UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
"FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Le rotazioni spaziali e di spin: SO(3) verso SU(2)

Relatore:
Prof. Fedele Lizzi

Candidato:
Pasquale Trani
Matr. $N85000933$

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1 Introduzione: lo spin **3**

2 Cenni di teoria dei gruppi **9**

2.1 Definizioni generali 9

2.2 Gruppi ed algebre di Lie 11

3 I gruppi SO(3) e SU(2) **17**

3.1 SO(3) e relativa algebra di Lie 17

3.2 SU(2) e relativa algebra di Lie 19

3.3 Differenza fra SO(3) e SU(2) 22

Conclusioni **27**

A Alcune Nozioni di Topologia **29**

B Varietà Analitiche **33**

C I Quaternioni **35**

Bibliografia **37**

Capitolo 1

Introduzione: lo spin

Nell'ambito della meccanica quantistica è possibile dimostrare, utilizzando solo ed esclusivamente argomentazioni algebriche, che per una qualunque osservabile vettoriale $\vec{A}$, le cui componenti soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$[A_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k \tag{1.1}$$

Valgono i seguenti risultati[1]:

$$[A^2, A_i] = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$A^2|a, a_i\rangle = \hbar^2 a(a+1)|a, a_i\rangle \tag{1.2}$$

$$A_i|a, a_i\rangle = \hbar a_i|a, a_i\rangle \tag{1.3}$$

Dove $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, a può assumere qualunque valore intero o semintero, e $-a \leq a_\mathrm{i} \leq a$.

Tutti questi risultati possono essere applicati al momento angolare di una particella che si muove nello spazio tridimensionale, definito come $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$, poiché le componenti di $\vec{L}$ soddisfano proprio le regole di commutazione (1.1). In particolare per il momento angolare è possibile ricavare esplicitamente la base comune di autostati di L^2 e L_3 nella rappresentazione delle configurazioni, sfruttando la relativa semplicità dell'operatore L_3, una volta che esso viene espresso in coordinate polari. In particolare si ha che:

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$L_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Risolvendo dunque i problemi agli autovalori (1.2) e (1.3), che si riconducono alla risoluzione di equazioni differenziali, troviamo che la base comuni di autostati di L^2 e L_3 sono le armoniche sferiche, ovvero:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{1.4}$$

Dove P_l^m sono i polinomi di Legendre associati, mentre l e m sono i numeri quantici associati rispettivamente ad L^2 e ad L_3. È possibile dimostrare che tali armoniche sferiche appartengono allo spazio

[1] D'ora in avanti per qualunque osservabile vettoriale ci riferiremo alle sue componenti identificandole come componente $1, 2, 3$, oppure equivalentemente come componente x, y, z.

di Hilbert delle funzioni a modulo quadro integrabile se e solo se il valore di l è intero. Dunque seppur dal punto di vista algebrico l può assumere anche valori seminteri, affinchè gli autostati di L^2 e L_3 siano a modulo quadro integrabile, l assume solo ed esclusivamente valori interi.

Agli inizi del 1920, Stern e Gerlach fecero un esperimento il quale consisteva nel produrre un fascio di atomi d'argento e indirizzarli verso una regione in cui era presente un campo magnetico non uniforme. Gli atomi d'argento posseggono 47 elettroni, di cui uno solo risulta essere spaiato. Per poter predire i risultati di tale esperimento, Stern e Gerlach, che non disponevano ancora dell'apparato teorico della meccanica quantistica moderna, utilizzarono la teoria quantistica che allora era disponibile, ovvero la teoria di Bohr e Sommerfeld. In particolare predissero che: dato che gli elettroni spaiati orbitano intorno al nucleo dell'atomo, essi risultano essere assimilabili a delle piccole spire di momento magnetico $\vec{\mu}$. Dunque, a causa del campo magnetico, gli atomi di argento posseggono un energia potenziale che è $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, e quindi risentono di una forza che è $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$. Immaginiamo di porci in un sistema di riferimento che ha come asse z la direzione del campo magnetico $\vec{B}$. Allora la forza che sperimentano gli atomi d'argento è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\mu_z B)$$

Ma $\vec{\mu}$ è proporzionale al momento angolare $\vec{L}$ dell'elettrone e quindi μ_z è proporzionale a L_z. Se prepariamo dunque gli atomi in maniera tale che il numero quantico l associato ad L^2 sia fissato, allora avremo $2l + 1$ valori disponibili per L_z e quindi avremo $2l + 1$ forze diverse che agiscono sugli atomi di argento, e quindi dovremmo osservare $2l + 1$ strisce, qualora ponessimo uno schermo perpendicolarmente al moto degli atomi. Dato che l è intero dovremmo necessariamente osservare un numero dispari di strisce sullo schermo. Tuttavia Stern e Gerlach nel loro esperimento trovarono sempre che le strisce sullo schermo erano in numero pari. Tutto ciò risulta spiegabile solo ed esclusivamente introducendo una nuova quantità, la quale risulta essere una proprietà puramente quantistica dell'elettrone, cioè che non possiede un analogo classico, e che va sotto il nome di spin dell'elettrone.

Dunque, riassumendo, dall'esperimento di Stern e Gerlach si evince che:

- Esiste una proprietà posseduta dagli elettroni, che risulta essere puramente quantistica e non associabile a nessuna quantità classica.
- Questa proprietà dell'elettrone ha le caratteristiche di un momento angolare, poiché essa risente della presenza di un campo magnetico esterno. Per tale motivo questa nuova quantità viene detto momento angolare intrinseco o spin dell'elettrone, e si indica con $\vec{S}$. Tipicamente, per differenziare $\vec{S}$ da $\vec{L}$, ci si riferisce a quest'ultimo come momento angolare orbitale.
- A differenza del numero quantico l associato ad L^2, il numero quantico s, associato ad S^2, può assumere anche valori seminteri. Infatti i risultati dell'esperimento di Stern e Gerlach sono fedelmente riprodotti se si ipotizza che l'elettrone abbia $s = \frac{1}{2}$ fissato.

Il fatto che l'elettrone abbia $s = \frac{1}{2}$ fissato, e cioè che il valore di s non cambi mai, risulta essere verificato sperimentalmente anche per altri tipi di particelle. Cioè quello che accade è che il valore di s risulta essere fissato e diverso fra i diversi tipi di particelle, ma è identico per particelle dello stesso tipo. Tutto ciò rappresenta un'ulteriore differenza sostanziale, oltre il fatto che l può assumere solo valori interi, mentre s sia interi che seminteri, fra il momento angolare orbitale e il momento angolare di spin.

Essendo lo spin un momento angolare, allora le sue componenti soddisfano le regole di commutazione (1.1), e quindi è possibile anche per lo spin fare la stessa trattazione fatta per il momento angolare orbitale. In più non essendo collegato a nessuna osservabile classica, lo spin risulta essere un nuovo grado di libertà del sistema, completamente indipendente dai gradi di libertà spaziali. Per tale motivo si ha che l'operatore $\vec{S}$ agisce su uno spazio di Hilbert che è diverso dallo spazio su cui agiscono $\vec{x}$ e $\vec{p}$, e quindi si deve avere che:

$$[x_i, S_j] = 0 \quad \forall i, j \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

$$[p_i, S_j] = 0 \quad \forall i, j \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

Come conseguenza di tutto ciò si ha che, se abbiamo una particella che si muove nello spazio tridimensionale, lo spazio di Hilbert associato a tale sistema fisico è:

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \Sigma \tag{1.7}$$

cioè è il prodotto tensore fra lo spazio $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$, dove agiscono $\vec{x}$ e $\vec{p}$, e lo spazio dello spin Σ, dove appunto agisce lo spin. Una conseguenza fondamentale del fatto che s risulta essere fissato, sta nel fatto che lo spazio Σ è uno spazio complesso finito dimensionale, in cui, per esempio, $|s, s_z\rangle$ rappresenta una base. In particolare dato che s_z assume $2s + 1$ valori, la dimensione di Σ è $2s + 1$. Ma sappiamo che qualsiasi spazio vettoriale complesso di dimensione finita n, risulta essere isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Dunque sostanzialmente lo spazio di Hilbert di una particella che si muove nello spazio tridimensionale e che ha un determinato valore di s, sarà:

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \tag{1.8}$$

Facciamo ora un esempio. Consideriamo un elettrone che si muove nello spazio tridimensionale. In tal caso abbiamo detto che un elettrone ha $s = \frac{1}{2}$, e dunque lo spazio di Hilber associato all'elettrone è: $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$. Quindi, avendo identificato l'elemento di base $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, detto stato di "spin-up", con $(1, 0)$ e l'elemento $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, detto di "spin-down", con (0,1), possiamo indicare lo stato $|\psi\rangle$ dell'elettrone come:

$$|\psi\rangle = (\psi_+, \psi_-) \tag{1.9}$$

dove ψ_+ e ψ_- sono funzioni di $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$. In tal caso $|\psi_+|^2$ rappresenta la probabilità di ricavare $\frac{\hbar}{2}$ come misura di S_z, mentre $|\psi_-|^2$ rappresenta la probabilità di ricavare $-\frac{\hbar}{2}$. Avendo identificato lo spazio dello spin dell'elettrone con $\mathbb{C}^2$, le componenti dello spin, in tale formalismo, sono rappresentate da delle matrici complesse 2×2. In particolare si ha che:

$$S_{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_1 \tag{1.10}$$

$$S_{\mathrm{y}} = \begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\hbar}{2} \\ i\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_2 \tag{1.11}$$

$$S_{\mathrm{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_3 \tag{1.12}$$

dove $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono note come matrici di Pauli.

È interessante capire cosa accade quando ruotiamo lo stato $|\psi\rangle$ che descrive un elettrone. Facciamo prima un discorso di natura più generale. Immaginiamo di avere un elettrone che si muove nello spazio, e immaginiamo che ci siano due osservatori O e O' i quali si differenziano l'uno dall'altra poiché hanno scelto sistemi di riferimento differenti. In particolare i due sistemi di riferimento differiscono per una rotazione rigida. Dato che lo spazio vuoto è isotropo, e dunque non vi sono direzioni privilegiate, quello che ci aspettiamo è che la descrizione quantistica dell'elettrone da parte dei due osservatori sia identica. Dunque se abbiamo una determinata osservabile, e cioè un determinato procedimento di misura, i due sistemi di riferimento assoceranno a tale osservabile due operatori diversi: K e K'.

Affinchè la descrizione fisica dell'elettrone da parte dei due osservatori sia equivalente, quello che deve accadere e che i due operatori abbiano lo stesso spettro, poiché lo spettro dell'operatore coincide con i possibili esiti di una misura dell'osservabile associato all'operatore. In più i due osservatori devono stimare le stesse identiche probabilità per l'esito di una qualunque misura. Tutto ciò si riflette nel fatto che, chiamato H lo spazio di Hilbert che O associa all'elettrone, e chiamato H' lo spazio di Hilbert che O' associa all'elettrone, esiste un operatore $D : H \longmapsto H'$, il quale associa ad ogni stato $|\psi\rangle$ che l'osservabile O associa al sistema, lo stato $|\psi'\rangle$ che associa O'. Wigner dimostrò che, affinchè le descrizioni fossero equivalenti, l'operatore D doveva essere necessariamente unitario o antiunitario.

Più in generale Wigner dimostrò che: consideriamo un qualunque sistema fisico Ω, un sistema di riferimento O, ed un gruppo G di trasformazioni che trasformano il sistema O in un sistema O', tale che la descrizione quantistica di Ω, da parte di due osservatori, uno in O e uno in O', non vari. Allora G si dice essere il gruppo di simmetria per Ω. Si dimostra inoltre che ad ogni elemento $g \in G$, e cioè per ogni trasformazione di simmetria, è associato un operatore unitario o antiunitario $U(g) : H \longmapsto H'$, dove H è lo spazio di Hilbert che O associa ad Ω, mentre H' è lo spazio di Hilbert che O' associa ad Ω. Più precisamente ad ogni $g \in G$ è associato un raggio operatore unitario cioè un insieme di operatori $\hat{U} = \{Ue^{i\phi} | 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, a causa del fatto che il fattore di fase $e^{i\phi}$ risulta completamente irrilevante dal punto di vista fisico. Tuttavia per una questione di semplicità assumeremo che ad ogni $g \in G$ sia associato un singolo operatore U, come singolo "rappresentante" dell'insieme $\hat{U}$. Si può dimostrare infine che se il gruppo delle trasformazioni è continuo, cioè dipende da una serie di parametri continui, allora l'operatore U associato deve essere unitario, mentre se il gruppo è discreto, allora l'operatore può essere anche antiunitario.

Dunque se ho un elettrone che si muove nello spazio vuoto, dato che lo spazio vuoto è isotropo, ci aspettiamo che tutti i sistemi di riferimento che si differenziano l'uno dall'altro per una rotazione rigida degli assi siano del tutto equivalenti e che quindi il gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$ sia un sottogruppo del gruppo di simmetria per l'elettrone[2]. È abbastanza semplice vedere che il gruppo delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$ è identificabile con il gruppo $SO(3)$, cioè il gruppo delle matrici 3×3 reali, simmetriche e a determinante unitario. Dunque per il teorema di Wigner ad ogni rotazione $R \in SO(3)$ è associato un operatore unitario $U(R)$ (è unitario perchè le rotazioni sono trasformazioni continue dipendenti da 3 parametri) che agisce sullo spazio $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Si dimostra inoltre che:

$$U(R) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\vec{L}} \tag{1.13}$$

[2]L'intero gruppo di simmetria conterrà sicuramente altre trasformazioni, come per esempio le traslazioni, dato che lo spazio vuoto, oltre che isotropo si assume essere anche omogeneo.

dove $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sono i tre parametri della rotazione, mentre $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale dell'elettrone. Dato che ogni singola rotazione è associata ad un operatore unitario, e che tale operatore è scrivibile come (1.13), allora il momento angolare orbitale si dice essere il generatore delle rotazioni. Dunque il momento angolare orbitale è legato al gruppo di simmetria delle rotazioni spaziali.

Per ora non abbiamo ancora considerato lo spin dell'elettrone. Se consideriamo anche lo spin dell'elettrone non dobbiamo più specificare una funzione d'onda scalare, ma uno spinore a due componenti: ψ_+ e ψ_-. Quello che ci aspettiamo è che, in analogia a quello che accade per un campo vettoriale come il campo elettrico o il campo magnetico, una volta che ruotiamo gli assi del sistemi di riferimento, considerando stavolta solo la parte di spin, avremo che:

$$|\psi'\rangle = M|\psi\rangle = \begin{pmatrix} m_{11}\psi_+ + m_{12}\psi_- \\ m_{21}\psi_+ + m_{22}\psi_- \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

dove M è una matrice complessa 2×2. Sempre a causa dell'isotropia dello spazio vuoto ci aspettiamo che, anche considerando lo spin dell'elettrone, la descrizione quantistica nei due sistemi di riferimento ruotati sia identica. Affinchè ciò accada si deve avere che M sia unitaria e a determinante pari a 1. Ma queste due condizioni definiscono il gruppo $SU(2)$, cioè il gruppo delle matrici complesse 2×2 unitarie e a determinante pari a 1. Dunque il gruppo delle rotazioni interne dello spin è il gruppo $SU(2)$, ed esso rappresenta un ulteriore sottogruppo del gruppo di simmetria dell'elettrone. Si può infine dimostrare che ogni matrice $M \in SU(2)$ è scrivibile come:

$$M = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\cdot\vec{S}} \tag{1.15}$$

dunque il momento angolare di spin è il generatore del gruppo $SU(2)$, e cioè del gruppo delle rotazioni di spin.

Dunque siamo giunti alla conclusione che se abbiamo un elettrone che si muove nello spazio vuoto, i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$, che sono rispettivamente i gruppi delle rotazioni spaziali e delle rotazioni di spin, sono due gruppi di simmetria per l'elettrone. Abbiamo inoltre visto che il momento angolare orbitale $\vec{L}$ è il generatore delle rotazioni spaziali, mentre il momento angolare di spin $\vec{S}$ è il generatore delle rotazioni di spin.

Già dall'esperimento di Stern e Gerlach è possibile concludere che lo spin sia una quantità priva di analogo classico, e perciò puramente quantistica. Ciò deriva dal fatto che per l'esperimento di Stern e Gerlach lo spin dell'elettrone vale $s = \frac{1}{2}$, e quindi, essendo semintero, non è ricollegabile al momento angolare $\vec{L}$, e cioè non è ricollegabile ad una rotazione spaziale. Tuttavia è possibile fornire un'ulteriore dimostrazione del fatto che lo spin non possa essere in nessun modo collegabile a gradi di libertà spaziali, e quindi che la visione "intuitiva" dello spin come momento angolare generato dalla rotazione della particella su sè stessa sia errata, analizzando i gruppi $SO(3)$, collegato ad $\vec{L}$, ed $SU(2)$, collegato ad $\vec{S}$, e facendo vedere che i due gruppi in questione sono diversi. In particolare lo scopo di questo lavoro di tesi è proprio quello di studiare i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$ e di mettere in risalto le analogie e le differenze fra questi due gruppi. Per farlo dovremo introdurre una piccola parte di teoria dei gruppi e in particolare la teoria dei gruppi di Lie, dato che i due gruppi in questione risultano essere proprio dei gruppi di Lie.

Capitolo 2

Cenni di teoria dei gruppi

In questo capitolo introduciamo alcune nozioni di teoria dei gruppi fondamentali per il capitolo successivo. In particolare nella prima sezione introdurremo alcune definizioni e concetti base di teoria dei gruppi, mentre nella seconda sezione tratteremo una classe particolare di gruppi, ovvero i cosiddetti gruppi di Lie.

2.1 Definizioni generali

Iniziamo dando una definizione formale di gruppo:
Def 2.1.1: Sia G un insieme di elementi, su cui è definita un'operazione interna $m : G \times G \longmapsto G$. G si dice che è un gruppo se valgono le seguenti proprietà:

1. Esiste un elemento $e \in G : m(g_1, e) = m(e, g_1) = g_1 \quad \forall g_1 \in G$
   L'elemento e è detto elemento neutro o identità in G.
2. $\forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G : m(g, g^{-1}) = m(g^{-1}, g) = e$
   g^{-1} è detto l'inverso di g.
3. L'operazione m è associativa,cioè:

$$m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c) \qquad \forall a, b, c \in G$$

Tipicamente l'operazione m è chiamata moltiplicazione in G, e per una questione di semplicità di notazione viene indicata come: $m(g, g') = gg'$. Notiamo che nelle proprietà che deve soddisfare l'operazione interna m non rientra la proprietà commutativa. Nel caso in cui valga anche tale proprietà, e cioè che: $gg' = g'g \quad \forall g, g' \in G$, allora il gruppo G si dice abeliano o commutativo.

Def 2.1.2: Un sottoinsieme A di G si dice essere un sottogruppo di G se risulta essere egli stesso un gruppo, rispetto all'operazione interna m definita su G.

Dunque la peculiarità dei sottogruppi è che essi sono sottoinsiemi in cui se moltiplico due elementi di tale sottoinsieme il risultato si trova ancora in esso. Inoltre qualunque sottogruppo deve necessariamente contenere l'elemento neutro della moltiplicazione, per poter soddisfare le proprietà gruppali.

Def 2.1.3: Sia G un gruppo e sia S un suo sottogruppo. Indichiamo con g un elemento fissato di G. Si definisce allora laterale sinistro di S in G l'insieme formato dagli tutti gli elementi del tipo: $g' = gs \quad \forall s \in S$. Equivalentemente si definisce laterale destro di S in G l'insieme formato da tutti gli elementi del tipo: $g' = sg \quad \forall s \in S$.

Tipicamente il laterale sinistro è indicato con gS mentre il laterale destro con Sg. È possibile dimostrare che se due laterali hanno un elemento in comune allora essi sono coincidenti. Infatti:

$$g \in g_1 S \quad g \in g_2 S \longmapsto g = g_1 s_1 = g_2 s_2$$

E quindi:

$$g_1 s_1 = g_2 s_2 \longmapsto g_1^{-1} g_2 = s_1 s_2^{-1} = s' \in S \longmapsto g_2 = g_1 s' \longmapsto g_2 S = g_1 s' S = g_1 S$$

Pertanto il gruppo G si decompone in laterale destri (oppure sinistri) di S in G, che sono disgiunti, e quindi l'insieme formato da tali laterali forma una partizione di G.

Def 2.1.4: Sia G un gruppo e sia N un suo sottogruppo. Il sottogruppo N si dice normale(o invariante) se risulta che:

$$gng^{-1} = n' \in N \qquad \forall g \in G, \forall n \in N$$

Una proprietà interessante di tali sottogruppi è il fatto che i laterali destro e sinistro di un sottogruppo normale N in G coincidono. Infatti l'elemento generico di gN è gn con $g \in G$ e $n \in N$. Ma: $gng^{-1} = n' \in N \longmapsto gn = n'g$. E quindi ogni elemento appartenente a gN appartiene anche a Ng. Perciò i due laterali coincidono.

Def 2.1.5: Sia G un gruppo e sia N un suo sottogruppo normale. Definiamo allora la relazione di equivalenza $\sim$ come:

$$g \sim g' \iff \exists n \in N : g' = gn$$

Definiamo poi successivamente l'insieme: $G/N = \{[g]_\sim : g \in G\}$. Notiamo che tale insieme delle classi di equivalenza non è altro che l'insieme dei laterali destri (o equivalentemente dei laterali sinistri dato che N è normale e quindi i laterali coincidono) di N in G. Proprio a causa del fatto che N è normale è possibile dimostrare che a tale insieme di classi di equivalenza è possibile dare una struttura di gruppo.

Def 2.1.6: Sia G un gruppo e sia N un suo sottogruppo normale. Allora l'insieme G/N con l'operazione interna $m : G/N \times G/N \longmapsto G/N$ definita come: $m([g],[g']) = [gg']$, forma un gruppo detto gruppo quoziente. Infatti si ha che:

1. Se $g \sim g'$ e $h \sim h'$ e cioè se $g' = gn$ e $h' = hm$ con $n, m \in N$, allora $(gh)^{-1} g'h' = h^{-1} g^{-1} g'h'$
   Ma $g^{-1} g' = n$ e $h' = hm$ quindi:
   $(gh)^{-1} g'h' = h^{-1} nhm$
   Ma per ipotesi N è normale e quindi:
   $h^{-1} nh = n' \in N$

Dunque : $(gh)^{-1}g'h' = n'm = n'' \in N$
Ciò ci assicura che $gh \sim g'h'$ e quindi che il prodotto è ben definito.

2. L'elemento identico è la classe di equivalenza dell'elemento identico e in G(che corrisponde ad N). Infatti:
$m([g],[e]) = [ge] = [g] \quad \forall g \in G$

3. Per ogni elemento $g \in G$ l'elemento opposto nel gruppo quoziente è la classe di equivalenza di g^{-1}. Infatti:
$m([g],[g^{-1}]) = [gg^{-1}] = [e] \quad \forall g \in G$

4. m risulta essere associativa perchè l'operazione di moltiplicazione in G lo è.

Def 2.1.7: Siano G e G' due gruppi. Allora è possibile definire il gruppo diretto $G \times G'$ formato dalle coppie (g, g') con $g \in G$ e $g' \in G'$ con la seguente legge di moltiplicazione interna: $(g, g')(g_1, g'_1) = (gg_1, g'g'_1)$

Def 2.1.8: Siano G e G' due gruppi. Un'applicazione $\phi : G \longmapsto G'$ si dice essere un omomorfismo fra i due gruppi se :

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$$

Cioè un omomorfismo fra gruppi conserva la moltiplicazione fra i due gruppi in questione. Come conseguenza di ciò si ha che $\phi(e) = e'$ e che $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. Infatti: $\phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\phi(e)$. Ma in $G' \quad g'g' = g' \iff g' = e'$ e quindi: $\phi(e) = e'$. Da ciò ricaviamo che: $\phi(e) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1}) = e'$ e quindi che: $\phi(g^{-1}) = (\phi(g))^{-1}$. Dunque un omomorfismo preserva elementi neutri e elementi inversi.

Def 2.1.9: Un omomorfismo fra due gruppi G e G' si dice monomorfismo, se è iniettivo, epimorfismo se è suriettivo, e isomorfismo se è biettivo.

Due gruppi che sono legati da un isomorfismo si dicono isomorfi. Si può facilmente vedere che la relazione : $G \sim G'$ se e solo se G e G' sono isomorfi, è un relazione di equivalenza. Dunque possiamo dividere tutti i gruppi possibili in classi di equivalenza i cui elementi sono costituiti da gruppi isomorfi fra di loro. Per tale motivo due gruppi che sono isomorfi possono essere identificati.

2.2 Gruppi ed algebre di Lie

Introduciamo adesso i gruppi di Lie, e cioè una particolare classe di gruppi continui che hanno una particolare importanza nelle applicazioni fisiche.

Def 2.2.1: Sia G un insieme di elementi e μ un'applicazione da $G \times G$ in G. G si dice essere un gruppo di Lie di dimensione n se soddisfa le seguenti condizioni:

1. G è un gruppo rispetto alla moltiplicazione μ.

2. G è una varietà analitica di dimensione n.

3. L'applicazione $\mu : G \times G \longmapsto G$, tale che $\mu(g, g') = gg'$, e l'applicazione $\chi : G \longmapsto G$, tale che $\chi(g) = g^{-1}$, sono analitiche.

Dato che per definizione un gruppo di Lie è una varietà analitica, allora possiamo dire che in un intorno dell'identità e, gli elementi di G appartenenti a tale intorno possono essere messi in corrispondenza biunivoca con degli elementi di $\mathbb{R}^n$, e quindi gli elementi di tale intorno sono parametrizzabili attraverso n coordinate $(x_1, ..., x_n)$, e cioè sono funzioni del tipo $g(x_1, ..., x_n)$. È sempre possibile fare in modo che $g(0, ..., 0) = e$.

I gruppi di Lie più interessanti per quanto riguarda le applicazioni fisiche sono i cosiddetti gruppi di Lie lineari, di cui si fornisce di seguito la definizione:

Def 2.2.2: Sia $GL(N, K)$ il gruppo delle matrici quadrate $N \times N$, invertibili, sul campo K. Un gruppo di Lie G si dice essere un gruppo di Lie lineare se risulta essere isomorfo ad un sottogruppo di $GL(N, K)$.

I gruppi di Lie che sono isomorfi a sottogruppo di $GL(N, \mathbb{R})$ sono chiamati gruppi di Lie lineari reali, e sono quelli che hanno un maggiore rilievo nelle applicazioni fisiche. Dunque sostanzialmente i gruppi di Lie lineari possono essere identificati come gruppi di matrici invertibili.

Si riconsideri il discorso precedente sul fatto che in un intorno dell'identità gli elementi di un gruppo di Lie sono funzioni di n coordinate. Nel caso in cui il gruppo di Lie in esame è un gruppo di Lie lineare reale allora esiste un isomorfismo $\Gamma : G \longmapsto W \subseteq GL(N, \mathbb{R})$, e dunque si ha che:

$$\Gamma(g(x_1, ..., x_n)) = M(x_1, ..., x_n) \tag{2.1}$$

cioè gli elementi di G sono essenzialmente identificabili come matrici invertibili $N \times N$ che hanno come elementi delle funzioni analitiche di $(x_1, ..., x_n)$.

Def 2.2.3: Un gruppo di Lie G si dice connesso se il suo spazio topologico X è connesso. Allo stesso modo G è semplicemente connesso se il suo spazio topologico X lo è, ed è compatto se X lo è.

Grazie al fatto che un gruppo di Lie possiede sia una struttura di gruppo che una struttura di varietà analitica, è possibile studiare tali gruppi sia da un punto di vista locale che globale. Quello che si può vedere è che la maggior parte delle informazioni riguardanti un gruppo di Lie possono essere estrapolate analizzando gli aspetti locali di tali gruppi. Tali aspetti locali sono racchiusi nell'algebra di Lie reale associata al gruppo di Lie in esame. Infatti ad ogni gruppo di Lie è associabile un'algebra di Lie reale. Tuttavia il concetto di algebra di Lie può essere sviluppato indipendentemente dal concetto di gruppo di Lie. Per tal motivo si fornisce di seguito la definizione astratta di algebra di Lie, cioè svincolata dalla teoria dei gruppi di Lie, e alcune definizioni e concetti chiave ad essa collegate, e poi successivamente si andrà ad analizzare come associare ad ogni gruppo di Lie un'algebra di Lie reale.

Def 2.2.4: Un insieme A si dice che è un'algebra di Lie, se esso risulta essere uno spazio vettoriale su un campo K, equipaggiato con un'applicazione $[\cdot, \cdot] : A \times A \longmapsto A$ (chiamata parentesi di Lie), e tale applicazione soddisfa le seguenti proprietà:

1. È bilineare, cioè: $[av + bw, u] = a[v, u] + b[w, u]$ e $[v, aw + bu] = a[v, w] + b[v, u] \quad \forall a, b \in K \quad \forall v, w, u \in A$

2. È antisimmetrica, cioè: $[v, w] = -[w, v] \quad \forall v, w \in A$

3. Soddisfa l'identità di Jacobi, e cioè: $[[v, w], u] + [[u, v], w] + [[w, u], v] = 0 \quad \forall v, w, u \in A$

Se il campo K su cui è definita l'algebra è il campo dei reali, l'algebra di Lie in questione è detta reale, mentre se $K = \mathbb{C}$ allora l'algebra di Lie è detta complessa.

Sia A un algebra di Lie, e sia $(e_1, ..., e_n)$ una base in A. Come sappiamo allora ogni elemento $a \in A$ è scrivibile come: $a = a^i e_i$.[1] Se consideriamo due elementi $a, b \in A$ si avrà che: $[a, b] = c \in A$ Dunque scrivendo a, b, c in termini della base $(e_1, ..., e_n)$ si ha che:

$$[a^i e_i, b^j e_j] = a^i b^j [e_i, e_j] = c^k e_k \tag{2.2}$$

Ma ovviamente anche $[e_i, e_j] \in A$ e quindi possiamo scrivere :

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k \tag{2.3}$$

dove i coefficienti c_{ij}^k con $i, j, k = 1, ..., n$ sono detti costanti di struttura.
A causa delle proprietà 2 e 3 dell'algebra di Lie, per tali coefficienti si ha che :

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \tag{2.4}$$

$$c_{ij}^m c_{mk}^r + c_{jk}^m c_{mi}^r + c_{ki}^m c_{mj}^r = 0 \tag{2.5}$$

Ovviamente tali coefficienti dipendono fortemente dalla base scelta in A. Infatti essi sono le componenti di un tensore con 2 indici covarianti e 1 indice controvariante. Una volta note le costanti di struttura (in una qualunque base di A, perchè tanto le costanti rispetto a qualunque altra base possono essere calcolate attraverso le usuali leggi di cambiamento di coordinate dei tensori) è possibile conoscere la parentesi di Lie di una qualunque coppia di elementi di A. Infatti si ha che :

$$[a, b] = a^i b^j c_{ij}^k e_k \tag{2.6}$$

Dunque l'intera algebra di Lie è identificata dalle costanti di struttura c_{ij}^k. Per tale motivo spesso si dice che le relazioni $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_{\mathrm{k}}$ definiscono l'algebra di Lie.

Def 2.2.5: Sia A un'algebra di Lie. A si dice essere commutativa se :

$$[a, b] = 0 \quad \forall a, b \in A$$

Def 2.2.6: Sia A un'algebra di Lie. Un sottoinsieme A' di A si dice che è una sottoalgebra di A se esso risulta essere a sua volta un'algebra di Lie, rispetto alla parentesi di Lie di A.

[1] Si è utilizzata la notazione di Einstein di somma su indici ripetuti.

Def 2.2.7: Siano A e A' due algebre di Lie. Un'applicazione $\eta : A \longmapsto A'$ si dice che è un omomorfismo di algebre di Lie se risulta che :

$$\eta(\alpha a + \beta b) = \alpha\eta(a) + \beta\eta(b) \quad \forall a, b \in A, \forall \alpha, \beta \in K$$

$$[\eta(a), \eta(b)]_2 = \eta([a, b]_1) \quad \forall a, b \in A$$

Dove $[\cdot, \cdot]_1$ e $[\cdot, \cdot]_2$ sono rispettivamente le parentesi di Lie in A e A'.

Nel caso in cui l'omomorfismo η è iniettivo e suriettivo allora essa è un isomorfismo di algebre di Lie, e le due algebra di Lie A e A' sono isomorfe.

Enunciamo e dimostriamo adesso un semplice teorema che ci servirà in seguito e che mette ancora più in risalto l'importanza delle costanti di struttura.

Teorema 2.2.1 Siano $(A_1, [\cdot, \cdot]_1)$ e $(A_2, [\cdot, \cdot]_2)$ due algebre di Lie n-dimensionali. Se si ha che:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = c_{ij}^k \sigma_k$$

$$[\xi_i, \xi_j] = c_{ij}^k \xi_k$$

con $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$ base di A_1 e con $(\xi_1, ..., \xi_n)$ base di A_2, allora A_1 e A_2 sono isomorfe.

Dimostrazione. Chiamiamo Γ l'applicazione lineare $\Gamma : A_1 \longmapsto A_2$ e tale per cui:

$$\Gamma(\sigma_i) = \xi_i$$

con $i = 1, ..., n$. Dimostriamo che Γ è un isomorfismo di algebre di Lie. Per farlo dimostriamo prima che essa è biunivoca.
Sia $a \in A_1$, allora: $a = a^i \sigma_i$ dove i coefficienti a^i sono unici $\forall a \in A_1$. Allora:

$$\Gamma(a) = \Gamma(a^i \sigma_i) = a^i \Gamma(\sigma_i) = a^i \xi_i$$

e dunque, data l'unicità dei coefficienti a^i, ad ogni $a \in A_1$ è associata un'unica combinazione lineare in A_2 e dunque un solo elemento di A_2.
Dimostriamo ora che Γ preserva le parentesi di Lie:

$$a, b \in A_1 \longmapsto \qquad [a, b]_1 = [a^i \sigma_i, b^j \sigma_j]_1 = a^i b^j c_{ij}^k \sigma_k$$

Per cui :

$$\Gamma([a, b]_1) = a^i b^j c_{ij}^k \xi_k$$

Invece :

$$[\Gamma(a), \Gamma(b)]_2 = [a^i \xi_i, b^j \xi_j]_2 = a^i b^j c_{ij}^k \xi_k$$

Dunque risulta che:

$$[\Gamma(a), \Gamma(b)]_2 = \Gamma([a, b]_1)$$

e quindi abbiamo dimostrato che Γ è un isomorfismo di algebre di Lie, e quindi che A_1 e A_2 sono isomorfe. □

Adesso che abbiamo introdotto le algebre di Lie in modo astratto, vogliamo vedere com'è possibile associare ad ogni gruppo di Lie un'algebra di Lie reale. In particolare, come detto in precedenza, quello che ci interessa maggiormente è trattare i gruppo di Lie lineari, e quindi focalizziamo la nostra attenzione su quest'ultimi. Per questi tipi di gruppi il legame fra il gruppo e la sua algebra di Lie è fornito dalla funzione esponenziale di matrici. Definiamola:

Def 2.2.8: Sia B una matrice $n \times n$. Si definisce matrice esponenziale di B la matrice:

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

Tale matrice risulta essere sempre definita, poichè la serie converge per ogni matrice B. Le proprietà principali di tale matrice esponenziale sono che:

1. $\det(e^B) = e^{tr(B)}$
2. Come conseguenza della 1. si ha che $\det(e^B) \neq 0 \quad \forall B \in M_{\mathrm{n}}(\mathbb{C})$. Da ciò si evince che la matrice esponenziale definisce una funzione: $\exp : M_{\mathrm{n}}(\mathbb{C}) \longmapsto GL(n, \mathbb{C})$
3. $e^A e^B = e^{A+B} \quad$ se $\quad [A, B] = 0 \quad$ dove$[A, B] = AB - BA$ (con AB intendiamo il prodotto righe per colonne)
4. Da 3. si ha che $e^B e^{-B} = I$ e dunque $(e^B)^{-1} = e^{-B}$
5. $(e^B)^T = e^{B^T}$ e $(e^B)^\dagger = e^{B^\dagger}$
6. La matrice esponenziale definisce una funzione continua $\exp : \delta_0 \longmapsto \delta_{\mathrm{I}}$ dove con δ_0 abbiamo indicato un intorno della matrice nulla e con δ_{I} un intorno della matrice identità.

Per poter definire il legame fra un gruppo di Lie lineare e algebra di Lie reale associata abbiamo bisogno di un altro concetto importante ovvero il concetto di sottogruppo ad un parametro.

Def 2.2.9: Sia G un gruppo di Lie lineare. Σ si dice essere un sottogruppo di Lie ad un parametro se risulta essere un gruppo di matrici $\sigma(t)$, che sono funzioni continue e differenziabili di un parametro reale t, e tale per cui risulta che:

$$\sigma(t)\sigma(t') = \sigma(t + t') \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}$$

A causa di tale uguaglianza si ha che:

1. Per $t = 0$ si ha che $\sigma(0) = I$. Infatti se $t = 0 \quad \sigma(t')\sigma(0) = \sigma(t')$
2. Il sottogruppo Σ è abeliano, poichè :
   $\sigma(t)\sigma(t') - \sigma(t')\sigma(t) = \sigma(t + t') - \sigma(t' + t) = 0 \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}$
3. Ogni sottogruppo ad un parametro è formato da funzioni del tipo: $\sigma(t) = e^{\xi t}$ dove $\xi = \frac{d\sigma}{dt}|_{\mathrm{t}=0}$
   Infatti derivando tale espressione rispetto a t' e ponendo $t' = 0$, otteniamo che :
   $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}|_{\mathrm{t}=0}\sigma(t) = \xi\sigma(t) \longmapsto \sigma(t) = e^{\xi t}$

Detto ciò possiamo definire l'algebra di Lie reale associata ad un gruppo di Lie lineare. Sia G un gruppo di Lie lineare. Come abbiamo visto in precedenza gli elementi di un gruppo di Lie lineare, che sono essenzialmente matrici, possono essere scritti, almeno in un intorno dell'identità, come $M(x_1, ..., x_n)$, cioè come matrici i cui elementi sono funzioni analitiche di $(x_1, ..., x_n)$, e tali che $M(0, ..., 0) = I$. È possibile definire, a partire da $M(x_1, ..., x_n)$, le seguenti n matrici:

$$L_i = \frac{\partial M}{\partial x_i}|_{(0,....,0)} \tag{2.7}$$

con $i = 1, ..., n$

L'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti reali delle n matrici L_i, formano uno spazio vettoriale reale n-dimensionale il quale, equipaggiato con una parentesi di Lie dato dal commutatore fra matrici $[A, B] = AB - BA$, forma quella che è definita come l'algebra di Lie reale associata al gruppo di Lie G, che indichiamo con Λ. Le matrici L_i che formano una base in Λ, vengono chiamate generatori dell'algebra di Lie. Tali matrici possono anche essere complesse, purchè gli elementi di Λ siano combinazioni lineari a coefficienti reali di tali matrici.

La relazione che intercorre fra un gruppo di Lie lineare G e l'algebra di Lie reale Λ ad esso associata e sancita dai seguenti risultati:

1. Qualunque elemento $\lambda \in \Lambda$ è associato ad un sottogruppo ad un parametro di G, definito dalla relazione: $\sigma(t) = e^{\lambda t} \qquad t \in \mathbb{R}$

2. Qualunque elemento $g \in G$ che si trova in un intorno dell'identità appartiene ad un sottogruppo ad un parametro Σ di G.

3. Se G è compatto, allora ogni elemento $g \in G'$, dove G' è un sottogruppo connesso di G, è scrivibile nella forma e^{λ} con $\lambda \in \Lambda$. Se invece G è compatto e connesso ogni elemento $g \in G$ è scrivibile come e^{λ} con $\lambda \in \Lambda$.

Dunque il motivo per il quale l'algebra di Lie Λ reale associata al gruppo di Lie lineare G descrive le proprietà locali del gruppo stesso è che qualsiasi elemento che si trovi in un intorno dell'identità può essere espresso come esponenziale di un elemento di Λ. Nel caso particolare in cui G sia connesso e compatto, ogni elemento di G è scrivibile come esponenziale di un elemento di Λ. In tal caso dunque l'intera struttura del gruppo è nota una volta che si conosce l'algebra di Lie reale associata al gruppo. È evidente che tali gruppi risultano essere più semplici da studiare, in quanto in tal caso l'intera struttura di gruppo è nota una volta noti gli n generatori del gruppo di Lie.

Capitolo 3

I gruppi SO(3) e SU(2)

Dopo aver introdotto gli elementi di teoria dei gruppi essenziali, ci apprestiamo in questo capitolo a trattare nello specifico due gruppi molto importanti in fisica, che sono i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$.

3.1 SO(3) e relativa algebra di Lie

Per definizione una rotazione in $\mathbb{R}^3$ è un omomorfismo $\omega : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, il quale preserva il prodotto scalare fra i vettori e l'orientazione dello spazio. L'insieme ρ di tutte le rotazioni di $\mathbb{R}^3$ forma un gruppo, il quale risulta essere un sottogruppo di $GL(\mathbb{R}^3)$, cioè del gruppo degli automorfismi invertibili definiti su $\mathbb{R}^3$. Ma $GL(\mathbb{R}^3)$ è isomorfo a $GL(3,\mathbb{R})$, cioè al gruppo delle matrici reali 3×3 invertibili, e quindi un sottogruppo di $GL(\mathbb{R}^3)$ sarà isomorfo ad un sottogruppo di $GL(3,\mathbb{R})$. In particolare chiamando $\chi_b : GL(\mathbb{R}^3) \longmapsto GL(3,\mathbb{R})$, l'applicazione che, fissata una base b di $\mathbb{R}^3$, associa ad ogni elemento di $GL(\mathbb{R}^3)$ uno e un solo elemento di $GL(3,\mathbb{R})$, si ha che per ogni ω appartente a ρ è associata una matrice $R = \chi_b(\omega)$. Affinchè ω conservi il prodotto scalare e l'orientazione dello spazio, è facile vedere che la matrice reale 3×3 R ad essa associata, deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$RR^{\mathrm{T}} = R^{\mathrm{T}}R = I \qquad det(R) = 1 \tag{3.1}$$

Tali condizioni definiscono il sottogruppo di $GL(3,\mathbb{R})$ chiamato $SO(3)$, ovvero il gruppo delle matrici reali 3×3, ortogonali e con determinante unitario. Dunque il gruppo delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$ è isomorfo ad $SO(3)$, ed è dunque identificabile con esso.

$SO(3)$ è un gruppo continuo dipendente da 3 parametri. Infatti sì può vedere che le condizioni (3.1), fanno si che fra i 9 parametri di una matrice 3×3, solo 3 siano indipendenti. Dunque una rotazione in $\mathbb{R}^3$ è determinata da 3 parametri. Vi sono diversi modi per parametrizzare una rotazione. Quella che useremo noi è la parametrizzazione asse-angolo, che si basa sul fatto che una rotazione in $\mathbb{R}^3$ è fissata da un'asse di rotazione e da un angolo di rotazione. Con tale parametrizzazione non si fa altro che associare ad ogni punto di [1]D^3_π, cioè del disco tridimensionale di raggio π, una rotazione. Chiamiamo O il centro di D^3_π, allora ogni punto $P \in D^3_\pi$ definisce un'unica rotazione, poichè, considerando il vettore $\vec{OP}$, il versore di tale vettore identifica l'asse di rotazione, mentre il

[1]Ricordiamo che per definizione: $D^n_r = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : \quad ||x|| \leq r\}$

modulo, che indichiamo con ϕ, identifica l'angolo di rotazione in senso antiorario (si ha che $0 \leq \phi \leq \pi$). Tuttavia dobbiamo notare il fatto che se $\phi = \pi$, il punto P' antipodale a P identifica la stessa rotazione. Dunque affinchè ci sia una corrispondenza uno ad uno è necessario identificare i punti antipodali sulla superficie di D^3_π. Indichiamo con $\tilde{D}^3_\pi$ il disco tridimensionale di raggio π e con i punti antipodali identificati. Allora ogni punto $P \in \tilde{D}^3_\pi$ identifica una e una sola rotazione. Dunque il gruppo $SO(3)$ è topologicamente equivalente a $\tilde{D}^3_\pi$.

È facile costatare che $\tilde{D}^\pi_3$ è una varietà analitica. Per verificare dunque che $SO(3)$ è un gruppo di Lie, dobbiamo verificare che le funzioni μ, di moltiplicazione fra gli elementi di $SO(3)$, e η, la funzione che associa ad ogni $R \in SO(3)$ il suo inverso R^{-1}, siano entrambe analitiche.
Per farlo scriviamo la forma parametrica del generico elemento $R \in SO(3)$. Indichiamo con $\hat{k} = (k_1, k_2, k_3)$ il versore che identifica l'asse di rotazione e con ϕ l'angolo di rotazione. Sia $\vec{v}$ un generico vettore di $\mathbb{R}^3$. Allora se ruotiamo tale vettore, con la rotazione identificata da $\hat{k}$ e ϕ, si avrà che il nuovo vettore $\vec{v'}$ è identificato dalla seguente espressione, detta formula di Rodrigues:

$$\vec{v'} = \vec{v}\cos\phi + (\hat{k} \times \vec{v})\sin\phi + \hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{v})(1 - \cos\phi) \tag{3.2}$$

Scrivendo tale rotazione in forma matriciale otteniamo:

$$R(\hat{k}, \phi) = \begin{pmatrix} k_1^2(1-\cos\phi) + \cos\phi & k_1k_2(1-\cos\phi) - k_3\sin\phi & k_1k_3(1-\cos\phi) + k_2\sin\phi \\ k_1k_2(1-\cos\phi) + k_3\sin\phi & k_2^2(1-\cos\phi) + \cos\phi & k_2k_3(1-\cos\phi) - k_1\sin\phi \\ k_1k_3(1-\cos\phi) - k_2\sin\phi & k_2k_3(1-\cos\phi) + k_1\sin\phi & k_3^2(1-\cos\phi) + \cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Ovviamente $R(\hat{k}, \phi)$ dipende da 3 parametri, poichè solo 2 fra le componenti di $\hat{k}$ sono indipendenti a causa del vincolo di norma unitaria. Dall'espressione appena ricavata di $R(\hat{k}, \phi)$ è possibile provare che le applicazioni:

$$\mu : SO(3) \times SO(3) \longmapsto SO(3) \qquad \eta : SO(3) \longmapsto SO(3)$$

Tale che:

$$\mu(R(\hat{k}, \phi), R(\hat{k'}, \phi')) = R(\hat{k''}, \phi'') \qquad \eta(R(\hat{k}, \phi)) = (R(\hat{k}, \phi))^{-1}$$

siano entrambe funzioni analitiche dei parametri e quindi che $SO(3)$ è un gruppo di Lie. Inoltre, dato che il gruppo ρ delle rotazioni in $\mathbb{R}^3$ è isomorfo a $SO(3)$, ρ è un esempio di gruppi di Lie lineare.

Possiamo adesso ricavare l'algebra di Lie reale associata ad $SO(3)$, la quale è usualmente indicata con $so(3)$. Per fare ciò risulta più comodo passare ad un'altra rappresentazione parametrica di $SO(3)$. In particolare se poniamo:

$$\hat{k} = (1, 0, 0) = \hat{x} \quad \hat{k} = (0, 1, 0) = \hat{y} \quad \hat{k} = (0, 0, 1) = \hat{z} \tag{3.4}$$

Nell'espressione (3), otteniamo le 3 rotazioni lungo x, y, z:

$$R_x(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$R_y(b) = \begin{pmatrix} \cos(b) & 0 & \sin(b) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(b) & 0 & \cos(b) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$R_z(c) = \begin{pmatrix} \cos(c) & -\sin(c) & 0 \\ \sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Dove a, b, c sono i tre angoli di rotazioni. Ma una qualunque rotazione di $\mathbb{R}^3$ può essere vista come una rotazione intorno ad x, poi intorno ad y e poi intorno a z, e quindi si ha che la generica rotazione ha la seguente espressione:

$$R(a, b, c) = R_z(c)R_y(b)R_x(a) \tag{3.8}$$

Ovvero:

$$R(a,b,c) = \begin{pmatrix} \cos(b)\cos(c) & \sin(a)\sin(b)\cos(c) - \cos(a)\sin(c) & \cos(a)\sin(b)\cos(c) + \sin(a)\sin(c) \\ \cos(b)\sin(c) & \sin(a)\sin(b)\sin(c) + \cos(a)\cos(c) & \cos(a)\sin(b)\sin(c) - \sin(a)\cos(c) \\ -\sin(b) & \sin(a)\cos(b) & \cos(a)\cos(b) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Una volta nota la forma funzionale di $R(a, b, c)$, è possibile ricavare i generatori dell'algebra di Lie attraverso le seguenti formule:

$$L_1 = \frac{\partial R}{\partial a}\Big|_{\{a,b,c\}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$L_2 = \frac{\partial R}{\partial b}\Big|_{\{a,b,c\}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$L_3 = \frac{\partial R}{\partial c}\Big|_{\{a,b,c\}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Queste 3 matrici formano una base di $so(3)$. Una volta noti i generatori possiamo calcolare le costanti di struttura, facendo il commutatore fra tali generatori. In particolare si ha che:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \tag{3.13}$$

Ricordiamo che se abbiamo un'algebra di Lie Λ qualunque, l'intera algebra risulta essere nota una volta che sono note le costanti di struttura. Dunque le relazioni (3.13) si dicono che definiscono l'algebra di $SO(3)$, ovvero definiscono $so(3)$.

3.2 SU(2) e relativa algebra di Lie

Dopo aver introdotto la topologia di $SO(3)$ e dopo aver ricavato $so(3)$, e cioè l'algebra di Lie reale ad esso associata, passiamo ora a fare la stessa cosa per il gruppo $SU(2)$. $SU(2)$ è un sottogruppo di $M(2, \mathbb{C})$, definito come il gruppo delle matrici complesse 2×2, unitarie e a determinante unitario. Ricordiamo che una matrice complessa si dice unitaria se risulta che:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \tag{3.14}$$

Dove con $U^\dagger$ intendiamo la trasposta coniugata di U.

Si può vedere, com'è stato detto anche nel Capitolo 1, che le matrici di $SU(2)$ possono essere viste come una "rotazione" nello spazio $\mathbb{C}^2$. Infatti se indichiamo con ψ e ϕ due elementi di $\mathbb{C}^2$ e con U un elemento di $SU(2)$ si avrà che:

$$\langle U\psi, U\phi\rangle = \langle \psi, U^\dagger U\phi\rangle = \langle \psi, \phi\rangle \tag{3.15}$$

Quindi gli elementi di $SU(2)$ preservano il prodotto scalare in $\mathbb{C}^2$, e dato che hanno anche determinante unitario, preservano anche l'orientazione dello spazio.

Si può facilmente vedere che il generico elemento di $SU(2)$ è nella forma:

$$D(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{C} \tag{3.16}$$

con la condizione:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{3.17}$$

Dato che α e $\beta \in \mathbb{C}$ possono essere scritti come:

$$\alpha = x_1 + ix_2 \qquad \beta = x_3 + ix_4 \tag{3.18}$$

E dunque la condizione (3.17) si traduce nella condizione:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^4 = 1 \tag{3.19}$$

Ma tale condizione è la stessa che identifica $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : ||x|| = 1\}$.

È possibile costatare che ad S^3 si può fornire una struttura di gruppo. Ciò è conseguenza del fatto che ad $\mathbb{R}^4$ è possibile fornire una struttura di corpo non commutativo, attraverso un' identificazione di $\mathbb{R}^4$ con il corpo non commutativo dei quaternioni. In particolare $\mathbb{R}^4$ e i quaternioni possono essere identificati usando tale corrispondenza:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto h = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \in H \tag{3.20}$$

Si evince molto facilmente che la funzione ν: $\mathbb{R}^4 \longmapsto H$ appena definita è una funzione biunivoca. Per tale motivo $\mathbb{R}^4$ è identificato con H, e "eredita" perciò da esso la struttura di corpo non commutativo. Si ha che:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto ||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 x \longmapsto$$

$$\longmapsto h = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \longmapsto |h|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Cioè fare la norma quadra in $\mathbb{R}^4$ equivale a fare il modulo quadro in H. Per tale motivo:

$$H_1 = \{h \in H : |h| = 1\} \simeq \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : ||x|| = 1\} = S^3 \tag{3.21}$$

Dunque c'è un'identificazione di H_1 in S^3.

Si può facilmente provare che H_1 è un sottogruppo di H rispetto alla moltiplicazione di quaternioni, infatti:

1. Dato che $h = h_1 h_2 \mapsto |h| = |h_1||h_2|$ allora se moltiplico due elementi di H_1 ottengo un altro elemento di H_1.

2. e =1 , cioè l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione, appartiene ovviamente ad H_1.

3. Prendiamo un generico $h \in H_1$ e indichiamo con $h^{'}$ il suo inverso in H. Si avrà allora per definizione che: $e = hh^{'} \mapsto |e| = |h||h^{'}| \mapsto |h^{'}| = 1$
   E quindi per ogni $h \in H_1, h^{'} \in H_1$.

4. Ovviamente la moltiplicazione fra quaternioni è associativa e quindi:
   $h(kz) = (hk)z = hkz \qquad \forall h, k, z \in H_1$

Dunque dato che $S^3 \simeq H_1, S^3$ eredita da H_1 una struttura di gruppo non abeliano. Ovviamente S^3 è un importante esempio di varietà analitica. Dunque S^3 è un gruppo di Lie[2].

Per questo motivo l'applicazione $\Phi : H_1 \simeq S^3 \longmapsto SU(2)$ tale che :

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

si può dimostrare che è un omomorfismo di gruppi di Lie. In particolare si ha che tale omomorfismo è biettivo, poichè ad ogni elemento di S^3 è associato uno e un solo elemento di $SU(2)$. Per tale motivo Φ è un isomorfismo di gruppi di Lie, e quindi abbiamo che:

$$SU(2) \simeq H_1 \simeq S^3 \tag{3.23}$$

Vogliamo ora calcolare l'algebra di Lie reale associata a tale gruppo, tipicamente indicata con $su(2)$. Per farlo scriviamo il generico elemento di $SU(2)$ nella seguente forma:

$$D(a,b,c) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{a}{2})\cos(\frac{b}{2})e^{-ic} - i\sin(\frac{a}{2})\sin(\frac{b}{2})e^{-ic} & -\cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{b}{2})e^{ic} - i\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{b}{2})e^{ic} \\ -i\sin(\frac{a}{2})\cos(\frac{b}{2})e^{-ic} + \cos(\frac{a}{2})\sin(\frac{b}{2})e^{-ic} & \cos(\frac{a}{2})\cos(\frac{b}{2})e^{ic} + i\sin(\frac{a}{2})\sin(\frac{b}{2})e^{ic} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

Una volta noto il generico elemento di $SU(2)$ è possibile anche per tale gruppo calcolare i generatori. Si ha che :

$$S_1 = \frac{\partial D}{\partial a}|_{\{a,b,c\}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_1 \tag{3.25}$$

$$S_2 = \frac{\partial D}{\partial b}|_{\{a,b,c\}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_2 \tag{3.26}$$

$$S_3 = \frac{\partial D}{\partial c}|_{\{a,b,c\}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_3 \tag{3.27}$$

Dove le matrici $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli. Tali matrici sono dunque una base per $su(2)$. Una volta noti i generatori, possiamo calcolare le costanti di struttura che definisco l'algebra $su(2)$. Tali costanti sono date dalle espressioni:

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \tag{3.28}$$

E dunque le espressioni (3.28) definiscono l'algebra di Lie reale associata a $SU(2)$, ovvero $su(2)$.

[2]Per poter dire che S^3 è un gruppo di Lie dovremmo costatare che la moltiplicazione $\mu : S^3 \times S^3 \longmapsto S^3$ e l'inversa $\chi : S^3 \longmapsto S^3$ siano entrambe analitiche. La qual cosa si può fare e si ottiene che effettivamente μ e χ lo sono.

3.3 Differenza fra SO(3) e SU(2)

Nelle sezioni 3.1 e 3.2 abbiamo ricavato che i generatori di $so(3)$ e $su(2)$ soddisfano le seguenti espressioni:

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{3.29}$$

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \qquad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{3.30}$$

Cioè $so(3)$ e $su(2)$ hanno le stesse costanti di struttura. A causa di ciò, per quanto visto nella sezione 2.2, le due algebre di Lie $so(3)$ e $su(2)$ risultano essere isomorfe, e dunque i due gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$ risultano essere localmente isomorfi. Dunque $SO(3)$ e $SU(2)$ sono localmente indistinguibili, e quindi, sempre localmente, rappresentano lo stesso gruppo.

È allora lecito chiedersi se tale identificazione locale non possa essere estesa ad una identificazione globale dei due gruppi, e cioè chiedersi se i due gruppi non siano globalmente isomorfi. Già dai risultati ottenuti nelle sezioni 3.1 e 3.2 è possibile fornire una risposta a tale quesito, facendo dei ragionamenti di natura topologica. Infatti in tali sezioni abbiamo ricavato che, dal punto di vista topologico, $SU(2) \simeq S^3$ e $SO(3) \simeq \tilde{D}^3_\pi$. Ma è piuttosto facile vedere che S^3 non è omeomorfo ad $\tilde{D}^3_\pi$. Infatti S^3 è semplicemente connesso, mentre $\tilde{D}^3_\pi$ non lo è, poichè non tutte le curve chiuse contenute in esso sono riducibili con continuità ad un punto. Prendiamo come esempio le seguenti 3 curve:

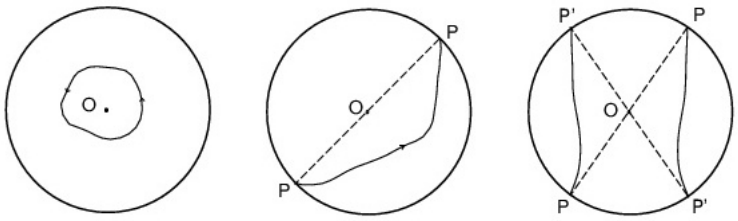

Figura 3.1: Curve su SO(3)

La prima e la terza curva (da sinistra verso destra) sono riducibili con continuità ad un punto. Infatti per la prima non c'è nessun problema, dato che non interseca mai la superficie della sfera, mentre per la terza il problema dei punti antipodali identificati si aggira restringendo i punti P e P' fino a farli coincidere, per poi deformare con continuità la curva come si fa per la prima. Nel caso della seconda curva questo trucco non può essere utilizzato e quindi tale curva non è omotopa ad un punto. Ne segue che $\tilde{D}^3_\pi$ non è semplicemente connesso, mentre S^3 lo è. Ma la semplice connessione è un esempio di invariante topologico[3], e dunque le due varietà non possono essere omeomorfe, e quindi ne consegue che i due gruppi di Lie $SO(3)$ e $SU(2)$ non sono identificabili, in quanto topologicamente diversi.

Tuttavia è possibile dimostrare la diversità globale dei due gruppi anche costruendo un omomorfismo fra tali gruppi, e dimostrando che esso non è un isomorfismo, e quindi che i due gruppi sono diversi. Nel seguito di tale trattazione ci proponiamo di fare tutto ciò. Per farlo ci serviamo nuovamente dei quaternioni. In particolare focalizziamo adesso la nostra attenzione sul sottoinsieme:

[3] Vedi l'Appendice A.

$$H_0 = \{z \in H : z = iy_1 + jy_2 + ky_3\} \tag{3.31}$$

cioè sull'insieme dei quaternioni con parte reale nulla. Possiamo identificare H_0 con $\mathbb{R}^3$ attraverso la semplice applicazione:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto z(y) = iy_1 + jy_2 + ky_3 \in H_0 \tag{3.32}$$

Si può vedere che è possibile associare ad ogni $h \in H_1$ una trasformazione

$$\rho_h : H_0 \longmapsto H_0 \tag{3.33}$$

tale che:

$$z'(y) = \rho_h z(y) = hz(y)h^{-1} \tag{3.34}$$

Si può dimostrare che che $\forall z \in H_0$ e $\forall h \in H_1$, $z' \in H_0$ e che quindi ρ_h sia effettivamente un funzione di H_0 in sè stesso.
Infatti abbiamo che:

$$h = a + ib + jc + kd \in H_1$$

$$z(y) = iy_1 + jy_2 + ky_3 \in H_0$$

Calcoliamo innanzitutto h^{-1}. Imponiamo $h^{-1} = a' + ib' + jc' + kd'$. Si deve avere che :

$$hh^{-1} = (a + ib + jc + kd)(a' + ib' + jc' + kd') =$$

$$(aa' - bb' - cc' - dd') + i(ba' + ab' + cd' - dc') + j(ac' + ca' + db' - bd') + k(da' + ad' + bc' - cb') = 1$$

Ovvero si ha il seguente sistema:

$$aa' - bb' - cc' - dd' = 1$$

$$ba' + ab' - dc' + cd' = 0$$

$$ca' + db' + ac' - bd' = 0$$

$$da' - cb' + bc' + ad' = 0$$

Risolvendo tale sistema si ottiene che:

$$h^{-1} = a - ib - jc - kd$$

Ottenuta l'espressione di h^{-1} calcoliamo innanzitutto :

$$z(y)h^{-1} = (iy_1 + jy_2 + ky_3)(a - ib - jc - kd) =$$

$$(by_1 + cy_2 + dy_3) + i(ay_1 - dy_2 + cy_3) + j(ay_2 + dy_1 - by_3) + k(ay_3 + by_2 - cy_1)$$

Indichiamo con:

$$t_1 = by_1 + cy_2 + dy_3$$

$$t_2 = ay_1 - dy_2 + cy_3$$
$$t_3 = ay_2 + dy_1 - by_3$$
$$t_4 = ay_3 + by_2 - cy_1$$

Abbiamo allora che:

$$hz(y)h^{-1} = (a + ib + jc + kd)(t_1 + it_2 + jt_3 + kt_4) =$$

$$(at_1 - bt_2 - ct_3 - dt_4) + i(at_2 + bt_1 + ct_4 - dt_3) +$$
$$+j(at_3 + ct_1 + dt_2 - bt_4) + k(dt_1 + at_4 + bt_3 - ct_2)$$

Sostituendo in tale espressione le espressioni delle t e riorganizzando il tutto otteniamo:

$$z'(y) = hz(y)h^{-1} =$$

$$= i[y_1(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + y_2(2bc - 2ad) + y_3(2ac + 2bd)] +$$
$$+j[y_1(2ad + 2bd) + y_2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + y_3(2cd - 2ab)] +$$
$$+k[y_1(2bd - 2ac) + y_2(2cd + 2ab) + y_3(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)]$$

Il che prova che $z' \in H_0$.

Inoltre dato che $H_0 \simeq \mathbb{R}^3$ possiamo scrivere la matrice associata a ρ_h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dall'espressione di $z'(y)$ precedente è possibile ricavare che[4]:

$$\rho_h = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2ac + 2bd \\ 2ad + 2bd & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Per tale matrice si ha che: $Det(\rho_h) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 = 1$. Inoltre :

$$|z'(y)| = |\rho_h z(y)| = |hz(y)h^{-1}| = |h||z(y)||h^{-1}| = |z(y)|$$

Dunque ρ_h è un'isometria di $\mathbb{R}^3$, e dato che $Det(\rho_h) = 1$, allora ρ_h è una rotazione in $\mathbb{R}^3$, cioè $\rho_h \in SO(3)$.

Abbiamo così costruito una funzione

$$\rho : H_1 \longmapsto SO(3) \tag{3.36}$$

che associa ad ogni $h \in H_1$ la matrice $\rho_{\mathrm{h}} \in SO(3)$. Si può facilmente dimostrare che tale funzione ρ è un omomorfismo fra i due gruppi. In particolare tale omomorfismo è suriettivo ma non iniettivo. Infatti è suriettivo, poichè ogni matrice di $SO(3)$ è scrivibile sotto forma di ρ_h, ma non è iniettivo, poichè gli elementi della matrice ρ_h sono tutte forme quadratiche delle variabili a,b,c,d, e quindi se consideriamo il quaternione unitario $-h = -a - ib - jc - kd$ esso avrà la stessa identica matrice associata di h, ovvero $\rho_h = \rho_{-h}$. Sia ha che il nucleo di ρ è:

$$\ker \rho = \{1, -1\} \tag{3.37}$$

[4]Si sta compiendo un abuso di notazione, indicando la matrice associata all'applicazione come l'applicazione stessa.

Dato che il nucleo di ρ è un sottogruppo invariante di H_1, possiamo considerare il gruppo quoziente:

$$H_{1Q} = H_1/\{1, -1\} \tag{3.38}$$

Gli elementi di tale gruppo, per definizione di gruppo quoziente, sono delle classi di equivalenza. All'interno di tali classi sono posti solo due elementi, che sono un generico elemento $h \in H_1$ e il suo opposto $-h$. Dunque gli elementi di H_{1Q} sono delle coppie $(h, -h)$ con $h \in H_1$. Dato che la nostra ρ associa ad h e $-h$ la stessa matrice di $SO(3)$, possiamo definire la funzione $\tilde{\rho}$ che agisce su H_{1Q}, e che trasforma il singolo elemento $(h, -h)$ nella matrice $\rho_{\mathrm{h}} = \rho_{-\mathrm{h}}$. Tale funzione "eredita" la suriettività di ρ, ma a differenza di quest'ultima è anche iniettiva. Dunque tale funzione è un isomorfismo di gruppi, e quindi si ha che :

$$H_{1\mathrm{Q}} = H_1/\{1, -1\} \simeq SO(3) \tag{3.39}$$

Ma nella sezione 3.2 si era ricavato che: $H_1 \simeq SU(2)$. In particolare avevamo ricavato esplicitamente l'isomorfismo $\phi : H_1 \longmapsto SU(2)$. Dunque l'applicazione:

$$\Omega = \rho \circ \phi^{-1} : SU(2) \longmapsto SO(3) \tag{3.40}$$

è un omomorfismo suriettivo ma non iniettivo fra $SU(2)$ e $SO(3)$, che associa a due matrici di SU(2) la stessa matrice di SO(3). Tale omomorfismo ha ovviamente come nucleo il sottogruppo $\{I, -I\}$ e quindi come per H_1 si avrà che:

$$\tilde{\Omega} : SU(2)/\{I, -I\} \longmapsto SO(3) \tag{3.41}$$

è un isomorfismo fra gruppi, e quindi:

$$SU(2)/\{I, -I\} \simeq SO(3) \tag{3.42}$$

Si noti che, dal punto di vista geometrico, dire che vale la condizione (3.42) o, equivalentemente, la condizione (3.39), vuol dire che $SO(3)$ è equivalente ad S^3 con i punti opposti identificati. Infatti come abbiamo detto già in precedenza l'insieme $H_1/\{1, -1\}$ è un insieme formato dalle coppie $(h, -h)$ con $h \in H_1$. Ma $H_1 \simeq S^3$ e quindi $H_1/\{1, -1\}$ è la sfera S^3 con i punti opposti identificati.

Dunque abbiamo raggiunto il nostro obbiettivo: abbiamo ricavato un omomorfismo Ω fra i gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$. Come già detto tale omomorfismo è un omomorfismo suriettivo che associa a due matrici in $SU(2)$ una sola matrice di $SO(3)$, e dunque non è iniettivo. Ω risulta dunque essere un epimorfismo e non un isomorfismo, e ciò dimostra che $SO(3)$ e $SU(2)$ sono localmente isomorfi, ma globalmente diversi.

Grazie a tale omomorfismo Ω possiamo anche dare un interpretazione a tale isomorfismo locale. Infatti se ci mettiamo in $SU(2)$ e consideriamo un piccolo intorno dell'identità, tutti gli elementi di tale intorno sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di un intorno dell'identità in $SO(3)$. Dunque finchè consideriamo piccoli intorni dell'identità, che fisicamente equivale a dire che stiamo considerando piccole rotazioni, non ci accorgiamo della differenza fra i due gruppi, che ci appaiono per l'appunto identici. Se invece consideriamo intorni dell'identità "abbastanza grandi", che fisicamente equivale a considerare rotazioni "grandi", ci accorgiamo della differenza che c'è fra i due gruppi, poichè gli elementi dell'intorno in $SU(2)$ non sono più in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'intorno in $SO(3)$.

Conclusioni

In conclusione è possibile affermare che i due gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$ sono localmente identici ma globalmente diversi, e tale diversità fra i due gruppi ha un'importante conseguenza fisica. Infatti dato che $SO(3)$ descrive le rotazioni spaziali, ed è collegato con il momento angolare orbitale della particella, mentre $SU(2)$ descrive le rotazioni nello spazio dello spin, ed è collegato con il momento angolare di spin della particella, possiamo concludere che le rotazioni nei due spazi sono diverse. Questo implica che lo spin non può in alcun modo essere ricondotto ad una rotazione spaziale della particella, e dunque che la visione dello spin come momento angolare generato dalla rotazione della particella su sè stessa è errata. Se ne conclude dunque che lo spin non può essere ricollegato a grandi di libertà spaziali, e che quindi risulta essere un grado di libertà aggiuntivo del sistema quantistico.

Appendice A

Alcune Nozioni di Topologia

In questa appendice forniamo una serie di nozioni di topologia generale, che sono indispensabili da conoscere per poter seguire al meglio la lettura del testo.

Iniziamo per prima cosa a definire il concetto di spazio topologico:
Def A.1: Sia X un insieme qualunque, e T una classe di sottoinsiemi di X. T si dice che è una topologia per X se:

1. L'insieme vuoto $\emptyset$ e X appartengono a T

2. Se $\{t_i\}_{i=1}^{\mathrm{N}} \in T$ allora $\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} t_i \in T$
   cioè l'unione di un numero arbitrario di insiemi di T appartiene ancora a T.

3. $x \bigcap y \in T \quad \forall x, y \in T$
   cioè l'intersezione di due insieme appartenenti a T appartiene ancora a T.

La coppia (X, T) prende il nome di spazio topologico.

Per una questione di semplicità d'ora in avanti per indicare uno spazio topologico non scriveremo la coppia (X, T), ma solo l'insieme X, sottintendendo che X sia munito di una topologia T.

Def A.2: Sia X uno spazio topologico. Gli elementi della topologia T vengono detti insieme aperti di X. Invece i complementari degli elementi di T vengono definiti insiemi chiusi.

Definiamo adesso alcune nozioni base di topologia, ovvero le nozioni di intorno, chiusura di un insieme, parte intera e frontiera.

Def A.3: Sia X uno spazio topologico siano U, A, x rispettivamente un sottoinsieme di X, un aperto di X, e un punto di X. Allora il sottoinsieme U si dice che è un intorno del punto x se risulta che:
$x \in A \subseteq U$

Def A.4: Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Si definisce chiusura di S, e si indica usualmente col simbolo $\bar{S}$, il più piccolo insieme chiuso che contiene S. I punti appartenenti a $\bar{S}$ vengono detti aderenti a S.

Se ne deduce che un sottoinsieme di X coincide con la sua chiusura, se e solo se è chiuso.

Def A.5: Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Si definisce parte interna di S, e si indica usualmente con $\dot{S}$, il più grande aperto contenuto in S. I punti appartenenti a $\dot{S}$ si dicono punti interni di S.

Quindi un sottoinsieme di X coincide con la sua parte interna se e solo se è aperto.

Def A.6: Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Si definisce frontiera di S, e si indica usualmente con ∂S, l'insieme:
$\partial S = \bar{S} - \dot{S}$

Definiamo ora un altro concetto fondamentale in topologia, che è il concetto di omeomorfismo fra spazi topologici, e la conseguente definizione di spazi topologici omeomorfi.

Def A.7: Siano X e X' due spazi topologici. Una funzione $f : X \longmapsto X'$ si dice essere un omeomorfismo fra X e X' se tale funzione risulta essere continua, biunivoca e con inversa $f^{-1} : X' \longmapsto X$ continua.
In modo del tutto equivalente un omeomorfismo fra due spazi topologici X e X' si può definire come una funzione che, fissato un sottoinsieme aperto A di X, associata ad esso un sottoinsieme $A' = f(A) \subseteq X'$ che risulta essere un aperto di X'.

Dunque la proprietà fondamentale di un omeomorfismo fra spazi topologici è che tale funzione è una funzione biunivoca che associa a sottoinsiemi aperti dello spazio di partenza sottospazi aperti dello spazio di arrivo. Per tale motivo un omeomorfismo si dice che conserva la topologia.

Def A.8: Due spazi topologici X e X' collegati fra loro da un omeomorfismo, si dicono omeomorfi.

Dal punto di vista topologico due spazi topologici X e X' che risultano essere omeomorfi sono completamente equivalenti, e dunque indistinguibili. Cioè l'omeomorfismo gioca, in topologia, lo stesso identico ruolo che gioca l'isomorfismo di gruppi in teoria dei gruppi.

Dopo aver definito la nozione di omeomorfismo fra spazi topologici, andiamo a definire alcune proprietà degli spazi topologici che risultano essere particolarmente interessanti. In particolare queste proprietà sono la compattezza, la connessione, e la semplice connessione. Tali proprietà risultano essere interessanti poichè rappresentano un esempio di invariante topologico, e cioè di quelle proprietà degli spazi topologici che risultano essere conservate per omeomorfismo. Dunque due spazi topologici per potere essere omeomorfi, devono necessariamente avere tutti gli invarianti topologici in comune.

Def A.9: Sia B un insieme qualunque. Un ricoprimento di B è una famiglia R di insiemi tali che l'insieme B risulta contenuto nell'unione degli elementi di R. Nel caso in cui gli elementi di R fossero in numero finito, il ricoprimento di dice finito.

Def A.10: Sia B un insieme qualunque, e sia R un suo ricoprimento. Allora un sottoinsieme R' di R si dice essere un sottoricoprimento di B se egli stesso risulta essere un ricoprimento di B.

Def A.11: Sia X uno spazio topologico. Tale spazio si dice essere compatto, se ogni suo ricopri-

mento aperto contiene un sottoricoprimento finito.

Def A.12: Sia X uno spazio topologico. X si dice essere connesso se non è possibile rappresentarlo come unione di due o più insieme aperti, non vuoti e disgiunti.

Dal punto di vista intuitivo uno spazio topologico connesso è uno spazio formato da un singolo "pezzo".

Def A.13: Uno spazio topologico X si dice che è connesso per archi se:
$\forall a, b \in X \quad \exists \gamma : \quad \gamma : [0,1] \longmapsto X$ con $\gamma(0) = a \quad \gamma(1) = b$

Cioè uno spazio topologico è connesso per archi se, presa una qualunque coppia di punti dello spazio, esiste una curva che collega i due punti ed è completamente contenuta all'interno dello spazio. Si può dimostrare che se uno spazio topologico è connesso per archi, allora sicuramente sarà connesso. L'inverso non risulta essere sempre vero.

Def A.14: Sia X uno spazio topologico. Se X risulta essere connesso per archi e se ogni curva chiusa interamente contenuta in X risulta essere omotopa ad un punto, e cioè risulta essere deformabile con continuità fino a renderla un punto, allora X si dice che è semplicemente connesso.

Sempre dal punto di vista intuitivo uno spazio topologico risulta essere semplicemente connesso se, oltre ad essere formato da un singolo "pezzo", esso non presenta neanche "buchi".

Appendice B

Varietà Analitiche

Dopo aver introdotto le nozioni base di topologia passiamo ora a definire il concetto di varietà analitica, che è di fondamentale importanza nella trattazione dei gruppi di Lie.

Def B.1: Sia V uno spazio topologico. Consideriamo un sottoinsieme aperto di V che indiciamo con A. Sia inoltre ψ un'applicazione tale per cui: $\psi : A \longmapsto B \subseteq \mathbb{R}^n$ con B aperto di $\mathbb{R}^n$, e con ψ che è biunivoca e bicontinua, cioè è un omeomorfismo. La coppia (A, ψ) prende il nome di carta su V, con dominio A e applicazione coordinata ψ. La funzione ψ^{-1} viene detta parametrizzazione locale.

Una carta su V permette sostanzialmente di introdurre un sistema di coordinate locali sull'aperto A di V. Ovviamente può capitare che sia possibile introdurre sullo spazio topologico V più carte, e che due di queste carte abbiano domini associati che hanno intersezione non nulla. In tal caso abbiamo che i punti appartenenti all'intersezione dei due domini, hanno due diversi sistemi di coordinate ad essi associati. È possibile esprimere il legame fra i due sistemi di coordinate osservando che: se V uno spazio topologico e se (A_1, ψ_1) e (A_2, ψ_2) sono due carte su V tali per cui $A_1 \bigcap A_2 \neq \emptyset$, allora risulta che le funzioni:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(A_1 \bigcap A_2) \longmapsto \psi_2(A_1 \bigcap A_2)$$

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(A_1 \bigcap A_2) \longmapsto \psi_1(A_1 \bigcap A_2)$$

sono omeomorfismi fra aperti di $\mathbb{R}^n$. In particolare si ha che se $x \in A_1 \bigcap A_2$ allora:
$\psi_1(x) = (x_1, ..., x_n)$ dove $(x_1, ..., x_n)$ sono le n coordinate assegnate ad x dalla carta (A_1, ψ_1) e $\psi_2(x) = (y_1, ..., y_n)$ dove $(y_1, ..., y_n)$ sono le n coordinate assegnate ad x dalla carta (A_2, ψ_2). Si ha allora che: $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$ esprime proprio il cambiamento di coordinate fra le coordinate assegnate dalla carta (A_1, ψ_1) e quella assegnate dalla carta (A_2, ψ_2).

Più in generale se ho uno spazio topologico V e una collezione di m carte, i cui domini hanno intersezioni non nulle posso definire le funzioni: $\tau_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1}$ che regolano il cambiamento di coordinate dalla carta j-iesima alla carta i-esima. Tali funzioni appena definite prendono il nome di funzioni di transizione.

Def B.2: Sia V uno spazio topologico. Consideriamo una collezione di carte $(A_i, \psi_i)_{i \in I}$, che identificano gli aperti A_i con degli aperti di $\mathbb{R}^n$, tali per cui risulti che $V = \bigcup_{i \in I} A_i$. Tale collezione prende

il nome di atlante su V, e lo indichiamo con Σ. La coppia (V, Σ) prende il nome di varietà topologica di dimensione n.

Dato che, per definizione di carta, ogni dominio A_i è omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, possiamo dire che una varietà topologica è uno spazio topologico che è localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$, ovvero è localmente identificabile con esso. Come per gli spazi topologici indicheremo le varietà topologiche solo con V, sottintendendo che su V è definito un atlante.

Def B.3: Sia V una varietà topologica di dimensione n. Allora se le funzioni di transizione fra le varie carte che formano l'atlante sono analitiche, V si dice che è una varietà analitica di dimensione n.

Appendice C

I Quaternioni

In quest'ultima appendice introduciamo l'insieme dei quaternioni, che è stato utilizzato nel capitolo 3.

L'insieme dei quaternioni, tipicamente indicato con H, è un insieme formato da elementi del tipo $h = a + ib + jc + kd$, dove a, b, c, d sono numeri reali, mentre i simboli i, j, k soddisfano le seguenti proprietà:

1. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
2. $ij = k \quad ji = -k \quad jk = i \quad kj = -i \quad ki = j \quad ik = -j$

Tipicamente ci si riferisce ad a come la parte reale di h, mentre ci si riferisce ad $ib + jc + kd$ come la parte vettoriale di h.

Si può dimostrare che l'insieme dei quaternioni forma un corpo non commutativo, una volta equipaggiato con le operazioni di somma e moltiplicazione fra quaternioni. In particolare se $h = a + ib + jc + kd$ e $h' = a' + ib' + jc' + kd'$ sono due quaternioni, allora le due operazioni sono definite come:

$$h'' = h + h' = (a + a') + i(b + b') + j(c + c') + k(d + d')$$

$$h'' = hh' = (aa' - bb' - cc' - dd') + i(a'b + ab' + cd' - c'd) +$$
$$+ j(ac' + a'c + db' - bd') + k(a'd + ad' + bc' - cb')$$

L'elemento neutro rispetto alla somma sarà il numero reale 0, mentre quello rispetto alla moltiplicazione è il numero 1. Così come per i numeri complessi si può definire il modulo di un quaternione, come:

$$|h| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

e si può definire il coniugato di un quaternione $h = a + ib + jc + kd$ come:

$$\bar{h} = a - ib - jc - kd$$

e quindi $|h| = \sqrt{h\bar{h}}$.

Concludiamo dicendo che è possibile rappresentare i quaternioni mediante matrici complesse 2×2 utilizzando le matrici di Pauli. Definiamo: $\eta_1 = i\sigma_1 \quad \eta_2 = i\sigma_2 \quad \eta_1 = i\sigma_3$, dove i è l'unità immaginaria, mentre $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono le matrici di Pauli. Per le matrici η_i appena definite si ha che:

$$\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = \eta_1\eta_2\eta_3 = -I$$

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_3 \quad \eta_2\eta_1 = \eta_3 \quad ecc...$$

Confrontando tali relazioni con quelle definite dei simboli i, j, k dei quaternioni possiamo stabile le seguenti corrispondenze:

$$1 \longleftrightarrow I \quad i \longleftrightarrow \eta_3 \quad j \longleftrightarrow \eta_2 \quad k \longleftrightarrow \eta_3$$

In tal modo possiamo scrivere un generico quaternione come:

$$h = a + ib + jc + kd \longleftrightarrow aI + \eta_3 b + \eta_2 c + \eta_1 d = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = M_h$$

Notiamo infine che la matrice M_h associata al quaternione h è una matrice unitaria, e quindi possiamo concludere che vi è una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei quaternioni e l'insieme $U(2)$, cioè l'insieme delle matrici complesse 2×2 unitarie.

Bibliografia

M. Abate, F. Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer-Verlag, 2011.

G. Cicogna, *Metodi matematici della Fisica*, Springer-Verlag, 2a edizione, 2015.

G. Costa, G. Fogli, *Symmetries and Group Theory in Particle Physics*, Springer, 2012.

G. Esposito, G. Marmo, G. Miele, G. Sudarshan, *Advanced Concepts in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2015

M. Manetti, *Topologia*, Springer-Verlag, 2a edizione, 2014.

G. Sartori, *Lezioni di Meccanica Quantistica*, Cortina, 3a edizione, 1998.

J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Springer, second edition, 2018.