UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Modelli di deformazione del suolo ai Campi Flegrei

Relatore:	**Candidato:**
Dott. Guido Russo	Giuseppe Cappelli
Dott. Umberto Tammaro	Matr. N85/881

Anno Accademico 2017/2018

quando hic inferni ianua regis,
et tenebrosa palus Acheronte refuso

poscia che qui si dice esser l'intrata
de' regni inferni, e d'Acheronte il lago

— Publio Virgilio Marone, *Eneide*, Lib. VI

Indice

Introduzione

La caldera dei Campi Flegrei, situata ad ovest di Napoli, è un vulcano attivo caratterizzato da due grandi eruzioni, quella dell'Ignimbrite Campana, avvenuta circa 33000 anni fa e quella del Tufo Giallo Napoletano, avvenuta circa 15000 anni fa. Quest'ultima grande eruzione ha portato alla creazione della caldera. L'attività vulcanica successiva si è concentrata sul bordo della caldera stessa. L'ultima eruzione è quella del Monte Nuovo, avvenuta nel 1538. Questa eruzione è l'unica di cui possediamo una documentazione storica. Sappiamo quindi che essa fu preceduta da una intensa sismicità e da variazioni del livello del suolo molto importanti.

In realtà variazioni del livello del suolo caratterizzano, come per altre caldere nel mondo, tutta l'esistenza di una caldera. I Campi Flegrei sono noti infatti per il bradisismo: un lento sollevarsi ed abbassarsi del suolo. Quest'area è attualmente densamente popolata e, data la sua complessa storia eruttiva e le recenti crisi bradisismiche, è tenuta sotto sorveglianza dall'Osservatorio Vesuviano, sezione dell'Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia.

L'Osservatorio ha dispiegato sul terreno diverse reti di sorveglianza, ciascuna dedicata ad uno specifico parametro geochimico o geofisico utile a caratterizzare lo stato del vulcano. Per quanto riguarda la misura del livello del suolo, fino al 2000 l'Osservatorio conduceva periodiche campagne di livellazione geodetica. Dal 2000 in poi ha invece implementato una rete di stazioni GPS in continua che consentono l'acquisizione di molte più misure nel tempo, anche se in un minor numero di punti rispetto alla livellazione geodetica.

L'Unità Funzionale di Geodesia dell'Osservatorio Vesuviano mi ha fornito i dati acquisiti fino a circa la metà del 2013 dalla rete GPS. In questo lavoro di tesi ho usato questi dati per determinare lo spostamento in diversi intervalli di tempo, corrispondenti a diverse velocità di deformazione, e per caratterizzare la sorgente tramite l'uso di un semplice modello di sorgente puntiforme (modello di Mogi). I risultati sono stati poi commentati alla luce delle approssimazioni del modello e di alcune conclusioni che si trovano nella letteratura sull'argomento.

Capitolo 1

Deformazioni del suolo in aree vulcaniche

1.1 I Campi Flegrei

I Campi Flegrei sono una caldera formatasi a seguito dell'eruzione del Tufo Giallo Napoletano avvenuta circa 15000 anni fa [8]. L'eruzione portò allo sprofondamento di circa 600 m dell'area compresa tra Capo Miseno e Nisida. Una evidenza di questo sprofondamento è mostrata in figura 1.1.

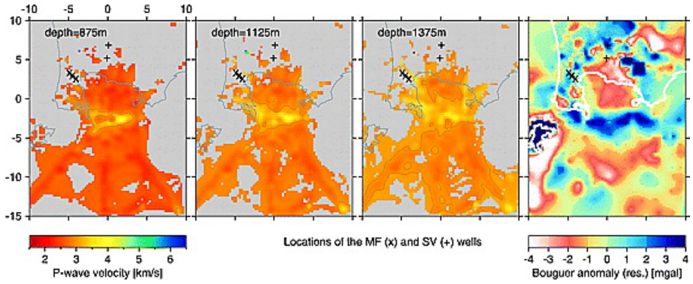

Figura 1.1: Immagini tomografiche della velocità P a diverse profondità (riportate in alto a sinistra nelle prime tre figure da sinistra) confrontate con la mappa di anomalie di Bouguer (ultima figura sulla destra. Da [9]).

Come altre caldere nel mondo, i Campi Flegrei sono interessati dal fenomeno del bradisismo, un lento periodico sollevarsi e abbassarsi del suolo. La presenza di significativi resti di ville romane nel mare antistante Baia dimostra che il fenomeno è attivo almeno da 2000 anni. Le ultime due crisi bradisismiche si sono avute nei periodi 1970-1972 e 1982-1984, con un sollevamento totale nel comune di Pozzuoli di circa 3.5 m, parzialmente recuperato nel periodo successivo, come mostrato in figura 1.2. La diminuzione del livello del suolo è stata stabile fino al 2004, anche se caratterizzata dall' accadimento di piccoli episodi di innalzamento (detti mini uplift) limitati sia nel tempo che nel massimo valore di spostamento raggiunto. I mini uplift sono indicati in figura 1.2. Dal 2006 il suolo nell'area flegrea ha ripreso a salire, con un'accelerazione a partire dal 2011.

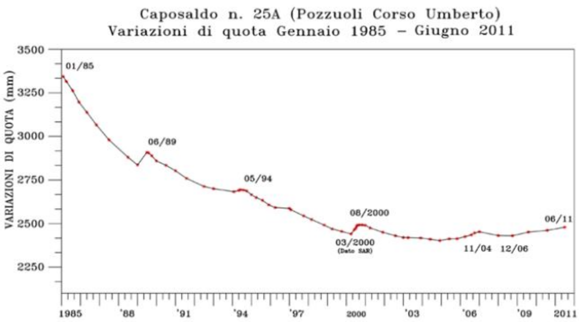

Figura 1.2: Misure di variazioni di quota del caposaldo di Corso Umberto (lungomare di Pozzuoli) determinate tramite livellazione geodetica. Le date riportate corrispondono a eventi di mini uplift.

1.2 Il modello di Mogi

L'attività di un vulcano è caratterizzata, tra l'altro, dalla deformazione del suolo intorno ad esso. Una causa tipica di questa deformazione è l'aumento della pressione nella camera magmatica generata da cristallizzazione parziale o da iniezione di altro magma. Per descrivere tale deformazione, Mogi [6] propose un modello basato su di una sorgente puntiforme in un semispazio omogeneo e isotropo.

Lo spostamento generato da una forza applicata in un punto di uno spazio omogeneo ed isotropo può essere calcolato analiticamente [1]. Si dimostra che questo spostamento può essere generato equivalentemente da una pressione uniforme applicata sulla superficie di una sfera con centro nel punto di applicazione della forza. Mogi considerò l'effetto di una seconda sorgente nel mezzo, simmetrica alla prima rispetto ad un piano poiché tale configurazione annulla lo sforzo in direzione normale al piano, che è esattamente la condizione che la superficie libera terrestre deve verificare. A dispetto della complicazione dei calcoli, l'espressione finale dello spostamento in superficie è abbastanza semplice:

$$\Delta u_r = \frac{3a^3P}{4\mu}\frac{r}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.1}$$

$$\Delta u_v = \frac{3a^3P}{4\mu}\frac{h}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.2}$$

dovei (fig. 1.3):

- Δu_r è lo spostamento in direzione radiale;
- Δu_v è lo spostamento verticale;
- r è la distanza in direzione radiale (orizzontale) dalla proiezione del centro della sorgente sul piano. Questo punto è detto punto di massimo sollevamento perché in esso si raggiunge il massimo dello spostamento verticale;
- *a* è il raggio della sorgente sferica;
- *P* è la pressione applicata;

- h è la profondità del centro della sfera;
- μ è la rigidità del mezzo.

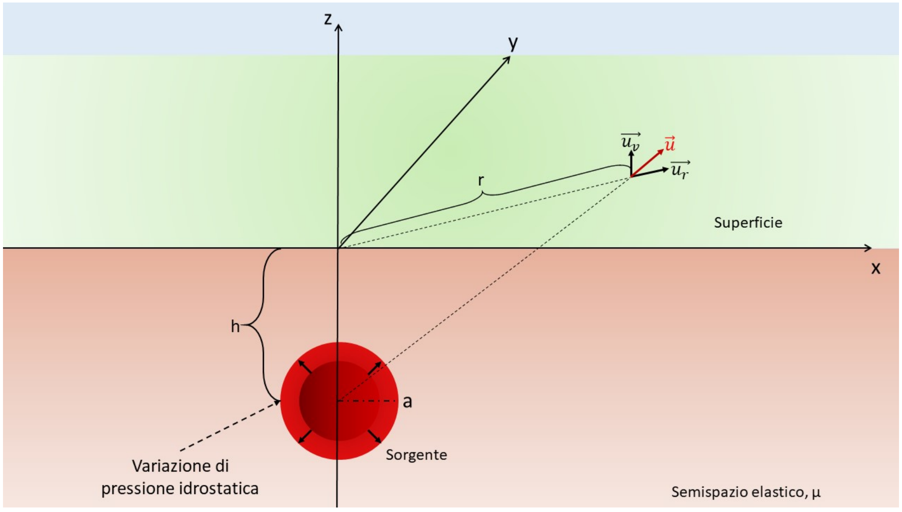

Figura 1.3: Disegno del sistema di riferimento e delle sue caratteristiche nello sviluppo del modello di Mogi.

In considerazione di quanto detto, il modello di Mogi vale se $a \ll h$.

1.3 Approssimazione di sorgente puntiforme

L'applicazione del modello di Mogi a diversi siti vulcanici riusciva a riprodurre abbastanza bene gli spostamenti verticali misurati il che, data la semplicità del modello, attirò l'attenzione dei ricercatori. Usando forse per la prima volta un modello agli elementi finiti in ambito vulcanologico Dieterich e Decker [4] analizzarono il modello di Mogi e mostrarono che esso è in grado di riprodurre gli spostamenti verticali anche quando $a = h/2$. Ben più limitata è invece la capacità del modello di riprodurre gli spostamenti radiali, che dipendono molto dalle dimensioni, oltre che dalla forma, della sorgente. Questo "paradosso" venne spiegato da McTigue [5] che calcolò le correzioni di ordine superiore al risultato di Mogi. Infatti, l'introduzione della sorgente ausiliaria simmetrica consente di verificare la condizione di superficie libera sul piano, ma viola la condizione di pressione sulla sorgente. É quindi necessario applicare una nuova pressione sulle pareti della cavità ed iterare il procedimento. L'autore calcolò che la soluzione di Mogi è, come detto, il termine principale dello sviluppo, ed è, come si evince dalla (1.1) e dalla (1.2), di ordine 3 nel rapporto a/h. il termine successivo è di ordine 6 nello stesso rapporto, quindi, molto più piccolo.

Capitolo 2

Analisi dei dati GPS

2.1 La rete NeVoCGPS dell'Osservatorio Vesuviano

L'Osservatorio Vesuviano, sezione dell'INGV, è l'ente incaricato della sorveglianza dei vulcani napoletani. La sorveglianza riguarda parametri geochimici (volume di emissione di CO_2, composizione chimica e isotopica e temperatura delle fumarole, ecc.) e geofisici (sismicità, variazioni di accelerazione di gravità, deformazioni del suolo, ecc.).

Dal 2000 l'Osservatorio Vesuviano ha installato una rete di GPS, la Neapolitan Volcanoes Continuous GPS (NeVoCGPS) che monitora in continuo la posizione dei caposaldi della rete e trasmette le sue misure automaticamente all'Osservatorio che processa i dati e li immagazzina [2]. La rete è composta attualmente da 30 stazioni. Le 14 che operano nell'area flegrea sono mostrate in figura 2.1.

Figura 2.1: Stazioni della rete NeVoCGPS operanti nell'area flegrea.

I dati, acquisiti ogni 30 secondi, vengono processati su base giornaliera per correggere effetti dovuti alla propagazione del segnale attraverso la ionosfera e alle antenne di ricezione. Quando vengono comunicati i dati sul passaggio dei satelliti, i dati acquisiti vengono riprocessati su base settimanale e le posizioni delle stazioni determinate.

Per mettere in luce le variazioni di posizione dovute al bradisismo, a tutte le stazioni viene sottratto il segnale della stazione ENAV che si trova sulla penisola sorrentina ed è considerata immune dal bradisismo. In questo modo la componente tettonica di 2.5 cm/anno in direzione NE dovuta al movimento della placca Eurasiatica viene eliminata e le posizioni delle stazioni sono tutte riferite ad un sistema di riferimento con gli assi orientati in direzione S-N, W-E e verticale verso l'alto. Infine, i dati vengono mediati su di una settimana, dato che non ci si aspetta variazioni significative del livello del suolo su questo periodo. L'output di questo processing per le 14 stazioni flegree fino alla metà del 2013 mi è stato fornito dall'Unità funzionale di Geodesia dell'Osservatorio Vesuviano. Un esempio di registrazione è mostrato in figura 2.2.

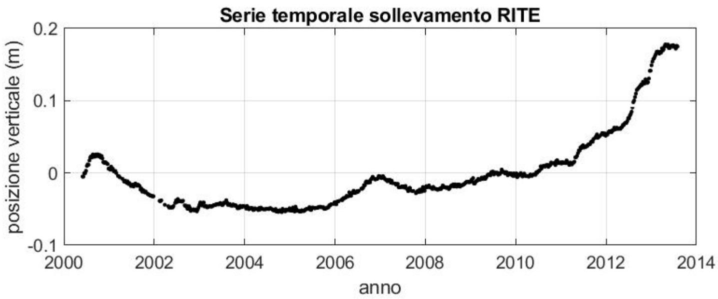

Figura 2.2: Componente verticale della posizione della stazione RITE nel tempo. I dati riportati sono medie settimanali.

2.2 Scelta dei sistemi di riferimento e confronto dati

I dati disponibili comprendono le posizioni di riferimento delle stazioni in coordinate ITRF (International Terrestrial Reference Frame), un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della Terra aggiornato periodicamente sulla base di dati satellitari. La zona studiata per questa tesi ricopre un'area molto piccola se rapportata alle dimensioni della superficie terrestre, per cui ho scelto di abbandonare il sistema di riferimento globale e di adottarne uno locale, piano. In questo sistema di riferimento si considerano direzioni di riferimento S-N, W-E e verticale verso l'alto, e le stazioni GPS sono tutte posizionate sullo stesso piano, cioè trascuro le differenze di quota tra le stazioni dato che il modello di Mogi non le prevede. La scelta dell'origine di tale sistema di riferimento è ricaduta sulla stazione di RITE (Rione Terra - Pozzuoli). Tale stazione è sempre risultata, sulla base sia delle livellazioni geodetiche fatte in passato che delle misure GPS, come la più vicina al punto di massimo sollevamento. Per questo motivo i dati sulla posizione di RITE permettono di individuare i diversi trend nell'attività del bradisismo.

Analizziamo quindi l'andamento del sollevamento della stazione di RITE. Come si può osservare in figura 2.3, dopo una fase di subsidenza terminata circa a metà del 2002, la posizione della stazione è rimasta praticamente costante fino alla fine del 2005, momento dal quale è iniziato un periodo di risalita tuttora attivo. Nel grafico si osserva un periodo di risalita breve localizzato tra il 2006 e il 2007, che si può considerare come evento di mini uplift, sovrapposto ad un trend globale più ampio che interessa tutto l'arco temporale che va dal 2006 al 2013. Questo evento era stato messo in evidenza anche dalla livellazione geodetica, come si vede in figura 1.2. A partire dalla seconda metà del 2011 il trend cambia decisamente mostrando un aumento della velocità di sollevamento. I periodi evidenziati in figura 2.3 sono stati oggetto di studio in questo lavoro di tesi.

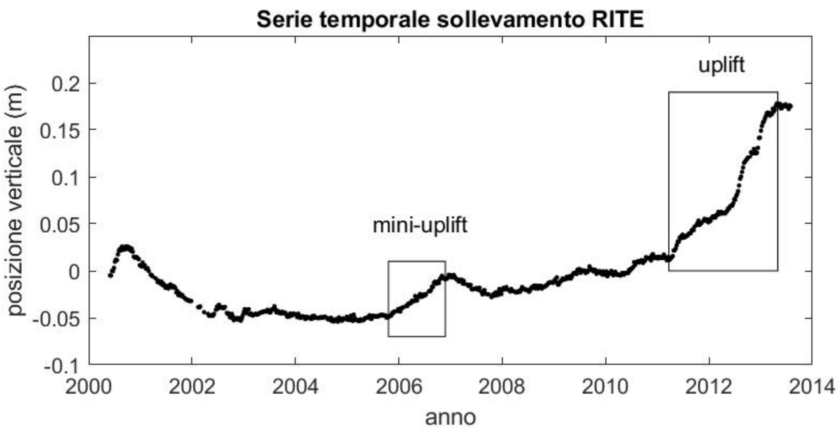

Figura 2.3: Serie temporale del sollevamento di RITE. I rettangoli individuano i periodi studiati nel lavoro di tesi.

In considerazione dello scattering dei dati ancora presente nonostante la media settimanale e dal momento che i periodi considerati sono dell' ordine dell'anno, dei dati forniti ho operato una media mobile centrata (fig. 2.4) con finestra temporale di cinque settimane. Ai dati così ottenuti è stato associato un errore calcolando la deviazione standard sull'intervallo.

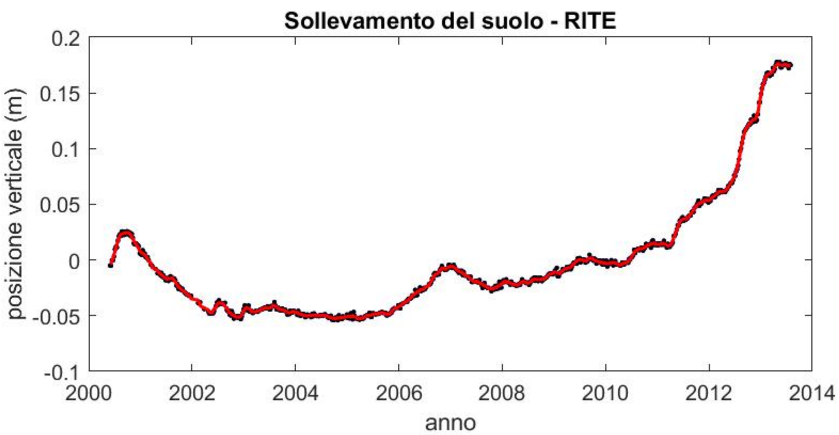

Figura 2.4: Medie settimanali (punti neri) e media mobile centrata su 5 settimane (curva rossa) della componente verticale della posizione di RITE.

2.3 Applicazione del modello di Mogi al periodo 2006-2007

Inizialmente ho analizzato l'evento di mini uplift tra gli anni 2006 e 2007. Ho innanzitutto calcolato lo spostamento totale facendo la differenza tra le componenti della posizione alla fine e all'inizio del periodo considerato. Per l'applicazione del Modello di Mogi, come si può osservare tenendo conto della 1.1 e della 1.2, è necessario stimare tre parametri: la distanza dal punto di massimo sollevamento r, la profondità della sorgente h e la costante che si trova davanti ad entrambe le espressioni, che chiameremo k.

2.3.1 Stima del punto di massimo sollevamento

Per l'inversione del problema bisogna conoscere il valore della distanza di ogni stazione dal punto di massimo sollevamento. La posizione di tale punto nella caldera è stata ottenuta tramite un metodo di *grid-search* unito ad un algoritmo di Levenberg-Marquardt. Per comprendere la procedura utilizzata, consideriamo due stazioni casuali con i rispettivi spostamenti orizzontali. Se selezioniamo un punto nella caldera, e per quel punto tracciamo le congiungenti alle due stazioni, avremo che ogni congiungente forma un certo angolo con lo spostamento della stazione stessa. In accordo col modello di Mogi, esiste un punto tale che lo scarto angolare tra le congiungenti e gli spostamenti orizzontali sia nullo, come in figura 2.5.

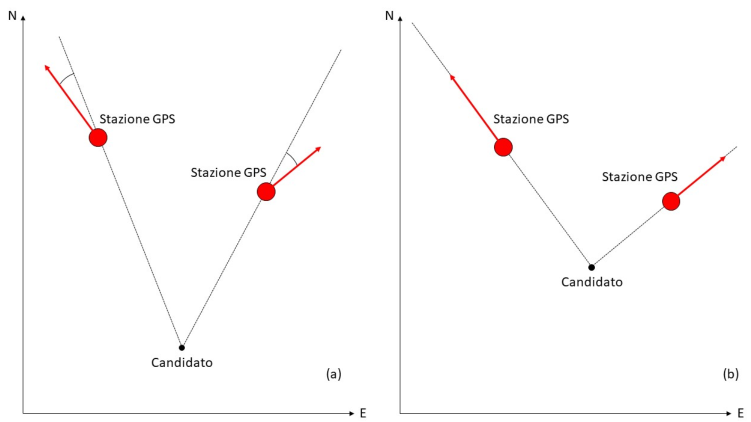

Figura 2.5: (a) lo scarto angolare tra gli spostamenti orizzontali e le direzioni radiali è non nullo; (b) lo scarto è stato minimizzato.

Non mi aspetto,tuttavia, che il sistema goda di perfetta simmetria cilindrica come richiesto dal modello di Mogi. Cerco allora il punto in grado di minimizzare tale scarto angolare nel senso dei minimi quadrati. La funzione da minimizzare è allora:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\theta_i - \theta_i'}{\sigma_i} \right)^2 \tag{2.1}$$

dove:

- N è il numero di stazioni considerate;

- θ_i è l'angolo dello spostamento orizzontale misurato dell'i-sima stazione rispetto all'asse E;
- $\theta_i^{'}$ è l'angolo formato dalla congiungente tra il punto di prova e la stazione i-sima;
- σ_i è l'errore sulla misura dell'angolo di spostamento.

L'angolo θ_i è stato misurato tramite la relazione

$$\theta_i = \arctan \frac{u_N}{u_E} \tag{2.2}$$

dove u_N e u_E sono le componenti Nord ed Est dello spostamento orizzontale, rispettivamente. L'angolo ottenuto è stato poi riportato nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ tramite l'aggiunta di una opportuna costante. L'incertezza σ_i è stata stimata tramite propagazione degli errori:

$$\sigma_i = \sqrt{\left(\frac{u_N}{u_E^2 + u_N^2}\right)^2 (\Delta u_E)^2 + \left(\frac{u_E}{u_E^2 + u_N^2}\right)^2 (\Delta u_N)^2} \tag{2.3}$$

Ho svolto un'iniziale ricerca del punto che minimizza il χ^2 su una griglia quadrata di punti, di sei chilometri di lato, con una passo di 200 metri. Se consideriamo x' e y' il generico punto sulla griglia, l'angolo formato dalla congiungente il punto e la stazione i-sima sarà:

$$\theta_i' = \arctan \frac{y_i - y'}{x_i - x'} \tag{2.4}$$

E' necessario scegliere opportunamente l'origine della griglia in modo che nessun punto si trovi tanto vicino ad una delle stazioni da rendere numericamente indefinita l'operazione precedente. Questa condizione è stata raggiunta centrando la griglia sul punto (-1,-1) (fig 2.6).

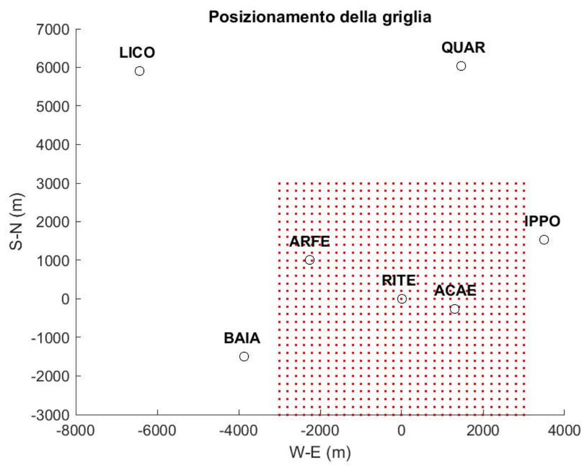

Figura 2.6: Posizione delle stazioni attive nel periodo 2006-2007 e dei punti della griglia usata per ricerca del minimo del χ^2.

Tutte le procedure sono state implementate in ambiente MATLAB. Il minimo del χ^2 si raggiunge nel punto (-1,-601). In figura 2.7 sono mostrate le curve di livello del χ^2. Queste mostrano che la funzione ha un minimo ben definito.

Per trovare questo minimo ho usato l'algoritmo di minimizzazione di funzioni non lineari di Levenberg-Marquardt, inizializzato col punto precedentemente individuato. Il punto trovato ha coordinate

$$\begin{aligned} x_p &= 23 \pm 52 \text{ m} \\ y_p &= -0.65 \pm 0.11 \text{ km} \end{aligned}$$

Fissato il punto di massimo sollevamento, che per il modello di Mogi corrisponde alla proiezione del centro della sorgente sul piano campagna, si può calcolare il valore di r per ogni stazione. Data la generica stazione di coordinate (x_i, y_i), la distanza dal punto di massimo sollevamento è

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_p)^2 + (y_i - y_p)^2} \tag{2.5}$$

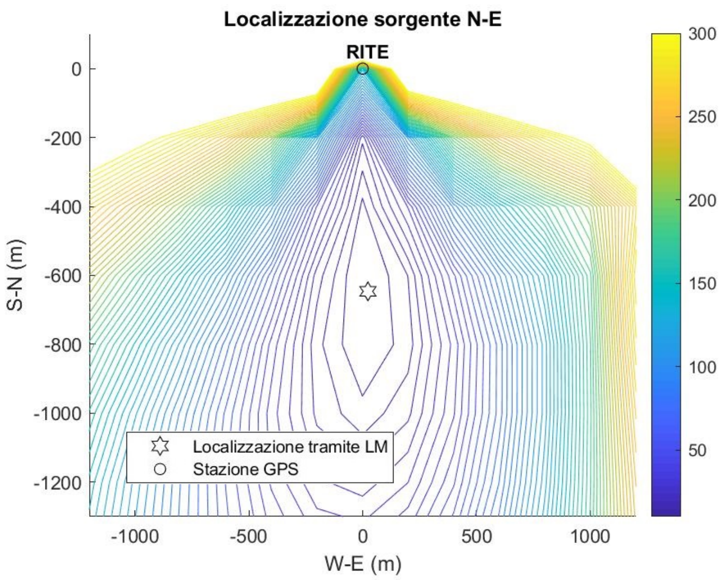

Figura 2.7: Curve di livello del χ^2 (equazione 2.1) e punto di minimo trovato con l'algoritmo di Levenberg-Marquardt.

2.3.2 Stima dei parametri h e k

Trovati i valori delle distanze r_i, è possibile tramite la (1.2) ottenere una stima di h e k. Scelgo per la stima la (1.2) e non la (1.1) poiché mi aspetto che la sorgente di spostamento dei Campi Flegrei sia più complessa rispetto a quella di Mogi e sappiamo che lo spostamento radiale tende, in generale, ad essere più sensibile al dettaglio della sorgente rispetto a quello verticale. La procedura per trovare i valori di h e k è del tutto analoga a quella utilizzata per trovare l'ascissa e l'ordinata del punto di massimo sollevamento: si campiona un determinato intervallo valutando una funzione χ^2 che misura il misfit. Si individua quindi il punto dove tale funzione χ^2 assume il valore minore e lo si utilizza come punto iniziale per una minimizzazione di Levenberg-Marquardt. Innanzitutto è necessario valutare quali sono gli intervalli su cui effettuare la ricerca.

Per quanto riguarda la profondità h, sulla base delle considerazioni svolte in [2] ho scelto l'intervallo 1000-6000 m. Per avere, invece, una stima dell'intervallo per k, fissato un valore di h', ho calcolato k' dall'inversione della (1.2), ovvero

$$k' = u_v \frac{(h'^2 + r^2)^{3/2}}{h} \tag{2.6}$$

In questo modo si sono ricavati dei valori di riferimento da cui valutare il range di ricerca su k, che ho determinato nell'intervallo $(1 - 11) \cdot 10^5$ m^3. La funzione da minimizzare è ora

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_i} \left(u_{vi} - k \frac{h}{(h^2 + r_i^2)^{3/2}} \right) \right]^2 \tag{2.7}$$

Ripetendo la procedura di ricerca descritta in 2.3.1 ho ottenuto i seguenti risultati (figura 2.8) :

$$\begin{aligned} h &= 3.29 \pm 0.23 \text{ km} \\ k &= (4.5 \pm \ 0.5) \cdot 10^5 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

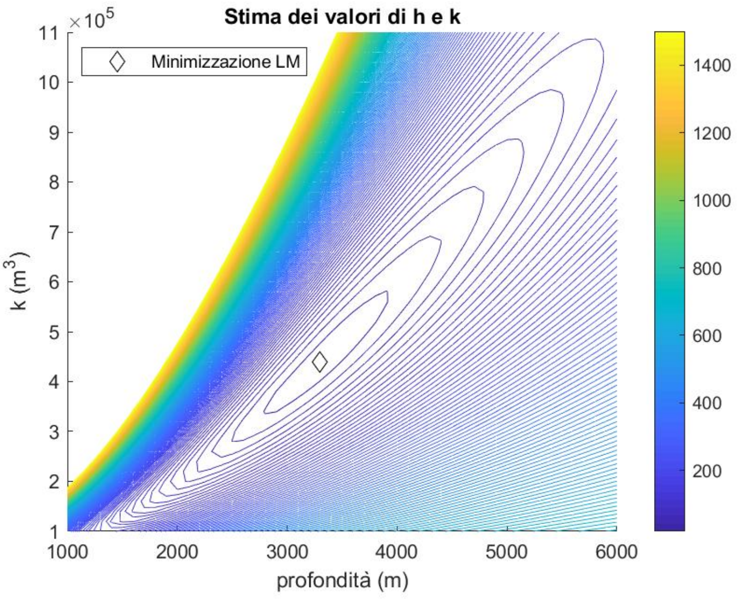

Figura 2.8: Curve di livello del χ^2 (equazione 2.7) e punto di minimo trovato con l'algoritmo di Levenberg-Marquardt.

2.4 Stima degli spostamenti e confronto con le misure reali

Avendo ottenuto dei valori per r, k e h possiamo ora utilizzare la 1.1 per stimare, secondo il modello di Mogi, gli spostamenti orizzontali per poi confrontarli con le quantità misurate dalle stazioni GPS. I risultati sono mostrati nelle figure 2.9 e 2.10.

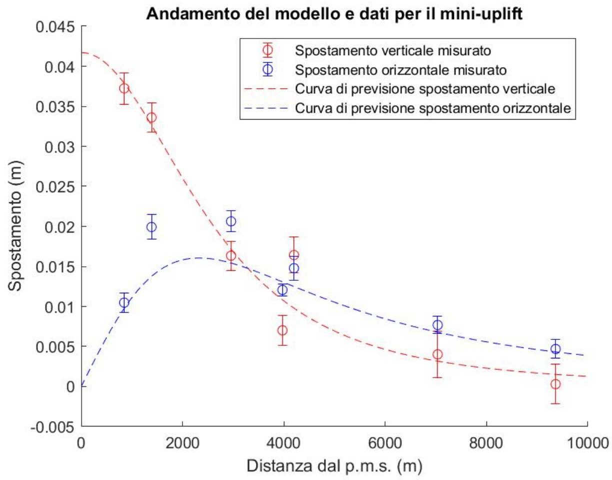

Figura 2.9: Confronto tra i dati misurati e gli andamenti previsti dal modello di Mogi.

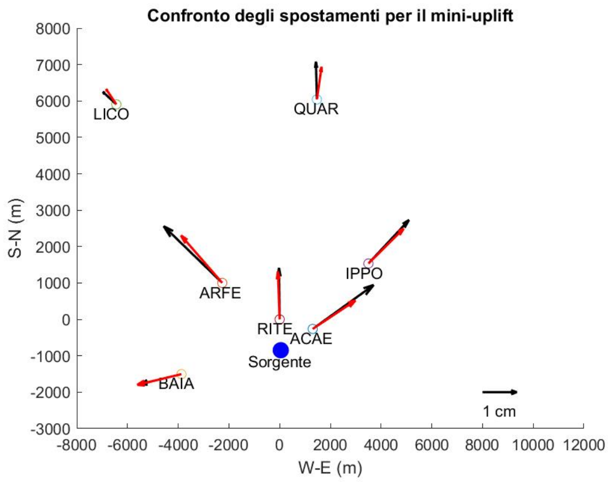

Figura 2.10: Confronto tra gli spostamenti orizzontali misurati (nero) e quelli previsti dal modello di Mogi (rosso). In blu il punto di massimo sollevamento.

Per quanto riguarda gli spostamenti orizzontali i risultati mostrano che al di sotto dei 4 km di distanza gli spostamenti misurati sono maggiori di quelli previsti, mentre sono minori oltre i 4 km. Questa distanza corrisponde all'incirca alla distanza del punto di massimo sollevamento dal bordo calderico. Quindi i risultati sembrano indicare che il bordo calderico esercita un'azione di limitazione della possibilità di espansione del materiale intorno alla sorgente di pressione. Questo effetto, già individuato da De Natale et al. [3], mostra i limiti del modello di Mogi, non tanto nell'ipotesi di omogeneità dello spazio, ma di isotropia. Infatti, la presenza di discontinuità strutturali ha un'influenza misurabile sul campo di spostamento.

2.5 Stime per il periodo di sollevamento 2011-2013

Il secondo periodo considerato (fig. 2.3) ha, come ho già detto, caratteristiche diverse rispetto al primo. Si tratta infatti di un cambio di velocità di sollevamento non limitato nel tempo, quindi non un mini uplift. In questo senso è interessante andare a vedere se questo cambio di velocità corrisponde anche ad un cambio di sorgente. Per il periodo considerato erano attive tutte le quattordici stazioni GPS flegree (fig. 2.1). La procedura di analisi è esattamente la stessa descritta nei paragrafi precedenti. I risultati per la localizzazione sul piano sono (fig. 2.11)

$$x_p = -61.5 \pm 9.5\text{m}$$
$$y_p = -0.84 \pm 0.01\text{km}$$

Rispetto al caso precedente la sorgente notiamo che il raddoppio delle stazioni ha

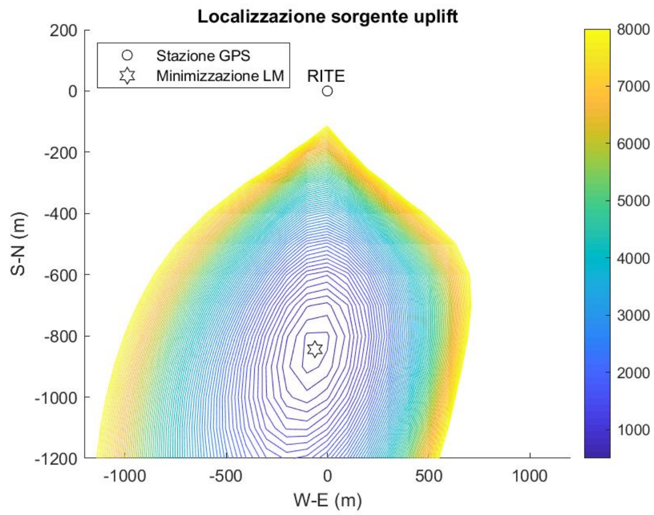

Figura 2.11: Grafico delle curve di livello del χ^2 (equazione **??**) e localizzazione della sorgente tramite algoritmo di Levenberg-Marquardt.

portato ad una drastica riduzione degli errori relativi sulla posizione orizzontale della sorgente. Inoltre, la sorgente in questo caso è spostata decisamente più a SW.

Per il valore della profondità della sorgente ho invece (fig. 2.12)

$$\begin{aligned} h &= 2.80 \pm 0.03 \text{ km} \\ k &= (1.506 \pm\ 0.003) \cdot 10^6 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

L'aumento dei valori dello spostamento verticale si riflette in un aumento di k. Anche

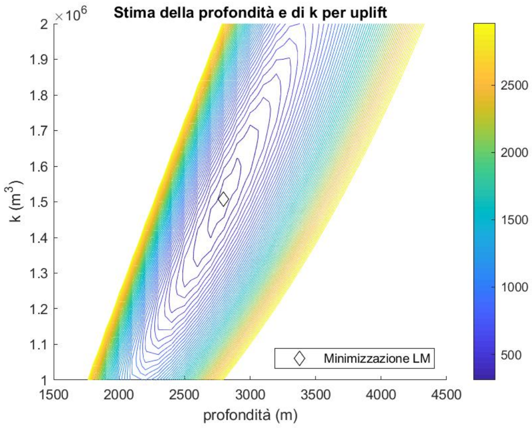

Figura 2.12: Curve di livello del χ^2 (equazione 2.7) e punto di minimo trovato con l'algoritmo di Levenberg-Marquardt.

in questo caso gli errori relativi sono minori rispetto al caso precedente e la sorgente risulta essere collocata più in superficie rispetto a quella del mini uplift.

Possiamo vedere quindi il confronto tra le misure e gli andamenti previsti dalla teoria (fig. 2.13 e 2.14)

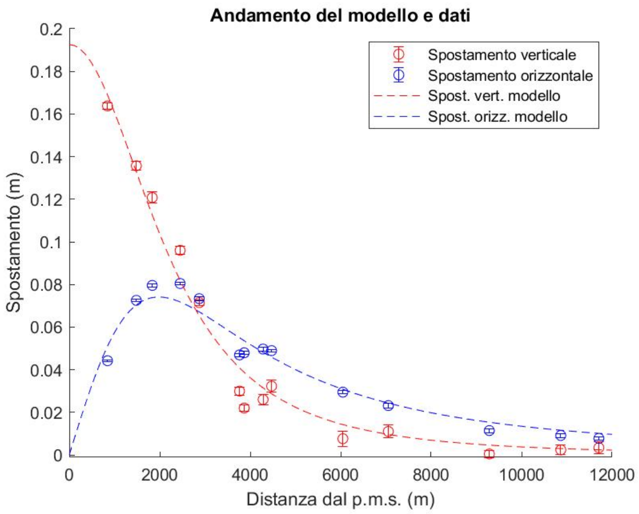

Figura 2.13: Confronto tra i dati misurati e gli andamenti previsti dal modello di Mogi.

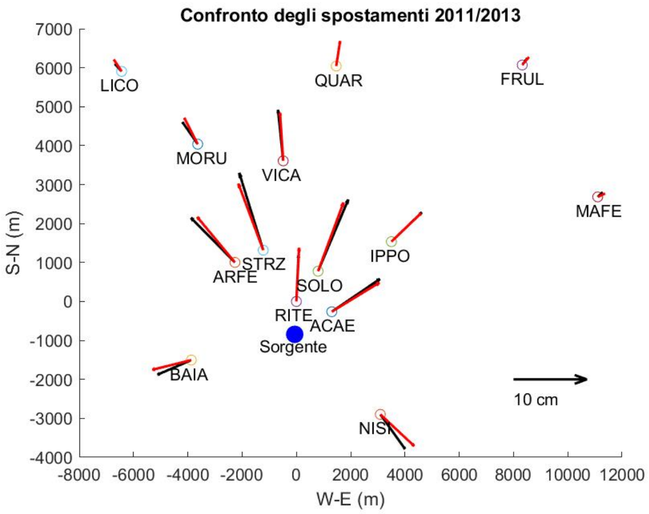

Figura 2.14: Confronto tra gli spostamenti misurati (nero) e quelli previsti dal modello di Mogi (rosso). In blu, il punto di massimo sollevamento.

L'effetto strutturale della caldera sullo spostamento segnalato in [3] è ancora visibile, anche se meno marcato. Si nota anche che nella direzione MORU-LICO lo spostamento misurato tende a deviare verso W rispetto a quello teorico, mentre questo non è vero per la limitrofa direzione VICA-QUAR. Questa può essere interpretata come un'altra evidenza dell'influenza che le disomogeneità strutturali hanno sul campo di spostamento, anche se l'individuazione di tale struttura è tutt'altro che banale.

Conclusioni

Dai risultati ottenuti si vede che la sorgente dell'evento di mini uplift è diversa da quella che genera l'aumento di velocità di deformazione del 2011. La differenza riguarda, come era da aspettarsi, il valore di k che nel secondo caso è più alto. Nell'ambito del modello di Mogi un aumento di k può essere dovuto ad un aumento della pressione P o del raggio a della sorgente (si veda l'equazione 1.2). Dato che, secondo i bollettini di sorveglianza dell'Osservatorio, la sismicità non ha subito un aumento significativo nel periodo, sono più propenso ad attribuire l'aumento di k ad un aumento del raggio della sorgente.

L'altro aspetto che differenzia le due sorgenti è la posizione. La sorgente del mini uplift è significativamente spostata più verso terra e più in profondità rispetto alla sorgente del 2011-2013. Il fatto quest'ultima sia spostata verso mare spiega il recente sviluppo della rete GPS che ha previsto l'installazione di 5 stazioni nel mare antistante Pozzuoli. Il processing dei dati di queste stazioni presenta differenze importanti rispetto a quello delle stazioni a terra, tuttavia i dati acquisiti saranno molto importanti per la esatta localizzazione della sorgente.

Ho già notato che il modello (2.9) tende a sottostimare i valori dello spostamento orizzontale per le stazioni che si trovano entro un raggio di circa quattro chilometri dal punto di massimo sollevamento. Questo può essere dovuto alle zone di contatto ai bordi della caldera che agiscono da discontinuità per le sollecitazioni elastiche del suolo [3], ma ho anche notato come tale effetto sia di entità minore nel caso della sorgente del 2011-2013. Una possibile spiegazione può essere che la sorgente si trova in una posizione più vicina alla superficie e gli effetti dei bordi della caldera sullo spostamento delle stazioni non sono della stessa importanza poiché il bordo calderico non raggiunge la superficie. Una rappresentazione schematica della possibile situazione è mostrata in figura 2.15.

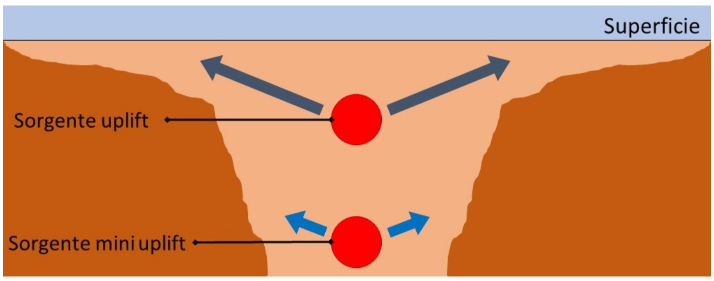

Figura 2.15: Rappresentazione schematica degli effetti sullo spostamento della diversa posizione della sorgente.

Appare comunque chiaro che per lo studio della deformazione del suolo bradisismica il semplice modello di Mogi si può considerare solo un primo strumento di analisi, ma è necessario introdurre modelli più complessi per tener conto sia di una sorgente estesa sia di disomogeneità strutturali che anche in questa semplice analisi mostrano il loro effetti.

Appendice

L'algoritmo di Levenberg - Marquardt

L'algoritmo di Levenberg - Marquardt (LM) è una tecnica iterativa in grado di individuare il minimo di una funzione non lineare di più variabili e che può essere usato per effettuare un fit ai minimi quadrati.

Secondo tale approccio è necessario trovare il minimo della funzione $\chi^2(\mathbf{a})$ in modo da trovare gli M parametri $\mathbf{a}$ in grado di restituire valori quanto più vicini alle misure effettuate. Consideriamo ora che nell'intorno di un punto $\mathbf{b}$ la funzione χ^2 sia approssimabile con una forma quadratica del tipo:

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \chi^2(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^{M} \left|\frac{\partial \chi^2}{\partial a_i}\right|_{\mathbf{b}} (a_i - b_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}(a_i - b_i)\left|\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_i \partial a_j}\right|_{\mathbf{b}} (a_j - b_j)$$

che in forma vettoriale si scrive

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \chi^2(\mathbf{b}) - \mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^T \cdot \mathbf{H}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \tag{2.8}$$

dove $\mathbf{d} = -\nabla\chi^2(\mathbf{b})$ e $\mathbf{H}$ è la matrice Hessiana di dimensione $M \times M$ nel punto $\mathbf{b}$. Osservando che

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} = \left|\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k}\right|_{\mathbf{b}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\left[\left|\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_j}\right|_{\mathbf{b}} (a_j - b_j) + (a_i - b_i)\left|\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_i \partial a_k}\right|_{\mathbf{b}}\right] \tag{2.9}$$

cioè in forma vettoriale

$$\nabla\chi^2(\mathbf{a}) = -\mathbf{d} + \mathbf{H}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$$

se il punto $\mathbf{b}$ è sufficientemente vicino al minimo $\mathbf{a}_{min}$ possiamo scrivere direttamente l'espressione di quest'ultimo:

$$\mathbf{a}_{min} = \mathbf{b} + \mathbf{H}^{-1}[-\nabla\chi^2(\mathbf{b})] \tag{2.10}$$

Ma se l'approssimazione (2.8) è in qualche modo inadatta, possiamo pensare di procedere nella direzione opposta al gradiente locale:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - \gamma[\nabla\chi^2(\mathbf{b})] \tag{2.11}$$

con γ costante. Consideriamo allora la funzione χ^2

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - y_i(\mathbf{a})}{\sigma_i}\right)^2 \tag{2.12}$$

dove le y_i sono gli N dati e le $y_i(\mathbf{a})$ rappresentano la funzione non lineare che si vuole fittare calcolata nei punti di misura. Il gradiente di χ^2 ha componenti:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i - y_i(\mathbf{a})}{\sigma_i^2} \frac{\partial y_i(\mathbf{a})}{\partial a_k} \tag{2.13}$$

mentre le componenti della matrice Hessiana saranno:

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l} = 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{\partial y_i(\mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y_i(\mathbf{a})}{\partial a_l} - [y_i - y_i(\mathbf{a})] \frac{\partial^2 y_i(\mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_l} \right) \tag{2.14}$$

Convenzionalmente si incorpora il fattore 2 che compare in (2.13) e (2.14) definendo le quantità:

$$\beta_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} \tag{2.15}$$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l} \tag{2.16}$$

Ponendo $\mathbf{a}_{min} - \mathbf{b} = \delta \mathbf{a}$ si può riscrivere la 2.10 come

$$\sum_{l=1}^{M} \alpha_{kl} \delta a_l = \beta_k \tag{2.17}$$

e la (2.11) come

$$\delta a_l = \gamma \times \beta_l \tag{2.18}$$

Le componenti α_{kl} dipendono sia dalle derivate prime di y (nella fattispecie elementi del prodotto della matrice Jacobiana per la sua trasposta) che dalle derivate seconde. Il termine contenente le derivate seconde può essere trascurato in quanto la quantità $y_i - y_i(\mathbf{a}$ assume il valore minimo in corrispondenza della soluzione del problema. Si può quindi ridefinire α_{kl} come

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(\frac{\partial y(\mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y(\mathbf{a})}{\partial a_l} \right) \tag{2.19}$$

Il metodo di Lenberg-Marquardt permette di effettuare una ricerca del minimo di χ^2 passando dal metodo (2.11) lontano da questo al metodo (2.10) nelle sue vicinanze. Il metodo si basa sulla considerazione dell'ordine di grandezza di γ nella (2.18). β_l ha le dimensioni di $1/a_l$ quindi γ deve avere le dimensioni di a_l^2. D'altra parte il reciproco dell'l-mo elemento diagonale di $\mathbf{H}$ ha esattamente le stesse dimensioni quindi possiamo scrivere in generale

$$\delta a_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_l \tag{2.20}$$

oppure

$$\lambda \alpha_{ll} \delta a_l = \beta_l \tag{2.21}$$

Inoltre è possibile combinare la (2.21) e la (2.10) definendo una nuova matrice α' tale che

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}(1+\lambda) & i = j \\ \alpha_{ij} & i \neq j \end{cases} \tag{2.22}$$

per poi sostituire tanto la (2.21) quanto la (2.10) con:

$$\sum_{l=1}^{M} \alpha'_{kl} \delta a_l = \beta_k \tag{2.23}$$

Se λ è molto grande la (2.23) tende a coincidere con la (2.21). D'altro canto, se λ va a zero, (2.23) tende a diventare (2.18). L'algoritmo allora comincia dal punto iniziale e fissa un valore di λ. Risolve la (2.23) e determina $\delta \mathbf{a}$. Se nel nuovo punto χ^2 non diminuisce, si aumenta λ e si riprova, altrimenti si diminuisce λ e si va avanti. Si dimostra, infine, che l'inversa della matrice (α) è una stima della matrice di covarianza dei parametri, quindi il metodo LM fornisce anche una stima degli errori sui parametri trovati.

Bibliografia

[1] Atkin, R. J., e Fox, N. An introduction to the theory of elasticity. Longman, Londra, p. 243, 1980.

[2] De Martino, P., Tammaro, U., e Obrizzo, F. GPS time series at Campi Flegrei caldera (2000-2013). *Ann. Geophys.-Italy*, **57**, S0213, 2014.

[3] De Natale G., Stefano M. Petrazzuoli S. M., Pingue F. The effect of collapse structures on ground deformations in calderas. *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 1555-1558, 1997.

[4] Dieterich, J. H., e Decker, W. Finite element modeling of surface deforma-tion associated with volcanism. *J. Geopys. Res.*, **80**, 4094-4102, 1975.

[5] McTigue, D. F. Elastic stress and deformation near a finite spherical magmabody: resolution of the point source paradox. *J. Geophys. Res*, **92**, 12931-12940, 1987.

[6] Mogi, K. Relations between the eruptions of various volcanoes and thedeformations of the ground surfaces around them. *Earthq. Res. Inst.*, **36**, 99-134, 1958.

[7] Press, W.H., Teukolosky, S.A., Vetterling, W.T., e Flannery, B.P. Numerical Recipes in Fortran 77. Cambridge University Press, Cambridge, p. 921, 1995.

[8] Rosi, M., e Sbrana, A. Phlegraean Fields. Quaderni della Ricerca Scientifica, 114, CNR, Roma, p.176, 1987.

[9] Zollo, A., Judenherc, S., Auger, E., D'Auria, L., Virieux, J., Capuano, P., Chiarabba, C., de Franco, R., Makris, J., Michelini, A., e Musacchio, G. Evidence for the buried rim of Campi Flegrei caldera from 3-d active seismic imaging. *Geophys. Res. Lett.*, **30**, 2002, doi: 10.1029/2003GL018173.