandoci in un caso di alternativa con interferenza, bisogna associare ad ogni percorso un'ampiezza di probabilità e l'ampiezza totale sarà la somma di tutti i contributi. Indicando con ϕ_{ij} l'ampiezza di probabilità associata al caso in cui la particella passi nel buco D_i sulla lastra D e nella j-esima fenditura, si avrà che l'ampiezza totale sarà data da

$$\phi(x) = \sum_{ij} \phi_{ij}(x) \quad (1.4)$$

Continuando a forare la lastra si arriva ad un punto in cui della lastra non resta che un'unica fenditura. Per indicare il percorso compiuto dall'elettrone sarà allora necessario indicare l'altezza x_D a cui passa l'elettrone in corrispondenza della posizione y_D dove sarebbe dovuta essere la lastra. In questo modo la sommatoria su i diverrà un integrale in dx_D , il pedice indicando l'ordinata delle x, e $\phi_{x_D j}$ verrà indicata con $\phi_j(x_D; x)$. L'ampiezza totale in questo caso sarà data da

$$\phi(x) = \sum_j \int dx_D \phi_j(x_D; x) \quad (1.5)$$

Per semplificare la notazione non si prenderanno in considerazione le fenditure dell'esperimento originale, così l'ampiezza diviene

$$\phi(x) = \int dx_D \phi(x_D; x) \quad (1.6)$$

Questo equivale a porre lo schermo prima delle fenditure e come diverrà evidente questo non lederà la generalizzazione della teoria che stiamo derivando.

Si continui aggiungendo un altro schermo E forandolo fino a farlo scomparire. Con ovvia generalizzazione delle notazioni, l'ampiezza totale sarà data da

$$\phi(x) = \int dx_D dx_E \phi(x_D, x_E; x) \quad (1.7)$$

Si continui aggiungendo schermi ad una distanza ε sempre minore, indicando con i lo schermo a distanza $i\varepsilon$ dalla sorgente e seguendo la notazione precedente si ottiene

$$\phi(x) = \int \dots dx_i dx_{i+1} \dots \phi(\dots x_i, x_{i+1} \dots; x) \quad (1.8)$$

Nel limite in cui sono stati aggiunti schermi in tutto lo spazio la (1.8) diviene

$$\phi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots dx_i dx_{i+1} \dots \phi(\dots x_i, x_{i+1} \dots; x) \quad (1.9)$$

Dove il limite va calcolato solo dopo aver esplicitato integrale e sommatoria.

1.2 Integrale sui cammini

Con il postulato I si è introdotto il metodo con cui vanno calcolate le probabilità, con il seguente invece si esprime la natura del contributo di ogni percorso.

- **Postulato II** Il contributo di ogni cammino è uguale in modulo ma ha fase uguale all'azione classica (in unità di $\hbar$) valutata sul percorso ovvero:

$$\phi(x) \propto e^{i/\hbar S[x(t)]} \quad (1.10)$$

Per poter giustificare questo postulato si ritiene utile riportare alcune nozione sulle trasformazioni canoniche in meccanica classica che poi adatteremo al formalismo quantistico.

1.2.1 Trasformazioni canoniche

Lo stato di una particella classica è governato dalla sua coordinata $q(t)$ e dal suo momento coniugato $p(t)$ e l'evoluzione temporale di quest'ultime è governata dalle equazioni di Hamilton

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.11)$$

Dove H è l'hamiltoniana del sistema. È possibile riscrivere la (1.11) in maniera più sintetica usando le parentesi di Poisson

$$\frac{dp}{dt} = \{q, H\}; \quad \frac{dq}{dt} = \{p, H\} \quad (1.12)$$

Una trasformazione di coordinate del tipo

$$p \rightarrow P; \quad q \rightarrow Q \quad (1.13)$$

si dice "canonica" se, nel nuovo sistema, esiste una funzione $\mathcal{H}$ tale che

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}; \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} \quad (1.14)$$

È possibile controllare se una trasformazione è canonica in modo semplice, verificando che siano soddisfatte le seguenti relazioni

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0; \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (1.15)$$

Si può inoltre dimostrare il seguente:

Teorema 1 *Una trasformazione di coordinate è canonica se e solo se è esatta la seguente forma differenziale*

$$\omega = p_i dq_i - P_i dQ_i \quad (1.16)$$

ovvero se esiste una funzione $F(p, q)$ tale che

$$dF = \omega \quad (1.17)$$

Usando questo teorema è possibile costruire trasformazioni canoniche, infatti, nell'ipotesi che la relazione che lega i due sistemi di coordinate sia invertibile si ottiene

$$\begin{aligned} p &= p(q, Q) \\ P &= P(p, Q) \end{aligned} \quad (1.18)$$

da cui sostituendo nella (1.17)

$$p_i dq_i - P_i dQ_i = dF(q, p(q, Q)) = d\tilde{F}(q, Q) \quad (1.19)$$

Esplicitando il differenziale e raccogliendo i termini in dq_i e dQ_i si ottiene

$$\left(P_i + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_i} \right) dQ_i - \left(p_i - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_i} \right) dq_i = 0 \quad (1.20)$$

Da cui, stante l'arbitrarietà di dq_i e di dQ_i

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial q_i}(q, Q) \\ P_i &= -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial Q_i}(q, Q) \end{aligned} \quad (1.21)$$

A questo punto per trovare anche le Q_i basta invertire la (1.21).

Per questo motivo la funzione $\tilde{F}$ viene detta funzione generatrice.

Si immagini ora di voler trovare un sistema di coordinate in cui le P_i e le Q_i siano indipendenti dal tempo. Trovare la trasformazione che porta in questo sistema equivale alla risoluzione delle leggi del moto poichè P e Q sono costanti. Dal momento che

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dP}{dt} = 0 \quad (1.22)$$

la nuova hamiltoniana non può dipendere da P e da Q quindi non può che essere una costante con un'eventuale dipendenza dal tempo. Per semplificare il ragionamento si consideri un hamiltoniana nulla. Seguendo quindi i risultati appena ottenuti e considerando q e Q come variabili indipendenti, la nuova hamiltoniana sarà

$$H\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (1.23)$$

dove $S(q, Q = \text{costante}, t) = 0$ è la funzione generatrice. Dalla prima delle (1.21) discende che

$$P = \text{costante} = -\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q, t) \Big|_{Q=\text{const}} \quad (1.24)$$

che invertita restituisce q in funzione di Q , P , e t e quindi risolve l'equazioni del moto.

Esplicitando la derivata totale di S rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{dq}{dt} = -H(q, p, t) + p \frac{dq}{dt} = L \quad (1.25)$$

che non è altro che la lagrangiana. Dall'integrazione dell'equazione precedente risulta

$$S = \int_{t_0}^t dt' L \quad (1.26)$$

La (1.26) mostra quindi che il funzionale d'azione è la funzione generatrice di una trasformazione canonica che trasforma il sistema di variabili da un istante ad un altro. Cerchiamo ora di trasporre questo risultato nel formalismo quantistico. Un sistema con un grado di libertà in meccanica quantistica viene descritto in termini degli operatori $\hat{p}$ ed $\hat{q}$ soddisfacenti le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \hat{q}|q\rangle &= q|q\rangle \\ \langle q|q'\rangle &= \delta(q - q') \\ \int |q\rangle\langle q| &= 1 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Valgono inoltre le seguenti equazioni

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0; \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.28)$$

In meccanica quantistica una trasformazione $(\hat{q}, \hat{p}) \rightarrow (\hat{Q}, \hat{P})$ viene definita trasformazione canonica una trasformazione che conserva la forma delle (1.28). Studiando gli elementi "misti" di matrice si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} \langle q|\hat{q}|Q\rangle &= q\langle q|Q\rangle \\ \langle q|\hat{Q}|Q\rangle &= Q\langle q|Q\rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

inoltre ricordando che $\hat{p}|q\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}|q\rangle$ si ottiene

$$\begin{aligned} \langle q|\hat{p}|Q\rangle &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\langle q|Q\rangle \\ \langle q|\hat{P}|Q\rangle &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q}\langle q|Q\rangle \end{aligned} \quad (1.30)$$

Usando la (1.29) e la (1.30) è possibile verificare che:

$$\langle q|F(\hat{q}, \hat{Q})|Q\rangle = F(q, Q)\langle q|Q\rangle \quad (1.31)$$

dove $F(q, Q)$ è una funzione "ordinata", ovvero che può scriversi come

$$F(q, Q) = f_1(q)f_2(Q) \quad (1.32)$$

Seguendo Dirac poniamo

$$\langle q|Q\rangle = e^{-i/\hbar G(q, Q)} \quad (1.33)$$

con $G(q, Q)$ funzione ordinata insieme alle sue derivate parziali. Sostituendo la (1.33) nella (1.30) si ottiene

$$\begin{aligned} \langle q|\hat{p}|Q\rangle &= \frac{\partial G}{\partial q}\langle q|Q\rangle \\ \langle q|\hat{P}|Q\rangle &= \frac{\partial G}{\partial Q}\langle q|Q\rangle \end{aligned} \quad (1.34)$$

Da cui si evince

$$\hat{p} = \frac{\widehat{\partial G}}{\partial q}; \quad \hat{P} = \frac{\widehat{\partial G}}{\partial Q} \quad (1.35)$$

Dalle (1.35) si evince che la funzione G definita nella (1.33) è l'analogo quantistico della funzione generatrice classica.

1.2.2 Costruzione dell'integrale dei cammini

A questo punto si ottiene il postulato II semplicemente prendendo come funzione generatrice il funzionale d'azione i.e. l'integrale della lagrangiana. Infatti indicando con q_t lo stato iniziale al tempo t e con Q_T lo stato finale al tempo T si ottiene

$$\langle q|Q \rangle \sim e^{i/\hbar \int dt L} \quad (1.36)$$

Si vuole precisare che l'uso del segno di uguaglianza nell'equazione (1.36) sarebbe scorretta per $T - t$ finito. Per mostrarlo si divida l'intervallo $T - t$ in n intervalli infinitesimi equispaziati δt tali che $n\delta t = T - t$, si ponga poi $t_i = t + i\delta t$ cosicchè $t = t_0$ e $T = T_n$. Usando infine la relazione di completezza la (1.36) diventa

$$\langle q_t|Q_T \rangle = \int dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1} \langle q|q_1 \rangle \langle q_1|q_2 \rangle \dots \langle q_{n-1}|Q \rangle \quad (1.37)$$

Eseguendo lo stesso procedimento anche sul secondo membro della (1.36) si ottiene

$$\langle q_t|Q_T \rangle = \langle q|q_1 \rangle \langle q_1|q_2 \rangle \dots \langle q_{n-1}|Q \rangle \quad (1.38)$$

dove non è presente l'integrazione sulla misura $dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1}$.

Si può comunque considerare lecita la (1.36) nell'ipotesi che $t - T$ si infinitesimo ottenendo

$$\langle q_t|q_{t+\delta t} \rangle = A e^{-i/\hbar \delta t L} \quad (1.39)$$

L'estensione della (1.39) al caso di $T - t$ finito è

$$\langle q_t|Q_T \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \int \left(\prod_{i=1}^{n-1} \right) e^{i/\hbar \int_t^T dt L(q, \dot{q})} \quad \text{con } n\delta t = \text{costante} = T - t \quad (1.40)$$

Un modo più elegante di scrivere la (1.39) è il seguente

$$K(q, Q; t, T) = \langle q_t|Q_T \rangle = \int \mathcal{D}q e^{i/\hbar S(t, T, [q])} \quad (1.41)$$

Questa espressione viene spesso indicata con kernel, i motivi per l'uso di questa terminologia saranno evidenti più avanti. Si noti inoltre, che in dove (1.41) $\mathcal{D}q$ non serve solo a rendere la (1.40) più concisa ma anche un modo elegante di nascondere le difficoltà matematiche nel definire l'integrazione sui cammini.

Come atteso è evidente riconoscere nella (1.40) la (1.9).

1.3 Confronto con altri formalismi

Si prova a giustificare quanto ottenuto cercando sia di derivare i risultati dei capitoli precedenti partendo dalle formulazioni più canoniche della meccanica quantistica, sia di arrivare a quest'ultime a partire dalla formulazione alla Feynman. Si vedrà inoltre come il sistema approcci il moto classico nel limite in cui le grandezze in gioco siano molto maggiori di $\hbar$.

1.3.1 Dalla formulazione di Heisenberg agli integrali di cammino

Si indichi con $\hat{H}$ l'hamiltoniana del sistema che, come ben noto per la formulazione di Heisenberg, sarà indipendente dal tempo. Per semplicità si immagini che il sistema sia una particella che si muove in un potenziale unidimensionale

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q}) \quad (1.42)$$

In questa formulazione fissato lo stato q del sistema ad un istante t , lo stato del sistema dopo un intervallo infinitesimo δt si ottiene da:

$$|q_{t+\delta t}\rangle \simeq |q_t\rangle + \frac{i}{\hbar}\delta t \hat{H}|q_t\rangle + O(\delta t)^2 \quad (1.43)$$

Da cui, l'ampiezza di transizione da uno stato q ad uno Q dopo un intervallo infinitesimo di tempo, sarà

$$\langle Q_{t+\delta t}|q_t\rangle = \langle Q_t|q_t\rangle - \frac{i}{\hbar}\delta t \langle Q_t|\hat{H}|q_t\rangle + O(\delta t)^2 \quad (1.44)$$

Si cominci a studiare il termine $\langle Q_t|\hat{H}|q_t\rangle$ della (1.3.1) sostituendo ad $\hat{H}$ la (1.42)

$$\begin{aligned} \langle Q_t|\hat{H}|q_t\rangle &= \left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \langle Q_t|q_t\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] e^{ik(Q-q)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Introducendo quindi la (1.45) nella (1.44) e svolgendo la derivata rispetto a q si ottiene

$$\langle Q_t|\hat{H}|q_t\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(Q-q)} \left[1 - \frac{i}{\hbar}\delta t H(k, q) + O(\delta t)^2 \right] \quad (1.46)$$

avendo posto

$$H(k, q) = \frac{\hbar^2}{2}k^2 + V(q) \quad (1.47)$$

Si nota a questo punto che i termini nella parentesi quadra della (1.46) rappresentano i primi due termini dello sviluppo in serie di un'esponenziale. Per questo, a meno di infinitesimi del secondo ordine, si ottiene

$$\langle Q_t|\hat{H}|q_t\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp \left\{ i \frac{\delta t}{\hbar} \left[\hbar k \dot{q} - \frac{\hbar^2}{2}k^2 - V(q) \right] \right\} + O(\delta t)^2 \quad (1.48)$$

dove abbiamo posto

$$Q - q = \dot{q}\delta t \quad (1.49)$$

Purtoppo, l'integrando della (1.48) è puramente oscillante. Si esegue quindi una rotazione di Wick nel piano di Argand-Gauss, ovvero

$$t \rightarrow t = i\tau \quad \tau \in \mathbb{R}$$

In questo modo è possibile trattare $i\delta t$ come una costante reale.

Per risolvere l'integrale nella (1.48) si cominci studiando l'esponente dove aggiungiamo $\frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\dot{q}^2}{2}$ in modo da ottenere

$$\hbar k \dot{q} + \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2} k^2 - V(q) - \frac{\dot{q}^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2} - V(q) - \frac{1}{2} (\hbar k - \dot{q})^2 \quad (1.50)$$

Si inserisce la (1.50) nella (1.48) e si esegue la seguente sostituzione

$$\begin{aligned} k &\rightarrow k' = \left(\frac{i\delta t}{\hbar} \right)^{1/2} (\hbar k - \dot{q}) \\ dk &\rightarrow dk' = \sqrt{i\delta t \hbar} dk \end{aligned} \quad (1.51)$$

ottenendo

$$\langle Q_{t+\delta t} | q_t \rangle = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i\delta t}{\hbar} \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{\sqrt{i\delta t \hbar}} e^{-k'^2/2} = \frac{e^{\frac{i\delta t}{\hbar} [\dot{q}^2/2 - V(q)]}}{\sqrt{2\pi i\delta t \hbar}} \quad (1.52)$$

Da cui riconoscendo nell'esponente della (1.52) la lagrangiana del sistema, si ottiene per un intervallo di tempo finito

$$\begin{aligned} \langle Q_T^f | q_i^i \rangle &= \lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ n\delta t = cost}} \int \dots \int \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ dq_j \left(\frac{1}{2\pi i\delta t \hbar} \right)^2 \right\} e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^T L dt}; \\ &\quad (q^i \equiv q_0 \quad Q^f \equiv q_N) \end{aligned} \quad (1.53)$$

Siamo quindi riusciti ad ottenere la (1.40) partendo dal formalismo di Heisenberg.

Si consideri ora una hamiltoniana del tipo

$$H = \frac{1}{2} p^2 v(q) \quad (1.54)$$

Alla quale è associata la seguente lagrangiana

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2v} \quad (1.55)$$

Poichè in meccanica quantistica $\hat{p}$ e $\hat{q}$ non commutano, è necessario definire l'operatore hamiltoniano in modo che questo risulti ordinato secondo la (1.32). Si pone allora

$$\langle Q_t | \left[\frac{1}{2} \hat{p}^2 v(\hat{q}) \right] | q_t \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\hbar^2}{2} k^2 v \left[\frac{q + Q}{2} \right] e^{ik(Q-q)} \quad (1.56)$$

Ragionando in maniera analoga al caso precedente e passando in unità naturali si ottiene

$$\langle Q_{t+\delta t}|q_t\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(Q-q)-i\delta t k^2 v(\frac{q+Q}{2})/2} + O(\delta t)^2 \quad (1.57)$$

Che, similmente a quanto fatto per la (1.48), è possibile ricondurre ad un integrale gaussiano attraverso la seguente sostituzione

$$k \rightarrow k' = \sqrt{i\delta t} \left(kv^{1/2} - v^{1/2}\dot{q} \right) \quad (1.58)$$

Ottenendo

$$\langle Q_{t+\delta t}|q_t\rangle = \frac{e^{-(i\delta t v^{-1}\dot{q}^2)/2}}{\sqrt{2\pi i\delta t v}} \quad (1.59)$$

Riconoscendo nell'esponente della (1.59) la lagrangiana si procede nello generalizzare al caso finito ottenendo

$$\langle Q_T|q_t\rangle = \int \dots \int \prod_{j=1}^{N-1} \left\{ \frac{dq_j}{\sqrt{2\pi i\delta t}} [v(q_j + q_{j-1})]^{-1/2} \right\} e^{i \int_t^T L dt} \quad (1.60)$$

Come si vede, in questo caso, è presente un ulteriore fattore $v^{-1/2}$ che contribuisce all'integrale. Per arrivare alla giusta espressione, infatti, non bisogna partire dalla lagrangiana ma da un espressione del tipo

$$\langle Q_T|q_t\rangle = \int \dots \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int_T^t d\tau \left[p \frac{dq}{d\tau} - H(p, \langle q \rangle) \right] \right\} \quad (1.61)$$

Dove $\mathcal{D}$ indica $\prod \frac{dp_i}{2\pi}$ e $\langle q \rangle$ è la media di q in un dato intervallo.

Nel seguito, se non precisato esplicitamente, si supporrà che sia possibile descriver i sistemi analizzati partendo dalla lagrangiana, ossia prendendo in considerazione equazioni del tipo (1.41).

1.3.2 Il principio di indeterminazione

Prima di poter arrivare ad una forma più o meno nota del principio di indeterminazione di Heisenberg sarà utile introdurre alcuni concetti quali quello di funzione d'onda e, soprattutto, trovare una generalizzazione dell'ampiezza di probabilità nel caso in cui siano presi in esame più eventi in sequenza.

Eventi in successione

Si incomincia cercando la legge di composizione per due eventi. Siano a e b , misurati rispettivamente agli istanti t_a e t_b , gli estremi della nostra misura. Si consideri un istante di tempo t_c compreso tra t_a e t_b , come è noto dalla meccanica classica in questo caso è possibile scrivere l'azione come

$$S[a, b] = S[a, c] + S[c, b] \quad (1.62)$$

Seguendo la (1.41) il kernel in questo caso può essere scritto come

$$K(b, a) = \int \mathcal{D}q e^{i/\hbar S[a, c] + i/\hbar S[c, b]} \quad (1.63)$$

È possibile dividere l'integrale precedente in due parti. La prima avrà come estremi i punti a e c , mentre la seconda andrà da c a b . A questo punto è possibile integrare prima su tutti i percorsi che vanno da a a c e successivamente su quelli da c a b . Infine bisognerà integrare su tutti i possibili valori di $q_c = q(t_c)$. Ovviamente integrando sui percorsi da a a c otterremo il kernel $k(c, a)$ che verrà mantenuto costante nella seconda integrazione, ovvero

$$K(b, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_c \int_a^c \mathcal{D}q e^{i/\hbar S[b, c]} k(c, a) \quad (1.64)$$

A questo punto è possibile eseguire anche la seconda integrazione mantenendo $k(c, a)$ ottenendo

$$K(b, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_c k(b, c) k(c, a) \quad (1.65)$$

Il risultato precedente può essere sintetizzato dicendo che tutti i percorsi per andare da a a b possono essere indicati specificando la posizione q_c attraverso cui passano all'istante t_c . A questo punto è possibile calcolare il kernel attraverso le seguenti regole:

- I Il kernel per andare da a a b è la somma, calcolata su tutti i possibili valori di q_c , delle ampiezze delle particelle per andare da a a c e successivamente a b .
- II L'ampiezza per andare da a a c e successivamente a b è pari al kernel per andare da a a c moltiplicato per quello per andare da c a b .

Generalizzazione a più eventi

Per ottenere l'ovvia generalizzazione a più eventi si comincia dividendo l'intervallo a, b in tre parti considerando, oltre al punto c anche un secondo punto d posto tra c ed a . L'ampiezza di probabilità per andare da a a b sarà, seguendo la (1.65)

$$k(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_c dq_d k(b, c) k(c, d) k(d, a) \quad (1.66)$$

Iterando questo processo dividendo l'intervallo in n parti otteniamo

$$k(a, b) = \int_{q_{n-1}} \int_{q_{n-2}} \dots \int_{q_2} \int_{q_1} dq_1 dq_2 \dots dq_{n-2} dq_{n-1} \times \\ \times k(b, n-1) k(n-1, n-2) \dots k(1, a) \quad (1.67)$$

Con questa definizione di kernel l'ampiezza di probabilità di spostarsi di un tratto infinitesimo è data da

$$k(i+1, i) = \frac{1}{A} e^{i\varepsilon/\hbar L(\frac{q_{i+1}-q_i}{\varepsilon}, \frac{q_{i+1}+q_i}{2}, \frac{t_{i+1}+t_i}{2})} \quad (1.68)$$

A questo punto per riottenere la (1.41) basta usare la legge per la composizione delle probabilità ovvero ricordare che

$$\phi[q(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^{n-1} k(i+1, 1) \quad (1.69)$$

1.3.3 Principio di indeterminazione

Per arrivare al concetto di funzione d'onda si consideri il seguente esperimento virtuale. Una particella libera inizia a muoversi dall'origine $q_0 = 0$ all'istante $t_0 = 0$. Dopo un certo intervallo di tempo T sia nota la sua posizione Q con un'incertezza $\pm b$. Ci si domanda a questo punto quale sia la probabilità che la particella abbia percorso un tratto q dopo un ulteriore tempo t . Usando la (1.65) si può esprimere l'ampiezza di probabilità cercata come il prodotto tra il kernel per arrivare da q_0 ad un punto $q' = Q + y$, con $-b \leq y \leq b$, ed il kernel per arrivare ad $q + q'$ partendo da q' integrato su tutti i possibili valori di q' , ovvero

$$\psi(x') = \int_{-b}^b k(q + q', q') k(q', q_0) dy \quad (1.70)$$

Per calcolare i due kernel si tiene conto che la particella nelle due parti dell'esperimento può essere considerata libera. Si può infatti dimostrare che la costante di normalizzazione che appare nella (1.40) vale

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2} \quad (1.71)$$

e che l'azione classica vale

$$S_0 = \frac{m}{2} \frac{(q' - q_0)^2}{T - t_0} \quad (1.72)$$

che sostituiti nella (1.40) danno

$$K(q + q', q_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right)^{-n/2} \int \dots \int e^{\frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{i=1}^n (q_i - q_{i-1})^2} dq_1 \dots dq_{n-1} \quad (1.73)$$

Sfruttando il fatto che l'integrale di una gaussiana è ancora una gaussiana, è possibile svolgere tutte le n integrazioni una dopo l'altra ottenendo

$$k(q', q_0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (T - t_0)} \right)^{1/2} e^{\frac{im}{2\hbar} \frac{(q' - q_0)^2}{T - t_0}} \quad (1.74)$$

Inserendo la (1.74) nella (1.70) si ottiene

$$\psi(x') = \int_{-b}^b \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t'} \right)^{1/2} e^{\frac{im(q' - y)^2}{2\hbar t'}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2} e^{\frac{im(Q + y)^2}{2\hbar T}} dy \quad (1.75)$$

L'integrale della (1.75) può essere esteso a tutto lo spazio introducendo una funzione di peso $G(y)$ definita come segue

$$G(y) = \begin{cases} 1 & -b \leq y \leq b \\ 0 & |y| > b \end{cases} \quad (1.76)$$

ottenendo

$$\psi(q') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t'} \right)^{1/2} e^{\frac{im(q'-y)^2}{2\hbar t'}} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{1/2} e^{\frac{im(Q+y)^2}{2\hbar T}} dy \quad (1.77)$$

Questo però porterebbe ad inutili complicazioni di calcolo. Si preferisce quindi usare un fattore di peso di tipo gaussiano i.e.

$$G(y) = e^{-y^2/2b^2} \quad (1.78)$$

In questo modo, introducendo i seguenti cambi di variabili

$$Q \rightarrow q_1 = Q \frac{t'}{T}; \quad b \rightarrow b_1 = b \left(1 + \frac{t'}{T} \right) \quad (1.79)$$

si ottiene

$$\psi(q') = \frac{m}{2\pi i \hbar \sqrt{t'T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{im}{2\hbar} \left[\frac{q'^2}{t'} + \frac{Q^2}{T} + y \left(-\frac{2q'}{t'} + \frac{2Q}{T} \right) + \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{T} - \frac{\hbar}{imb^2} \right) y^2 \right]} dy \quad (1.80)$$

Questo integrale può essere risolto completando il quadrato analogamente a quanto fatto in 1.3.1, ottenendo

$$\begin{aligned} \psi(q') = & \frac{m}{2\pi i \hbar \sqrt{t'T}} \left(\frac{-\pi}{(im/2\hbar)(1/t' + 1/T) - 1/2b^2} \right)^{1/2} \\ & + \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{q'^2}{t'} + \frac{Q^2}{T} \right) + \frac{(m^2/4\hbar^2)(-q'/t' + Q/T)^2}{(im/2\hbar)(1/t' + 1/T) - 1/2b^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.81)$$

A questo punto, come sappiamo, la probabilità che la particella arrivi a vari punti lungo l'asse q sarà data dal modulo quadro della (1.81) ottenendo

$$P(q') = \frac{mb}{2\pi \hbar T \Delta q} e^{-(q' - Vt')^2 / (\Delta q)^2} \quad (1.82)$$

Dove si è tenuto conto del fatto che il modulo di un esponenziale puramente immaginario è unitario e dove $(\Delta q)^2 = b_1^2 + \left(\frac{\hbar t'}{mb} \right)^2$ e $V = \frac{Q}{T}$ è la velocità classica. Come atteso la distribuzione è una gaussiana centrata in $q'_1 = Vt'$ ma risultata dilatata di un fattore Δq maggiore del b_1 atteso classicamente.

In questo caso, infatti, il sistema si comporta come se ci fosse una nuova variabile q_2 con una propria deviazione standard data da

$$\Delta q_2 = \frac{\hbar t'}{mb} \quad (1.83)$$

Piuttosto che la variabile fittizia q_2 è proprio questa deviazione extra che ha significato fisico: essa ci dice che, per particelle microscopiche ¹, il passaggio attraverso una fenditura stretta rende incerta la posizione futura. Infatti, introducendo il momento classico $\delta p = \frac{\hbar}{b}$ e interpretando $\delta q = 2b$ come incertezza sulla posizione, si ottiene

$$\delta p \delta q = 2\hbar \quad (1.84)$$

che è il principio cercato.

Dalle derivazioni precedenti come risultato secondario, anche se non di minore importanza, discende il concetto di funzione d'onda, strettamente legato a quello di kernel. Si immagini infatti di voler conoscere l'ampiezza di probabilità $\psi(x, t)$ che una particella arrivi in un certo punto x dello spazio senza interessarci di dove essa abbia iniziato il moto. Di conseguenza possiamo vedere il kernel come il caso particolare di una funzione d'onda di cui si conosca l'origine. Da questo, e dal fatto che, essendo un'ampiezza di probabilità, segue le regole sviluppate in 1.3.2 per la composizione degli eventi, segue che

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(a_b, t_b; s_c, t_c) \psi(x_c, t_c) dx_c \quad (1.85)$$

La (1.85) può intendersi nel seguente modo: l'ampiezza totale di arrivare ad (x_b, t_b) , ovvero $\psi(x_b, t_b)$, è la somma su tutte le possibili ampiezze per arrivare a (x_c, t_c) , cioè $\psi(x_c, t_c)$ moltiplicato per l'ampiezza per andare da (x_c, t_c) a (x_b, t_b) , ovvero $k(x_c, t_c; x_b, t_b)$. Ovviamente questa ampiezza ha tutte le proprietà caratteristiche già studiate, in particolare, la probabilità $P(x_c, t_c)$ di arrivare nel punto (x_c, t_c) sarà data da

$$P(x_c, t_c) = |\psi(x_c, t_c)|^2 \quad (1.86)$$

1.3.4 Dagli integrali di cammino alla formulazione di Schrodinger

In questo capitolo si cercherà di ridurre gli integrali di cammino ad una equazione differenziale che risulterà essere proprio la celeberrima equazione di Schrodinger. La possibilità di sviluppare questa teoria risiede nel fatto che la (1.62) resta valida per ogni punto a , b e c anche nel caso in cui questi distino di intervalli infinitesimi. Seguendo la (1.86) possiamo scrivere allora

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon/\hbar L(\frac{x-y}{\varepsilon}, \frac{x+y}{2})} \psi(y, t) dy \quad (1.87)$$

Si consideri adesso il caso di una particella di massa m che si muove in un potenziale unidimensionale e che sia descritta dalla seguente lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \quad (1.88)$$

¹questa equazione è valida anche per corpi macroscopici ma, a questi ordini di grandezza, diviene assolutamente trascurabile

Introducendo quindi la (1.88) nella (1.87) si ottiene

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\varepsilon}} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} V\left(\frac{x+y}{2}, t\right)} \quad (1.89)$$

Si osservi che essendo il primo esponenziale puramente immaginario, per grandi valori di y , questo tenderà ad oscillare e, data la natura più liscia degli altri termini, i contributi tenderanno ad elidersi. Si introduce quindi la sostituzione $y = x + \eta$, ottenendo

$$\psi(x, t + \varepsilon) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x+\eta/2, t)} \psi(x + \eta, t) \quad (1.90)$$

Si sviluppa ora la (1.90) in serie arrestandosi al primo ordine in ε . Poichè la fase passa da 0 a 1 quando η passa da 0 a $\sqrt{2\hbar\varepsilon/m}$, questo equivale a fermarsi al secondo ordine in η . Si ottiene

$$\psi(x, t) + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} \left[1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(x, t) \right] \left[\psi(x, t) + \eta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] d\eta \quad (1.91)$$

Guardando il termine di ordine 0 si nota che mentre nel primo membro non è moltiplicato per nessuna costante, nel secondo, è moltiplicato per

$$\frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} d\eta = \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2}$$

Da cui si evince, come annunciato in (1.71), deve essere

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2} \quad (1.92)$$

Tenendo conto dei seguenti integrali

$$\frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} d\eta = 0 \quad (1.93)$$

e

$$\frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 e^{\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}} d\eta = \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \quad (1.94)$$

Si ottiene

$$\psi + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V\psi + \frac{i\hbar\varepsilon}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1.95)$$

Che dovendo essere valida per ogni ε dà

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t) \psi \right] \quad (1.96)$$

Che è la equazione di Schrodinger ricercata.

1.3.5 Limite classico

Si conclude il capitolo mostrando brevemente come, dalla formulazione degli integrali di cammino, possano esplicitarsi le equazioni classiche del moto. Viene da chiedersi infatti, come sia possibile che, tra tutti i percorsi quantisticamente possibili, la particella classicamente "scelga" sempre quello dove l'azione viene minimizzata.

Nel limite in cui $\hbar$ è molto minore dell'azione del sistema misurato, il termine integrale della (1.41) comincia ad oscillare velocemente. Poichè tutti i percorsi portano lo stesso contributo, in generale, i contributi di due percorsi vicini tendono ad elidersi. Essendo però nulla la variazione dell'azione classica, si avrà che in un intorno di quest'ultima i percorsi contribuiranno in fase. In questo modo, nell'integrale della (1.41), contribuiscono in maniera non nulla solo i percorsi infinitesimamente vicini all'azione. In questo modo vediamo come, nel limite in cui $\hbar \rightarrow 0$, del vengono ritrovate le equazioni del moto classiche.

Capitolo 2

Applicazioni integrale dei cammini

In questo capitolo verranno mostrate alcune applicazioni degli integrali di cammino a sistemi fisici di particolare interesse. Si comincerà studiando l'oscillatore armonico libero e forzato. Questo, insieme allo studio del moto di una particella in un campo elettromagnetico, renderà possibile mostrare le idee di base dell'elettrodinamica quantistica. Nell'ultima sezione si studierà il caso in cui lo spazio della fasi non sia semplicemente connesso mostrando alcuni effetti peculiari di questa condizione.

2.1 Oscillatore armonico

L'oscillatore armonico è uno dei sistemi fisici più studiati grazie alla possibilità di modellare con esso molteplici situazioni di moti vicino la posizione di equilibrio. Nel nostro caso inoltre, sarà possibile associare a questo i modi a frequenza definita con cui un campo elettromagnetico in cavità può vibrare.

2.1.1 Oscillatore armonico libero

Si comincia quindi studiando il caso classico. Come sappiamo un oscillatore armonico è descritto da una lagrangiana del tipo

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (2.1)$$

A cui corrisponde il seguente funzionale d'azione

$$S[q(t)] = \int_0^T dt \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right) \quad (2.2)$$

che classicamente, conduce alle seguenti equazioni del moto

$$\ddot{q}_c + \omega^2 q_c = 0; \quad q_c(0) = q, \quad q_c(T) = q' \quad (2.3)$$

Dove la seconda e la terza della (2.3) rappresentano le condizioni al bordo. Come già fatto in 1.3.4, si pone $q(t) = q_c(t) + y(t)$ e, nella (2.2), si cambiano le variabili in $y(t)$.

Questo passaggio non crea alcuna difficoltà in quanto lo jacobiano della trasformazione è 1. Inoltre, poichè gli estremi del percorso sono fissi, bisognerà avere $y(0) = y(T) = 0$. Si esprime allora la (2.2) in serie di potenze. Arrestandosi al secondo ordine si ottiene

$$\begin{aligned} S[q_c(t) + y(t)] &= \frac{m}{2} \left[\int_0^T dt (\dot{q}_c^2 - \omega^2 q_c^2) + \int_0^T dt (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) \right] = \\ &= S[q_c(t)] + S[y(t)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vediamo quindi che l'azione può scomporsi in due parti. La prima risulta essere esattamente l'azione classica mentre la seconda parte rappresenta l'integrale su tutte le variazioni, ovvero su tutti i possibili percorsi. Si osservi che la prima parte è indipendente dalle variazioni mentre la seconda non dipende dagli estremi. Introducendo quindi la (2.4) nelle (1.41) si ottiene il seguente kernel

$$k(q', T; q, 0) = e^{i/\hbar S[q_c(t)]} \int \mathcal{D}y e^{i/\hbar S[y(t)]} = e^{i/\hbar S[q_c(t)]} F(T) \quad (2.5)$$

con

$$F(T) = \int_0^0 \mathcal{D}y e^{1/\hbar \int_0^T \frac{m}{2} (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt} \quad (2.6)$$

Dal momento che tutti i percorsi $y(t)$ vanno da $y(t=0) = 0$ a $y(t=T) = 0$, questi possono essere scritti in serie di Fourier con periodo fondamentale T

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi t}{T} \quad (2.7)$$

In questo modo è possibile identificare un percorso attraverso i coefficienti di Fourier a_n piuttosto che attraverso la funzione $y(t)$.¹ Si può allora riscrivere la (2.6) in termini di serie di Fourier. La parte cinetica risulta

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \int_0^T \dot{y}^2 dt &= \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n\pi}{T} \frac{m\pi}{T} a_n a_m \int_0^T \cos \frac{n\pi t}{T} \cos \frac{m\pi t}{T} dt = \\ &= \frac{m}{2} \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 a_n^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mentre quella potenziale può essere scritta come

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T y^2 dt &= \frac{m\omega^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \int_0^T \sin \frac{n\pi t}{T} \sin \frac{m\pi t}{T} dt = \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

¹Si noti che questa procedura è a tutti gli effetti una trasformazione di coordinate e, come tale, inserisce nell'equazione lo jacobiano. Essendo quest'ultimo costante lo si introduce in un'unica costante indipendente da ω . Sarà poi possibile valutare questa costante tenendo presente che, per $\omega = 0$ il sistema si riconduce a quello della particella libera di cui è noto il fattore $F(T) = (m/2\pi i \hbar T)^{1/2}$

A questo punto si divide il periodo fondamentale in N intervalli infinitesimi in modo da garantire che solo un numero finito di coefficienti di Fourier si diverso da 0. Con questa ipotesi è inoltre possibile dividere l'integrale in N parti ed integrarle singolarmente ottenendo

$$F(T) = J \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{T}{2} \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] a_n^2 \right\} \times \frac{da_1}{A} \dots \frac{da_N}{A} \quad (2.10)$$

Il risultato di ognuno degli N integrali è della forma $\sqrt{2/\varepsilon T} \sqrt{n^2\pi^2/T^2 - \omega^2}$, per cui la (2.10) diviene

$$F(T) = \prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{T^2}} \prod_{n=1}^N \sqrt{1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2}} = C \sqrt{\frac{\sim \omega T}{\omega t}} \quad (2.11)$$

Ricordando che per $\omega = 0$ $F(T) = \sqrt{m/2\pi i \hbar T}$, la (2.11) diventa

$$F(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega t}} \quad (2.12)$$

2.1.2 L'oscillatore armonico forzato

La natura isolata del sistema appena studiato, lo rende una schematizzazione troppo semplicistica per la descrizione di sistemi reali in cui l'oscillatore armonico è in interazione con altri sistemi o viene forzato da un potenziale esterno. La risoluzione di questo tipo di problemi può essere divisa in due parti: prima si risolvono le componenti indipendenti dell'oscillatore e successivamente si tiene conto dell'interazione col resto del sistema.

Senza considerare il problema in tutta la sua generalità, si prenda in esame un oscillatore armonico accoppiato linearmente con un potenziale esterno descritto dalla seguente lagrangiana

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{M}{2} \dot{q}^2 - \frac{M\omega}{2} x^2 + J(t) q^2 \quad (2.13)$$

A cui corrisponde il seguente kernel

$$k(q_f, t_f; q_i, t_i) = A \int \mathcal{D}q e^{(i/\hbar) S[q]} \quad (2.14)$$

²Si considera una forza esterna dipendente dal tempo per evitare di ricondursi al caso di un oscillatore armonico semplice. Infatti, nel caso contrario è possibile scrivere la lagrangiana come

$$L = \frac{M}{2} \dot{q}^2 - \frac{M\omega}{2} x^2 + Jq = \frac{M}{2} \dot{q}^2 - \frac{M\omega}{2} \left(q - \frac{J}{M\omega^2} \right)^2 + \frac{J^2}{M\omega^2}$$

Sostituendo a $\bar{q} = q - \frac{J}{M\omega^2}$ si ottiene

$$\frac{M}{2} \dot{\bar{q}}^2 - \frac{M}{2} \omega^2 \bar{q}^2 + \frac{J^2}{M\omega^2}$$

che equivale alla lagrangiana di un oscillatore armonico libero con punto d'equilibrio spostato di $J/(\omega^2 M)$

Per calcolare esplicitamente la (2.14), si procede come fatto in 2.1.1 attuando la seguente sostituzione

$$q(t) = q_{cl}(t) + \eta(t) \quad (2.15)$$

Espandendo ora la (2.14) in serie di Taylor si ottiene

$$S[q] = S[q_{cl} + \eta] = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \eta(t_1) \eta(t_2) \left. \frac{\delta^2 S}{\delta q(t_1) \delta q(t_2)} \right|_{q=q_{cl}} \quad (2.16)$$

Dove si è tenuto conto che $\left. \frac{\delta S}{\delta q(t)} \right|_{q=q_{cl}} = 0$. Calcolando la derivata funzionale, la (2.16) può essere riscritta come

$$S[q] = S[q_{cl}] + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2 \eta^2) \quad (2.17)$$

Che conduce al seguente kernel

$$k(q_f, t_f; q_i, t_i) = A e^{i/\hbar S[q_{cl}(t)]} \int \mathcal{D}\eta e^{i/2\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2 \eta^2)} \quad (2.18)$$

Per calcolare esplicitamente la (2.18) si discretizza l'intervallo di tempo, dividendolo in n intervalli

$$t_n = t_i + n\varepsilon$$

Inoltre si indicano le fluttuazioni dal percorso classico all'istante t_n come

$$\eta(t_n) = \eta_n \quad (2.19)$$

È possibile scrivere la (2.18) come segue

$$\begin{aligned} k(q_f, t_f; q_i, t_i) &= A e^{i/\hbar S[q_{cl}(t)]} \int \mathcal{D}\eta e^{i/2\hbar \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{\eta}^2 - m\omega^2 \eta^2)} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} e^{i/\hbar S[q_{cl}]} \int d\eta_1 \cdots d\eta_{N-1} \\ &\quad \frac{i\varepsilon}{2\hbar} \sum_{n=1}^N \left(m \left(\frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\varepsilon} \right)^2 - m\omega^2 \left(\frac{\eta_n + \eta_{n-1}}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ricordiamo che, essendo gli estremi fissi, le fluttuazioni su questi punti sono nulle. Per cui vale

$$\eta_0 = \eta_N = 0 \quad (2.21)$$

È possibile semplificare l'integrale precedente attuando la seguente sostituzione

$$\eta_n \rightarrow \left(\frac{m}{2\hbar\varepsilon} \right)^{1/2} \eta_n \quad (2.22)$$

attraverso la quale la (2.20) può essere riscritta come

$$k(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar\varepsilon}{m} \right)^{(N-1)/2} e^{i/\hbar S[q_{cl}]} \times \\ \times \int d\eta_1 \cdots d\eta_{N-1} i \sum_{n=1}^N \left((\eta_n - \eta_{n-1})^2 - \varepsilon^2 \omega^2 \left(\frac{\eta_n + \eta_{n-1}}{2} \right)^2 \right) \quad (2.23)$$

È possibile semplificare ulteriormente la notazione immaginando che gli η_n formino un vettore colonna

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

In questo modo si può riscrivere il kernel come

$$(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar\varepsilon}{m} \right)^{(N-1)/2} e^{i/\hbar S[q_{cl}]} \int d\eta e^{i\eta^T B \eta} \quad (2.25)$$

Dove η^T rappresenta la trasposta di η e B è la seguente matrice quadrata $N - 1$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Definendo

$$x = 2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{4} \right) \\ y = \left(1 + \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{4} \right) \quad (2.27)$$

È possibile riesprimere la matrice B come segue

$$B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots \\ y & x & y & 0 & \cdots \\ 0 & y & x & y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Essendo chiaramente hermitiana, la matrice B può essere diagonalizzata attraverso una matrice ortogonale $\mathcal{U}$ ottenendo

$$B_D = \mathcal{U} B \mathcal{U}^\dagger = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Notando che il determinante di B_D uguale a quello di B , essendo unitarie le matrici $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^\dagger$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int d\eta e^{i\eta^T B \eta} &= \int d\eta e^{i\eta^T \mathcal{U}^\dagger B_D \mathcal{U} \eta} = \int d\zeta e^{i\zeta^T B_D \zeta} \\ &= \int d\zeta_1 \cdots d\zeta_{N-1} e^{i \sum_{n=1}^{N-1} b_n \zeta_n^2} = \prod_{n=1}^{N-1} \left(\frac{i\pi}{b_n} \right)^{1/2} = (i\pi)^{(N-1)/2} \sqrt{\det B} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dove nel secondo passaggio è stata effettuata la sostituzione $\zeta = \mathcal{U}\eta$ che, essendo $\mathcal{U}$ unitaria, ha jacobiano pari a uno. Così facendo è possibile riscrivere la (2.25) come

$$\begin{aligned} (q_f, t_f; q_i, t_i) &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{N/2} \left(\frac{2\hbar\varepsilon}{m} \right)^{(N-1)/2} \times \\ &\times (i\pi)^{(N-1)/2} \sqrt{\det B} e^{i/\hbar S[q_{cl}]} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon \det B}} e^{i/\hbar S[q_{cl}]} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Risulta ora evidente che, per calcolare il limite nella (2.31), basti conoscere il limite

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \varepsilon \det B \quad (2.32)$$

Per eseguire questo limite si indica con I_n il determinante della sottomatrice $n \times n$ di B . È banale notare che questi rispettano la seguente relazione ricorsiva

$$I_{n+1} = x I_n - y^2 I_{n-1} \quad (2.33)$$

avendo posto

$$I_{-1} = 0; \quad I_0 = 1 \quad (2.34)$$

Il significato fisico degli I_n risulta evidente ricordando come era definita B . Infatti, sostituiti al posto del determinante di B nella (2.31), questi restituiscono il kernel per la transizione dall'istante iniziale t_i , all'istante $t_n = t_i + n\varepsilon$.

Sostituendo esplicitamente la x e la y definiti nella (2.27) si ottiene

$$I_{n+1} = 2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{4} \right) I_n - \left(+ \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{4} \right)^2 I_{n-1}$$

Che, attraverso alcuni banali passaggi aritmetici, può essere riespressa come

$$\frac{I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}}{\varepsilon^2} = -\frac{\omega^2}{2} \left(I_n + I_{n-1} + \frac{\varepsilon^2 \omega^2}{8} I_{n-1} \right) \quad (2.35)$$

Per poter effettuare il limite al continuo si definisce la seguente funzione

$$\phi(t_n - t_i) = \phi(n\varepsilon) = \varepsilon I_n \quad (2.36)$$

Si procede a questo punto con il calcolo della (2.32)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \varepsilon \det B = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \varepsilon I_{N-1} = \phi(t_f - t_i) = \phi(T) \quad (2.37)$$

Risulta allora necessario trovare un'espressione esplicita per la $\phi(t)$. Per farlo si nota che, con la sostituzione (2.36), la (2.35) diviene

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -\omega^2\phi(t) \quad (2.38)$$

Che è l'equazione dell'oscillatore armonico.

Per risolvere la (2.38) bisogna trovarne le condizioni iniziali, ovvero $\phi(0)$ e $\dot{\phi}(0)$ che valgono

$$\phi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon I_0 = 0 \quad (2.39)$$

$$\dot{\phi}(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \left(\frac{I_1 - I_0}{\epsilon} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(2 - 1 - \frac{\epsilon^2 \omega^2}{2} \right) = 1 \quad (2.40)$$

Da cui è possibile risolvere il precedente problema di Cauchy ottenendo

$$\phi(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad (2.41)$$

che sostituito nella (2.31) restituisce

$$k(x_f, T, x_i, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} e^{(i/\hbar)S[q_{cl}]} \quad (2.42)$$

Dove

$$\begin{aligned} S[q_{cl}] &= \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[(\cos \omega T)(q_i^2 + q_f^2) - 2q_f q_i \right] \\ &+ \frac{q_i}{\sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} J(t) \sin \omega(t - t_i) dt + \frac{q_f}{\sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} J(t) \sin \omega(t_f - t) dt \\ &- \frac{1}{m\omega \sin \omega T} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t ds J(t) J(s) \sin \omega(s - t_i) \sin \omega(t_f - t)^3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.2 Particelle in un campo elettromagnetico

In questa sezione verrà studiata la dinamica di una particella carica che si muove in un campo elettromagnetico dato. Come sappiamo in realtà, il moto di una particella carica modifica il campo elettromagnetico, ad esempio emettendo radiazioni. Qui verrà considerata l'intensità del campo molto maggiore delle perturbazioni provocate dalla particella che, quindi, verranno trascurate.

³Per il calcolo esplicito di questa azione si rimanda a [2]

2.2.1 Dinamica classica

Come è noto, in fisica classica, il moto di una particella carica di massa m e carica e è governato dalle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho; & \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0; & \nabla \wedge \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j} \right)\end{aligned}\tag{2.44}$$

e rispetta la seguente equazione del moto

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{B} \right)\tag{2.45}$$

Dalle (2.44) si evince l'esistenza di due funzioni $\mathbf{A}$ e φ attraverso le quali è possibile esprimere i campi $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{E}$ come segue

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\tag{2.46}$$

Si può dimostrare che le funzioni $\mathbf{A}$ e φ non sono univoche ma sono definite a meno di una trasformazione di Gauge definita come segue

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) - \nabla\lambda(t, \mathbf{x}) \\ \varphi(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \varphi(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, \mathbf{x})\end{aligned}\tag{2.47}$$

Questa trasformazione, nonostante cambi $\mathbf{A}$ e φ , lascia invariati $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{E}$. Attraverso i potenziali definiti nella (2.46) è possibile ottenere la seguente lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) - e\varphi(t, \mathbf{x})\tag{2.48}$$

Da cui si ottiene, attraverso una trasformata di Legendre, la seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \right)^2 + e\varphi(t, \mathbf{x})\tag{2.49}$$

2.2.2 Formulazione degli integrali di cammino

Seguendo il primo capitolo, possiamo esprimere il kernel come segue

$$K(t_f, \mathbf{x}_f; t_i, \mathbf{x}_i) = \int \mathcal{D}\mathbf{x} e^{iS[\mathbf{x}, \mathbf{A}]/\hbar}\tag{2.50}$$

Dove l'azione è ottenuta integrando la (2.48).

Si vuole ora mostrare che questo kernel soddisfa l'equazione di Schrodinger data da

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle\tag{2.51}$$

con

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(t, \hat{\mathbf{x}}) \right)^2 + e\varphi(t, \hat{\mathbf{x}}) \quad (2.52)$$

Per farlo si discretizza l'intervallo di tempo come fatto in 1.3.2 . Particolare attenzione è richiesta dal seguente integrale

$$\int dt \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t)) \rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon \left\{ \frac{\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j}{\epsilon} - \mathbf{A} \left(\frac{t_{j+1} + t_j}{2}, \frac{\mathbf{x}_{j+1} + \mathbf{x}_j}{2} \right) \right\} \quad (2.53)$$

Si può infatti dimostrare che, se non discretizzato in questa maniera, questo integrale non conduce ad una teoria Gauge-invariante.

Si considera adesso una funzione a $t - \epsilon$ e la si propaga verso t . Trascurando termini di ordine superiore secondo in ϵ otteniamo

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}_f) &\approx \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon^3 \int d^3 u e^{(im\mathbf{u}^2)/(2\hbar\epsilon)} e^{i\epsilon L_{int}/\hbar} \psi(t - \epsilon, \mathbf{x}_i) \\ L_{int} &= \frac{e\mathbf{u}}{c\epsilon} \cdot \mathbf{A}(t - \epsilon/2, \mathbf{x}_i + \epsilon/2) - e\varphi(t - \epsilon/2, \mathbf{x}_i + \epsilon/2) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dove $A_\epsilon = \sqrt{m/2\pi\hbar\epsilon i}$ è una costante di normalizzazione e $\mathbf{u} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i$. Espandendo in serie gli ultimi due fattori fino al secondo ordine in $\mathbf{u}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \psi(t, \mathbf{x}_f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon^3 \int d^3 u e^{(im\mathbf{u}^2)/(2\hbar\epsilon)} \times \\ &\times \left\{ \psi(t - \epsilon) + \frac{1}{2} u_i u_j D_i D_j \psi - \frac{ie\epsilon}{\hbar} \varphi \psi \right\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

D_j indicando la j -esima componente della derivata covariante

$$\mathbf{D} = \nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \quad (2.56)$$

Svolgendo quindi gli integrali gaussiani e passando al limite otteniamo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{D}^2 \psi)(t, \mathbf{x}) + e\varphi(t, \mathbf{x}) \psi(t, \mathbf{x}) \quad (2.57)$$

Che è esattamente l'equazione di Schrodinger nella rappresentazione della posizione. Come atteso, inoltre, sotto una trasformazione di Gauge (2.47) l'azione diviene

$$\Delta S[\mathbf{x}, A, \varphi] = -\frac{e}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\mathbf{x} \cdot \nabla \nabla \lambda + \frac{\partial}{\partial t} \lambda \right) = -\frac{e}{c} \lambda(t_f, \mathbf{x}_f) - \lambda(t_i, \mathbf{x}_i) \quad (2.58)$$

Con questo cambiamento il kernel diviene

$$K(t_f, \mathbf{x}_f; t_i, \mathbf{x}_i) \rightarrow e^{-ie\lambda(t_f, \mathbf{x}_f)/\hbar c} K(t_f, \mathbf{x}_f; t_i, \mathbf{x}_i) e^{-ie\lambda(t_i, \mathbf{x}_i)/\hbar c} \quad (2.59)$$

Che è il cambiamento atteso sotto trasformazione di Gauge nel formalismo di Schrodinger.

2.3 L'effetto Aharonov-Bohm

Se lo spazio delle fasi non è semplicemente connesso, ovvero due curve aventi stessi estremi non possono essere deformate l'una su l'altra con continuità, possono avvenire fenomeni peculiari. Uno di questi è l'effetto Aharonov-Bohm in cui, il moto di una particella carica attraverso una regione senza campo elettromagnetico, viene influenzato da un campo esterno alla regione del moto. Questo è reso possibile del fatto che nell'azione definita nella (2.50) non compaiono direttamente i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ ma i potenziali $\mathbf{A}$ e φ .

È possibile mostrare questo effetto attraverso un esperimento simile a quello della doppia fenditura di Young. Si consideri un solenoide ideale, che abbia cioè lunghezza infinita e passo nullo. È noto che il campo magnetico esterno al solenoide è nullo mentre il potenziale vettore vale

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{\rho^2}; \quad \text{con } \rho = x^2 + y^2 \quad (2.60)$$

Dove Φ indica il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide.

Si consideri una particella la cui traiettoria $\mathbf{w}(s)$ descriva una curva $\mathcal{C}$ non intersecantesi con il solenoide. Il termine della (2.50) contenente il potenziale vettore risulta proporzionale a

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{A}(\mathbf{w}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{w}(s)}{ds} ds = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\Phi}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{xdy - ydx}{\rho^2} \quad (2.61)$$

Passando in coordinate polari $(x, y, z) \rightarrow (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ l'integrale curvilineo diviene

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{\Phi}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} d\varphi \quad (2.62)$$

Fissati gli estremi, un percorso $\mathcal{C}_n : x' \rightarrow x$ può essere caratterizzato dal numero di avvolgimenti n attorno al solenoide. In particolare è possibile fissare un contorno $\mathcal{C}_0 : x' \rightarrow x$ e contare quante volte la curva chiusa formata dall'unione di $\mathcal{C}_n$ e $\mathcal{C}_0$ fa un avvolgimento attorno al solenoide. Da questa definizione segue che, per un percorso con n avvolgimenti, vale

$$\int_{\mathcal{C}_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = n\Phi + \int_{\mathcal{C}_0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = n\Phi + \frac{\Phi}{2\pi} \Delta\phi \quad (2.63)$$

Dove $\Delta\phi$ è l'angolo mostrato in 2.1.

Dovendo considerare tutti i percorsi con tutti gli avvolgimenti possibili per il calcolo del kernel, si procede all'integrazione in due passi: prima si fissa il numero di avvolgimenti e si integra su tutti i percorsi che collegano x' a x ; successivamente, nota la (2.63), si somma su tutti i possibili numeri d'avvolgimenti

$$\begin{aligned} k(x, t; x', t') &= \sum_n \int_{\mathcal{C}_n} \mathcal{D}\mathbf{w} e^{iS[\mathbf{w}, \mathbf{A}]/\hbar} \\ &= e^{ie\Phi\Delta\phi/\hbar c} \sum_n e^{ine\Phi/\hbar c} k_n(x, t; x', t') \end{aligned} \quad (2.64)$$

dove

$$k_n(x, t; x', t') = \int_{\mathcal{C}_n} \mathcal{D}\mathbf{w} e^{i/\hbar \int_{t'}^t ds (m\dot{\mathbf{w}}^2/2 - e\varphi)} \quad (2.65)$$

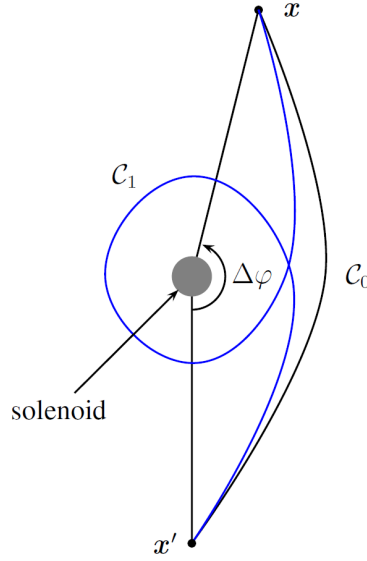


Figura 2.1: Un percorso di contorno $\mathcal{C}_0$ ed uno con un avvolgimento $\mathcal{C}_1$

Come si vede la fase con cui i vari percorsi contribuiscono dipende, oltre che dal numero di avvolgimenti, anche dal flusso Φ . Solo nel caso in cui

$$\frac{e\Phi}{\hbar c} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.66)$$

il fattore di fase è unitario e la sommatoria nella (2.64) restituisce il seguente kernel

$$k_n(x, t; x', t') = e^{ie\Phi\Delta\phi/\hbar c} k_0(x, t; x', t') \quad (2.67)$$

che resta costante al variare del flusso Φ secondo la (2.66).

In generale però il flusso può variare con continuità e questo porta ad una variazione del fattore di fase. Ponendo quindi uno schermo oltre il solenoide, punti che prima erano massimi a causa dell'interferenza costruttiva, possono diventare minimi a causa del cambiamento del fattore di fase.

Capitolo 3

Metodi perturbativi in meccanica quantistica

Fino a questo momento, sono stati trattati solo sistemi in cui era possibile ottenere, più o meno facilmente, una espressione esatta per il kernel. Purtroppo, questi non rappresentano che un'estrema minoranza dei casi reali. Diviene allora necessaria riuscire ad ottenere delle formule approssimate che rendano possibile trattare questi sistemi. Il metodo più semplice per ottenere modelli approssimati è l'espansione perturbativa.

In questo capitolo svilupperemo questa metodologia che consiste nello sviluppare in serie di potenze del potenziale a cui è soggetta la particella. Mostriamo inoltre alcune applicazioni dell'espansione perturbativa che ci permetteranno di analizzare un fenomeno di *scattering* tra atomo ed elettrone.

3.1 L'espansione perturbativa

Si supponga che una particella risenta di un potenziale $V(x, t)$ e che il kernel relativo a questo potenziale non ammetta soluzione analitica. Il Kernel per il moto tra due punti dello spazio a e b risulta essere

$$k_V(b, a) = \int_a^b e^{i/\hbar \int_{t_a}^{t_b} (m\dot{x}^2/2 - V(x, t)) dt} \mathcal{D}^1 \quad (3.1)$$

Supponendo che l'integrale del potenziale sia piccolo rispetto ad $\hbar$ è possibile sviluppare quest'ultimo in serie di potenze ottenendo

$$e^{-i/\hbar \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt} = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} V(x, t) dt \right)^2 + \dots \quad (3.2)$$

¹D'ora in avanti il pedice V indicherà le grandezze fisiche in presenza del potenziale V mentre il pedice 0 quelle libere.

É possibile esprimere l'equazione precedente come

$$k_V(b, a) = k_0(b, a) + k^{(1)}(b, a) + k^{(2)}(b, a) + \dots \quad (3.3)$$

dove

$$k_0(b, a) = \int_a^b e^{i/\hbar \int_{t_a}^{t_b} m\dot{x}^2/2dt} \mathcal{D}x \quad (3.4)$$

$$k^{(1)}(b, a) = -\frac{1}{\hbar} \int_a^b e^{i/\hbar \int_{t_a}^{t_b} m\dot{x}^2/2dt} \int_{t_a}^{t_b} V(x, s) ds \mathcal{D}x \quad (3.5)$$

$$k^{(2)}(b, a) = -\frac{1}{2\hbar^2} \int_a^b e^{i/\hbar \int_{t_a}^{t_b} m\dot{x}^2/2dt} \int_{t_a}^{t_b} V(x, s) ds \int_{t_a}^{t_b} V(x, s') ds' \mathcal{D}x \quad (3.6)$$

Si cerca ora di esprimere questi termini in una forma più esplicativa. Si comincia quindi con il termine $k^{(1)}$. Indicando con

$$F(s) = \int_a^b e^{i/\hbar \int_{t_a}^{t_b} m\dot{x}^2/2dt} V(x, s) \mathcal{D}x \quad (3.7)$$

è possibile esprimere la (3.5) come

$$k^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} F(s) ds \quad (3.8)$$

É possibile interpretare il termine $F(s)$ con la somma su tutti i cammini pesati con un ulteriore fattore $V(s)$. Si noti però che nella (3.7) il potenziale $V(s)$ viene valutato solo nell'istante $t = s$. Nel resto del percorso, quindi, la particella viene considerata libera. É quindi possibile esprimere $F(s)$ come

$$F(t_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_0(b, c) V(c) k_0(c, a) dx_c \quad (3.9)$$

Dove si è indicato con c il punto $x_c(s = t_c)$. Introducendo la (3.9) nella (3.8) si ottiene

$$k^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \int_{-\infty}^{+\infty} k_0(b, c) V(c) k_0(c, a) dx_c dt_c \quad (3.10)$$

Utilizzando la (3.10) è possibile dare un'interpretazione fisica ai vari termini dello sviluppo. L'interazione tra la particella e il potenziale viene detto *scattering* (diffusione). Dalla (3.10) risulta che la particella ha un'ampiezza di probabilità di subire lo scattering, per unità di volume e tempo pari a $-(i/\hbar)V$. Come sappiamo per ottenere l'ampiezza di probabilità della transizione della particella da a a b , bisogna sommare tutti i cammini. É possibile allora associare ad ogni termine dello sviluppo $k^{(i)}$ la classe di cammini in cui la particella subisce lo scattering i volte²

²Si noti che ogni $k^{(i)}$ è a sua volta una somma su tutti i possibili cammini in cui la particella subisce lo scattering i volte

Si vuole ora legare in qualche modo, i vari kernel con il concetto di funzione d'onda sviluppato nella refonda. Nel caso in esame la funzione d'onda assume la seguente forma

$$\psi(b) = \int k_V(b, a) f(a) dx_a \quad (3.11)$$

$f(a)$ indicando il valore della funzione d'onda all'istante $t = t_a$. Sviluppando in serie l'equazione precedente si ottiene

$$\psi(b) = \int k_0(b, a) f(a) dx_a - \frac{i}{\hbar} \iint k_0(b, c) V(c) k_0(c, a) d\tau_c f(a) dx_a + \dots \quad (3.12)$$

Il primo termine è di nuovo esprimibile come la funzione d'onda all'istante $t = t_b$ nel caso in cui la particella sia libera. Per questo motivo coerentemente con la notazione adottata fin ora verrà indicata con $\psi_0(b)$. Con questa notazione è possibile esprimere la (3.12) come

$$\begin{aligned} \psi(b) = & \psi_0(b) - \frac{i}{\hbar} \int k_0(b, c) V(c) \psi_0(c) d\tau_c + \\ & + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \iint k_0(b, c) V(c) k_0(c, d) V(d) \psi_0(d) d\tau_c d\tau_d + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

In questa forma la serie è chiamata *espansione di Born*. Considerando solo i primi due termini si ottiene la *prima approssimazione di Born* che prevede un solo scattering causato dal potenziale. Considerando anche il terzo si ottiene la *seconda approssimazione di Born* che invece prevede due scattering, l'ultimo dei quali in c e così via per tutti gli altri termini. È possibile riscrivere la (3.13) in maniera più concisa raccogliendo il termine $k_0(b, c) V(c)$ ottenendo

$$\begin{aligned} \psi(b) = & \psi_0(b) + \\ & - \frac{i}{\hbar} \int k_0(b, c) V(c) \left[-\frac{i}{\hbar} \int k_0(c, d) V(d) \psi_0(d) d\tau_d + \dots \right] d\tau_c \end{aligned} \quad (3.14)$$

È evidente che l'espressione tra parentesi quadre coincide con la (3.13) ma con estremi a e c , per cui è possibile riscrivere la (3.14) come

$$\psi(b) = \psi_0(b) - \frac{i}{\hbar} \int k_0(b, c) V(c) \psi(c) d\tau_c \quad (3.15)$$

Che risulta essere un'equazione integrale per k_v (k_0 essendo noto). Seguendo l'interpretazione data all'espansione di Born, è possibile interpretare la (3.15) come segue. La funzione d'onda in b è data da due contributi: il primo consiste nella funzione d'onda della particella libera e il secondo è la funzione d'onda considerando almeno un processo di scattering, l'ultimo di questi essendo avvenuto nel punto c .

3.2 Scattering tra un atomo e un elettrone

Si consideri un fascio collimato di elettroni incidente su una lastra sottile. Si supponga il fascio abbastanza rado da poter trascurare l'iterazione mutua degli elettroni e la lastra

tanto sottile da non considerare scattering multipli. Nell'ipotesi in cui gli urti siano solo elastici, ovvero quelli in cui l'atomo ha la stessa energia prima e dopo l'urto, l'interazione tra atomo e elettrone può essere descritta da un'approssimazione di Born al primo ordine. Si ponga il centro dell'atomo come origine degli assi e si indichi con $a = (\mathbf{x}_a, t_a = 0)$ e $b = (\mathbf{x}_b, t_b = T)$ rispettivamente il punto in cui viene rilasciato l'elettrone e quello in cui viene rilevato. Si supponga inoltre che a e b siano molto distanti dal nucleo in modo da poter trascurare l'interazione elettrone-nucleo e considerare l'elettrone libero tranne che in prossimità nel nucleo. Come visto nel capitolo precedente il kernel del sistema può esprimersi come

$$K_V(b, a) \approx k_0(b, a) + k^{(1)}(b, a) = k_0(b, a) - \frac{i}{\hbar} \int k_0(b, c) V(c) k_0(c, a) d\tau_c \quad (3.16)$$

Dove $V(c)$ è il potenziale atomico che per semplicità verrà supposto centrale, ovvero del tipo $V = V(|\mathbf{x}|)$. Essendo già stato studiato, trascureremo il kernel della particella libera focalizzando la nostra attenzione su $k^{(1)}$. Sostituendo ora le (1.74) nell'equazione precedente si ottiene

$$k^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \iint_0^T \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (T - t_c)} \right)^{3/2} e^{i \frac{m|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|^2}{2\hbar(T - t_c)}} \times V(\mathbf{x}_c) \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t_c} \right)^{3/2} e^{i \frac{m|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_a|^2}{2\hbar t_c}} dt_c d^3\mathbf{x}_c \quad (3.17)$$

Integrando in t si ottiene

$$k^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{5/2} T \int \left(\frac{1}{R_{ca}} + \frac{1}{R_{bc}} \right) e^{im(R_{ca} + R_{bc})^2/2\hbar T} V(\mathbf{x}_c) d^3\mathbf{x}_c \quad (3.18)$$

dove $R_{ca} = |\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_a|$ e $R_{bc} = |\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_c|$. Indicando $r_a = |\mathbf{x}_a|$ e $r_b = |\mathbf{x}_b|$ possiamo approssimare R_{ca} e R_{bc} come

$$R_{ca} = r_a \left(1 - \frac{2\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{x}_c}{r_a^2} + \frac{|\mathbf{x}_c|^2}{r_a^2} \right)^{1/2} \approx r_a + \mathbf{i}_a \cdot \mathbf{x}_c \quad (3.19)$$

$$R_{bc} = r_b \left(1 - \frac{2\mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_c}{r_b^2} + \frac{|\mathbf{x}_c|^2}{r_b^2} \right)^{1/2} \approx r_b - \mathbf{i}_b \cdot \mathbf{x}_c$$

Avendo indicato con $\mathbf{i}_a = -\mathbf{x}_a/r_a$ e con $\mathbf{i}_b = \mathbf{x}_b/r_b$ dei vettori unitari nella direzione di $-\mathbf{x}_a$ e $\mathbf{x}_b$. Con queste approssimazioni è possibile esprimere $(R_{ca} + R_{bc})^2$ come

$$(R_{ca} + R_{bc})^2 \approx (r_a + r_b)^2 + (r_a + r_b)(\mathbf{i}_a \cdot \mathbf{x}_c - \mathbf{i}_b \cdot \mathbf{x}_c) \quad (3.20)$$

Usando la (3.20) la (3.18) diviene

$$k^{(1)}(b, a) = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar T} \right)^{5/2} T \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) e^{im(r_a + r_b)^2/2\hbar T} \int e^{im(r_a + r_b)(\mathbf{i}_a \cdot \mathbf{x}_c - \mathbf{i}_b \cdot \mathbf{x}_c)/\hbar T} V(\mathbf{x}_c) d^3\mathbf{x}_c \quad (3.21)$$

Per dare un'interpretazione fisica alla (3.21) conviene esprimerla in termini di grandezze fisiche di più diretta comprensione. Derivando la fase dell'esponenziale a fattore dell'integrale della (3.21) rispetto a T si ottiene la frequenza data da

$$\omega = \frac{\partial}{\partial T} i m \frac{(r_a + r_b)^2}{2\hbar T} = \frac{m}{2\hbar} \frac{(r_a + r_b)^2}{T^2} \quad (3.22)$$

Da cui si evince che l'elettrone, durante il suo moto, ha energia $\frac{m}{2} \frac{(r_a + r_b)^2}{T^2} = \frac{m}{2} u^2$ avendo indicato con $u = (r_a + r_b)/T$ la velocità media della particella. Derivando la fase rispetto ad r_b , si ottiene invece il numero d'onda nel punto b

$$k = \frac{m}{\hbar} \frac{r_a + r_b}{T} \quad (3.23)$$

a cui corrisponde un momento mu . Indicando con $\mathbf{p}_a$ e $\mathbf{p}_b$ rispettivamente il momento entrante e quello uscente la (3.21) si può esprimere come

$$k^{(1)} \approx -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{5/2} \frac{u}{T^{1/2} r_a r_b} 2^{imu^2 T/2\hbar} \int e^{i(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \cdot \mathbf{x}_c / \hbar} V(\mathbf{x}_c) d^3 \mathbf{x}_c \quad (3.24)$$

Essendo arrivati a questo risultato attraverso un'espansione in serie, risulta evidente che il termine k_0 abbia un peso maggiore rispetto all'appena calcolato $k^{(1)}$. Questa differenza viene ulteriormente accentuata quando si cerca la probabilità che l'elettrone arrivi in un determinato punto c , essendo questa ottenuta elevando al quadrato il modulo di k_V . È per ovviare a questo problema che si è aggiunta la condizione di collimazione del fascio. Schermato opportunamente gli elettroni infatti, si limitano gli elettroni che non subiscono scattering in un fascio centrale. Quelli che hanno subito processi di scattering invece, saranno gli unici ad avere probabilità non nulle di trovarsi significativamente lontani dal fascio collimato. La probabilità per un elettrone di arrivare in una regione lontana dal centro può quindi essere calcolata tenendo conto solo del fattore $k^{(1)}$ ottenendo

$$\frac{P(b)}{vol} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{m}{2\pi \hbar} \right)^5 \frac{u^2}{tr_a^2 r_b^2} |v(\tilde{p})|^2 \quad (3.25)$$

Avendo indicato con $\tilde{p} = \mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b$ il momento trasferito e con $v(\tilde{p})$ la seguente quantità

$$v(\tilde{p}) = \int e^{i(\tilde{p}/\hbar) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (3.26)$$

Per interpretare più facilmente la (3.25) è utile esprimere il rapporto tra le probabilità di arrivare in due punti distinti ovvero

$$\frac{P(b)}{P(d)} = \left(\frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^2 |v(\tilde{p})|^2 \frac{(r_a + r_b)^2}{r_a^2 r_b^2} \quad (3.27)$$

Come si vede $v(\tilde{p})$ è parte del kernel che contiene informazioni sul potenziale atomico e per questo non si semplifica mentre, le informazioni riguardanti normalizzazioni e l'apparato sperimentale, essendo le stesse per i due punti non compaiono nella (3.27)

3.3 Sezione d'urto

Per descrivere i processi di scattering, è utile introdurre il concetto di sezione d'urto σ che permette di pensare all'urto in termini classici. Questa è definita come l'area effettiva del bersaglio sulla quale può urtare l'elettrone. Particolare importanza ha anche la sezione d'urto differenziale che corrisponde all'area da urtare per essere diffusi entro un angolo solido $d\Omega$. Proviamo ora a calcolare la probabilità che l'elettrone arrivi in b con questo modello. Se non fosse presente il bersaglio, dopo una distanza $r_a + r_b$, gli elettroni si troverebbero diffusi entro un angolo solido pari a $\frac{(r_a + r_b)^2}{r_a^2} d\sigma$ (vedi fig.3.1).

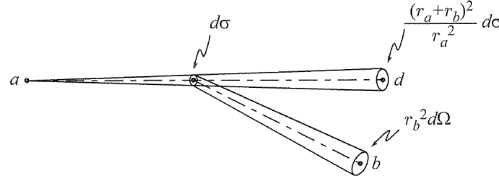


Figura 3.1: Gli elettroni che avrebbero colpito l'area $d\sigma$ in assenza di bersaglio, vengono deviati da questo di un angolo θ in un angolo solido $d\omega$

A causa del bersaglio invece una parte di essi viene deviata verso il punto b e diffusa attorno ad esso entro un angolo solido pari a $r_b^2 d\Omega$. Prendendo il rapporto fra queste aree otteniamo il rapporto tra le probabilità che vale

$$\frac{P(b)}{P(d)} = \frac{[(r_a + r_b)/r_a]^2 d\sigma}{r_b^2 d\Omega} \quad (3.28)$$

Confrontando l'equazione precedente con al (3.27) si ottiene

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |v(\tilde{p})|^2 \quad (3.29)$$

Il vantaggio di utilizzare questa espressione piuttosto che la (3.25) consiste nella possibilità di confrontare direttamente vari esperimenti di scattering grazie all'assenza di dipendenza dalle condizioni sperimentali nella (3.29).

Conclusioni

Con questo lavoro di tesi si è voluto mostrare questa interessante formulazione alternativa della meccanica quantistica proposta dal premio Nobel Richard Feynman. Si è dedicato il primo capitolo alla costruzione dell'integrale dei cammini, cuore della teoria, e si è mostrato come, attraverso questo, si possibile prevedere l'evoluzione di un sistema quantistico. Si è inoltre mostrato come questa formulazione sia evidente a quelle più classiche come quella di Schrodinger o di Heisenberg. Si è inoltre mostrato come, tra tutti i cammini possibili, valutati egualmente a livello quantistico, solo quello di minima azione ha peso a livello macroscopico.

Successivamente sono state mostrate alcune applicazioni dirette degli integrali di cammino che hanno permesso di mostrare i vantaggi di questa formulazione. Si è infatti riuscito a spiegare l'effetto Aharonov-Bohm nel quale il moto della particella viene influenzato da campi elettromagnetici in regioni in cui questi campi sono nulli.

Si è concluso mostrando come approcciarsi a sistemi complicati effettuando un'espansione perturbativa che ha portato all'approssimazione di Born.

È proprio da questa espansione che, utilizzando il formalismo matematico della teoria dei campi, si può creare, attraverso le cosiddette *Feynman rules*, una corrispondenza grafica nota come diagrammi di Feynman, che rende i problemi d'urto estremamente intuitivi. Sarà proprio lo sviluppo di questa teoria, insieme agli studi sull'elettrodinamica quantistica che portarono Feynman al conferimento del Nobel nel 1965.

Bibliografia

- [1] Fiorenzo Bastianelli. «Path integrals in quantum mechanics». In: *Appunti per il corsi di fisica teroica I* (2012).
- [2] Ashok Das. *Lectures of Quantum Field Theory*. A cura di World Scientific Pub Co Inc. second edition. Singapore, 2008.
- [3] Giampiero Esposito et al. *Advanced concepts in quantum mechanic*. A cura di Cambridge University Press. first edition. Cambridge, 2015.
- [4] Richard Feynman. «"Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics»». In: *Reviews of Modern Physics* ().
- [5] Richard Feynman e Albert Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. A cura di Dover publications. emended edition. Mineola, New York, 2010.
- [6] Pierre Ramond. *Field theory : a modern primer*. A cura di Westview Press. second edition. Cambridge, 1997.
- [7] Antonio Romano. *Meccanica Analitica*. A cura di Milano. Apogeo, 2007.