Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea triennale in Fisica

Sulle formulazioni geometriche della meccanica classica

Relatori:
Prof.ssa Addolorata Marasco

Candidato:
Andrea Schiano di Colella
Matricola N85/601

A.A. 2018/2019

Indice

Quanto presentato in questo lavoro s'intende riferito ad
Marasco, A., Romano, A., *Classical Mechanics with Mathematica*, Birkhäuser, Basel, 2018.

1 Introduzione

L'impiego degli strumenti della geometria differenziale nello studio della fisica comporta numerosi vantaggi.
In primo luogo, è solo nell'ottica di questa teoria che gli approcci lagrangiani ed hamiltoniani al problema del moto di un sistema fisico sono fruibili al massimo della loro potenza ed espressività. Ad esempio, introducendo la nozione di spazio delle configurazioni di un sistema fisico, i vincoli ai quali quest'ultimo può essere sottoposto sono agevolmente geometrizzabili ed i loro effetti si manifestano completamente nelle caratteristiche topologiche dello spazio. Similmente, il princìpio di minima azione trova naturale spiegazione in termini delle curve geodetiche nello spazio delle configurazioni, gli integrali primi del moto sono interpretabili in termini di derivate di Lie, e la stessa evoluzione dinamica del sistema, la determinazione della quale è evidentemente l'obiettivo finale della teoria, è ricondotta alla ricerca delle curve integrali di campi vettoriali.
In secondo luogo, il formalismo covariante consente una trattazione indipendente da una particolare scelta di coordinate e, soprattutto, permette di descrivere la dinamica di un sistema fisico senza essere obbligati a ricorrere ad un riferimento euclideo ad esso esterno.
Per illustrare quest'ultimo problema, si supponga di voler descrivere il moto d'una particella vincolata a muoversi su di una superficie sferica. Se si volesse adottare un riferimento "interno" al sistema, ossia un sistema di coordinate nel suo spazio delle configurazioni V, che è evidentemente una sfera, si incontrerebbero difficoltà non banali. Infatti, mentre la traiettoria della particella nel tempo è naturalmente descritta da una curva $\gamma(t)$ su V ed il suo vettore velocità $\mathbf{v}(t)$, appartenente allo spazio tangente a V, è da essa ottenibile, la determinazione del vettore accelerazione $\mathbf{a}(t)$ richiederebbe il confronto tra i due vettori $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t+\Delta t)$, appartenenti a spazi tangenti differenti, riferiti alle basi $\mathbf{e}(t)$ ed $\mathbf{e}(t+\Delta t)$ rispettivamente. Un tale confronto è evidentemente fattibile solo se si riesce a mettere in relazione le due basi $\mathbf{e}(t)$ ed $\mathbf{e}(t+\Delta t)$. Se si adotta un riferimento in uno spazio euclideo, e dunque si rinuncia a descrivere il sistema dal suo interno e, ad esempio, si immerge la varietà V in $\mathbb{R}^3$, il problema risulta semplice da affrontare. In caso contrario, v'è la necessità di introdurre una applicazione che consenta di definire diffeomorfismi tra spazi tangenti e dunque di porre in relazione biunivoca i loro elementi. Nei capitoli $2-3$ ciò viene fatto grazie alla derivazione di Lie, che estende il concetto di derivata direzionale, mentre nei capitoli $4-5$ si introducono le connessioni affini, di carattere più generale, e si studiano in particolare le proprietà delle varietà riemanniane e della connessione di Levi-Civita, di enorme importanza. Nei capitoli $6-7$ vengono presentate alcuni aspetti geometrici della teoria di Lagrange.
In conclusione a questa breve introduzione, si fa notare che la volontà di analizzare un sistema fisico in termini ad esso intrinseci non è solo un esercizio accademico, ma diviene una necessità fondamentale qualora si considerino teorie, come quella della relatività generale, che conferiscono importanza fisica alle caratteristiche geometriche degli spazi considerati, come la metrica, e per lo studio delle quali è improponibile adottare un sistema di riferimento esterno al nostro spazio fisico.

2 Gruppi di diffeomorfismi ad un parametro

Sia V_n una varietà differenziabile n-dimensionale di classe C^k con $0 < k < n$. L' insieme delle funzioni

$$\varphi : \ (t, x) \in \mathbb{R} \times V_n \to \varphi(t, x) \equiv \varphi_t(x) \in V_n \tag{2.1}$$

si dice ***gruppo globale di trasformazioni ad un parametro*** se:

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, la funzione $\varphi_t : x \in V_n \to \varphi_t(x) \in V_n$ è un diffeomorfismo di classe C^k di V_n;
2. $\forall t, s \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t+s, x) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(x) \circ \varphi_s(x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$.

$\forall x \in V_n$, a partire dalla legge di composizione 2. si può provare che:

1. $\varphi_0(x)$ **è l'elemento neutro del gruppo**
   Infatti, $\varphi_t(x) = \varphi_{t+0}(x) = \varphi_t(x) \circ \varphi_0(x)$.
   In particolare, $\forall x \in V_n, \ \varphi_0(x) = x$.
2. **Ogni** $\varphi_t(x)$ **ammette un inverso,** $\varphi_{-t}(x)$
   Infatti, $\varphi_0(x) = \varphi_{t-t}(x) = \varphi_t(x) \circ \varphi_{-t}(x)$.

In seguito si impiegherà il medesimo simbolo per riferirsi sia al gruppo di trasformazioni sia alle funzioni che ne sono parte.
Si definisce ***orbita del gruppo di trasformazioni generata da*** x_0 la curva di classe C^k che si ottiene da $\varphi(x, t)$ fissando il punto $x = x_0 \in V_n$ e facendo variare il parametro t:

$$\varphi_t(x_0) : t \in \mathbb{R} \to V_n \ . \tag{2.2}$$

Una notevole proprietà delle orbite è data dal seguente

Teorema 2.1. *Ogni punto della varietà può appartenere ad una ed una sola orbita di un gruppo.*

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in V_n$ e φ un gruppo globale di trasformazioni ad un parametro.
Si dimostrerà innanzitutto che se

$$x_2 \in \varphi_t(x_1) \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} : \varphi_t(x_1) \equiv \varphi_s(x_2) \ . \tag{2.3}$$

Infatti, se

$$x_2 \in \varphi_t(x_1) \Rightarrow \exists t_1 \in \mathbb{R} : \varphi_{t_1}(x_1) = x_2$$

applicando φ_{-t_1} ad ambo i membri si ottiene

$$x_1 = \varphi_{-t_1}(x_2)$$

e dunque

$$\varphi_t(x_1) = \varphi_{t-t_1}(x_2) = \varphi_s(x_2)$$

ossia la (2.3).
Si considerino adesso due punti $x_1, x_2 \in V_n$ non appartenenti alla stessa orbita generata da un gruppo φ e si supponga per assurdo che esista un terzo punto $x_3 \in V_n$ tale che

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} : \varphi_{t_1}(x_1) = x_3 = \varphi_{t_2}(x_2) \ .$$

Allora sarebbe possibile scrivere

$$\varphi_{t_1}(x_1) = \varphi_{t_2}(x_2) \Rightarrow x_1 = \varphi_{t_1 - t_1}(x_2)$$

che, per la (2.3), è in contraddizione con l'ipotesi iniziale.

□

Essendo, per quanto dimostrato,

$$\forall x_1, x_2 \in V_n : x_1 \neq x_2,\ \varphi_t(x_1) \cap \varphi_t(x_2) = \emptyset$$

si può affermare che l'insieme delle orbite di un gruppo globale di trasformazioni ad un parametro costituisce una partizione dello spazio V_n nel quale sono definite.

Siano ora $(A,\ x^i)$ una carta su V_n e φ un gruppo globale di trasformazioni ad un parametro.
Si definisce ***generatore infinitesimale*** di φ l'applicazione

$$\mathbf{X} : x \in V_n \to \mathbf{X}_x \in T_0^1(V_n)$$

tale che

$$\forall x \in A,\ \mathbf{X}_x = X_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \left.\frac{\partial \varphi_t^i(x)}{\partial t}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}\ . \tag{2.4}$$

La (2.4) definisce un campo vettoriale di classe C^{k-1} su V_n , tangente in x alla curva $\varphi_t(x)$.

Essendo ora U un aperto di V_n ed ε un reale positivo, restringendo il dominio di definizione di un gruppo globale di trasformazione ad un parametro, si dice che φ è un ***gruppo locale di trasformazioni ad un parametro*** se

$$\varphi :\ (t, x) \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \times U \to \varphi(t, x) \equiv \varphi_t(x) \in V_n \tag{2.5}$$

ed inoltre:

1. $\forall t \in (-\varepsilon, +\varepsilon),\quad \varphi_t : x \in U \to \varphi_t(x) \in V_n$ è un diffeomorfismo di V_n;
2. $\forall t, s \in (-\varepsilon, +\varepsilon) : t + s \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$,
   $\varphi(t + s, x) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(x) \circ \varphi_s(x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$.

A partire da quest'ultima definizione è possibile provare il

Teorema 2.2. *Siano $x \in V_n$ ed $\mathbf{X} \in T_0^1(V_n)$ un campo vettoriale differenziabile. Esistono $U \subset V_n$ intorno aperto di x ed $\varepsilon > 0$ tali che $\mathbf{X}$ sia generatore infinitesimale di un gruppo locale di trasformazioni ad un parametro.*

Dimostrazione. Si consideri il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^j, t)\ . \tag{2.6}$$

Essendo per ipotesi il campo vettoriale $\mathbf{X}$ differenziabile, il teorema di Cauchy prescrive che $\forall x_0 \in V_n$ esistono U intorno aperto di x_0 ed un intervallo aperto $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ tali che esiste ed è unica la soluzione $x^i = \varphi^i(t, x_0)$ con $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ del sistema (2.6) che soddisfi le condizioni iniziali $x_0 = \varphi^i(0, x)$.
Si eviterà di provare che sussiste la proprietà di composizione

$$\varphi(t + s, x) = \varphi_{t+s}(x) = \varphi(t, \varphi(s, x))\ . \tag{2.7}$$

□

Un campo vettoriale che sia generatore infinitesimale di un gruppo globale di trasformazioni ad un parametro è detto ***completo***. Al tal proposito sussiste il seguente

Teorema 2.3. *Su di una varietà compatta ogni campo vettoriale differenziabile è completo.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$ un campo vettoriale differenziabile.
Il teorema 2.2 stabilisce che per ogni punto $x \in V_n$ il campo $\mathbf{X}_x$ è il generatore infinitesimale d'un gruppo locale di trasformazioni ad un parametro $\varphi : (-\varepsilon(x), +\varepsilon(x)) \times U_x \to V_n$ con $x \in U_x \subset V_n$.
Se si considera un insieme di gruppi locali tali che i loro intervalli U_x di definizione costituiscano un ricoprimento aperto di V_n, per l'ipotesi di compattezza della varietà da questo si possono estrarre un numero finito di gruppi φ_i, $i = 1, 2, ..., s$, i cui insiemi di definizione U_{xi} costituiscono un ricoprimento finito di V_n.
Sia ora $\sigma = \min(\varepsilon(x_1), \varepsilon(x_2), ..., \varepsilon(x_s))$. A partire dalle φ_i si può costruire, tramite appropriati cambiamenti di parametro della forma $(-\varepsilon(x_i), +\varepsilon(x_i)) \to (-\sigma, +\sigma)$, un'applicazione φ definita sull'unione di tutte le U_{xi}, $\varphi : (t, x) \in (-\sigma, \sigma) \times V^n \to V^n$ che è un gruppo globale di trasformazioni ad un parametro. $\square$

3 Derivata di Lie

A partire dall'apparato teorico dei gruppi di trasformazioni ad un parametro è possibile introdurre la derivata di Lie, ossia una possibile operazione di derivazione su V_n.
L'idea è quella di estendere l'usuale nozione di derivata in $\mathbb{R}^n$ alle varietà differenziabili ridefinendo il rapporto incrementale per una funzione, un campo vettoriale, una forma differenziale oppure un tensore arbitrario. Essendo, però, privo di senso il confronto tra campi tensoriali definiti su spazi T^r_s associati a punti differenti di V_n, si impiegherà la proprietà dei gruppi di trasformazione ad un parametro di poter definire diffeomorfismi della varietà per effettuare, con la loro azione

$$\varphi_t : \ x \in V_n \to y \in V_n$$

e quella del loro differenziale

$$(\varphi_t)_* : \ \mathbf{X} \in T^1_{0\,x}(V_n) \to \mathbf{Y} \in T^1_{0\,\varphi_t(x)}(V_n)$$

e codifferenziale

$$(\varphi_t)^* : \ \omega \in T^0_{1\,x}(V_n) \to \sigma \in T^0_{1\,\varphi_t(x)}(V_n)$$

un *trasporto* di questi oggetti lungo le orbite φ_t per portarli in un unico spazio.

Siano $x \in V_n$, $\mathcal{F}(V_n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni differenziabili $f : \ V_n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$ un campo vettoriale generatore infinitesimale del gruppo di trasformazioni ad un parametro $\varphi(t,x)$ ed $\omega \in T^0_1(V_n)$ una forma differenziale. Si definisce:

1. ***Derivata di Lie di una funzione f rispetto al campo vettoriale $\mathbf{X}$*** l'applicazione:

   $$L_{\mathbf{X}} : \ f \in \mathcal{F}(V_n) \to L_{\mathbf{X}} f \in \mathcal{F}(V_n)$$

   tale che

   $$(L_{\mathbf{X}} f)_x = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(x)) - f(x)}{t} = \left(\frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) \right)_{t=0} \tag{3.1}$$

   Essendo il campo $\mathbf{X}$ tangente alle orbite del gruppo φ, la (3.1) mostra che la derivata di Lie di f rispetto ad $\mathbf{X}$ coincide con la derivata direzionale di f lungo le orbite φ_t:

   $$(L_{\mathbf{X}} f)_x = \mathbf{X}_x f \tag{3.2}$$

2. ***Derivata di Lie di un campo vettoriale $\mathbf{Y}$ rispetto al campo vettoriale $\mathbf{X}$*** l'applicazione:

   $$L_{\mathbf{X}} : \ \mathbf{Y} \in T^1_0(V_n) \to L_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \in T^1_0(V_n)$$

   tale che

   $$(L_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})_x = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(x)} - Y_x}{t} \tag{3.3}$$

   con $(\varphi_{-t})_*$ differenziale di φ_{-t}.

3. ***Derivata di Lie di una forma differenziale ω rispetto al campo vettoriale $\mathbf{X}$*** l'applicazione:

   $$L_{\mathbf{X}} : \ \omega \in T^0_1(V_n) \to L_{\mathbf{X}} \omega \in T^0_1(V_n)$$

   tale che

$$(L_{\mathbf{X}}\omega)_x = \lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t)^*\omega_{\varphi_t(x)} - \omega_x}{t} \tag{3.4}$$

con $(\varphi_t)^*$ codifferenziale di φ_t.

La rappresentazione in componenti di questi operatori può ottenersi introducendo una carta sulla varietà, esprimendo i differenziali ed i codifferenziali dei gruppi di diffeomorfismi in termini coordinati e considerandone un'espansione in serie per $t \to 0$. Supponendo di lavorare in una carta $(A,\ x^i)$ che induce una rappresentazione coordinata $x = (x^i)$ per i punti, $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ per i campi, e $\omega = \omega_i dx^i$ per le forme, si ottiene il seguente sviluppo di $\varphi_t(x)$

$$\varphi_t^i(x) = y^i = x^i + X^i(x)t + o(t^2)$$

e del suo codifferenziale

$$((\varphi_t)^*)^i_j = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_x = \delta^i_j + \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)_x t + o(t^2)\ . \tag{3.5}$$

Similmente, per l'applicazione $\varphi_{-t}(x)$ si ha

$$\varphi_{-t}^i(y) = x^i = y^i - X^i(y)t + o(t^2)$$

e per il suo differenziale

$$((\varphi_{-t})_*)^i_j = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_y = \delta^i_j - \left(\frac{\partial X^i}{\partial y^j}\right)_y t + o(t^2)\ . \tag{3.6}$$

Sostituendo (3.6) in (3.3) e (3.5) in (3.4) si ottiene:

$$(L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})_x = \left[X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right] \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.7}$$

$$(L_{\mathbf{X}}\omega)_x = \left[X^j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right] dx^i \tag{3.8}$$

Dalla (3.7) si possono immediatamente estrapolare numerose proprietà della derivazione di Lie. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathcal{F}(V_n)$, e $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T^1_0(V_n)$:

$$L_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y}) = L_{(a\mathbf{X})}\mathbf{Y} = aL_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\ , \tag{3.9}$$

$$L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = -L_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}\ , \tag{3.10}$$

$$L_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}) = L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + L_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}\ , \tag{3.11}$$

$$L_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}(f))\mathbf{Y} + fL_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}\ , \tag{3.12}$$

$$L_{\mathbf{X}}(L_{\mathbf{Y}}Z) + L_{\mathbf{Y}}(L_{\mathbf{Z}}X) + L_{\mathbf{Z}}(L_{\mathbf{X}}Y) = 0\ . \tag{3.13}$$

La (3.12) è un corrispettivo della proprietà di Leibniz, mentre la (3.13) è detta ***identità di Jacobi***. Ulteriore, seppur ovvia, conseguenza della definizione di derivata di Lie, deducibile anche dalla (3.10), è che, $\forall \mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$,

$$L_{\mathbf{X}}\mathbf{X} = 0\ . \tag{3.14}$$

Notevolissimo, infine, che, in generale, sia

$$L_{(f\mathbf{X}+g\mathbf{Y})}\mathbf{Z} \neq fL_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + gL_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}\ . \tag{3.15}$$

Indicando con $(\varphi_t)_*$ l'estensione dell'applicazione differenziale a qualunque tensore di V_n, ad essi si può estendere anche l'operazione di derivazione di Lie. Verificatosi che questa estensione gode della proprietà di Leibniz

$$L_{\mathbf{X}}(T \otimes S) = L_{\mathbf{X}}T \otimes S + T \otimes L_{\mathbf{X}}S \qquad \forall T, S \in T^r_s(V_n) \ , \tag{3.16}$$

si ottiene, $\forall T \in T^r_s(V_n)$,

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{X}}T = &\left[X^h \frac{\partial}{\partial x^h} T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} - \sum_{k=1}^{r} T^{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} \ h \ i_{k+1} \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \frac{\partial X^{i_k}}{\partial x^h} \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{s} T^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_{k-1} \ h \ j_{k+1} \ldots j_s} \frac{\partial X^h}{\partial x^{j_k}} \right] \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes \\ &\otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \ . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Si dice che un generico campo tensoriale $T \in T^r_s(V_n)$ ***invariante rispetto all'azione di un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro*** φ se

$$T_x = (\varphi_t)_* T_{\varphi_t(x)} \ . \tag{3.18}$$

É evidente che la (3.18) equivale a richiedere che

$$L_{\mathbf{X}}T = 0 \ . \tag{3.19}$$

In particolare, a partire dalla (3.18) si può affermare che un campo vettoriale $\mathbf{Y} \in T^1_0(V_n)$ ed una forma differenziale $\omega \in T^0_1(V_n)$ sono invarianti rispetto al gruppo di trasformazioni ad un parametro φ, del quale il campo $\mathbf{X}$ è generatore infinitesimale, se accade che

$$\mathbf{Y}_x = (\varphi_{-t})_* \mathbf{Y}_{\varphi_t(x)} \Rightarrow L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = 0 \tag{3.20}$$

$$\omega_x = (\varphi_t)^* \omega_{\varphi_t(x)} \Rightarrow L_{\mathbf{X}}\omega = 0 \ . \tag{3.21}$$

In conclusione a questo capitolo, si considerino $\omega \in \Lambda_r(V_n)$, con $r < n$, ed $\mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$. Si definisce ***prodotto interno di*** ω ***per*** $\mathbf{X}$ l'applicazione

$$i : (\mathbf{X}, \omega) \in \Lambda_r(V_n) \times T^1_0(V_n) \to i_{\mathbf{X}}\omega \in \Lambda_{r-1}(V_n) \tag{3.22}$$

tale che

$$i_{\mathbf{X}}\omega = \omega(\mathbf{X}) = X^{j_1} \omega_{j_1 j_2 j_3 \ldots j_r} dx^{j_2} \wedge dx^{j_3} \wedge \ldots \wedge dx^{j_r} \ .$$

Sono verificabili per calcolo diretto le seguenti proprietà della derivata di Lie:

$$L_{\mathbf{X}}(d\omega) = d(L_{\mathbf{X}}\omega) \ , \tag{3.23}$$

$$L_{\mathbf{X}}\omega = d(i_{\mathbf{X}}\omega) + i_{\mathbf{X}}(d\omega) \ . \tag{3.24}$$

La (3.24) è dovuta a Cartan.

4 Calcolo differenziale

Siano V_n una varietà differenziabile n-dimensionale, $\mathbf{X} \in T_0^1(V_n)$ un campo vettoriale differenziabile e $\gamma(t)$ una curva su V_n.
Come già notato nel precedente capitolo, se si volesse definire la derivata di $\mathbf{X}$ lungo i punti di γ, si dovrebbero confrontare il campo $\mathbf{X}(t) \in T^1_{0\,\gamma(t)}(V_n)$, definito sulla base locale $\mathbf{e}_i(t) \in T^1_{0\,\gamma(t)}(V_n)$, ed il campo $\mathbf{X}(t+\Delta t) \in T^1_{0\,\gamma(t+\Delta t)}(V_n)$, definito sulla base locale $\mathbf{e}_i(t+\Delta t) \in T^1_{0\,\gamma(t+\Delta t)}(V_n)$. Non disponendo di un metodo per porre in relazione la base $\mathbf{e}_i(t)$ con la base $\mathbf{e}_i(t+\Delta t)$, questo confronto è privo di senso: la derivazione di Lie, ad esempio, risolve il problema introducendo diffeomorfismi della varietà definiti da gruppi di trasformazione ad un parametro.
É interessante osservare che tali problemi non si pongono nell'eventualità che la varietà sia uno spazio euclideo E_n, nel quale è sempre possibile introdurre un sistema di coordinate rettilinee (y^i).
Siano, infatti, $(\mathbf{u}_i)$ i vettori di base relativi alle coordinate (y^i) e, introdotta su E_n una carta (U, x^i), sia $(\mathbf{e}_i)$ la base naturale relativa al sistema di coordinate curvilinee (x^i). Se $\mathbf{X}(x) = X^i\mathbf{e}_i$ è un campo vettoriale di classe C^1 definito nel dominio U, allora le soluzioni al sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\frac{d\gamma^i(t)}{dt} = X^i(x^1, x^2, ..., x^n) \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{4.1}$$

sono le equazioni parametriche delle ***curve integrali*** del campo $\mathbf{X}$.
Se $\mathbf{Y}(x) = Y^i\mathbf{e}_i$ è un altro campo vettoriale di classe C^1 in U, la derivata direzionale di $\mathbf{Y}(x)$ lungo le curve integrali del campo $\mathbf{X}(x)$ si scrive

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \frac{dY^i}{dt}\mathbf{e}_i + Y^i\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\mathbf{e}_i + Y^i\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}\right)\frac{dx^k}{dt} \ . \tag{4.2}$$

Le $\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k}$, che rappresentano la variazione degli elementi di base $\mathbf{e}_i$ in funzione delle coordinate curvilinee x^k, possono essere esplicitate osservando che le funzioni

$$y^i = y^i(x^1, x^2, ..., x^n) \qquad i = 1, 2, ..., n \tag{4.3}$$

che definiscono la trasformazione di coordinate $(x^i) \to (y^i)$ generano anche la trasformazione

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathbf{u}_j \ . \tag{4.4}$$

Poiché gli $\mathbf{u}_i$ sono costanti, derivando si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k}\mathbf{u}_j = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial y^j}\mathbf{e}_h \ . \tag{4.5}$$

Ponendo

$$\Gamma^h_{ik} = \Gamma^h_{ki} \equiv \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial x^h}{\partial y^j} \ , \tag{4.6}$$

la (4.4) si può scrivere nella forma

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^h_{ik}\mathbf{e}_h \tag{4.7}$$

e la (4.2) diviene

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh}Y^h\right)X^k\mathbf{e}_i \ . \tag{4.8}$$

Nella (4.6) le quantità Γ^h_{ik} sono definite in ragione delle coordinate (y^i), e non delle sole (x^i): la descrizione locale dell'evoluzione dei vettori di base $\mathbf{e}_i$ al variare delle coordinate (x^i) del riferimento curvilineo ha richiesto l'impiego di un riferimento globale rettilineo, l'esistenza del quale è strettamente legata alla proprietà dello

spazio E_n di essere euclideo.
A questa circostanza si può rimediare considerando che in E_n è definito il prodotto scalare

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = g_{ij} X^i Y^j$$

tra due campi vettoriali qualsiasi $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ in uno stesso spazio tangente. Essendo, in particolare,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = g_{ij} \ ,$$

derivando, si ha

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

ossia, per la (4.7), ed applicando le proprietà di simmetria delle Γ e del tensore metrico euclideo g,

$$\Gamma^h_{ik} g_{hj} + \Gamma^h_{kj} g_{hi} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \ . \tag{4.9}$$

Permutando ciclicamente gli indici inferiori si ottiene

$$\Gamma^h_{kj} g_{hi} + \Gamma^h_{ji} g_{hk} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \ , \tag{4.10}$$

$$\Gamma^h_{ji} g_{hk} + \Gamma^h_{ik} g_{hj} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \ . \tag{4.11}$$

Sommando (4.9) e (4.10) e sottraendovi (4.11) si ottiene l'espressione

$$\Gamma^h_{kj} = \frac{1}{2} g^{hi} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \ , \tag{4.12}$$

che esprime le quantità Γ^h_{kj} in funzione delle sole variabili (x^i).
Infine, si può dimostrare che l'applicazione

$$\nabla_{\mathbf{X}} : \mathbf{Y} \to \frac{d\mathbf{Y}}{dt}$$

con $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt}$ dato dalla (4.8) gode, $\forall f, g \in \mathcal{F}(V_n)$, delle proprietà

1. $\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}} = f\nabla_{\mathbf{X}} + g\nabla_{\mathbf{Y}}$;
2. $\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$.

Per poter fare a meno della condizione di spazio euclideo e poter estendere quanto detto ad una varietà differenziabile qualsiasi è necessario introdurre un'operazione che consenta di comparare campi tensoriali definiti su punti differenti della varietà.

Siano V_n una varietà differenziabile di classe C^∞ ed $\mathcal{F}(V_n), T^1_0(V_n)$, e $T^0_1(V_n)$ rispettivamente lo spazio delle funzioni differenziabili, il fibrato tangente e quello cotangente su V^n. Si dice ***connessione affine*** una applicazione

$$\nabla : \ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T^1_0(V_n) \times T^1_0(V_n) \to \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \in T^1_0(V_n) \tag{4.13}$$

tale che $\forall f, g \in \mathcal{F}(V_n)$ e $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T^1_0(V_n)$

1. $\nabla_{f\mathbf{X}+g\mathbf{Y}} = f\nabla_{\mathbf{X}} + g\nabla_{\mathbf{Y}}$;
2. $\nabla_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}f)\mathbf{Y} + f\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$.

Si noti che a causa di (3.15) la derivazione di Lie non è una connessione affine. La forma coordinata dell'applicazione ∇ è facilmente ricavabile introducendo su V^n una carta (A, x^i) e considerandone l'effetto su due campi vettoriali qualsiasi $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{Y} = Y^i \mathbf{e}_i$, con $\mathbf{e}_i$ base naturale associata alle coordinate (x^i). Applicando le proprietà 1. e 2. si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} &= \nabla_{X^k \mathbf{e}_k}(Y^i \mathbf{e}_i) = X^k \nabla_{\mathbf{e}_k}(Y^i \mathbf{e}_i) = X^k(\mathbf{e}_k(Y^i)\mathbf{e}_i + Y^i \nabla_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_i) \\ &= \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\mathbf{e}_i + Y^h \nabla_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_h\right) X^k \ . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Definendo i ***coefficienti della connessione***, mediante le relazioni

$$\nabla_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_h = \Gamma^i_{kh}\mathbf{e}_i \ , \tag{4.15}$$

la (4.14) si può scrivere nella forma seguente:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh}Y^h\right) X^k \mathbf{e}_i \equiv \nabla_k Y^i X^k \mathbf{e}_i \ . \tag{4.16}$$

Le quantità Γ^i_{kh} rappresentano n^3 funzioni *arbitrarie* di classe C^∞.
Esse sono ovunque determinate assegnando una connessione affine su V_n; viceversa, assegnandole in una carta (U, x^i) esse sono naturalmente fissate in ogni altra carta (V, x'^i) tale che $U \cap V \neq \emptyset$, definendo così una connessione affine su V_n.
Siano infatti (U, x^i) e (V, x'^i) due carte su V_n tali che $U \cap V \neq \emptyset$.
Nell'intersezione dei due domini coordinati si può scrivere la trasformazione di coordinate $(x^i) \to (x'^i)$, dalla quale segue, per le basi locali degli spazi tangenti, la trasformazione $\mathbf{e}'^j = A^i_j \mathbf{e}_i$, con $A^i_j = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j}$. Valutando la (4.16) nei due sistemi di coordinate, essendo $Y'^i = A^{-1}{}^i_l Y^l \Rightarrow Y^l = A^l_i Y'^i$, si ottiene

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)' = (\nabla_X Y) \to \left(\frac{\partial Y'^l}{\partial x'^m} + \Gamma'^l_{mn}Y'^n\right) X'^m e'_l &= \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh}Y^h\right) X^k e_i \\ &= \left(\frac{\partial (A^i_l Y'^l)}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh}A^h_n Y'^n\right) A^k_m X'^m (A^{-1})^l_i e'_l \\ &= \left((A^{-1})^m_k \frac{\partial A^i_l}{\partial x'^m}Y'^l + (A^{-1})^m_k A^i_l \frac{\partial Y'^l}{\partial x'^m} + A^h_n \Gamma^i_{kh} Y'^n\right) A^k_m (A^{-1})^l_i X'^m e'_l \\ &= \left(\frac{\partial Y'^l}{\partial x'^m} + \left[(A^{-1})^l_i A^h_n A^k_m \Gamma^i_{kh} + (A^{-1})^l_i \frac{\partial A^i_n}{\partial x'^m}\right] Y'^n\right) X'^m e'_l \ , \end{aligned}$$

che comporta la seguente legge di trasformazione per le Γ :

$$\Gamma'^l_{mn} = (A^{-1})^l_i A^h_n A^k_m \Gamma^i_{kh} + (A^{-1})^l_i \frac{\partial A^i_n}{\partial x'^m} \ . \tag{4.17}$$

La (4.17) mostra che, in generale, i coefficienti della connessione non si trasformano come le componenti di un tensore di tipo $(1, 2)$ a meno di non considerare trasformazioni lineari delle coordinate, per le quali si ha $\dfrac{\partial A^i_n}{\partial x'^m} = 0$.

Sia ora (U, x^i) una carta sulla varietà V_n e si supponga di poter dotare quest'ultima di una connessione affine; se $\gamma: \ t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \to \gamma(t) \in V_n$ è una curva di equazioni parametriche $x^i(t)$ su V_n interamente contenuta nel dominio coordinato U, ed $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i = \dfrac{dx^i}{dt}\mathbf{e}_i$ il campo vettoriale ad essa tangente punto per punto, si dice che un altro campo $\mathbf{Y}$ è ***trasportato parallelamente*** lungo γ se

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = 0 \ . \tag{4.18}$$

Per la (4.16), la forma coordinata della (4.18) è

$$\frac{dY^i}{dt} + \Gamma^i_{kj} Y^j \frac{dx^k}{dt} = 0 \ , \tag{4.19}$$

e rappresenta un sistema di n equazioni differenziali del prim'ordine nel quale le n componenti $Y^i(x^k(t))$ di $\mathbf{Y}$ figurano come funzioni incognite. Se la scrittura $\Gamma^i_{kj} Y^j \frac{dx^k}{dt}$ descrive funzioni differenziabili lungo γ, assegnate le condizioni iniziali $Y^i(x^k(t_0)) = Y^i_0$ il sistema ammette una ed una sola soluzione, in generale dipendente dalla particolare γ in questione.
Si dice ***uniforme*** un campo vettoriale $\mathbf{Y}$ tale che

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = 0 \qquad \forall \mathbf{X} \in T^1_0(V_n) \ , \tag{4.20}$$

in coordinate

$$\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} Y^j = 0 \qquad \forall i, k = 1, 2, ...n \ . \tag{4.21}$$

La (4.21) descrive un sistema di n^2 equazioni differenziali nelle n incognite $Y^i(x^k)$ che, in generale, potrebbe non ammettere soluzioni. Questo fatto implica che una connessione affine su di una varietà potrebbe non ammettere campi vettoriali uniformi.
Una curva γ definita su una varietà differenziabile V_n dotata di una connessione affine si dice ***autoparallela*** se accade che il campo vettoriale $\mathbf{X}$ ad essa tangente sia trasportato parallelamente lungo γ stessa, ossia:

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X} = 0 \ . \tag{4.22}$$

Essendo $x^i(t)$ le equazioni parametriche di γ, la (4.22) assume, in coordinate, la seguente forma:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \ . \tag{4.23}$$

La (4.23) rappresenta un sistema di n equazioni differenziali del second'ordine al variare di i. Fissate le condizioni iniziali $x^i(0) = x_0$ ed $X^i_{x_0}(0)$ la teoria prescrive l'esistenza di una ed una sola soluzione, e dunque l'esistenza di un'unica curva autoparallela passante per x_0 ed avente $\mathbf{X}$ quale campo vettoriale tangente in ogni suo punto.
É importante notare come le condizioni (4.23) siano strettamente legate alla rappresentazione parametrica di γ: un cambio di parametro, alterando questa rappresentazione formale, potrebbe fare perdere alla curva la sua proprietà di autoparallelismo.
Sia infatti $r: \ t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \to r(t) \equiv s \in [a', b'] \subset \mathbb{R}$ un cambio di parametro ammissibile e $\nu(s) = \gamma(r(t))$. Essendo lungo la curva ν

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{ds} \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 x^i}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2}$$

la definizione di curva autoparallela si scrive:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{X} &= 0 \\
\frac{d^2 x^i}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= 0 \\
\left(\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dx^i}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} &= 0 \\
\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} &= - \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{dx^i}{ds} \ .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Confrontando la (4.24) con la (4.23) si evince che per far sì che la proprietà di autoparallelismo sia conservata per il cambio di parametro dev'essere

$$-\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx^i}{ds} = 0 \rightarrow s = c_1 t + c_2 \tag{4.25}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Cambi di parametri che soddisfano questa condizione sono detti ***canonici***.

Infine, si può dimostrare che esiste ed è unica la ***derivata covariante***, definita come l'unica applicazione $\mathbb{R}$-lineare

$$\hat{\nabla} : \ (\mathbf{X}, T) \in T^1_0(V_n) \times T^r_s(V_n) \rightarrow \hat{\nabla}_{\mathbf{X}} T \in T^r_s(V_n) \tag{4.26}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. $\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X} f, \ \forall f \in \mathcal{F}(V_n)$;
2. $\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \ \forall \mathbf{Y} \in T^1_0(V_n)$;
3. $\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} CT = C \hat{\nabla}_{\mathbf{X}} T, \ \forall T \in T^r_s(V_n)$ *con C operatore di contrazione*;
4. $\hat{\nabla}_{\mathbf{X}}(T \otimes S) = (\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} T) \otimes S + T \otimes (\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} S)$.

Sia (U, x^i) una carta su V^n.
Essendo $\omega \in T^0_1(V_n)$ ed $\mathbf{Y} \in T^1_0(V_n)$, $C(\omega \otimes Y) \in \mathcal{F}(V_n)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_{\mathbf{X}}(C(\omega \otimes \mathbf{Y})) &= \mathbf{X}(C(\omega \otimes \mathbf{Y})) \\
\hat{\nabla}_{\mathbf{X}}(C(\omega \otimes \mathbf{Y})) &= C \hat{\nabla}_{\mathbf{X}}(\omega \otimes \mathbf{Y})
\end{aligned}$$

e dunque:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(C(\omega \otimes \mathbf{Y})) = C \hat{\nabla}_{\mathbf{X}}(\omega \otimes \mathbf{Y}) &= C(\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \omega \otimes \mathbf{Y} + \omega \otimes \hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) \\
X^k \frac{\partial \omega_i Y^i}{\partial x^k} &= (\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \omega)_i Y^i + \omega_i (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})^i \\
X^k \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} Y^i + \omega_i \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}\right) &= (\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \omega)_i Y^i + \omega_i \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} Y^j\right) X^k \ .
\end{aligned}$$

Si può così scrivere:

$$(\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} \omega)_i = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ki} \omega_j\right) X^k \ . \tag{4.27}$$

Adesso, conoscendone l'azione su funzioni, campi, e forme differenziali, si può esplicitare l'azione dell'operatore di derivazione covariante su un qualunque tensore. Essendo $T \in T^r_s(V^n)$ si ha:

$$\begin{aligned}
(\hat{\nabla}_{\mathbf{X}} T) = \Big[&\frac{\partial}{\partial x^k} T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} + \Gamma^{i_1}_{kh} T^{h i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} + \dots + \Gamma^{i_r}_{kh} T^{i_1 i_2 \dots h}_{j_1 j_2 \dots j_s} \\
&- \Gamma^h_{k j_1} T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{h j_2 \dots j_s} - \dots - \Gamma^h_{k j_s} T^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots h} \Big] X^k \\
&\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \ .
\end{aligned} \tag{4.28}$$

5 Varietà Riemanniane, torsione e curvatura

Sia V_n una varietà differenziabile n dimensionale dotata della connessione affine ∇ ed (U, x^i) una carta su di essa.
Si può constatare che, in generale, per l'operazione di derivazione covariante non sussiste un corrispettivo del teorema di Schwarz sull'eguaglianza delle derivate parziali miste delle funzioni. Infatti, $\forall f \in \mathcal{F}(V_n)$ le derivate $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ sono le componenti di un covettore, sicché si ha

$$\begin{aligned}\nabla_i \frac{\partial f}{\partial x^j} - \nabla_j \frac{\partial f}{\partial x^i} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^l_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \Gamma^l_{ji} \frac{\partial f}{\partial x^l} \right) \\ &= \left(\Gamma^l_{ji} - \Gamma^l_{ij} \right) \frac{\partial f}{\partial x^l} = S^l_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^l} \ . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Poiché le quantità S^l_{ij} sono differenza di componenti di tensori di tipo $(1, 2)$, lo sono anch'esse. Il tensore S è detto ***tensore di torsione***, è antisimmetrico rispetto agli indici di covarianza e si annulla se i coefficienti della connessione sono simmetrici rispetto agli indici di covarianza. In tal caso, l'operazione di derivazione covariante delle funzioni godrebbe della proprietà assicurata dal teorema di Schwarz.
Se $\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$ è un campo vettoriale su V_n, si ha

$$\begin{aligned}&\nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k = \nabla_i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{jl} X^l \right) - \nabla_j \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il} X^l \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \Gamma^k_{jl} X^l \right) + \Gamma^k_{ih} \left(\frac{\partial X^h}{\partial x^j} + \Gamma^h_{jl} X^l \right) - \Gamma^h_{ij} \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^h} + \Gamma^k_{hl} X^l \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il} X^l \right) - \Gamma^k_{jh} \left(\frac{\partial X^h}{\partial x^i} + \Gamma^h_{il} X^l \right) + \Gamma^h_{ji} \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^h} + \Gamma^k_{hl} X^l \right) \\ &= \left(\Gamma^k_{ih} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^k_{jh} \Gamma^h_{il} + \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^j} \right) X^l + \left(\Gamma^h_{ji} - \Gamma^h_{ij} \right) \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^h} + \Gamma^k_{hl} X^l \right) \ , \end{aligned}$$

ossia

$$\nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k = R^k_{ijl} X^l + S^h_{ij} \nabla_h X^k \ , \tag{5.2}$$

dove il tensore

$$R^k_{ijl} = \Gamma^k_{ih} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^k_{jh} \Gamma^h_{il} + \frac{\partial \Gamma^k_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^k_{il}}{\partial x^j} \ , \tag{5.3}$$

antisimmetrico rispetto ai primi due indici di covarianza, è chiamato ***tensore di curvatura di Riemann***.
Sussite il seguente

Teorema 5.1. *Sia V_n una varietà differenziabile n-dimensionale dotata di connessione affine. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(1) Esiste un atlante su V_n in ogni carta del quale i coefficienti della connessione sono nulli;

(2) Il tensore di torsione è nullo e $\forall x,\ y \in V_n$ il trasporto parallelo lungo una qualunque curva γ congiungente x ed y è indipendente da γ;

(3) Il tensore di torsione è nullo ed esistono esattamente n campi vettoriali indipendenti in ogni punto ed uniformi su V_n;

(4) I tensori di curvatura e di torsione sono nulli.

Dimostrazione.

(1) ⇒ (2) Che il tensore di torsione sia nullo è ovvio poiché ogni singolo coefficiente della connessione è nullo per ipotesi.
Siano $x, y \in V_n$, $\gamma(t)$ una qualsivoglia curva tra x ed y, $\mathbf{X}$ il campo vettoriale ad essa tangente in ogni punto ed $\mathbf{Y}_x = Y^i \mathbf{e}_i(x) \in T^1_{0\,x}(V_n)$.
Se i punti x ed y appartengono ambedue ad un unico dominio coordinato U di una carta (U, x^i) su V_n, il trasporto parallelo di $\mathbf{Y}_x$ lungo $\gamma(t)$ si scrive

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}_x) = \frac{dY^i}{dt} = 0 \; . \tag{5.4}$$

La (5.4), con condizioni iniziali $Y^i(x(0)) = Y^i$, rappresenta un sistema di equazioni differenziali evidentemente indipendente dalla particolare curva $\gamma(t)$ scelta che definisce il campo vettoriale $\mathbf{Y}_y = Y^i \mathbf{e}_i(y)$.
Se, invece, i punti x ed y appartengono rispettivamente ai domìni coordinati di due carte (U, x^i) ed (U', x'^i) di V_n tali che $U \cap U' \neq \emptyset$, la dimostrazione procede scegliendo un punto arbitrario $p \in (U \cap U') \cap \gamma(t)$ e riguardando la curva $\gamma(t)$ come composta dall'unione delle curve $\gamma_1(t)$, congiungente i punti x e p, e $\gamma_2(t)$, congiungente i punti p ed y. Considerando $p \in U$, il trasporto parallelo del vettore $\mathbf{Y}_x$ lungo la curva $\gamma_1(t)$ si scrive come la (5.4), e definisce in maniera indipendente da $\gamma_1(t)$ il vettore $\mathbf{Y}_p = Y^i \mathbf{e}_i(p)$.
Effettuando la trasformazione di coordinate $(x^i) \to (x'^i)$, e considerando $p \in U'$, il trasporto parallelo del vettore $\mathbf{Y'}_p = Y'^i \mathbf{e}'_i(p) = {A^{-1}}^i_j Y^j \mathbf{e}_i(p)$ lungo la curva $\gamma_2(t)$ si scrive

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y'}_p) = \frac{dY'^i}{dt} = {A^{-1}}^i_j \frac{dY^j}{dt} = 0 \; . \tag{5.5}$$

Descrivendo la (5.5) un sistema di equazioni differenziali che, con condizioni iniziali $Y'^i(x'(0)) = Y'^i$, definisce il campo vettoriale $\mathbf{Y'}_y$ in maniera indipendente dalla curva $\gamma_2(t)$, il teorema è dimostrato.

(2) ⇒ (3) Il tensore di torsione è nullo per ipotesi.
Siano $x \in V_n$ ed $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, ..., \mathbf{Y}_n \in T^1_{0\,x}(V_n)$ n vettori indipendenti. Non dipendendo, per ipotesi, il trasporto parallelo di un $\mathbf{Y}_i$ tra il punto x ed un qualunque altro punto $y \in V_n$ dalla curva $\gamma(t)$ scelta per congiungerli, e potendosi considerare ogni $\gamma(t)$ come curva integrale di qualche campo $\mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$, $\forall \mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$ si può scrivere

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_i = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n \; ,$$

ossia che i campi $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, ..., \mathbf{Y}_n$ sono uniformi. Essi sono, infine, indipendenti in ogni punto poiché il trasporto parallelo, quando indipendente dalla curva lungo la quale è effettuato, definisce un isomorfismo tra spazi tangenti alla varietà.

(3) ⇒ (4) Siano $\mathbf{e}_i$ gli n campi vettoriali uniformi ed indipendenti esistenti per ipotesi su V_n e si consideri un campo vettoriale arbitrario $\mathbf{Y} = Y^i \mathbf{e}_i$. Poiché il tensore di torsione è nullo per ipotesi, si può scrivere

$$\nabla_i \nabla_j Y^k - \nabla_j \nabla_i Y^k = 0 = R^k_{ijl} Y^l$$

cosa che, per l'arbitrarietà delle quantità Y^i, implica che debba essere $R^k_{ijl} = 0$.

(4) ⇒ (1) Siano (U, x^i) e (U, x'^i) due carte su V^n.
La tesi richiede che si possa costruire la trasformazione di coordinate $(x^i) \to (x'^i)$ per la quale si abbia

$$\Gamma'^i_{jk} = {A^{-1}}^i_l A^m_j A^n_k \Gamma^l_{mn} + {A^{-1}}^i_l \frac{\partial A^l_k}{\partial x'^j} = 0 \; . \tag{5.6}$$

Moltiplicando a sinistra la (5.6) per A^i_l, si ottiene

$$A^l_k = \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \tag{5.7}$$
$$\frac{\partial A^l_k}{\partial x'^j} = -A^m_j A^n_k \Gamma^l_{mn} \tag{5.8}$$

La (5.7) e la (5.8) assieme rappresentano un sistema di $n^2 + n^3$ equazioni nelle $n + n^2$ incognite x'^i ed A^i_j che, in generale, potrebbe non ammettere soluzione a meno che ad essa non si impongano le seguenti ulteriori condizioni di regolarità

$$\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^h \partial x'^k} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^k \partial x'^h} \tag{5.9}$$
$$\frac{\partial^2 A^l_k}{\partial x'^i \partial x'^j} = \frac{\partial^2 A^l_k}{\partial x'^j \partial x'^i} \tag{5.10}$$

La condizione (5.9) è verificabile impiegando, nell'ordine, la (5.7), la (5.8) e l'ipotesi di nullità del tensore di torsione, che comporta la simmetria dei coefficienti della connessione rispetto alla permutazione degli indici di covarianza:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^h \partial x'^k} - \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^k \partial x'^h} = 0 &= \frac{\partial A^l_k}{\partial x'^h} - \frac{\partial A^l_h}{\partial x'^k} \\
&= A^m_h A^n_k \Gamma^l_{mn} - A^m_k A^n_h \Gamma^l_{mn} \\
&= A^m_k A^n_h (\Gamma^l_{nm} - \Gamma^l_{mn}) = A^m_k A^n_h S^l_{mn} = 0 \ .
\end{aligned}$$

La condizione (5.10) è, invece, verificabile impiegando ripetutamente la (5.8) e l'ipotesi di nullità dei tensori di torsione e di curvatura di Riemann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A^l_k}{\partial x'^i \partial x'^j} - \frac{\partial^2 A^l_k}{\partial x'^j \partial x'^i} = 0 = & \frac{\partial}{\partial x'^i}(-A^m_j A^n_k \Gamma^l_{mn}) - \frac{\partial}{\partial x'^j}(-A^m_i A^n_k \Gamma^l_{mn}) \\
= & - \frac{\partial A^m_j}{\partial x'^i} A^n_k \Gamma^l_{mn} - A^m_j \frac{\partial A^n_k}{\partial x'^i} \Gamma^l_{mn} - A^m_j A^n_k \frac{\partial \Gamma^l_{mn}}{\partial x'^i} \\
& + \frac{\partial A^m_i}{\partial x'^j} A^n_k \Gamma^l_{mn} + A^m_i \frac{\partial A^n_k}{\partial x'^j} \Gamma^l_{mn} + A^m_i A^n_k \frac{\partial \Gamma^l_{mn}}{\partial x'^j} \\
= & + A^u_i A^t_j A^n_k \Gamma^l_{mn} \Gamma^m_{ut} + A^m_j A^u_i A^t_k \Gamma^l_{mn} \Gamma^n_{ut} - A^m_j A^n_k A^t_i \frac{\partial \Gamma^l_{mn}}{\partial x^t} \\
& - A^u_j A^t_i A^n_k \Gamma^l_{mn} \Gamma^m_{ut} - A^m_i A^u_j A^t_k \Gamma^l_{mn} \Gamma^n_{ut} + A^m_i A^n_k A^t_j \frac{\partial \Gamma^l_{mn}}{\partial x^t} \\
= & A^m_i A^n_j A^t_k (\Gamma^l_{np} \Gamma^p_{mt} - \Gamma^l_{mp} \Gamma^p_{nt} - \frac{\partial \Gamma^l_{nt}}{\partial x^m} + \frac{\partial \Gamma^l_{mt}}{\partial x^n}) \\
= & A^m_i A^n_j A^t_k R^l_{nmt} = 0 \ .
\end{aligned}$$

□

Se V_n è una varietà Riemanniana, cioè equipaggiata con un tensore metrico simmetrico e non degenere ($\det(g_{ij}) \neq 0$), è possibile determinare una connessione affine particolarmente utile. Vale infatti il

Teorema 5.2. *Una varietà Riemanniana V_n ammette una ed una sola connessione affine ∇ che sia tale che:*

(1) Il tensore di torsione è nullo;

(2) Il prodotto scalare è invariante per trasporto parallelo.

Dimostrazione. Sia (U, x^i) una carta sulla varietà V_n dotata del tensore metrico g_{ij} e siano Γ^i_{jk} i coefficienti della connessione da calcolare. Siano inoltre $x, y \in U$, $\gamma(t)$ una curva tra di essi di equazioni parametriche $x^i(t)$, ed $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T^1_0(V_n)$. Essendo $\mathbf{Z}$ il campo vettoriale tangente punto per punto alla curva $\gamma(t)$, il trasporto parallelo di $\mathbf{X}$ ed $\mathbf{Y}$ lungo γ si scrive, rispettivamente:

$$\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} = \frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{kh} X^k \frac{dx^h}{dt} = 0$$
$$\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y} = \frac{dY^i}{dt} + \Gamma^i_{kh} Y^k \frac{dx^h}{dt} = 0$$

mentre il loro prodotto scalare è invariante per trasporto parallelo se accade che

$$\nabla_{\mathbf{Z}}(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = 0 \ , \tag{5.11}$$

ossia

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(g_{ij}X^iY^j\right) = 0 &= \left(\frac{dg_{ij}}{dt}X^iY^j + g_{ij}\frac{dX^i}{dt}Y^j + g_{ij}X^i\frac{dY^j}{dt}\right)\\ &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - g_{lj}\Gamma^l_{ih} - g_{il}\Gamma^l_{jh}\right)X^iY^j\frac{dx^h}{dt} \ .\end{aligned} \tag{5.12}$$

Per l'arbitrarietà dei campi $\mathbf{X}$ ed $\mathbf{Y}$ e della curva, la (5.12) equivale a richiedere che sia

$$g_{lj}\Gamma^l_{ih} + g_{il}\Gamma^l_{jh} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \ . \tag{5.13}$$

Permutando ciclicamente gli indici nella (5.13) si ottengono

$$g_{lh}\Gamma^l_{ji} + g_{jl}\Gamma^l_{hi} = \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} \tag{5.14}$$

$$g_{li}\Gamma^l_{hj} + g_{hl}\Gamma^l_{ij} = \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} \tag{5.15}$$

Poiché si cerca una connessione senza torsione, si possono utilizzare le proprietà di simmetria delle Γ rispetto ai loro indici inferiori. Sommando (5.14) e (5.15) e sottraendovi (5.13) si ottiene una notevole espressione dei coefficienti della connessione in funzione della sola matrice metrica:

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{lh}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right) \tag{5.16}$$

□

I coefficienti della connessione definiti nella (5.16) danno luogo alla ***connessione Riemanniana***.
A partire, ad esempio, dalla (5.13) è anche possibile provare l'utile identità

$$\Gamma^l_{ih}g_{lj} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \ . \tag{5.17}$$

É infine del Bianchi il

Teorema 5.3. *In una varietà di Riemann equipaggiata con la connessione Riemanniana il tensore metrico è uniforme.*

Dimostrazione. Sia g_{ij} il tensore metrico della varietà di Riemann V_n. La tesi richiede che $\forall \mathbf{X} \in T^1_0(V_n)$ sia

$$\nabla_{\mathbf{X}}g = 0 \Rightarrow \nabla_h g_{ij} = 0$$

Impiegando la (5.13) ed il fatto che il tensore di torsione è nullo per ipotesi, si ottiene:

$$\nabla_h g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} - \Gamma^l_{hi}g_{lj} - \Gamma^l_{hj}g_{il} = g_{lj}S^l_{hi} + g_{il}S^l_{hj} = 0$$

□

Le particolari proprietà del tensore metrico g di una varietà Riemanniana V_n consentono di introdurvi naturalmente il ***prodotto scalare***

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T_0^1(V_n) \to \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \in \mathbb{R}$$

tale che

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \equiv g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = X^i Y^j g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} X^i Y^j \ , \tag{5.18}$$

che può essere anche impiegato per esprimere la dualità su V_n ponendo, $\forall \mathbf{X} \in T_0^1(V_n)$,

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \omega(\mathbf{Y}) \Rightarrow g_{ij} X^i Y^j = \omega_j Y^j \Rightarrow \omega_i \equiv X_i = g_{ij} X^j \ . \tag{5.19}$$

Inoltre, si definisce ***metrica*** lo scalare

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \ . \tag{5.20}$$

Siano (U, x^i) una carta su V_n, $x_1, x_2 \in U$ e $\gamma : t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \to \gamma(t) \in V_n$ una curva congiungente x_1 ed x_2 di equazioni parametriche $x^i(t)$, con $\gamma(a) = x_1$ e $\gamma(b) = x_2$. La (5.20) consente di definire la lunghezza di $\gamma(t)$ come

$$\ell(\gamma(t)) = \int_{\gamma(t)} ds = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x^k(t)) \dot{x}^i \dot{x}^j} dt \tag{5.21}$$

essendo, lungo la curva, $dx^i = \dot{x}^i dt$. É evidente che $\ell(\gamma(t))$ è una quantità indipendente sia dalla rappresentazione coordinata scelta, sia dalla parametrizzazione della curva.
Una curva che minimizza (5.21) è detta ***geodetica*** di V_n. Se si considera una famiglia ad un parametro, variabile con continuità, di curve

$$\Gamma : (s, t) \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \times [a, b] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \Gamma(s, t) \in V_n \tag{5.22}$$

tale che

1. $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$;
2. $\forall s \in (-\varepsilon, +\varepsilon),\ \Gamma(s, a) = x_1$ e $\Gamma(s, b) = x_2$,

allora, essendo $q^i(s, t)$ le equazioni parametriche della curva $\Gamma(s, t)$,

$$\ell(s) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(q^h(s, t)) \dot{q}^i \dot{q}^j} dt$$

ed una curva è una geodetica se è un estremale del funzionale $\ell(\gamma(t))$ per ogni famiglia di curve Γ che soddisfa le proprietà 1. e 2., ossia se accade che

$$\left(\frac{d\ell(s)}{ds} \right)_{s=0} = 0 \ . \tag{5.23}$$

Ponendo, per agio di calcolo, $\sqrt{g_{ij}(q^h(s, t)) \dot{q}^i \dot{q}^j} \equiv \mathcal{L}(q^h(s, t), \dot{q}^h(s, t)) \equiv \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, si scrive

$$\frac{d\ell(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_a^b \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} \frac{\partial q^h}{\partial s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h} \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial s} \right) dt \ .$$

Essendo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h} \frac{\partial \dot{q}^h}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h} \frac{\partial q^h}{\partial s} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h} \right) \frac{\partial q^h}{\partial s} \ ,$$

risulta

$$\frac{d\ell(s)}{ds} = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h} \right) \frac{\partial q^h}{\partial s} dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h}\frac{\partial q^h}{\partial s} \right]_a^b ,$$

ed infine, osservando che $\left(\frac{\partial q^h}{\partial s}\right)_a = \left(\frac{\partial q^h}{\partial s}\right)_b = 0$, la (5.23) si scrive infine

$$\frac{d\ell(0)}{ds} = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}{\partial x^h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^h} \right) \frac{\partial q^h}{\partial s}(0,t) dt = 0 \ . \tag{5.24}$$

Si può dimostrare che dovendo, essere soddisfatta la (5.24) per qualunque scelta della famiglia di curve Γ, cioè per ogni scelta delle funzioni $\frac{\partial q^h}{\partial s}(0,t)$, sono geodetiche tutte le curve per le quali

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}{\partial x^h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^h} = 0 \tag{5.25}$$

con le condizioni ai limiti

$$x^i(a) = x_1^i \ , \qquad\qquad x^i(b) = x_2^i \ .$$

É importante notare che non esistono teoremi generali che garantiscono l'unicità della soluzione di un problema con condizioni ai limiti. Potrebbe dunque accadere che si possano individuare un numero infinito di curve geodetiche congiungenti due punti di una varietà, che in questo caso si dicono ***punti focali***.
Le equazioni (5.25) possono essere riscritte in un'altra forma d'interesse ponendo $\mathcal{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \sqrt{\varphi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}$ e sviluppando i calcoli. Si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}^h} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\frac{\partial \varphi}{\partial x^h} = 0 \ .$$

Effettuando un cambio di parametrizzazione $t \to s$, dove s è un parametro per il quale il vettore tangente alla curva punto per punto è unitario, cioè

$$g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j = 1 \ ,$$

si può scrivere

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}^h} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y^h} = \frac{d}{ds}(g_{ih}\dot{y}^h) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^h}(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j) = 0 \ . \tag{5.26}$$

Se sulla varietà Riemanniana V_n si introduce la connessione di Levi-Civita, le (5.26) definiscono una curva autoparallela. Infatti,

$$\frac{d}{ds}(g_{ih}\dot{y}^h) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^h}(g_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j) = \left(\frac{\partial g_{hj}}{\partial y^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^h} \right)\dot{y}^i\dot{y}^j + g_{ih}\frac{d\dot{y}^h}{ds}$$

dal che si ottiene, impiegando la (5.17) e, la (5.13) e poi moltiplicando per ${g^{-1}}^{ih}$,

$$\frac{d\dot{y}^h}{ds} + \Gamma^h_{ij}\dot{y}^i\dot{y}^j = 0 \ , \tag{5.27}$$

evidentemente analoghe alle (4.23).

6 Dinamica Lagrangiana

Sia S un sistema dinamico di N corpi rigidi con n gradi di libertà, vincoli olonomi, fissi, e lisci, e sottoposto all'azione di forze conservative.
Introdotte n coordinate generalizzate $q^i \in U_i \subset \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n$ che descrivono la posizione dei corpi costituenti S, ciascuna variabile nel suo dominio U_i in maniera conforme alla propria natura, si può constatare che il dominio $U \equiv U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \subset \mathbb{R}^n$, qualora equipaggiato con un atlante, costituito ad esempio dall'unica carta (U, q^i), costituisce una varietà differenziabile n-dimensionale V_n chiamata ***spazio delle configurazioni***. Ogni punto $\mathbf{q} \equiv (q^1, q^2, ..., q^n) \in V_n$ è un possibile stato di S compatibile coi vincoli ai quali esso è sottoposto. In questo contesto, l'evoluzione nel tempo di S è naturalmente rappresentata da una curva su V_n.
Si ricorda che, sotto l'ipotesi di vincoli fissi, l'espressione lagrangiana dell'energia cinetica dei corpi costituenti S si scrive

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} a_{hk}(\mathbf{q}) \dot{q}^h \dot{q}^k \ . \tag{6.1}$$

Si può dimostrare che la forma quadratica (6.1) è definita positiva e che $\det(a_{hk}) \neq 0$. Essendo $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ uno scalare necessariamente indipendente dalla scelta delle coordinate, le a_{hk} definiscono un tensore di tipo $(0, 2)$, per definizione simmetrico, non degenere e definito positivo, che può essere impiegato in qualità di tensore metrico su V_n. Così facendo, sulla varietà sono naturalmente indotte la metrica

$$(ds)^2 = a_{hk}(\mathbf{q}) dq^h dq^k \ , \tag{6.2}$$

un prodotto scalare in ogni spazio $T_{\mathbf{q}}(V_n)$ del fibrato tangente $T(V_n)$, e, $\forall \mathbf{v} = v^k \left(\frac{\partial}{\partial q^k} \right)_{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{q}}(V_n)$, le usuali relazioni di abbassamento ed innalzamento degli indici

$$v_h = a_{hk} v^k \ , \tag{6.3}$$

$$v^h = (a^{-1})^{hk} v_k \equiv a^{hk} v_k \ . \tag{6.4}$$

Essendo $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ la lagrangiana del sistema in analisi, i momenti coniugati

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}^h} = a_{hk} \dot{q}^k = \dot{q}_h$$

possono essere riguardati come le componenti covarianti del vettore $\dot{\mathbf{q}} = \dot{q}^k \left(\frac{\partial}{\partial q^k} \right)_{\mathbf{q}}$.
Alla luce di quanto detto, le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q^h} = 0 \tag{6.5}$$

si possono scrivere

$$\frac{d\dot{q}_h}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ik}(\mathbf{q})}{\partial q^h} \dot{q}^i \dot{q}^k = \mathcal{Q}_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ , \tag{6.6}$$

dove $\mathcal{Q}_h(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ è l'h-esima componente lagrangiana della sollecitazione attiva.
Impiegando la (5.17) si ottiene

$$\frac{d\dot{q}_h}{dt} - a_{lk} \Gamma^l_{jh} \dot{q}^i \dot{q}^k = \frac{d\dot{q}_h}{dt} - \Gamma^l_{jh} \dot{q}_l \dot{q}^j \equiv \frac{\nabla \dot{q}_h}{dt} = \mathcal{Q}_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ . \tag{6.7}$$

La (6.7) mostra che la h-esima componente covariante del vettore accelerazione lagrangiano è uguale alla h-esima componente lagrangiana della sollecitazione attiva, e che dunque le equazioni di Lagrange rappresentano una formulazione covariante della seconda legge di Newton, a patto di considerare masse unitarie. Un confronto con la (5.27), inoltre, mostra che in assenza di forze le traiettorie dinamiche del sistema lagrangiano sono geodetiche dello spazio V_n rispetto alla metrica (6.2).

Per quel che concerne, invece, l'effetto delle forze attive, vale il ***principio di Maupertuis***, illustrato nel seguente

Teorema 6.1. *Sia S un sistema a vincoli olonomi, bilaterali, fissi e lisci e sottoposto a forze conservative, di potenziale $U(\mathbf{q})$. Allora le traiettorie dinamiche di S corrispondenti ad un dato valore dell'energia meccanica totale E sono geodetiche dello spazio delle configurazioni V_n dotato della metrica Riemanniana*

$$(d\sigma)^2 = 2(E-U)a_{ij}dq^i dq^j \equiv F a_{ij} dq^i dq^j \tag{6.8}$$

e vengono percorse con velocità

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2(E-U) \equiv F \ . \tag{6.9}$$

Dimostrazione. Procedendo come per le (5.26), introdotta l'ascissa curvilinea σ le equazioni delle geodetiche relative alla metrica (6.8) sono

$$\frac{d}{d\sigma}(F a_{ih} q'^h) - \frac{1}{2F}\frac{\partial F}{\partial q^h} - \frac{1}{2}F\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h}q'^i q'^j = 0 \ , \tag{6.10}$$

nelle quali $q'^i = \dfrac{dq^i}{d\sigma}$. Ricordando che da $T = E - U \geq 0$ risulta $U \leq E$, lungo queste curve si ha

$$F a_{ij} q'^i q'^j = 1 \Rightarrow a_{ij} q'^i q'^j = \frac{1}{F}$$

e la conservazione dell'energia meccanica totale comporta

$$2T = a_{ij}\dot{q}^i \dot{q}^j = F \ .$$

Dal cambio di parametro $\sigma \to t$, $\forall t$ segue

$$a_{ij} q'^i q'^j \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = F^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = F \ ,$$

e la (6.9) è dimostrata.
Le equazioni di Lagrange del sistema si scrivono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = -\frac{\partial U}{\partial q^h} \Rightarrow 2\frac{d}{dt}(a_{ih}\dot{q}^h) - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h}\dot{q}^i\dot{q}^j = -\frac{\partial U}{\partial q^h}$$

e introdotta l'ascissa curvilinea σ, esse divengono

$$2\frac{d}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}(a_{ih}q'^h\frac{d\sigma}{dt}) - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h}q'^i q'^j \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = -\frac{\partial U}{\partial q^h} \ ,$$

ossia

$$\frac{d}{d\sigma}(F a_{ih} q'^h) - \frac{1}{2}F\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^h}q'^i q'^j = \frac{1}{2F}\frac{\partial F}{\partial q^h} \ . \tag{6.11}$$

Confrontando (6.11) e (6.10), il teorema è dimostrato.

□

In conclusione a questo capitolo, si dimostrerà come gli strumenti della geometria differenziale consentano di costruire in maniera del tutto naturale la meccanica hamiltoniana a partire da quella lagrangiana. Si considerino le equazioni di Lagrange di un sistema fisico a vincoli olonomi, bilaterali, lisci e fissi. Sviluppando le derivate nelle equazioni di Lagrange (6.5) si ottiene

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^k \partial \dot{q}^h}\dot{q}^k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^h}\ddot{q}^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} = 0 \ . \tag{6.12}$$

Essendo

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}^h \partial \dot{q}^k} = a_{hk}(\mathbf{q}) \ ,$$

ponendo $a^{hk} \equiv a^{-1}_{hk}$, si ottengono le equazioni di Lagrange in forma normale

$$\ddot{q}^h = a^{hk}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^l \partial \dot{q}^h}\dot{q}^l\right) \ . \tag{6.13}$$

Introducendo le variabili ausiliarie $v^h = \dot{q}^h$ si può riscrivere il sistema di $2n$ equazioni differenziali (6.13) sulla varietà delle configurazioni V_n come un sistema di n equazioni differenziali sul fibrato tangente $T(V_n)$

$$\dot{q}^h = v^h \tag{6.14}$$

$$\dot{v}^h = a^{hk}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^l \partial v^h}v^l\right) \ . \tag{6.15}$$

Le (6.14) e (6.15) mostrano che le soluzioni delle equazioni di Lagrange, e dunque le traiettorie dinamiche del sistema, rappresentano le equazioni parametriche delle curve integrali del campo vettoriale $\mathbf{X} \in T(V_n)$ di componenti $\left(v^h, a^{hk}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^l \partial v^h}v^l\right)\right) \equiv (X^h, Y^h)$ nella base $\left(\frac{\partial}{\partial q^h}, \frac{\partial}{\partial v^h}\right)$. Introducendo la ***trasformata di Legendre***

$$L : (\mathbf{q},\mathbf{v}) \in T(V_n) \to (\mathbf{q},\mathbf{p}) = \left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}\right) \in T^*(V_n)$$

e il suo differenziale

$$(L)^* : \mathbf{X} = (X^h, Y^h) \in T(T(V_n)) \to (L)^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^* = ({X^*}^h, {Y^*}_h) \in T(T^*(V_n))$$

di componenti

$$(L)^* = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^h \partial v^k} & a_{hk} \end{pmatrix} \ ,$$

si può determinare il vettore $(L)^*(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^*$, di componenti $({X^*}^h, {Y^*}_h)$ nella base $\left(\frac{\partial}{\partial q^h}, \frac{\partial}{\partial p_h}\right)$ date da

$$\begin{pmatrix} {X^*}^h \\ {Y^*}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^h \partial v^k} & a_{hk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^k \\ Y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^h \partial v^k}X^k + a_{hk}Y^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^h \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} \end{pmatrix} \ .$$

In definitiva, la trasformata di Legendre associa ad ogni punto $(\mathbf{q},\mathbf{v})$ del fibrato tangente dello spazio delle configurazioni un punto $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ nel suo fibrato cotangente, e alle (6.14) e (6.15) le seguenti equazioni

$$\dot{q}^h = v^h \tag{6.16}$$

$$\dot{p}_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} \ . \tag{6.17}$$

Introducendo la ***funzione di Hamilton***

$$H : (\mathbf{q},\mathbf{p}) \in T^*(V_n) \to H(\mathbf{q},\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$$

con

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \left[p_h v^h + \mathcal{L}(\mathbf{q},\mathbf{v})\right]_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{q},\mathbf{p})} \ , \tag{6.18}$$

dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è ottenuta dalle relazioni di $p_h = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^h} = a_{hk} v^k$, si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial p_h} = v^h \\
&\frac{\partial H}{\partial q^h} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} \ .
\end{aligned}$$

A partire dalle (6.16) e (6.17), si possono dunque scrivere le ***equazioni canoniche di Hamilton***

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \tag{6.19}$$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} \ . \tag{6.20}$$

Questa trattazione si estende senza difficoltà al caso di un sistema S con vincoli non fissi, per il quale lo spazio delle configurazioni è $V_n \times \mathbb{R}$.

7 Dinamica Hamiltoniana

In conclusione a questo lavoro, si vuole introdurre la teoria di Hamilton da un punto di vista puramente geometrico ed indipendentemente dalla teoria lagrangiana.
Sia V_n lo spazio delle configurazioni di un sistema fisico S e T_{2n} il suo fibrato tangente, ossia lo spazio formato da tutte le coppie $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in V_n \times {T_0^1}_{\mathbf{q}}(V_n) \equiv V_n \times T_{\mathbf{q}}(V_n)$. Il suo spazio duale, lo ***spazio delle fasi*** di S, è il fibrato cotangente T_{2n}^*, costituito da tutte le coppie $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in V_n \times {T_1^0}_{\mathbf{q}}(V_n) \equiv V_n \times T_{\mathbf{q}}^*(V_n)$. Sia ben chiaro che, almeno a questo punto della trattazione, non è lecito identificare le p_h con i momenti coniugati $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h}$ poiché la varietà T_{2n}^* è stata introdotta in maniera del tutto generale, senza ricorrere ad una particolare applicazione (la trasformata di Legendre) come alla fine del capitolo precedente. All'introduzione su V_n di una carta (U, q^i) si può far corrispondere in T_{2n}^* la carta $(U \times \mathbb{R}^n, (q^i, p_i))$ detta ***naturale***. Nel dominio di una carta naturale $(U \times \mathbb{R}^n, (q^i, p_i))$ su T_{2n}^*, si consideri la 1-forma differenziale

$$\omega = p_h dq^h \ . \tag{7.1}$$

Data una seconda carta naturale $(\overline{U} \times \mathbb{R}^n, (\overline{q}^i, \overline{p}_i))$ tale che $\overline{U} \cap U \neq \emptyset$, in $(U \times \mathbb{R}^n) \cap (\overline{U} \times \mathbb{R}^n)$ la trasformazione di coordinate $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}})$ comporta, essendo $A^i_j = \dfrac{\partial q^i}{\partial \overline{q}^j}$,

$$\overline{\omega} = \overline{p}_k d\overline{q}^k = (A^h_k p_h)({A^{-1}}^h_k dq^h) = p_h dq^h = \omega \tag{7.2}$$

ossia la 1-forma differenziale ω preserva la propria forma sull'intera varietà. Questa proprietà è estremamente utile, in quanto la 2-forma differenziale chiusa ed esatta

$$\Omega = -d\omega = dq^h \wedge dp_h \tag{7.3}$$

definisce un campo tensoriale $\Omega \in \Lambda_2^0(T_{2n}^*)$ su tutto lo spazio delle fasi che è sempre rappresentato dalla matrice antisimmetrica

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \ , \tag{7.4}$$

dove con 0_n ed I_n si sono indicate rispettivamente una matrice nulla ed una matrice identica di dimensioni $n \times n$. Poiché $\det(\Omega) = 1$, l'applicazione Ω è non degenere. La coppia (T_{2n}^*, Ω), formata da una varietà differenziabile e da un campo tensoriale antisimmetrico e non degenere definito ovunque su di essa, dà luogo alla struttura di ***varietà simplettica***, di fondamentale importanza nella teoria di Hamilton. Similmente a quanto si fa per le varietà riemanniane, si può impiegare Ω per introdurre il ***prodotto antiscalare***

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T_0^1(T_{2n}^*) \times T_0^1(T_{2n}^*) \to \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \in \mathbb{R}$$

tale che

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

che può anche essere impiegato per esprimere la dualità sullo spazio delle fasi ponendo, similmente alla (5.19), $\forall \mathbf{X} \in T_0^1(T_{2n}^*)$

$$\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \omega(\mathbf{Y}) = \Omega_{ij} X^i Y^j = \omega_j Y^j \Rightarrow \omega_i = \Omega_{ij} X^j \ . \tag{7.5}$$

In seguito, per indicare l'applicazione (7.5) e dla sua inversa si impiegherà la conveniente notazione

$$\omega = \mathbf{X}^\flat \ , \qquad\qquad \mathbf{X} = \omega^\sharp \ .$$

Una carta locale $(D, (\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ su T_{2n}^* è detta ***canonica*** o ***simplettica*** se nelle coordinate $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ le componenti di Ω sono date dalla (7.4). Un criterio di simpletticità è dato dal seguente

Teorema 7.1. *Una trasformazione di coordinate* $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}})$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{q}} &= \overline{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \overline{\mathbf{p}} &= \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\end{aligned}$$

è simplettica se e solo se la matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} & \dfrac{\partial \overline{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{p}} \\ \\ \dfrac{\partial \overline{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}} & \dfrac{\partial \overline{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix}$$

verifica una delle seguenti condizioni tra loro equivalenti:

(1) $\Omega = (J^{-1})^T \Omega J^{-1}$

(2) $J^T \Omega = \Omega J^{-1}$

(3) $\Omega = J^T \Omega J = J \Omega J^T$

Dimostrazione. Le formule di trasformazione di un tensore $(0, 2)$ prescrivono che

$$\overline{\Omega}_{hk} = A^i_h A^j_k \Omega_{ij} = A^i_h \Omega_{ij} A^j_k \ . \tag{7.6}$$

Poiché deve essere $\overline{\Omega} = \Omega$, la (1) è dimostrata. (2) si ottiene da (1) moltiplicando a sinistra per J^T e la (3) si ottiene dalla (1) prendendo l'inverso di ambo i membri ed osservando che $\Omega^{-1} = -\Omega$.

□

Mentre il Teorema 7.1 fornisce dei criteri per riconoscere se una trasformazione di coordinate è simplettica, è difficilmente impiegabile per generare trasformazioni simplettiche. Per arrivare ad una formula più utile, si consideri che la condizione di simpletticità di una trasformazione di coordinate equivale a richiedere che

$$\overline{\Omega} = \Omega \Rightarrow d(\overline{\omega}) = d(\omega) \Rightarrow d(\overline{p}_h d\overline{q}^h) = d(p_h dq^h) \Rightarrow \overline{p}_h d\overline{q}^h - p_h dq^h = df \tag{7.7}$$

con $f \in \mathcal{F}(T^*_{2n})$ detta ***funzione generatrice della trasformazione***. La condizione (7.7) equivale a richiedere che le due forme differenziali $\overline{\omega}$ ed ω siano ***coomologhe*** su T^*_{2n}. Supponendo che la trasformazione simplettica

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{q}} &= \overline{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \overline{\mathbf{p}} &= \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\end{aligned}$$

soddisfi, ad esempio, l'ulteriore condizione

$$\det \left(\frac{\partial \overline{q}^h}{\partial p_h} \right) \neq 0 \ ,$$

si può scrivere

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{p}(\mathbf{q}, \overline{\mathbf{q}}) \\ \overline{\mathbf{p}} &= \overline{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \overline{\mathbf{q}})\end{aligned}$$

e dunque la (7.7) diviene

$$\overline{p}_h d\overline{q}^h - p_h dq^h = \frac{\partial f}{\partial q^h} dq^h + \frac{\partial f}{\partial \overline{q}^h} d\overline{q}^h \Rightarrow \left(\overline{p}_h - \frac{\partial f}{\partial \overline{q}^h} \right) d\overline{q}^h - \left(p_h + \frac{\partial f}{\partial q^h} \right) dq^h = 0 \ ,$$

dalla quale si ricavano le ben note relazioni

$$p_h = -\frac{\partial f}{\partial q^h}(\mathbf{q}, \overline{\mathbf{q}}) \tag{7.8}$$

$$\overline{p}_h = \frac{\partial f}{\partial \overline{q}^h}(\mathbf{q}, \overline{\mathbf{q}}) \ . \tag{7.9}$$

Infine, essendo evidente che in tal modo si possono generare infinite trasformazioni simplettiche, per rappresentarle nella loro forma usuale basta imporre che sia soddisfatta la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{q}^h \partial q^k}\right) \neq 0 \ .$$

Un campo $\mathbf{X}_H \in T_0^1(T_{2n}^*)$ si dice ***globalmente hamiltoniano*** se

$$\exists H \in \mathcal{F}(T_{2n}^*) : \mathbf{X}_H = (dH)^\sharp \ ,$$

dove H è detta ***funzione hamiltoniana*** del campo $\mathbf{X}_H$. $\mathbf{X}$ è invece ***localmente hamiltoniano*** se accade che

$$L_{\mathbf{X}}\Omega = 0 \ ,$$

cioè Ω è invariante rispetto al gruppo di diffeomorfismi ad un parametro generato dal campo $\mathbf{X}$, detto ***gruppo simplettico***. Vale il seguente

Teorema 7.2. *Un campo $\mathbf{X}_H$ globalmente hamiltoniano lo è anche localmente. Se, invece, $\mathbf{Y}$ è un campo localmente hamiltoniano, $\forall x = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T_{2n}^*$ esiste un intorno aperto U di x tale che $\forall y \in U$, $\mathbf{Y} = (dH)^\sharp$.*

Dimostrazione. Infatti, per la (3.24), l'esattezza di Ω, e la (7.5), si ha

$$L_{\mathbf{X_H}}\Omega = d(i_{\mathbf{X}_H}\Omega) = d((dH^\sharp)^\flat) = d(dH) = 0 \ .$$

Inoltre,

$$L_{\mathbf{Y}}\Omega = d(i_{\mathbf{Y}}\Omega) = d(\mathbf{Y}^\flat) = 0$$

implica che, almeno localmente, debba esistere una funzione f tale che $\mathbf{Y}^\flat = df \Rightarrow \mathbf{Y} = (df)^\sharp$.

$\square$

Più esplicitamente, a partire dalla funzione H il campo globalmente hamiltoniano $\mathbf{X}_H$ in componenti si scrive

$$H \xrightarrow{d} dH = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sharp} (dH)^\sharp = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_H \ . \tag{7.10}$$

Le curve integrali $\gamma(t)$ del campo $\mathbf{X}_H$ sono, per definizione, tali che

$$\dot{\gamma}(t) = \mathbf{X}_H(\gamma(t)) = (dH)^\sharp(\gamma(t)) \ ,$$

ossia, in componenti,

$$\dot{q}^h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \tag{7.11}$$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q^h} \ . \tag{7.12}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono curve lungo le quali le componenti del campo $\mathbf{X}_H$ sono costanti nel tempo, e dunque lungo le quali è costante nel tempo anche la funzione H stessa. Allora, se si sceglie una

funzione H che rappresenta l'***energia meccanica totale*** di un sistema fisico S e si ritiene valido il princìpio di conservazione dell'energia, *indipendentemente dalla descrizione lagrangiana del moto* le (7.11) e (7.12) sono proprio le ***equazioni di Hamilton*** (6.19) e (6.20) che determinano le traiettorie dinamiche di S.
Una terna (T^*_{2n}, Ω, H) si definisce ***sistema dinamico hamiltoniano***. Una funzione $f \in \mathcal{F}(T^*_{2n})$ è un ***integrale primo*** del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, H) se è costante lungo le curve integrali del campo hamiltoniano $\mathbf{X}_H$, ossia se $L_{\mathbf{X}_H} f = 0$.
L'applicazione

$$\{\cdot,\cdot\} : (f,g) \in \mathcal{F}(T^*_{2n}) \times \mathcal{F}(T^*_{2n}) \to \{f,g\} \in \mathcal{F}(T^*_{2n})$$

tale che

$$\{f,g\} = \Omega(df^\sharp, dg^\sharp) = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^h}\frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h}\frac{\partial g}{\partial q^h} \right) \tag{7.13}$$

è detta ***parentesi di Poisson*** di f con g. Per la (7.5) e la definizione di differenziale di una funzione, si ha

$$\{f,g\} = \Omega(df^\sharp, dg^\sharp) = ((df)^\sharp)^\flat(dg^\sharp) = (df)(\mathbf{X}_g) = \mathbf{X}_g(f) = L_{\mathbf{X_g}} f \ ,$$

e dunque una funzione $f \in \mathcal{F}(T^*_{2n})$ è un integrale primo del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, H) se

$$\{f, H\} = 0 \ .$$

Dalla (7.13) si deduce immediatamente che

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

e che dunque $\{\cdot,\cdot\}$ è un'operazione che genera un'algebra di Lie su $\mathcal{F}(T^*_{2n})$, le numerose proprietà della quale conducono al

Teorema 7.3. *Siano $f,g,h \in \mathcal{F}(T^*_{2n})$. Valgono le seguenti affermazioni:*

(1) f è un integrale primo del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, f).

(2) Se f è un integrale primo del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, g), g è un integrale primo del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, f).

(3) Se f e g sono due integrali primi del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, h), allora lo è anche $\{f,g\}$.

Dimostrazione.

(1) $\{f,f\} = 0$.

(2) $\{f,g\} = 0 = -\{g,f\}$.

(3) Dall'identità di Jacobi,

$$\{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0 = \{h,\{f,g\}\} = -\{\{f,g\},h\} \ .$$

□

Si vuole far notare che al punto *(3)* del teorema precedente non si offre alcuna garanzia che l'integrale primo $\{f,g\}$ sia indipendente da f, e g.
Si può adesso dimostrare il fondamentale

Teorema 7.4 (di Noether). *Una funzione $f \in \mathcal{F}(T^*_{2n})$ è integrale primo del sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, H) se e solo se il campo completo e globalmente hamiltoniano $\mathbf{X}_f = (df)^\sharp$ è generatore infinitesimale di un gruppo simplettico di simmetria di H.*

Dimostrazione.

Infatti, ponendo $H(\mathbf{x}) \equiv H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, essendo φ_s il gruppo simplettico di simmetria di H,

$$H(\varphi_s(\mathbf{x})) = H(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow L_{\mathbf{X_f}} H = 0 \Longleftrightarrow \{f, H\} = 0 \ .$$

$\square$

Si vuole sottolineare che, nel teorema di Noether appena dimostrato, richiedere che il campo $\mathbf{X}_f$ debba essere completo e globalmente hamiltoniano serve a conferire validità globale, in tutta la varietà T^*_{2n}, all'ultima implicazione. Infatti, se $\mathbf{X}_f$ non fosse completo genererebbe solo un gruppo locale di trasformazioni ad un parametro e la scrittura $\{f, H\} = 0$ sarebbe valida solo nel dominio di definizione di quest'ultimo. Similmente, se $\mathbf{X}_f$ non fosse globalmente hamiltoniano, il Teorema 7.2 permetterebbe di scrivere $\mathbf{X}_f = (df)^\sharp$ solo localmente.

Una r-forma differenziale $\omega \in \Lambda_r(T^*_{2n})$, $r < 2n$, si dice un ***invariante integrale assoluto*** del campo vettoriale completo $\mathbf{X}$ se

$$L_{\mathbf{X}} \omega = 0 \ .$$

Sussiste il seguente

Teorema 7.5. *Sia $\mathbf{X} \in T^1_0(T^*_{2n})$ un campo vettoriale completo e φ_s il gruppo di diffeomorfismi ad un parametro del quale esso è il generatore infinitesimale, $\omega \in \Lambda_r(T^*_{2n})$, con $r < 2n$, una r-forma differenziale, e Σ_k una sottovarietà k-dimensionale di T^*_{2n}. Allora ω è un invariante integrale assoluto di $\mathbf{X}$ se, $\forall s \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\Sigma_k} \omega = \int_{\varphi_s(\Sigma_k)} \omega \ . \tag{7.14}$$

La $(r-1)$-forma differenziale $\omega \in \Lambda_{r-1}(T^*_{2n})$ è un ***invariante integrale relativo*** del campo vettoriale completo $\mathbf{X} \in T^1_0(T^*_{2n})$ se

$$d(L_{\mathbf{X}} \omega) = 0 \ .$$

Per la proprietà (3.23), si può equivalentemente scrivere

$$L_{\mathbf{X}} d\omega = 0 \ ,$$

cioè ω è un invariante integrale relativo di $\mathbf{X}$ se $d\omega$ è un suo invariante integrale assoluto. Sussiste, analogamente al 7.5, il

Teorema 7.6. *Sia $\mathbf{X} \in T^1_0(T^*_{2n})$ un campo vettoriale completo e φ_s il gruppo di diffeomorfismi ad un parametro del quale esso è il generatore infinitesimale, $\omega \in \Lambda_{r-1}(T^*_{2n})$, con $(r-1) < 2n$, una $(r-1)$-forma differenziale, e Σ_k una sottovarietà k-dimensionale con bordo di T^*_{2n}. Allora ω è un invariante integrale relativo di $\mathbf{X}$ se, $\forall s \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\partial \Sigma_k} \omega = \int_{\varphi_s(\partial \Sigma_k)} \omega \ .$$

Si vuole, infine, presentare il significativo

Teorema 7.7. *Sia $\mathbf{X} \in T^1_0(T^*_{2n})$ un campo vettoriale completo. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{X}$ è localmente hamiltoniano;

(2) La 2-forma differenziale Ω è un invariante integrale assoluto di $\mathbf{X}$;

(3) La 1-forma differenziale ω tale che $\Omega = -d\omega$ è un invariante integrale relativo di $\mathbf{X}$.

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$ *(2)* Per la definizione di campo localmente hamiltoniano, $L_{\mathbf{X}}\Omega = 0$, e dunque Ω è invariante integrale assoluto di $\mathbf{X}$.

(2) $\Rightarrow$ *(3)* Per la definizione di invariante integrale assoluto, $L_{\mathbf{X}}\Omega = 0 = L_{\mathbf{X}}d\omega$.

(3) $\Rightarrow$ *(1)* Per la definizione di invariante integrale relativo, $L_{\mathbf{X}}d\omega = 0 = L_{\mathbf{X}}\Omega$.

$\square$

A conclusione di questo lavoro, si vogliono dimostrare due teoremi fondamentali.

Teorema 7.8 (di Liouville). *Sia (T^*_{2n}, Ω, H) un sistema dinamico hamiltoniano e si supponga completo il campo globalmente hamiltoniano $\mathbf{X}_H$. Allora la $2n$-forma differenziale di volume di T^*_{2n}*

$$\hat{\Omega} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\Omega^n \equiv \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\underbrace{\Omega \wedge \Omega \wedge ... \wedge \Omega}_{n \ volte}$$

è un invariante integrale assoluto di $\mathbf{X}_H$. Inoltre, in coordinate simplettiche è

$$\hat{\Omega} = dq^1 \wedge dq^2 \wedge ... \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge ... \wedge dp_n \ .$$

Dimostrazione. Per il teorema 7.2 $\mathbf{X}_H$ è anche localmente hamiltoniano; allora per le proprietà della derivazione di Lie e per il teorema 7.7 si ha

$$L_{\mathbf{X_H}}\hat{\Omega} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}L_{\mathbf{X_H}}\Omega^n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}(L_{\mathbf{X_H}}\Omega \wedge ... \wedge \Omega + \Omega \wedge L_{\mathbf{X_H}}\Omega \wedge ... \wedge \Omega + ... + \Omega \wedge ... \wedge L_{\mathbf{X_H}}\Omega) = 0 \ ,$$

ossia $\hat{\Omega}$ è invariante integrale assoluto di $\mathbf{X}_H$. Si consideri ora la 2-forma differenziale $\Omega = dq^h \wedge dp_h$. Poiché l'operazione di prodotto esterno tra due forme differenziali in una varietà differenziabile V_n è tale che

$$\wedge : (\alpha, \beta) \in \Lambda_p(V_n) \times \Lambda_q(V_n) \to \alpha \wedge \beta \in \Lambda_{p+q}(V_n) \ ,$$

con $p, q, p + q < 2n$, allora

$$\Omega^n = \underbrace{\Omega \wedge \Omega \wedge ... \wedge \Omega}_{n \text{ volte}} \in \Lambda_{2n}(T^*_{2n}) \ .$$

Per le proprietà del prodotto esterno, gli unici termini non nulli di Ω^n saranno nella forma $(dq^{i_1} \wedge dp_{i_1}) \wedge (dq^{i_2} \wedge dp_{i_2}) \wedge ... \wedge (dq^{i_n} \wedge dp_{i_n})$ per ognuna delle $n!$ possibili permutazioni degli indici $i_1, i_2, ..., i_n$. Si consideri il particolare termine $(dq^1 \wedge dp_1) \wedge (dq^2 \wedge dp_2) \wedge ... \wedge (dq^n \wedge dp_n)$; ogni altro può essere ricondotto a questa forma tramite permutazioni di coppie di elementi del tipo $(dq^h \wedge dp_h)$, i cui indici sono di classe pari e che dunque non causano cambiamenti di segno. Infine, $(dq^1 \wedge dp_1) \wedge (dq^2 \wedge dp_2) \wedge ... \wedge (dq^n \wedge dp_n)$ può essere posto nella forma $dq^1 \wedge dq^2 \wedge ... \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge ... \wedge dp_n$ tramite $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n-1)}{2}$ permutazioni verso sinistra dei termini dq^h. In conclusione,

$$\Omega^n = n!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dq^1 \wedge dq^2 \wedge ... \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge dp_2 \wedge ... \wedge dp_n \ .$$

$\square$

Per illustrare l'importanza del teorema di Liouville, si consideri un sistema dinamico hamiltoniano (T^*_{2n}, Ω, H) e sia W una particolare sottovarietà di T^*_{2n} formata dalle possibili condizioni iniziali del moto del sistema fisico in esame. Allora, il campo $\mathbf{X}_H = (dH)^\sharp$ è per definizione globalmente hamiltoniano, e la forma di volume $\hat{\Omega}$ di W è un suo invariante integrale assoluto, ossia non cambia sotto l'azione del gruppo simplettico di diffeomorfismi ad un parametro φ_s generato da $\mathbf{X}_H$, le orbite del quale sono evidentemente le traiettorie dinamiche del sistema fisico stesso, in quanto curve integrali di $\mathbf{X}_H$. Dunque il volume della regione W non cambia durante il moto ed inoltre le traiettorie dinamiche del sistema (T^*_{2n}, Ω, H) vi tornano infinite volte, come dimostrato dal seguente

Teorema 7.9 (di Poincarè). *Sia $W \subset T^*_{2n}$ una sottovarietà di T^*_{2n} compatta ed invariante rispetto al gruppo di diffeomorfismi φ_t. Allora, per ogni sottovarietà $S_0 \subset W$ e $\tau > 0$, $\exists t_1 > \tau : S_0 \cap \varphi_{t_1}(S_0) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione.

Per il teorema di Liouville, per qualsivoglia valore $\tau > 0$ di t le regioni $S_n \equiv \varphi_{n\tau}(S_0)$, $n \in \mathbb{N}$, hanno lo stesso volume e sono contenute in W. Poiché W è compatta, esistono sicuramente due interi $m, m+k$ per i quali $S_m \cap S_{m+k} \neq \emptyset$. Se così non fosse, per l'invarianza di W vi sarebbero un numero infinito di insiemi $S_n \subset W$ distinti tra loro e di volume costante, ossia W avrebbe volume infinito, in contraddizione con l'ipotesi di compattezza. Se accade che $S_m \cap S_{m+k} \neq \emptyset$ sia vera per $m = 0$, la tesi del teorema è dimostrata. In caso sia $m \geq 1$, allora, per le proprietà del gruppo φ_t, si può scrivere

$$S_m \cap S_{m+k} \neq \emptyset \Rightarrow \varphi_{m\tau}(S_0) \cap \varphi_{m\tau}\varphi_{k\tau}(S_0) \neq \emptyset \Rightarrow S_0 \cap \varphi_{k\tau}(S_0) \neq \emptyset \ .$$

$\square$