

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

Paradosso E.P.R.

Relatori:
Prof. Luigi Rosa

Candidato:
Matteo Ciro Troise
Matr. N85000600

Anno Accademico 2017/2018

"Se dobbiamo continuare con questi maledetti salti quantici, allora mi dispiace di averci avuto qualcosa a che fare."

ERWIN SCHRÖDINGER

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Prefazione	1
1.2	Formulazione generale della M.Q.	2
1.3	Il principio di indeterminazione	4
1.4	Stati entangled	5
2	Paradosso E.P.R.	7
2.1	Realismo locale e completezza	7
2.2	"Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"	9
2.3	Polarizzazione di fotoni	11
2.4	Conseguenze	14
3	Il teorema di Bell	15
3.1	Disuguaglianze	15
3.1.1	Disuguaglianza di Bell	15
3.1.2	La versione di Wigner	18
3.1.3	Disuguaglianza C.H.S.H.	19
3.2	L'esperimento di Aspect	22
4	Conclusioni	25
4.1	Riconciliare causalità e non-località	25
4.2	Variabili nascoste	26
A	Autostati di spin in una direzione generica	29
A.1	Per una particella a spin $1/2$	29
A.2	L'operatore di rotazione	30
A.3	Simmetria per rotazioni dello stato di singoletto	32
A.4	Probabilità e funzioni di correlazione	32
	Bibliografia	35

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Prefazione

Dagli albori della vecchia teoria dei quanti di Bohr alle moderne formulazioni e i suoi successivi sviluppi nella teoria quantistica dei campi, la meccanica quantistica ha perfezionato il suo formalismo in una coerente ed elegante struttura matematica fornendo sempre previsioni che sono in estremo accordo con le verifiche sperimentali, anche relativamente ad effetti prima sconosciuti e inattesi. Nonostante l'indiscussa potenza predittiva che la rende una teoria tra le più precise mai realizzate, ha sempre lasciato innumerevoli perplessità per il radicale mutamento di paradigma che ha portato nel pensiero scientifico, perplessità che riguardano principalmente:

- il carattere intrinsecamente probabilistico delle previsioni prodotte dalla M.Q. che sembra portare ad un abbandono del determinismo tipico della meccanica classica e relativistica;
- il come questo potente formalismo matematico vada interpretato (la corrispondenza tra gli oggetti astratti trattati dalla teoria e la "realtà");
- la riluttanza ad abbandonare principi ritenuti fondamentali e decisamente intuitivi (Es. il "realismo locale" che verrà trattato più avanti) in favore di idee altamente controintuitive (quali il problema della misura e il postulato del collasso del pacchetto d'onda che saranno discussi successivamente);
- se il comportamento descritto dalla teoria quantistica sia soltanto la manifestazione di una teoria più ampia che descriva una "realtà sottostante", in modo da ripristinare una descrizione meno lontana dai nostri schemi di pensiero.

Per dirla con le parole di Feynman:

«I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.»[1]

«Credo di poter dire con sicurezza che nessuno capisce la meccanica quantistica.»

Il carattere controintuitivo della M.Q. ha portato, nel corso degli anni, i fisici che non hanno voluto adeguarsi al dilagante dettame «Shut up and calculate!»[2] ad interrogarsi sul significato di tutto ciò, elaborare nuove interpretazioni (più o meno fantasiose) e a "sfidare" la teoria con paradossi ed esperimenti mentali (*Gedankenexperiment*), mettendo alla prova la sua consistenza e le sue predizioni al vaglio degli esperimenti. Sebbene la M.Q. ne sia sempre uscita, fin'ora, "vittoriosa" e confermata sperimentalmente, questi storici dibattiti, molti dei quali ancora aperti, hanno contribuito a comprendere e mettere in risalto in modo più profondo i suoi aspetti meno evidenti e le caratteristiche fondamentali che una teoria dei fenomeni microscopici, seppure alternativa, deve possedere. In questo lavoro di tesi sarà preso come punto di partenza uno degli "attacchi" più significativi ed interessanti che siano stati sferrati alla M.Q., per la profondità delle idee esposte e per la portata dei risultati successivamente ottenuti nel cercare la risposta, si tratta del noto articolo di Einstein, Podolsky e Rosen[3] in cui viene presentato per la prima volta il cosiddetto "paradosso E.P.R."

Prima sarà però necessario introdurre, a grandi linee, i postulati fondamentali sui quali si fonda la teoria e alcuni strumenti concettuali e formali per comprendere a pieno il problema posto dal paradosso E.P.R. e i successivi sviluppi.

1.2 Formulazione generale della M.Q.

Una buona trattazione sulla costruzione formale della meccanica quantistica si può facilmente reperire sui libri di testo, qui di seguito verrà proposta seguendo, in modo sintetico, la formulazione assiomatica presentata in[4]

Postulato 1. *Ad ogni sistema fisico è associato un opportuno spazio di Hilbert \mathcal{H} e lo stato fisico del sistema è rappresentato da un vettore unitario $|\psi\rangle$ di \mathcal{H} , definito a meno di un fattore di fase. L'evoluzione temporale di tale stato soddisfa l'equazione di Schrödinger:*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.1)$$

Dove \hat{H} è un operatore autoaggiunto ($\hat{H}^\dagger = \hat{H}$), caratteristico del sistema, detto operatore Hamiltoniano.

Conseguentemente l'evoluzione temporale di uno stato è descritta da un operatore unitario detto evolutore temporale:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (1.2)$$

Postulato 2. *Ogni osservabile del sistema fisico è rappresentata da un operatore autoaggiunto \hat{A} il cui spettro α_i (discreto o continuo) rappresenta l'insieme dei possibili valori ottenibili da una misura.*

*Sia $|\lambda, \alpha\rangle$ un autostato relativo all'autovalore α , dove con λ si è indicata l'eventuale degenerazione dell'autospazio, allora la probabilità di ottenere il valore α da una misura sullo stato $|\psi\rangle$ è data da:**

$$\hat{A} |\lambda, \alpha\rangle = \alpha |\lambda, \alpha\rangle \implies P(\hat{A} = \alpha) \equiv \sum_{\lambda} |\langle \lambda, \alpha | \psi \rangle|^2 \quad (1.3)$$

Da cui si può facilmente vedere che il valor medio $\langle \hat{A} \rangle$ di un osservabile è definito da $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$.

Postulato 3 (del collasso). *Nell'istante immediatamente successivo ad un processo di misura, sullo stato $|\psi\rangle$, di un osservabile \hat{A} che ha fornito il valore α il sistema è descritto dal vettore di stato:*

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{\lambda} |\langle \lambda, \alpha | \psi \rangle|^2}} \sum_{\lambda} \langle \lambda, \alpha | \psi \rangle |\lambda, \alpha\rangle \quad (1.4)$$

Dove λ rappresenta ancora l'eventuale degenerazione residua, dunque, in altre parole, l'effetto di una misura è quello di proiettare un vettore di stato nell'autospazio relativo all'autovalore misurato.

Postulato 4. *Lo spazio di Hilbert associato ad un sistema di N particelle è $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{3N})$, alle posizioni x_1, \dots, x_N si associano gli operatori $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ tali che:*

$$\hat{x}_i f(x_1, \dots, x_N) = x_i f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.5)$$

e ai momenti canonicamente coniugati p_1, \dots, p_N si associano gli operatori $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N$ tali che soddisfino le parentesi di commutazione canoniche:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \delta_{ij} i\hbar \quad (1.6)$$

Postulato 5. *Ad una qualsiasi osservabile classica $F(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N)$, sviluppabile in serie di potenze, è associato l'operatore autoaggiunto:*

$$F(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N) \longrightarrow \hat{F}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N) \quad (1.7)$$

*La notazione $\langle * | * \rangle$ indica il prodotto hermitiano.

Postulato 6. L'operatore Hamiltoniano \hat{H} della (1.1), per un sistema di N particelle, ha la forma:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \hat{U}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N) \quad (1.8)$$

dove la forma del potenziale \hat{U} per molti sistemi corrisponde a quella del potenziale classico, in questi casi, dunque, \hat{H} è l'operatore corrispondente all'osservabile energia del sistema.

1.3 Il principio di indeterminazione

Come si è visto, il formalismo appena descritto, coinvolge unicamente le probabilità di ottenere una data misura e, per la (1.4), l'atto di misurare modifica lo stato del sistema. Questo induce una restrizione sulle grandezze che si possono misurare simultaneamente, infatti, poiché una misura sul sistema agisce come un proiettore su di un autostato dell'osservabile, sarà possibile conoscere contemporaneamente solo osservabili i cui operatori posseggono una base comune di autovettori dello spazio di Hilbert \mathcal{H} . Tale condizione si verifica, per due generiche osservabili \hat{A} e \hat{B} se e solo se

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0 \quad (1.9)$$

Dunque, in un generico stato $|\psi\rangle$, non possono essere ben definite simultaneamente tutte le osservabili, in particolare non possono esserlo le coordinate con gli impulsi coniugati ($[x, p] = i\hbar$). In generale esiste una limitazione alla dispersione statistica delle misure, di osservabili non commutanti, su sistemi preparati identicamente e quindi descritti dallo stesso ket di stato $|\psi\rangle$, infatti, calcolando il prodotto delle varianze delle distribuzioni statistiche di due osservabili su di un generico stato:

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2(\Delta B)^2 &= \left\langle \psi \left| \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right| \psi \right\rangle \left\langle \psi \left| \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \right)^2 \right| \psi \right\rangle = \\ &= \left\| \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right) \psi \right\|^2 \left\| \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \right) \psi \right\|^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

e quindi per la *disuguaglianza di Schwartz*

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left| \left\langle \psi \left| \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right) \left(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \right) \right| \psi \right\rangle \right|^2 \quad (1.11)$$

separando la componente *hermitiana* da quella *anti-hermitiana* si ottiene

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2} \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \right)^2 + \frac{1}{4} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|^2 \quad (1.12)$$

osservando che al secondo membro della (1.12) il primo termine è sempre positivo o al più nullo, si ottiene la generalizzazione del noto principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (1.13)$$

che prescrive, appunto, un limite inferiore al prodotto delle dispersioni statistiche di osservabili incompatibili (non commutanti) in un qualsiasi stato.

Pertanto, avendo visto che non è possibile conoscere, con precisione arbitraria, più osservabili incompatibili relative ad uno stato, si definisce *osservazione massima* del sistema una misura simultanea di un set completo di operatori, cioè un insieme massimale di operatori indipendenti e compatibili (commutatore nullo), che fornisce la descrizione del sistema più completa che la M.Q. è in grado di fornire (i.e. identifica univocamente il ket di stato $|\psi\rangle$).

1.4 Stati entangled

Un sistema quantistico composto da N sottosistemi ciascuno associato allo spazio di Hilbert \mathcal{H}_i sarà descritto da uno spazio di Hilbert prodotto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$.

Si supponga, per comodità di notazione, un sistema composto da due particelle, A e B. Se inizialmente le due particelle sono sufficientemente lontane da non avere alcun tipo di interazione allora l'Hamiltoniano del sistema sarà semplicemente la somma di due Hamiltoniani di singola particella $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B$ ciascuno dei quali agente sul rispettivo spazio di Hilbert e un generico stato sarà dato dal prodotto tensore degli stati di singola particella:

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \quad (1.14)$$

Se adesso si suppone di eseguire una misura dell'osservabile \hat{A} relativa alla particella A ottenendo il valore α allora lo stato iniziale sarà proiettato sull'autospazio di autovalore α dell'operatore $\hat{A} \otimes \mathbb{1}$:

$$|\psi\rangle = |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \xrightarrow{\text{Dopo la misura di } \hat{A}} |\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\phi_B\rangle \quad (1.15)$$

misurando successivamente un osservabile \hat{B} relativa alla particella B e ottenendo il valore β si avrà l'autostato dell'operatore $\mathbb{1} \otimes \hat{B}$:

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\phi_B\rangle \xrightarrow{\text{Dopo la misura di } \hat{B}} |\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle \quad (1.16)$$

in oltre, per la (1.3), la probabilità di ottenere il valore β dalla misura è data da

$$\left| \sum_{\lambda} \langle \beta | \otimes \langle \lambda | |\psi\rangle \right|^2 = \left| \sum_{\lambda} \langle \beta | \otimes \langle \lambda | |\alpha\rangle \otimes |\phi_B\rangle \right|^2 = |\langle \beta | \phi_B \rangle|^2 \quad (1.17)$$

quindi totalmente indipendente dalla misura dell'osservabile \hat{A} e dallo stato della particella A. Tali stati sono detti *separabili*.

Lo stato più generale possibile però non è (1.14) in quanto non tutti i vettori di $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ sono fattorizzabili nel prodotto di un vettore di \mathcal{H}_A e uno di \mathcal{H}_B . Inoltre, in un sistema in cui le particelle sono interagenti, l'*operatore Hamiltoniano* sarà del tipo $\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B + \hat{H}_{AB}$ dove \hat{H}_{AB} rappresenta la parte di interazione tra le particelle responsabile di "mescolare" gli stati mentre evolvono nel tempo.

Definite $|\lambda_i\rangle$ e $|\sigma_j\rangle$ due basi ortonormali di autostati rispettivamente degli operatori \hat{A} e \hat{B} di \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B il generico vettore di \hat{H} si scrive:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} (|\lambda_i\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) \quad (1.18)$$

Si vede subito che non è sempre possibile fattorizzare un tale stato nel prodotto di due stati di singola particella, inoltre la caratteristica peculiare di questi stati si intuisce subito provando a ricalcolare la probabilità di ottenere σ_k in una misura di \hat{B} dopo aver prima misurato \hat{A} . Infatti una misura di \hat{A} con esito $\lambda_{k'}$ farà collassare lo stato (1.18) in

$$\begin{aligned} (|\lambda_{k'}\rangle\langle\lambda_{k'}| \otimes \mathbb{1}) |\psi\rangle &= (|\lambda_{k'}\rangle\langle\lambda_{k'}| \otimes \mathbb{1}) \sum_{i,j} c_{ij} (|\lambda_i\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) = \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ik'} c_{ij} (|\lambda_i\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) = \sum_j c_{k'j} (|\lambda_{k'}\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) \end{aligned} \quad (1.19)$$

A questo punto, per la (1.3), la probabilità di ottenere σ_k da un'osservazione di \hat{B} è data da

$$\sum_i |(\langle\sigma_k| \otimes \langle\lambda_i|) |\psi\rangle|^2 = \sum_i \left| (\langle\sigma_k| \otimes \langle\lambda_i|) \sum_j c_{k'j} (|\lambda_{k'}\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) \right|^2 = |c_{k'k}|^2 \quad (1.20)$$

quindi, come è evidente dalla presenza del pedice k' , la distribuzione di probabilità dell'osservabile \hat{B} della particella B dipende dall'esito della misura di \hat{A} sulla particella A. Per le caratteristiche appena viste, questi stati chiamati appunto *entangled* (intrecciati), saranno ampiamente utilizzati nel seguito e verrà evidenziata la "paradossalità" del loro comportamento.

Capitolo 2

Paradosso E.P.R.

In M.Q. ogni misura comporta una scelta: se si sceglie di misurare un'osservabile allora si sta scegliendo di non misurarne qualcun'altra; è proprio questa scelta, però, che garantisce la consistenza interna della teoria. A questo punto viene da chiedersi se la descrizione quantistica di uno stato del sistema sia completa, se fornisca cioè tutte le possibili informazioni relative al singolo stato, oppure sia possibile considerare variabili ausiliari (le cosiddette *variabili nascoste*) al fine di specificare univocamente lo stato di un sistema e discriminare stati fisici descritti dalla teoria quantistica con lo stesso ket di stato $|\psi\rangle$. È proprio questa la domanda che si pongono Einstein, Podolsky e Rosen nel loro articolo[3]. In questo capitolo si seguirà l'evoluzione concettuale delle idee che hanno portato al paradosso cominciando, dalla sez. 2.2, proprio con l'analisi dell'articolo originale di E.P.R.[3]; nella sez. 2.1 verranno anticipati e formalizzati concetti fondamentali alla comprensione del problema quali quello di *realismo locale* e *completezza*, in sez. 2.3 sarà invece presentata la riformulazione fatta da Bohm del paradosso che servirà a schematizzare meglio il problema e a porlo in un quadro concettuale più vicino a quelli che sono poi stati i successivi sviluppi, quali il teorema di Bell e gli esperimenti di Aspect[9], trattati nel capitolo 3. Si trarranno in sez. 2.4 le conclusioni a cui porta il paradosso che potrà in effetti riguardarsi come un vero e proprio teorema.

2.1 Realismo locale e completezza

Con la locuzione "realismo locale" si intende l'assunto che le proprietà fisiche di un sistema siano possedute da esso indipendentemente dall'osservatore (realismo) e che sistemi spazialmente separati non possano influenzarsi istantaneamente (località). Nel dettaglio l'ipotesi di realismo rappresenta l'idea che le quantità osservabili abbiano significato e siano ontologicamente definite anche quando queste

non vengano misurate, come piaceva dire ad Einstein: «la Luna è lassù anche quando nessuno la osserva». Tale tipo di realismo è detto *determinatezza controfattuale* (CFD). Alternativamente è possibile definire un'ulteriore proprietà di indipendenza dall'osservatore che, a differenza della CFD, riguarda invece gli esiti delle misure. Se infatti l'esito di una misura di \hat{A} non dipende dalla particolare misura effettuata (i.e. dalla scelta del set di osservabili compatibili misurate simultaneamente: \hat{A}, \hat{B} o \hat{A}, \hat{C} con $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{C}] = 0$ ma $[\hat{B}, \hat{C}] \neq 0$), dall'intero apparato di misura e quindi in ultimo dall'osservatore si dirà che la teoria è *non contestuale*; nel caso contrario, come quello della M.Q., si dirà che è *contestuale*.

Nell'articolo E.P.R.[3] viene immediatamente data la definizione di *elemento di realtà* come una qualunque quantità fisica della quale, senza perturbare il sistema in esame, sia possibile prevederne, in linea di principio, il valore con precisione arbitraria. Pertanto, come appena visto, un *elemento di realtà* è una proprietà fisica del sistema che abbia *determinatezza controfattuale*. A partire da quest'ultimo concetto si definisce la *completezza* di una teoria: la capacità di associare ad ogni *elemento di realtà* un oggetto del formalismo, cioè la possibilità di trattare e descrivere organicamente tutti gli *elementi di realtà* del sistema.

Per quel che concerne invece la località, questa è un'ipotesi implicita alla base del paradosso E.P.R. e che appare irrinunciabile ai tre autori. Il senso comune lascia intuire che una qualsiasi interazione deve essere mediata tra un punto e un altro dello spazio da un mediatore con una velocità di propagazione finita. Inoltre, conseguenza della relatività e delle trasformazioni di Lorentz, una propagazione a velocità maggiori della velocità della luce c implicherebbe, apparentemente, una violazione del *principio di causalità* in quanto osservatori diversi potrebbero non concordare sulla relazione di causa-effetto tra due eventi con una separazione di tipo *spazio*. La rinuncia al principio di località ha, invero, conseguenze ancora più rilevanti sull'intero impianto fondazionale del modo di procedere della fisica dovute all'impossibilità di riuscire a definire e ricostruire sperimentalmente sistemi isolati:

«...l'indipendenza relativa di oggetti molto lontani nello spazio (A e B): un'influenza esterna su A non ha un'influenza diretta su B; ciò è noto come il Principio di Azione Locale [...] Se questo assioma venisse ad essere completamente abolito, l'idea dell'esistenza di sistemi quasi-chiusi, e perciò la postulazione delle leggi che possono essere verificate empiricamente nel senso accettato, diverrebbe impossibile.» (A. Einstein)[6]

2.2 "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"

La domanda che si pongono gli autori[3] è chiara: può la M.Q. considerarsi una teoria completa? Ogni elemento della realtà fisica ha una controparte che lo descrive nella teoria? Supponiamo che la risposta sia affermativa, allora ci si accorge immediatamente che per le (1.4),(1.6) e (1.13) posizione e impulso non possono essere simultaneamente *elementi di realtà* in quanto uno stato quantistico $|\psi\rangle$ che possiede una posizione ben definita ha una totale indeterminazione sull'impulso e viceversa, infatti sempre dalla (1.6) e dalla (1.13) si ha $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, allora nell'ipotesi che $|\psi\rangle$ fornisca una descrizione completa del sistema si deve necessariamente ammettere che al più uno tra posizione ed impulso possa essere un *elemento di realtà* in una data misura. Assumendo anche il principio di località si giunge però ad un assurdo ed è questo il cuore vero e proprio del paradosso.

Si supponga di prendere in esame un sistema di due particelle A e B di cui è nota la distanza $(x_B - x_A) = L$ e con impulso totale nullo $(p_A + p_B) = 0$. Si noti che uno stato di questo tipo può essere realizzato in quanto $[\hat{x}_B - \hat{x}_A, \hat{p}_A + \hat{p}_B] = 0$; la determinazione di un simile stato può essere effettuata mediante un dispositivo a doppia fenditura, del tipo rappresentato in figura 2.1, sul quale vengono fatte incidere coppie di particelle di impulso noto. Anche se nel passaggio attraverso le fenditure non è più possibile conoscere i singoli impulsi delle particelle si può però calcolare la variazione dell'impulso totale, misurando l'impulso trasferito al dispositivo, e così conoscere quest'ultimo e la distanza relativa tra le particelle. Per come è stato preparato lo stato allora una misura sulla particella A della posizione \hat{x}_A fornirà automaticamente la posizione $x_B = x_A + L$ della particella B , discorso analogo per l'impulso. Si è dunque formato uno *stato entangled*. Lo stato appena descritto può essere rappresentato da una funzione d'onda

$$|\psi\rangle \equiv \psi(x_A, x_B) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}(x_B - x_A - L)} dp \quad (2.1)$$

se da una misura di posizione sulla particella A si ottiene \bar{x}_A , l'autofunzione relativa è la delta di Dirac $\delta(x_A - \bar{x}_A)$ quindi per la (1.4) lo stato complessivo del sistema verrà proiettato nello stato

$$\psi(x_A, x_B) = \delta(x_A - \bar{x}_A) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{p}{\hbar}[x_B - (\bar{x}_A + L)]} dp = \delta(x_A - \bar{x}_A) \delta(x_B - \bar{x}_A - L) \quad (2.2)$$

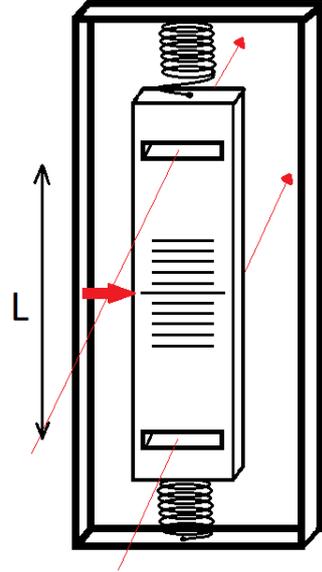


Figura 2.1

in cui lo stato della particella B

$$\phi(x_B) = \delta(x_B - \bar{x}_A - L) \quad (2.3)$$

è l'autofunzione dell'operatore \hat{x}_B di autovalore $\bar{x}_B = \bar{x}_A + L$, quindi una misura di posizione sulla particella B restituirà il valore $\bar{x}_A + L$ con probabilità 1. Dalle premesse, perciò, si deduce che **la posizione della particella B è un elemento di realtà**. D'altra parte, se sullo stato (2.1) si misura, invece, il valore \bar{p}_A per l'impulso \hat{p}_A della particella A lo stato risultante è

$$\psi(x_A, x_B) = e^{i\frac{\bar{p}_A}{\hbar}(x_A - x_B - L)} \quad (2.4)$$

che è *separabile*, con lo stato relativo alla particella B uguale a

$$\phi(x_B) = e^{-i\frac{\bar{p}_A}{\hbar}x_B} \quad (2.5)$$

autostato dell'operatore $\hat{p}_B = -i\hbar \partial/\partial x_B$ di autovalore $\bar{p}_B = -\bar{p}_A$. Dunque, in questo caso, si può affermare che **l'impulso della particella B è un elemento di realtà**.

Invocando allora il principio di località si ha che, essendo le particelle A e B spazialmente separate, una misura sulla prima non può avere effetti immediati sulla seconda che non viene in alcun modo perturbata, per questo il suo stato deve essere indipendente dalla misura effettuata su A ; allora, se la M.Q. è completa le (2.3)(2.5) devono essere descrizioni equivalenti dello stesso stato e **posizione e impulso di B devono essere simultaneamente elementi di realtà** andando contro la premessa che se la M.Q. fornisce una descrizione completa del sistema allora posizione è impulso non possono avere realtà simultanea, da qui scaturisce il paradosso.

Generalizzando il ragionamento appena seguito per due qualsiasi osservabili incompatibili \hat{X} , \hat{Y} ; siano $|\lambda_i\rangle$ e $|\sigma_i\rangle$ due basi ortonormali di autovettori rispettivamente di \hat{X} e \hat{Y} . Scrivendo uno stato *entangled* generico per il sistema delle due particelle, questo potrà scriversi in una qualunque delle due basi

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}(|\lambda_i\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) = \sum_{i,j} c'_{ij}(|\sigma_i\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) \quad (2.6)$$

misurando l'autovalore λ_k di \hat{X} per la particella A , dalla (1.19), considerando lo stato scritto nella base di \hat{X} si ha

$$|\psi\rangle = \sum_j c_{kj}(|\lambda_k\rangle \otimes |\lambda_j\rangle) \quad (2.7)$$

che è *separabile* in

$$|\phi_A\rangle = |\lambda_k\rangle \quad e \quad |\phi_B\rangle = \sum_j c_{kj} |\lambda_j\rangle \quad (2.8)$$

Se invece si ottiene l'autovalore $\sigma_{k'}$ per la misura di \hat{Y} sempre su A , riguardando lo stato stavolta scritto nella di $|\sigma_j\rangle$, questo collasserà in

$$|\psi\rangle = \sum_j c'_{k'j} (|\sigma_{k'}\rangle \otimes |\sigma_j\rangle) \quad (2.9)$$

prodotto tensore degli stati

$$|\phi_A\rangle = |\sigma_{k'}\rangle \quad e \quad |\phi_B\rangle = \sum_j c'_{k'j} |\sigma_j\rangle \quad (2.10)$$

A questo punto, sempre negando una, come definita da Einstein, «spaventosa azione a distanza», gli stati (2.8), (2.10), relativamente "all'indisturbata" particella B devono descrivere, per la completezza della teoria, in modo identico tutti gli *elementi di realtà* anche se, in generale, sono funzioni d'onda diverse come nell'esempio precedente.

2.3 Polarizzazione di fotoni

Si può riformulare il paradosso E.P.R. in una forma escogitata da Bohm[7], concettualmente più semplice e più vicina alla realizzazione sperimentale di Aspect[9] trattata nel capitolo 3, sostituendo alle variabili posizione-impulso le componenti dello spin su due diversi assi che, come è noto in M.Q. non commutano. Si prenda, ad esempio, una coppia di particelle fermioniche di spin 1/2 indistinguibili, che viaggiano in direzioni opposte, ottenute da un sistema inizialmente a spin totale nullo mediante un'interazione che non lo modifichi. Sapendo che la proiezione dello spin in questo caso può assumere solo due possibili valori ($+\hbar/2$, $-\hbar/2$), lo stato complessivo con $\hat{S}^2 = 0$ nella base di \hat{s}_x , tenendo conto del postulato di simmetrizzazione di Pauli, si scrive

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_x\rangle \otimes |\downarrow_x\rangle - |\downarrow_x\rangle \otimes |\uparrow_x\rangle) \quad (2.11)$$

se, una volta che si sono allontanate le particelle, si effettua una misura di spin sulla prima, con un campo magnetico non uniforme orientato lungo la direzione x (apparato di Stern-Gerlach in fig. 2.2), ci saranno due possibili esiti: se si misura $+\hbar/2$ lo stato della prima particella collasserà in $|\uparrow_x\rangle$ e quello della seconda sarà conseguentemente $|\downarrow_x\rangle$; se si misura invece $-\hbar/2$ si avrà la situazione inversa. In ogni caso sarà nota la proiezione dello spin per la seconda particella senza perturbarla, che potrà dunque essere definita un *elemento di realtà*. Analogamente sarebbe però stato possibile, ruotando semplicemente l'apparato Stern-Gerlach,

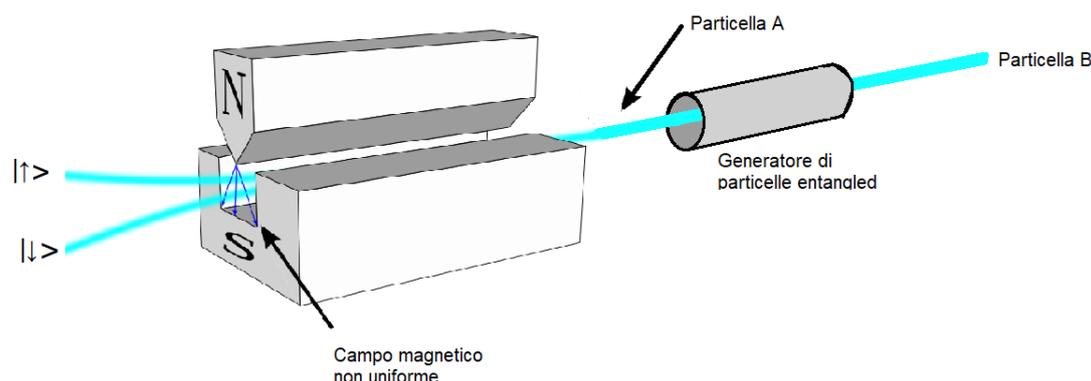


Figura 2.2: Apparato per misure di spin di Stern-Gerlach. Immagine rielaborata da https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment.

fare la stessa misura per la componente z dello spin scrivendo lo stato (2.11) nella base di \hat{s}_z :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle \otimes |\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle \otimes |\uparrow_z\rangle) \quad (2.12)$$

permettendo di affermare che anche la proiezione dello spin su z è un *elemento di realtà*, contemporaneamente alla proiezione su x se si ammette l'indipendenza dello stato della seconda particella dalle misure effettuate sulla prima. Si vede dunque che anche questa versione del paradosso porta alle medesime conseguenze di E.P.R.[3].

È noto dall'ottica classica che investendo con un fascio di luce due filtri polarizzatori lineari, il primo che funge da polarizzatore e il secondo da analizzatore (fig. 2.3), l'intensità del fascio in uscita ha una dipendenza funzionale dall'angolo $\theta - \theta'$, formato tra gli assi di trasmissione dei due filtri, del tipo $I = I_0 \cos^2(\theta - \theta')$ (**legge di Malus**). Se adesso si immagina di ridurre l'intensità fino ad emettere un singolo fotone per volta, allora i fotoni che attraversano il primo polarizzatore dovrebbero avere una probabilità quantistica di attraversare l'analizzatore pari proprio a $\cos^2(\theta - \theta')$. Questo risultato si può in effetti ritrovare nell'ambito della teoria quantistica*.

Costruendo lo spazio di Hilbert relativo alla polarizzazione di un fotone ci si accorge che è generato da due soli vettori indipendenti che rappresentano stati polarizzati lungo assi tra loro ortogonali ($|\epsilon_1\rangle$ e $|\epsilon_2\rangle$); infatti misurandola, facendo attraversare al fotone un filtro polarizzatore con asse di trasmissione parallelo alla direzione ϵ_1 , i possibili esiti sono:

- il fotone passa, dunque lo stato collapsa in $|\epsilon_1\rangle$.

*In appendice A si trova un risultato analogo per lo spin dove, come vedremo, si avrà $\theta/2$ al posto di θ .

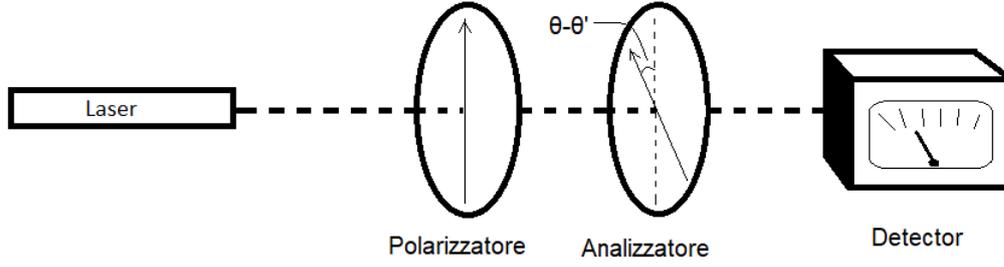


Figura 2.3: Due filtri polarizzatori con gli assi passanti disallineati.

- il fotone non passa, dunque lo stato collassa in $|\epsilon_2\rangle$.

Quindi una generica polarizzazione sarà

$$|\psi\rangle = c_1 |\epsilon_1\rangle + c_2 |\epsilon_2\rangle \quad (2.13)$$

si potrà quindi ripetere, per la polarizzazione, lo stesso ragionamento precedentemente esposto per lo spin. Ma si supponga adesso che due sperimentatori, Alice e Bob, effettuino misure di polarizzazione su un sistema composto da una coppia di fotoni *entangled*, spazialmente separati, nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle + |\epsilon_2\rangle \otimes |\epsilon_2\rangle) \quad (2.14)$$

cioè con polarizzazioni parallele; questo potrà scriversi, per simmetria di rotazione, ugualmente in una base relativa ad altri due assi ortogonali ϵ'_1, ϵ'_2 :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\epsilon'_1\rangle \otimes |\epsilon'_1\rangle + |\epsilon'_2\rangle \otimes |\epsilon'_2\rangle) \quad (2.15)$$

Se adesso Alice orienta il proprio filtro polarizzatore nella direzione ϵ_1 e Bob invece nella direzione ϵ'_1 entrambi avranno $1/2$ di probabilità che il fotone passi e $1/2$ che non passi. Si ipotizzi, inoltre, che Alice riveli il fotone, che quindi ha attraversato il suo filtro, allora lo stato complessivo del sistema diverrà

$$|\psi\rangle = |\epsilon_1\rangle \otimes |\epsilon_1\rangle \quad (2.16)$$

da cui si deduce che anche il fotone di Bob sarà polarizzato $|\epsilon_1\rangle$ e dunque, per quanto visto prima, avrà una probabilità di attraversare il filtro di Bob non più uguale ad $1/2$ bensì uguale a $\cos^2(\theta)$ dove θ è l'angolo formato dagli assi ϵ_1 e ϵ'_1 . Chiaramente c'è da dire che Alice avrà anche $1/2$ di probabilità che il fotone non venga rivelato e in tal caso la probabilità che Bob lo riveli diverrà $\sin^2(\theta)$, quindi la probabilità complessiva che il fotone attraversi il filtro di Bob continuerà ad essere $\frac{1}{2}\sin^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos^2(\theta) = 1/2$, ma, come vedremo nel capitolo 3, si potrà dimostrare che una tale correlazione non è spiegabile semplicemente in termini statistici conservando l'ipotesi di *località*.

2.4 Conseguenze

Gli esempi precedenti, anche se in diversi modi, giungono tutti alle stesse "paradossali" conclusioni che possono in effetti essere formalizzate, come fa notare Ballentine[8], in un vero e proprio teorema, il teorema E.P.R., il cui contenuto, in sostanza, si può enunciare dicendo che:

Le due seguenti affermazioni sono tra loro incompatibili:

1. Il vettore di stato della M.Q. fornisce una descrizione *completa* ed esaustiva del sistema individuale (**completezza**);
2. Le reali condizioni fisiche di oggetti spazialmente separati sono indipendenti (**località**);

Einstein dava per scontato che le interazioni fisiche dovessero essere locali, ecco che questo implicava allora l'incompletezza della teoria quantistica, incompletezza che poteva essere colmata[†] solo con l'introduzione di ignote *variabili nascoste* che specificassero l'informazione di cui la M.Q. deficitava. Già nell'ultima sezione però, con l'esperimento illustrato sulla misura della polarizzazione di Alice e Bob, sorge il sospetto che la non-località sia forse intrinseca nelle previsioni della M.Q., questo sarà infatti il punto di partenza del prossimo capitolo. Nel 1954 Pauli scrisse a Born dicendo: «Uno non dovrebbe preoccuparsi del problema di se esista qualcosa di cui non si può sapere l'esistenza, come la vecchia questione di quanti angeli siano in grado di sedersi sulla punta di un ago. Ultimamente mi sembra che le domande di Einstein siano tutte di questo tipo.»[10]. Come vedremo Pauli si sbagliava di grosso, le conseguenze del paradosso E.P.R. sono sperimentabili ed è proprio dall'aver posto questa domanda che è stata evidenziata una delle caratteristiche più sconvolgenti della meccanica quantistica.

[†]In realtà Einstein riteneva che per rendere completa la teoria bisognasse cambiare "i concetti fondamentali dell'intera struttura".

Capitolo 3

Il teorema di Bell

Il grande merito di J.S.Bell è stato quello di mostrare che il problema della completezza sollevato da Einstein non è semplicemente una questione di natura epistemologica, riguardante la visione filosofica e personale della natura, ma un'affermazione matematicamente formalizzabile, quantificabile e suscettibile di sperimentazione; almeno per quel che concerne ipotetici completamenti locali. La forza del teorema di Bell[11] sta proprio nel servirsi di pochissime semplici ipotesi, come quella di *realismo locale*, in modo tale da riuscire a fare affermazioni che sono indipendenti dalla particolare struttura che dovrebbero avere ipotetiche e sconosciute *variabili nascoste*, purché siano locali. Si potrebbe dire che Bell ci abbia mostrato come verificare "se un albero che nessuno vede sia davvero caduto o meno".

Nella sez. 3.1 si esporrà il teorema di Bell[11] nella sua forma originale e alcune relative generalizzazioni, in sez. 3.2 si illustrerà una delle configurazioni sperimentali utilizzate da A.Aspect per vagliare le previsioni della meccanica quantistica ed ipotetiche teorie locali come prescritto dal teorema.

3.1 Disuguaglianze

3.1.1 Disuguaglianza di Bell

Partendo dalla formulazione del paradosso E.P.R. ad opera di Bohm vista in sez. 2.3 si prenda in esame un processo che generi una coppia di particelle *entangled* a spin totale nullo ($\hat{S}^2 = 0$) e si ipotizzi, supponendo incompleta la M.Q., l'esistenza di un insieme di variabili λ sconosciute che completi e specifici univocamente gli stati delle particelle. A questo punto lo stato, complementato dalla specificazione di tali parametri nascosti, deve già contenere in se l'informazione relativa agli esiti di una qualunque misura su una delle due particelle, in quanto, sotto l'ipotesi di

località, un'osservazione sulla prima particella, spazialmente separata dalla seconda, permetterebbe di prevedere il risultato di una misura sulla seconda senza perturbarla. Ne deriva che tale informazione deve essere già contenuta nella descrizione completa λ dello stato della seconda particella. Con due apparati Stern-Gerlach (del tipo in fig. 2.2) orientati lungo due diverse direzioni \vec{a} e \vec{b} si eseguano, sulla coppia di particelle, misure delle differenti componenti dello spin* ($\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$) per la particella A e ($\vec{\sigma} \cdot \vec{b}$) per la particella B con ± 1 come possibili risultati della misura, indicati con α e β e, per le ipotesi precedenti, completamente determinati dalla componente di spin che si va a misurare e dal valore ignoto delle variabili λ :

$$\alpha \equiv \alpha(\vec{a}, \lambda) = \pm 1 \quad \beta \equiv \beta(\vec{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (3.1)$$

Per la condizione di spin totale nullo si ha che α e β lungo la stessa direzione ($\vec{a} = \vec{b}$) sono perfettamente anticorrelate:

$$\beta(\vec{b}, \lambda) = -\alpha(\vec{b}, \lambda) \quad (3.2)$$

Si indichi con $\rho(\lambda)$ la distribuzione di probabilità normalizzata delle *variabili nascoste* λ associata al processo che genera le particelle e si calcoli il valore atteso del prodotto di α e β , detto funzione di correlazione:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\vec{a}, \lambda) \beta(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (3.3)$$

dove Λ è il dominio su cui spaziano le *variabili nascoste*. Per la (3.2) la correlazione si può scrivere

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = - \int_{\Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\vec{a}, \lambda) \alpha(\vec{b}, \lambda) d\lambda \quad (3.4)$$

Introducendo una terza direzione \vec{c} vale allora l'uguaglianza

$$\begin{aligned} & C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c}) = \\ &= - \int_{\Lambda} \rho(\lambda) \left[\alpha(\vec{a}, \lambda) \alpha(\vec{b}, \lambda) - \alpha(\vec{a}, \lambda) \alpha(\vec{c}, \lambda) \right] d\lambda = \\ &= \int_{\Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\vec{a}, \lambda) \alpha(\vec{b}, \lambda) \left[\frac{\alpha(\vec{c}, \lambda)}{\alpha(\vec{b}, \lambda)} - 1 \right] d\lambda = \\ &= \int_{\Lambda} \rho(\lambda) \alpha(\vec{a}, \lambda) \alpha(\vec{b}, \lambda) \left[\alpha(\vec{b}, \lambda) \alpha(\vec{c}, \lambda) - 1 \right] d\lambda \end{aligned} \quad (3.5)$$

*Per comodità di notazione si utilizzeranno le σ in luogo dello spin. Ricordando che $\hat{s} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$, le sue proiezioni assumeranno valori ± 1 invece di $\pm \hbar/2$.

dove si è utilizzato il fatto che $\frac{\alpha(\vec{c}, \lambda)}{\alpha(\vec{b}, \lambda)} = \alpha(\vec{b}, \lambda)\alpha(\vec{c}, \lambda)$ potendo α valere solo ± 1 ed inoltre, per questo stesso motivo, si può scrivere

$$\left| C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int_{\Lambda} \rho(\lambda) \left[1 - \alpha(\vec{b}, \lambda)\alpha(\vec{c}, \lambda) \right] d\lambda \quad (3.6)$$

sfruttando la normalizzazione di $\rho(\lambda)$ e osservando che il secondo termine a destra della disuguaglianza è proprio la funzione di correlazione $C(\vec{b}, \vec{c})$ si ottiene

$$\left| C(\vec{a}, \vec{b}) - C(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 1 + C(\vec{b}, \vec{c}) \quad (3.7)$$

che rappresenta la prima disequazione ottenuta da Bell[11] e, come si può notare, coinvolge unicamente quantità misurabili e indipendenti dalla particolare struttura delle *variabili nascoste locali* che si considerano dunque, in una qualunque teoria *locale*, le funzioni di correlazione devono soddisfarla.

Calcolando, nell'ambito della teoria quantistica, i membri della disuguaglianza appena mostrata ci si accorge che non può essere soddisfatta per qualsiasi terna di direzioni \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , infatti, come ricavato in appendice A, la funzione di correlazione per due generiche direzioni vale:

$$C(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (3.8)$$

e sostituendo nella (3.7):

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} \right| \leq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (3.9)$$

che chiaramente non può essere sempre soddisfatta. Si prenda ad esempio la terna di vettori complanari in un riferimento $\mathbf{x-y-z}$:

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

che porterà all'assurdo risultato $\sqrt{2} \leq 1$.

Quindi questo risultato può generalizzarsi nel seguente **teorema di Bell**[11]:

Nessuna teoria a variabili nascoste locali può riprodurre esattamente le previsioni statistiche della meccanica quantistica.

3.1.2 La versione di Wigner

Una derivazione alternativa del teorema di Bell, più facilmente comprensibile e che meglio lascia intravedere l'idea di fondo, è dovuta a Wigner e sarà qui esposta come presentata da Sakurai[12].

Analogamente al caso precedente, si consideri lo stato di singoletto ($\hat{S}_{TOT}^2 = 0$) per due particelle *entangled* e due osservatori, Alice e Bob, che possono compiere misure delle proiezioni di spin lungo tre differenti assi \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Si osserva che, nello stato di singoletto, quando i due sperimentatori fanno misure lungo lo stesso asse, qualunque esso sia, trovano sempre valori di spin opposti tra loro. Ipotizzando che l'informazione sulla misura effettuata dal primo osservatore non influenzi quella effettuata dal secondo per il principio di località, bisogna necessariamente immaginare che le due particelle trasportino con se, dal momento in cui smettono di interagire, l'informazione sull'anticorrelazione; hanno cioè un set prestabilito di valori, tra loro opposti, per ogni possibile scelta dell'osservatore sulla direzione di misura, anche se l'informazione accessibile sarà solo uno a scelta di questi valori essendo osservabili incompatibili.

Si rappresenti con una terna il set di valori prestabiliti per una misura rispettivamente lungo l'asse \mathbf{a} , l'asse \mathbf{b} e l'asse \mathbf{c} e con P_i la probabilità che il processo che genera le particelle *entangled* dia la particolare terna. È facile vedere che le possibili terne con le relative probabilità saranno:

Probabilità	Particella A	Particella B
P_1	(↑, ↑, ↑)	(↓, ↓, ↓)
P_2	(↑, ↑, ↓)	(↓, ↓, ↑)
P_3	(↑, ↓, ↑)	(↓, ↑, ↓)
P_4	(↑, ↓, ↓)	(↓, ↑, ↑)
P_5	(↓, ↑, ↑)	(↑, ↓, ↓)
P_6	(↓, ↑, ↓)	(↑, ↓, ↑)
P_7	(↓, ↓, ↑)	(↑, ↑, ↓)
P_8	(↓, ↓, ↓)	(↑, ↑, ↑)

Indicando con $P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{b}})$ la probabilità congiunta che Alice ottenga spin-up in una misura lungo \mathbf{a} e Bob ottenga spin-up in una misura lungo \mathbf{b} si vede facilmente che

$$\begin{aligned}
 P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{b}}) &= P_3 + P_4 \\
 P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{c}}) &= P_2 + P_4 \\
 P(\uparrow_{\mathbf{c}}, \uparrow_{\mathbf{b}}) &= P_3 + P_7
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

ed essendo $P_i \geq 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$P_3 + P_4 \leq P_2 + (P_4 + P_3) + P_7
 \tag{3.12}$$

cioè

$$P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{b}}) \leq P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{c}}) + P(\uparrow_{\mathbf{c}}, \uparrow_{\mathbf{b}}) \quad (3.13)$$

che rappresenta una *disuguaglianza di Bell* per questo esperimento, vincolo a cui deve sottostare una qualunque teoria *locale*.

La M.Q. però, come si vede in appendice A, prevede che le precedenti probabilità congiunte valgano

$$P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_{\mathbf{ab}}}{2}\right) \quad (3.14)$$

dove $\theta_{\mathbf{ab}}$ è l'angolo formato dalle direzioni \mathbf{a} e \mathbf{b} . La disuguaglianza (3.13) allora diventa:

$$\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_{\mathbf{ab}}}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_{\mathbf{ac}}}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_{\mathbf{bc}}}{2}\right) \quad (3.15)$$

che non è soddisfatta per direzioni qualsiasi, infatti scegliendo $\theta_{\mathbf{ab}} = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_{\mathbf{ac}} = \theta_{\mathbf{bc}} = \theta_{\mathbf{ab}}/2$ si riottiene la contraddizione $\sqrt{2} \leq 1$.

3.1.3 Disuguaglianza C.H.S.H.

Un'importante generalizzazione della disuguaglianza di Bell (3.7) è dovuta a Clauser, Horne, Shimony e Holt[13]. Si propone qui nella versione ancora più generale ad opera di Bell[14], seguendo la semplice derivazione mostrata in[5]. I vantaggi della disuguaglianza CHSH, rispetto alla (3.7), risiedono nel fatto che si presta decisamente meglio a verifica sperimentale in quanto non utilizza l'ipotesi di anticorrelazione (3.2). Questa, infatti, nella pratica risulta irrealizzabile per problemi anche legati all'efficienza dei rivelatori. La disuguaglianza CHSH, inoltre, estende la sua validità ad osservabili qualsiasi.

Immaginando due sperimentatori spazialmente separati, Alice e Bob, si supponga che Alice possa fare misure delle due osservabili A e A' mentre Bob misura B e B' . Sempre partendo dall'assunzione di località, una qualunque correlazione tra le misure di Alice e Bob su coppie di particelle può essere spiegata solamente ipotizzando che queste trasportino un set di parametri ignoti λ che contenga tutte le informazioni, non necessariamente deterministiche ma anche solo probabilistiche, per ogni osservabile. Se a questo punto si fissano le λ , per l'indipendenza tra le misure dei due osservatori, le probabilità che Alice misuri il valore α per A e Bob misuri β per B devono necessariamente essere indipendenti:

$$P(A = \alpha \cap B = \beta | \lambda) \equiv P(\alpha, \beta | A, B, \lambda) = P(\alpha | A, \lambda) P(\beta | B, \lambda) \quad (3.16)$$

si può allora ricavare la probabilità $P(A = \alpha \cap B = \beta)$ mediando su tutti i possibili set di parametri λ :

$$P(\alpha, \beta | A, B) = \int_{\Lambda} \rho(\lambda) P(\alpha, \beta | A, B, \lambda) d\lambda \quad (3.17)$$

con $\rho(\lambda)$ la distribuzione di probabilità delle variabili λ e Λ il supporto della distribuzione. Si definisce la correlazione tra due osservabili come

$$\begin{aligned} C(A, B) &= \int_{\Lambda} \left[\rho(\lambda) \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j P(\alpha_i, \beta_j | A, B, \lambda) \right] d\lambda = \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j P(\alpha_i, \beta_j | A, B) \end{aligned} \quad (3.18)$$

con α_i e β_j possibili esiti delle misure, che senza perdere di generalità possiamo porre $-1 \leq \alpha_i, \beta_j \leq 1$.

Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} S(A, A', B, B', \lambda) &= \sum_{i,j} \alpha_i P(\alpha_i | A, \lambda) [\beta_j P(\beta_j | B, \lambda) + \beta'_j P(\beta'_j | B', \lambda)] + \\ &\quad + \sum_{i,j} \alpha'_i P(\alpha'_i | A', \lambda) [\beta_j P(\beta_j | B, \lambda) - \beta'_j P(\beta'_j | B', \lambda)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

che, ponendo i valori medi condizionati

$$E_A = \sum_i \alpha_i P(\alpha_i | A, \lambda), \quad E_{A'} = \sum_i \alpha'_i P(\alpha'_i | A', \lambda),$$

$$E_B = \sum_j \beta_j P(\beta_j | B, \lambda), \quad E_{B'} = \sum_j \beta'_j P(\beta'_j | B', \lambda)$$

diventa

$$S = E_A [E_B + E_{B'}] + E_{A'} [E_B - E_{B'}] \quad (3.20)$$

Poiché si è supposto che i possibili valori assunti dalle osservabili sono compresi tra -1 e 1 allora per i valori medi varrà $-1 \leq E_A, E_{A'}, E_B, E_{B'} \leq 1$. È facile far vedere che in questo dominio la funzione S è limitata infatti, cercando punti stazionari interni al dominio, si vede subito che

$$\frac{\partial S}{\partial E_A} = 0 \implies E'_B = -E_B \quad (3.21)$$

e su tale insieme la restrizione della funzione vale $2E_{A'}E_B$ e quindi $|2E_{A'}E_B| \leq 2$. Sulla frontiera ($|E_A| = |E_{B'}| = |E_B| = |E_{B'}| = 0$), invece, sviluppando il quadrato di S si vede che $S^2 = 4$ da cui si deduce che in tutto il dominio $-1 \leq E_A, E_{A'}, E_B, E_{B'} \leq 1$ la funzione è limitata da

$$-2 \leq S(A, A', B, B', \lambda) \leq 2 \quad (3.22)$$

ricordando la forma di S è mediando su λ si ottiene

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda &\leq \int_{\Lambda} \left[\sum_{i,j} \alpha_i P(\alpha_i|A, \lambda) [\beta_j P(\beta_j|B, \lambda) + \beta'_j P(\beta'_j|B', \lambda)] \right] d\lambda + \\ &+ \int_{\Lambda} \left[\sum_{i,j} \alpha'_i P(\alpha'_i|A', \lambda) [\beta_j P(\beta_j|B, \lambda) - \beta'_j P(\beta'_j|B', \lambda)] \right] d\lambda \leq 2 \int_{\Lambda} \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.23)$$

che ricordando la normalizzazione di $\rho(\lambda)$ e le (3.16), (3.18) diventa:

$$|C(A, B) + C(A, B') + C(A', B) - C(A', B')| \leq 2 \quad (3.24)$$

che rappresenta la **disuguaglianza CHSH** cercata.

Tornando all'esperimento su fotoni *entangled* della sez. 2.3 verifichiamo che in qualche caso la M.Q. viola la disuguaglianza (3.24). Lo stato del sistema composto dai due fotoni è

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\epsilon_A\rangle \otimes |\epsilon_A\rangle + |\epsilon_A^\perp\rangle \otimes |\epsilon_A^\perp\rangle) \quad (3.25)$$

con ϵ_A e ϵ_A^\perp assi tra loro ortogonali. Le osservabili A, A' e B, B' rappresentano, in questo caso, rispettivamente la polarizzazione del fotone di Alice lungo gli assi $\epsilon_A, \epsilon_{A'}$ e la polarizzazione del fotone di Bob lungo gli assi $\epsilon_B, \epsilon_{B'}$. La correlazione quantistica è data da

$$\begin{aligned} C_Q(A, B) &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j P_Q(\alpha_i, \beta_j|A, B) = \\ &= P_Q(1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) - P_Q(-1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) - P_Q(1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B) + P_Q(-1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Per calcolare le probabilità P_Q si pensi che ad esempio Alice, dalla sua misura lungo ϵ_A , osservi il fotone attraversare il filtro polarizzatore ($\alpha = 1$), allora lo stato complessivo del sistema collasserà in

$$|\psi\rangle = |\epsilon_A\rangle \otimes |\epsilon_A\rangle \quad (3.27)$$

e come visto in sez. 2.3 la probabilità che attraversi il polarizzatore di Bob, orientato lungo ϵ_B ($\beta = 1$) vale $\cos^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B})$, mentre quella che non attraversi il polarizzatore ($\beta = -1$) vale $\sin^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B})$. Poiché la probabilità di Alice di osservare $\alpha = 1$ era $1/2$ si ha allora

$$P_Q(1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B}) \quad (3.28)$$

$$P_Q(1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B}) \quad (3.29)$$

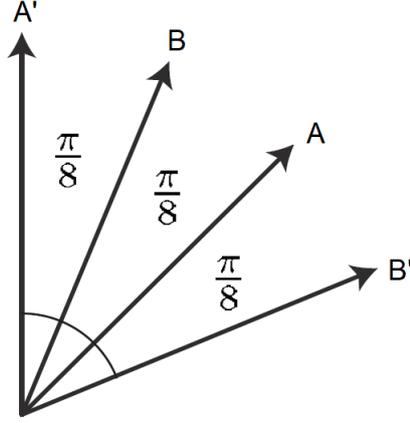


Figura 3.1: Orientazione degli assi passanti dei polarizzatori per avere una violazione della disuguaglianza CHSH.

Si noti che le probabilità trovate sono indipendenti da chi dei due osservatori effettui prima la misura, infatti, per la simmetria di rotazione dello stato (3.25) si sarebbe potuto scrivere in maniera identica nella base di autostati per B e seguire lo stesso ragionamento, inoltre, sempre per simmetria, analoghe considerazioni valgono per $P_Q(-1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B) = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B})$ e $P_Q(-1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B})$. Sostituendo nella (3.26)

$$C_Q(A, B) = \cos^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B}) - \sin^2(\theta_{\epsilon_A \epsilon_B}) = \cos(2\theta_{\epsilon_A \epsilon_B}) \quad (3.30)$$

Scegliendo quattro direzioni tali che $\theta_{\epsilon_A \epsilon_B} = \theta_{\epsilon_A \epsilon_{B'}} = \theta_{\epsilon_{A'} \epsilon_B} = \frac{\pi}{8}$, come in fig. 3.1, si trova subito una violazione della (3.24):

$$C_Q(A, B) + C_Q(A, B') + C_Q(A', B) - C_Q(A', B') = 2\sqrt{2} \quad (3.31)$$

Ancora una volta le previsioni della M.Q. ne rivelano il suo carattere non locale, non resta che testare sperimentalmente se tali previsioni risultano corrette.

3.2 L'esperimento di Aspect

Tra le prime verifiche sperimentali a confermare una violazione significativa delle disuguaglianze di Bell ci furono quelle eseguite tra il 1981 e il 1982 da A.Aspect e il suo team con tre famosi esperimenti[9][15][16]. Sarà discusso più nel dettaglio solo il secondo che fa uso della disuguaglianza CHSH mostrata nella sezione precedente[†].

Dal punto di vista concettuale l'esperimento in questione è completamente analogo all'esperimento di Alice e Bob con i fotoni *entangled* visto precedentemente.

[†]Gli altri due esperimenti, il primo e il terzo, fanno uso della disuguaglianza CH74[17]

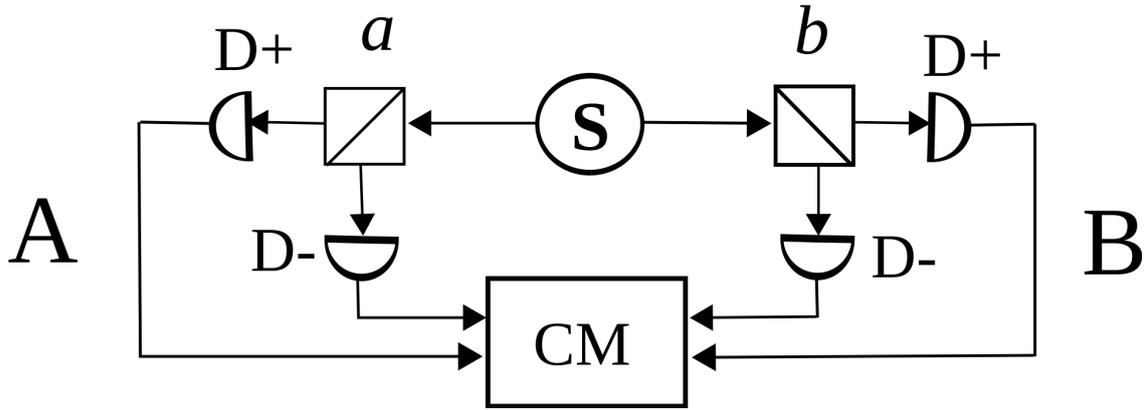


Figura 3.3: Apparato sperimentale dell'esperimento di Aspect a due canali. https://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality

Nella pratica l'apparato sperimentale sfrutta il decadimento a cascata $4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1 \rightarrow 4s^2\ ^1S_0$ del ^{40}Ca , in fig. 3.2, come sorgente di fotoni *entangled*, ottenuto irradiando calcio atomico con due fasci laser di lunghezze d'onda $\lambda_1 = 406\text{ nm}$ e $\lambda_2 = 581\text{ nm}$. Questo tipo di decadimento non modifica il momento angolare dell'atomo generando quindi una coppia di fotoni, nel visibile, con polarizzazione parallela, cioè nello stato (3.25). I fasci di fotoni *entangled* vengono poi collimati verso dei beam-splitter

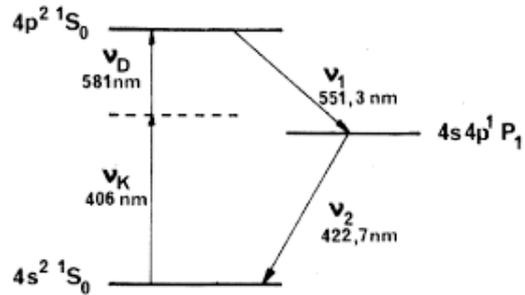


Figura 3.2: Decadimento a cascata del Calcio.

ad orientazione variabile che trasmettono i fotoni polarizzati lungo l'asse passante e riflettono quelli polarizzati ortogonalmente (fig. 3.3), il vantaggio di questa configurazione a "due canali", diversamente dagli altri due esperimenti[9][15] di Aspect che erano "mono-canale", è la possibilità di conteggiare la correlazione per entrambi i possibili stati di polarizzazione ortogonali, riducendo la possibilità di introdurre errori sul conteggio delle correlazioni dovuti all'efficienza dei rivelatori. L'orientazione di ogni beam-splitter commuta tra due angoli in modo pseudo-casuale. I fasci di fotoni riflessi e trasmessi vengono poi rivelati da fotomoltiplicatori che inviano il segnale ad un contatore di coincidenze. I valori sperimentali delle funzioni di correlazione saranno misurati come:

$$C(A, B) = \frac{N(1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) - N(-1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) - N(1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B) + N(-1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B)}{N(1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) + N(-1, 1|\epsilon_A, \epsilon_B) + N(1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B) + N(-1, -1|\epsilon_A, \epsilon_B)}$$

dove con N si è indicato il numero di coincidenze conteggiate.

L'esperimento misurò, per gli angoli a cui è prevista la massima violazione ($\theta_{\epsilon_{\mathbf{A}\epsilon_{\mathbf{B}}} = \theta_{\epsilon_{\mathbf{A}\epsilon_{\mathbf{B}'}} = \theta_{\epsilon_{\mathbf{A}'\epsilon_{\mathbf{B}}} = \frac{\pi}{8}}$), un valore di

$$S_{SHCHC} \equiv (A, B) + C(A, B') + C(A', B) - C(A', B') \quad (3.32)$$

pari a $S_{SHCH} = 2,697 \pm 0,015$ che viola consistentemente la disuguaglianza CHSH, precisamente 83% della massima violazione teorica prevista dalla M.Q. (Eq. (3.31)) in condizioni di polarizzatori ideali e massima efficienza dei rivelatori. Nel caso reale bisogna invece considerare in luogo della (3.30)

$$C(A, B) = F \frac{(T_A^{\parallel} - R_A^{\perp})(T_B^{\parallel} - R_B^{\perp})}{(T_A^{\parallel} + R_A^{\perp})(T_B^{\parallel} + R_B^{\perp})} \cos(2\theta_{\epsilon_{\mathbf{A}\epsilon_{\mathbf{B}}}) \quad (3.33)$$

in cui $F < 1$ è l'efficienza dei rivelatori e T e R rappresentano la riflettanza e la trasmittanza dei beam-splitter. Tenendo conto di queste correzioni per l'apparato utilizzato il valore previsto dalla M.Q. era stimato a $S_{SHCH} = 2,70 \pm 0,05$ che è in perfetto accordo con quanto misurato.

La principale critica dell'esperimento riguarda il fatto che la scelta sull'orientazione dei beam-splitter, seppure pseudocasuale, non viene effettuata durante il volo dei fotoni come prescritto dall'esperimento mentale di Bohm per giustificare pienamente l'ipotesi di *località*; condizione poi realizzata nel terzo esperimento di Aspect[9] che, essendo mono-canale, in luogo dei beam-splitter fa uso di filtri polarizzatori la cui direzione dell'asse passante viene selezionata, durante il volo della coppia *entangled*, tramite un apposito dispositivo commutatore.

Questi esperimenti, insieme a più recenti esperimenti che confermano violazioni delle disuguaglianze di oltre 30 sigma, uniti al teorema di Bell costringono, a meno di *loopholes* (scappatoie che invalidano o mettono in discussione la significatività degli esperimenti) non ancora individuati, ad abbandonare definitivamente l'idea di *realismo locale*.

Capitolo 4

Conclusioni

4.1 Riconciliare causalità e non-località

Per quanto detto fin'ora è chiaro che né la meccanica quantistica né una qualunque sua estensione possa essere formulata in termini di una teoria *locale*; una rinuncia estremamente significativa per i fisici, al punto che lo stesso Newton, padre della legge di gravitazione universale che prevede proprio l'esistenza di un'azione a distanza, affermava: «*Per me l'idea che un corpo possa agire su un altro a distanza, attraverso il vuoto, senza il tramite di qualcos'altro che renda possibile la trasmissione dell'azione e della forza dall'uno all'altro, è una tale assurdità che sono convinto che nessun uomo con adeguate capacità di riflettere su problemi scientifici la potrà mai accettare.*».

Spesso si sente dire che, in questa storica disputa, Bohr abbia prevalso su Einstein, e in effetti il teorema di Bell preclude la possibilità del completamento locale tanto auspicato dallo stesso Einstein, ma è fondamentale sottolineare l'importante ruolo che ha avuto il paradosso E.P.R. nel definire i vincoli a cui una qualunque teoria a variabili nascoste deve sottostare. Non di meno, una volta esplicitata l'intrinseca *non-località* della M.Q. si è reso necessario indagare la sua compatibilità con l'altrettanto solida teoria della relatività speciale, questa infatti contrasta con la possibilità di trasmettere segnali superluminali che andrebbero a scardinare uno dei capisaldi del pensiero scientifico, il principio di *causalità*. Le istantanee azioni a distanza, infatti, non si accordano con le trasformazioni di Lorentz in quanto in tal caso prevederebbero che per osservatori differenti potrebbe invertirsi la relazione di causa-effetto tra due eventi spazialmente separati. Questa possibilità è finemente aggirata dalle correlazioni *non-locali* dei sistemi *entangled*, a guardia del principio di *causalità* sono stati formalmente ricavati in letteratura teoremi quali il teorema di *no-cloning* e di *no-signaling* che assicurano l'impossibilità di trasmettere segnali sfruttando le correlazioni dei sistemi *entangled*. A tal proposito

si noti che in un esperimento mentale di tipo EPR-Bohm è possibile mostrare che non c'è alcun modo per ricavare informazione sulle misure effettuate nella parte del sistema spazialmente separata dallo sperimentatore solo facendo misure sulla parte accessibile allo stesso, come mostrato precedentemente le medie statistiche sulle misure di ciascun osservatore sono indipendenti dalle scelte dell'altro, la *non-località* si manifesta solo quando si vanno a valutare le correlazioni e dunque quando si confrontano le misure di entrambi gli osservatori, che saranno perciò impossibilitati a comunicarsi qualsiasi cosa senza utilizzare anche un canale di informazione *classico*. In altre parole nei sistemi *entangled* non si manifesta una vera e propria relazione di causa-effetto, si possono osservare soltanto correlazioni statistiche.

Il modo in cui la M.Q. preserva la *causalità* pur manifestando, anche in modi differenti da quelli trattati, esplicite caratteristiche non locali, costrette a soddisfare determinati vincoli fondamentali per la coerenza della teoria, è così raffinato che induce quasi a pensare che la sua intera essenza sia racchiusa in questa necessità. Aharonov[5] suggerisce che, come la teoria della relatività possa essere interamente dedotta ipotizzando i seguenti semplici principi di immediato significato fisico:

- Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La velocità della luce nel vuoto è c .

si potrebbe sospettare che la M.Q. possa discendere dalla necessità di soddisfare i seguenti due principi:

- Ogni interazione sottostà al principio di *causalità relativistica*.
- Alcune interazioni fisiche sono *non-locali*.

Di sicuro attualmente la M.Q. è l'unica teoria in grado di far coesistere coerentemente questi due principi, sufficienti ad implicare il principio di indeterminazione, purtroppo però è altrettanto sicuro che da soli non bastano a dedurre l'intera struttura formale.

4.2 Variabili nascoste

È importante, in ultimo, precisare che la violazione sperimentale delle disuguaglianze di Bell, pur minando alla base i presupposti del paradosso E.P.R. invalidando l'ipotesi di *località*, dimostra unicamente che l'argomento di Einstein non può provare l'incompletezza della M.Q., senza nulla asserire però sulla sua completezza. In effetti si hanno numerosi esempi di modelli a *variabili nascoste non-locali* ben formulati e consistenti con tutte le previsioni della M.Q., di questi sicuramente il

più famoso e meglio formulato è quello di De Broglie-Bohm[18] che rappresenta la prova della possibilità di completare la teoria semplicemente rinunciando al principio di *località*.

Risultati successivi al teorema di Bell dovuti a Bell[20], Kochen e Specker[19] pongono ulteriori vincoli alle teorie che riproducono le previsioni della M.Q. sollevando il problema della *contestualità* accennato nella sez. 2.1, dimostrando sotto semplici ipotesi l'impossibilità di formulare una teoria a *variabili nascoste* che sia *non-contestuale*.

Appendice A

Autostati di spin in una direzione generica

In quest'appendice ci si propone di ricavare le probabilità e le funzioni di correlazione per misure di spin, lungo direzioni generiche, su sistemi di due particelle *entangled*; risultati che sono stati ampiamente utilizzati nella trattazione delle disuguaglianze di Bell in esperimenti di tipo EPR-Bohm.

A.1 Per una particella a spin 1/2

Si vuole trovare l'espressione di uno stato qualsiasi, scritto nella base degli autostati $|\uparrow_z\rangle$ e $|\downarrow_z\rangle$ di \hat{s}_z , come combinazione lineare degli autostati di spin in una generica direzione.

L'operatore associato alla componente di spin lungo la direzione \mathbf{n} è dato da:

$$\hat{s}_{\mathbf{n}} \equiv \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma}_x \cdot n_x + \hat{\sigma}_y \cdot n_y + \hat{\sigma}_z \cdot n_z) \quad (\text{A.1})$$

dove, nella base di \hat{s}_z , gli operatori $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ sono rappresentati dalle matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\hat{s}_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

data la normalizzazione di \mathbf{n} si può scrivere $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ con θ e ϕ gli angoli polare e azimutale che identificano la direzione nel riferimento $\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{z}$ come in fig. A.1. Allora la matrice associata ad $\hat{s}_{\mathbf{n}}$ diventa:

$$\hat{s}_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Ponendo il problema agli autovalori per $\hat{s}_{\mathbf{n}}$ e risolvendo il polinomio caratteristico si ricava immediatamente che gli autovalori sono ovviamente $\pm \frac{\hbar}{2}$. Per trovare lo stato $|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle = \alpha |\uparrow_z\rangle + \beta |\downarrow_z\rangle$ non resta che risolvere il sistema lineare

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è $[N \sin \theta, N(1 - \cos \theta) e^{i\phi}]$; imponendo la normalizzazione si ottiene lo stato

$$|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_z\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |\downarrow_z\rangle \quad (\text{A.4})$$

Analogamente per lo stato $|\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle$ bisogna risolvere il sistema lineare

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$|\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_z\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} |\downarrow_z\rangle \quad (\text{A.5})$$

Se adesso si vogliono scrivere gli stati $|\uparrow_z\rangle$ e $|\downarrow_z\rangle$ nella base appena trovata allora vale:

$$\begin{aligned} |\uparrow_z\rangle &= |\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle \langle \uparrow_{\mathbf{n}} | \uparrow_z \rangle + |\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle \langle \downarrow_{\mathbf{n}} | \uparrow_z \rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle \\ |\downarrow_z\rangle &= |\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle \langle \uparrow_{\mathbf{n}} | \downarrow_z \rangle + |\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle \langle \downarrow_{\mathbf{n}} | \downarrow_z \rangle = e^{-i\phi} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

A.2 L'operatore di rotazione

Il risultato appena ottenuto si può ritrovare semplicemente ruotando attivamente lo stato $|\uparrow_z\rangle$, infatti, il generico stato $|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle$ si ottiene effettuando due rotazioni successive rispettivamente attorno all'asse \mathbf{y} e all'asse \mathbf{z} come in fig. A.2. Nello spazio di Hilbert bidimensionale dello spin 1/2 i generatori delle rotazioni attorno agli assi coordinati sono rappresentati proprio dalle matrici di Pauli, dunque l'operatore per una rotazione finita di angolo θ attorno all'asse \mathbf{y} si otterrà esponenziando il generatore

$$\hat{R}_y = \exp\left(-\frac{i\hat{\sigma}_y\theta}{2}\right) = \left[\mathbb{1} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\hat{\sigma}_y\theta}{2}\right)^2 + \dots \right] - i \left[\frac{\hat{\sigma}_y\theta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\hat{\sigma}_y\theta}{2}\right)^3 + \dots \right]$$

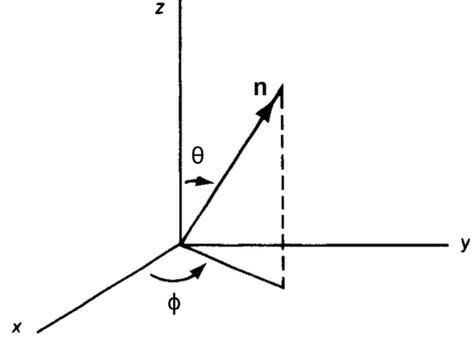


Figura A.1

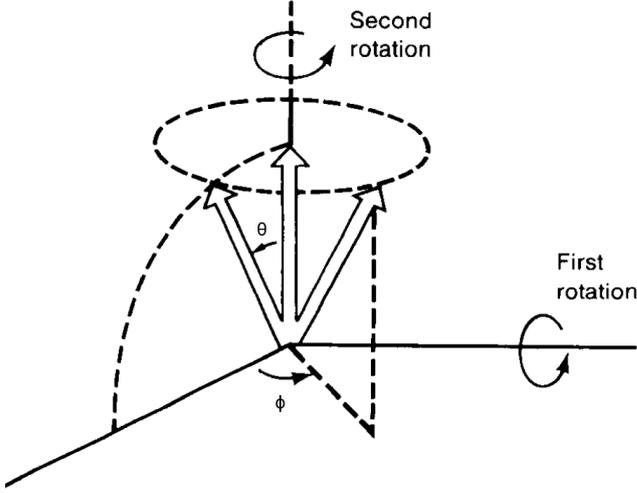


Figura A.2: Composizione di due rotazioni successive attorno agli assi y e z .

quando si ricorda che per le proprietà delle matrici di Pauli $\hat{\sigma}_i^2 = \mathbb{1}$ allora si ottiene la più semplice

$$\hat{R}_y = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\hat{\sigma}_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Analogamente l'operatore che descrive una rotazione di angolo ϕ attorno all'asse z sarà

$$\hat{R}_z = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i\hat{\sigma}_z \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Applicando in successione i due operatori di rotazione sullo stato $|\uparrow_z\rangle$ si trova lo stato $|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle$ cercato:

$$\begin{aligned} |\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle &= \hat{R}_z \hat{R}_y |\uparrow_z\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

da cui

$$|\uparrow_{\mathbf{n}}\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2} |\uparrow_z\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} |\uparrow_z\rangle \right) \quad (\text{A.10})$$

in perfetto accordo con la (A.4) a meno di un fattore di fase globale. Imponendo le condizioni di ortonormalizzazione ($\langle\uparrow_{\mathbf{n}}|\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle = 0$), ($\langle\downarrow_{\mathbf{n}}|\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle = 1$) si riottiene anche la (A.5) per $|\downarrow_{\mathbf{n}}\rangle$.

A.3 Simmetria per rotazioni dello stato di singoletto

Sfruttando le (A.6) è ora facile far vedere che, come fisicamente ci si aspetta, lo stato di singoletto di due particelle *entangled* è effettivamente invariante sotto rotazioni. Se infatti si scrive lo stato nella base di \hat{s}_z :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle \otimes |\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle \otimes |\uparrow_z\rangle) \quad (\text{A.11})$$

e si sostituisce agli autostati di \hat{s}_z la loro espressione in termini di autostati di \hat{s}_n si ottiene

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \left[\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_n\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow_n\rangle \right) \otimes \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_n\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow_n\rangle \right) \right] + \\ &- \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \left[\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_n\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow_n\rangle \right) \otimes \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow_n\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow_n\rangle \right) \right] = \\ &= -\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} (|\uparrow_n\rangle \otimes |\downarrow_n\rangle - |\downarrow_n\rangle \otimes |\uparrow_n\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

la cui forma differisce dalla (A.11) solo per un fattore di fase.

A.4 Probabilità e funzioni di correlazione

Si vogliono calcolare le probabilità di ottenere determinate combinazioni da misure di spin, lungo direzioni diverse, su particelle *entangled* nello stato di singoletto. Siano \mathbf{a} e \mathbf{b} direzioni nel piano $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ ($\phi = 0$) lungo le quali si misura lo spin rispettivamente della particella A e della particella B . Riscrivendo lo stato di singoletto (A.11) in termini di autostati di \hat{s}_a per A e \hat{s}_b per B sostituendo le (A.6) si ottiene

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) |\uparrow_a\rangle \otimes |\uparrow_b\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) |\uparrow_a\rangle \otimes |\downarrow_b\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) |\downarrow_a\rangle \otimes |\uparrow_b\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) |\downarrow_a\rangle \otimes |\downarrow_b\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

e le probabilità di ogni combinazione si ottengono calcolando i moduli quadri dei coefficienti

$$\begin{aligned} P(\uparrow_a, \uparrow_b) &= P(\downarrow_a, \downarrow_b) = \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) \\ P(\uparrow_a, \downarrow_b) &= P(\downarrow_a, \uparrow_b) = \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\theta_b - \theta_a}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La funzione di correlazione per gli operatori $(\hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \mathbb{1})$ e $(\mathbb{1} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}})$ si ottiene calcolando il valor medio

$$\begin{aligned} C(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \langle \psi | \hat{\sigma}_{\mathbf{a}} \otimes \hat{\sigma}_{\mathbf{b}} | \psi \rangle = \\ &= \sin^2\left(\frac{\theta_{\mathbf{b}} - \theta_{\mathbf{a}}}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta_{\mathbf{b}} - \theta_{\mathbf{a}}}{2}\right) = -\cos(\theta_{\mathbf{b}} - \theta_{\mathbf{a}}) \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Analogamente si può facilmente mostrare, con calcoli più laboriosi, che i risultati appena ottenuti valgono anche per direzioni qualsiasi dove invece di $\theta_{\mathbf{b}} - \theta_{\mathbf{a}}$ bisogna usare l'angolo $\theta_{\mathbf{ab}}$ formato tra i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} . Si ricaverà a titolo d'esempio la probabilità $P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{b}})$:

$$\begin{aligned} P(\uparrow_{\mathbf{a}}, \uparrow_{\mathbf{b}}) &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\theta_{\mathbf{a}}}{2} \sin \frac{\theta_{\mathbf{b}}}{2} e^{-i\phi_{\mathbf{b}}} - \sin \frac{\theta_{\mathbf{a}}}{2} \cos \frac{\theta_{\mathbf{b}}}{2} e^{-i\phi_{\mathbf{a}}} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos^2 \frac{\theta_{\mathbf{a}}}{2} \sin^2 \frac{\theta_{\mathbf{b}}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{\mathbf{a}}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{\mathbf{b}}}{2} - 2 \sin \frac{\theta_{\mathbf{a}}}{2} \cos \frac{\theta_{\mathbf{a}}}{2} \sin \frac{\theta_{\mathbf{b}}}{2} \cos \frac{\theta_{\mathbf{b}}}{2} \cos(\phi_{\mathbf{a}} - \phi_{\mathbf{b}}) \right] = \\ &= \frac{1}{4} [1 - \cos \theta_{\mathbf{a}} \cos \theta_{\mathbf{b}} - \sin \theta_{\mathbf{a}} \cos \phi_{\mathbf{a}} \sin \theta_{\mathbf{b}} \cos \phi_{\mathbf{b}} - \sin \theta_{\mathbf{a}} \sin \phi_{\mathbf{a}} \sin \theta_{\mathbf{b}} \sin \phi_{\mathbf{b}}] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_{\mathbf{ab}}) \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla normalizzazione dei vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Bibliografia

- [1] R.P.Feynman, *The Character of Physical Law* (Cambridge, MA: M.I.T. Press), 1965, p. 129.
- [2] N.D.Mermin, *What's Wrong with this Pillow?* (Cornell University, Physics Today), 1989, p. 9.
- [3] A.Einstein, B.Podolsky and N.Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* (Phys. Rev. 47), 1935, p. 777.
- [4] P.Caldirola, R.Cirelli, G.M.Proserpi, *Introduzione alla fisica teorica* (Torino, UTET), 1982, p. 483.
- [5] Y.Aharonov and D.Rohrlich, *Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed* (Weinheim, Wiley-VHC Verlag GmbH & Co. KGaA), 2005, p. 25.
- [6] A.Einstein, *Quanten-Mechanik und Wirklichkeit* (Dialectica 2:320-324), 1948.
- [7] D.Bohm, *Quantum Theory* (Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall), 1951, p. 614.
- [8] L.E.Ballentine, *The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics* (Rev. Mod. Phys. 42), 1970, p. 358.
- [9] A.Aspect, J.Dalibard and G.Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers* (Phys. Rev. Lett. 49), 1982, p. 1804.
- [10] *The Born-Einstein Letters*, ed. M.Born, trans. I.Born (New York: Walker), 1971, p. 223
- [11] J.S.Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox* (Physics 1), 1964, p. 195.
- [12] J.J.Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (San Francisco, The Benjamin/Cummings Publishing Company), 1985.
- [13] J.F.Clauser, M.A.Horne, A.Shimony and R.A.Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories* (Phys. Rev. Lett. 23), 1969, p. 880.

- [14] J.S.Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press), 1987, p. 37.
- [15] A.Aspect, P.Grangier and G.Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem* (Phys. Rev. Lett. 47), 1981, p. 460.
- [16] A.Aspect, P.Grangier and G.Roger, *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities* (Phys. Rev. Lett. 49), 1982, p. 91.
- [17] J.F.Clauser and M.A.Horne, *Experimental consequences of objective local theories* (Phys. Rev. D 10), 1974, p. 526.
- [18] D.Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables" I* (Phys. Rev. 85), 1952, p. 166.
- [19] S.Kochen and E.P.Specker, *The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics* (J. Math. and Mech. 17), 1967, p. 59.
- [20] J.S.Bell, *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics* (Rev. Mod. Phys. 38), 1966, p. 447.

