# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base**

**Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

**Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"**


*Laurea Triennale in Fisica*

# Oscillatore armonico unidimensionale in un modello di meccanica quantistica con principio di indeterminazione generalizzato


**Relatori:**
Prof.Gennario Miele

**Candidato:**
Schiavone Michele
Matr. $N85000874$


**Anno Accademico 2017/2018**

# Indice

# Capitolo 1

# Relazioni di indeterminazione di minima lunghezza

## 1.1 Introduzione

L'esistenza di una *minima lunghezza* osservabile è da tempo suggerita nell'ambito della gravità quantistica e nella teoria delle stringhe. In questo viene analizzato il lavoro di Kempf,Mangano e Mann ([**?**] e per alcuni calcoli in dettaglio [**?**]) sul "principio di indeterminazione generalizzato" che descrive la lunghezza minima, nell'ambito della meccanica quantistica, come una minima incertezza nelle misure di posizione; in particolare si è studiata la struttura quanto-meccanica che sta alla base di questa relazione di indeterminazione. Ma come sono legati gli effetti quantogravitazioniali al nuovo principio di indeterminazione? Innanzitutto, sappiamo che usare la relatività generale e la meccanica quantistica allo stesso tempo per descrivere lo stesso fenomeno porta a delle inconsistenze e una possibile teoria di gravità quantistica dovrà includere nuove descrizione e nuovi fenomeni alle scale di Planck.A queste grandezze si presume infatti che gli effetti "quantogravitazionali" inizino a diventare rilevanti.Tuttavia queste scale sono molto lontane dalle scale che possiamo raggiungere in laboratorio. Consideriamo ad esempio l'energia di Planck ($E_{Pl} \sim 10^{16} Tev$) o la lunghezza di Planck($L_{Pl} \sim 10^{-35} m$) comparate con l'energia raggiunta nell'LHC($E \sim 14 Tev$) e con l'incertezza nella posizione degli specchi di LIGO($h \sim 10^{-18} m$). È chiaro che siamo ben lontani dal raggiungere queste scale in laboratorio, e quindi per avere delle informazioni su questi fenomeni dobbiamo ragionare attraverso esperimenti mentali. Come vedremo ora, questi esperimenti non riguardano la quantizzazione della gravità, bensi gli effetti della gravità su sistemi quantomeccanici.

## 1.2 Prime considerazioni euristiche

Un primo approccio si basa sul fatto che alle scale di Planck ci si aspetta che lo spazio tempo non sia più continuo, bensi diventi una sorta di "schiuma"(Vedere [**?**]). Per renderci conto di ciò, consideriamo ciò che accade quando si sondano distanze sempre più piccole in Meccanica Quantistica. Questo può essere fatto considerando lo scattering di particelle sempre più energetiche.
In Meccanica Quantistica la scala di lunghezza che descrive la "portata" dell'interazione e che possiamo sondare è data dalla lunghezza di Compton

$$R_C = \frac{\hbar}{Mc^2}$$

dove M è la massa a riposo della particella che stiamo analizzando nel processo di scattering. D'altra parte, la Relatività Generale ha la propria scala di lunghezze, ovvero il raggio di Schwarzschild

$$\frac{R_S}{2} = \frac{GM}{c^2}$$

Il raggio di Schwarzschild rappresenta il raggio dell'orizzonte degli eventi di un buco nero di Schwarzschild di massa M. Si noti che l'unico parametro nelle due definizioni è la massa. Aumentando la massa si ha una migliore risoluzione nelle lunghezze in MQ, ma aumenta anche l'importanza delle interazioni gravitazionali. Per un valore specifico della massa, queste scale sono le stesse

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \qquad\qquad R_C = \frac{R_S}{2} = L_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

Applichiamo ora il principio di indeterminazione di Heisenberg ad un processo di misura. Nel caso relativistico si ha $E \sim cp$ e dunque

$$\Delta E \Delta x \gtrsim \frac{\hbar c}{2}$$

Questa relazione implica che l'osservazione di una regione di dimensione $\Delta x$ introduce una fluttuazione della metrica di ampiezza $\Delta E$. Fin quando il raggio di Schwarzschild associato a queste fluttuazioni è più piccolo della risoluzione dello strumento, non ci sono effetti visibili. Ma quando questo raggio diventa dello stesso ordine della risoluzione dello strumento, considerare piccole porzioni di spazio aumenta le fluttuazioni dell'energia e quindi il raggio di Schwarzschild, limitando la precisione.
Dunque siamo forzati a introdurre un nuovo termine nella relazione di indeterminazione

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar c}{2\Delta E} + 2\frac{G\Delta E}{c^4}$$

Si noti che se scriviamo le fluttuazioni energetiche in termini di una massa effettiva $M = \frac{\Delta E}{c^2}$ la relazione di indeterminazione diventa

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{2Mc} + 2\frac{GM}{c^2}$$

che mostra come il contributo all'indeterminazione dipende dalla lunghezza di Compton e dal raggio di Schwarzschild.
Dunque, non possiamo aumentare arbitrariamente la risoluzione spaziale senza incorrere in interazioni gravitazionali trascurabili. In particolare, ci aspettiamo che si formino dei micro buchi neri i quali non ci consentono di sondare distanze più piccole della lunghezza di Planck. Questo suggerisce l'esistenza di una lunghezza minima misurabile nelle teorie quantistiche di gravità.

## 1.3 Principio di indeterminazione generalizzato

In una dimensione, il più semplice principio di indeterminazione generalizzato che implica una minima incertezza $\Delta x_0$ nella posizione ha la forma

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\left(1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma\right) \tag{1.1}$$

dove $\beta$ e $\gamma$ sono positivi e non dipendono da $\Delta x$ e $\Delta p$ (ma in generale possono dipendere dai loro valori di aspettazione).
Mentre nella meccanica quantistica ordinaria $\Delta x$ può essere reso arbitrariamente piccolo facendo crescere allo stesso modo $\Delta p$ in modo tale che

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.2}$$

nella *nuova* meccanica quantistica questo non vale più poichè se $\Delta x$ decresce mentre $\Delta p$ cresce, il nuovo termine $\beta(\Delta p)^2$ potrebbe eventualmente crescere più velocemente del termine di sinistra nella relazione (1.1) e dunque $\Delta x$ non può essere reso arbitrariamente piccolo.

Questo tipo di principio di indeterminazione appare nel contesto della gravità quantistica e nella teoria delle stringhe. Esso permette di esprimere l'idea che una minima lunghezza effettiva può essere descritta, dal punto di vista della meccanica quantistica, come una minima incertezza nelle misure di posizione. Più in generale, la relazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}\left(1 + \alpha(\Delta x)^2 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma\right) \tag{1.3}$$

implica una minima incertezza sia nella posizione che nel momento. Ricordiamo che,in generale, per una qualsiasi coppia di osservabili $\hat{A}$ e $\hat{B}$ , rappresentati come operatori simmetrici nel dominio di $\hat{A}^2$ e $\hat{B}^2$, vale che

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \tag{1.4}$$

In particolare osserviamo che il commutatore tra $\hat{x}$ e $\hat{p}$ costruito in questo modo

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \alpha \hat{x}^2 + \beta \hat{p}^2) \tag{1.5}$$

soddisfa la (1.3) con $\gamma = \alpha < \hat{x}^2 > + \beta < \hat{p}^2 >$.

# Capitolo 2

# Rappresentazione nello spazio di Hilbert

Dobbiamo costruire lo spazio di Hilbert che rappresenta la nuova algebra di Heisenberg a cui obbediscono gli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$. Generalmente richiediamo che gli stati fisici non solo siano normalizzabili, ma che abbiano anche ben definiti valori di aspettazione di posizione e momento con le loro rispettive incertezze.

È importante notare che questo implica che i nostri stati fisici siano definiti nel dominio comune $D_{x,x^2,p,p^2}$ in cui gli operatori $\hat{x}$ , $\hat{p}$ , $\hat{x}^2$ e $\hat{p}^2$ sono simmetrici. Su questo dominio vale il principio di indeterminazione generalizzato e possiamo quindi concludere che gli stati fisici abbiano dei vincoli da rispettare dettati appunto dal nuovo principio di indeterminazione.

Nella meccanica quantistica ordinaria $\hat{x}$ e $\hat{p}$ possono essere rappresentati come operatori di moltiplicazione e di derivazione agenti sulle funzioni a quadrato sommabile nello spazio delle configurazioni o nello spazio dei momenti, ovvero sulle funzioni d'onda

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \qquad \psi(p) = \langle p|\psi\rangle \tag{2.1}$$

dove $|x\rangle$ e $|p\rangle$ sono gli autostati di posizione e impulso, che però non sono stati fisici dal momento che non sono normalizzabili e quindi non sono rappresentabili nello spazio di Hilbert.

Tuttavia $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sono essenzialmente autoaggiunti e gli autostati di posizione e impulso possono essere approssimati con precisione arbitraria da una serie di stati fisici $|\psi_n\rangle$ che siano sempre più localizzati nello spazio dei momenti o delle posizioni

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta x_{|\psi_n\rangle} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \Delta p_{|\psi_n\rangle} = 0 \tag{2.2}$$

La situazione cambia drasticamente con l'introduzione di una minima incertezza $\Delta x_0 \geq 0$ e/o $\Delta p_0 \geq 0$.

Ad esempio,una minima incertezza nella posizione

$$\Delta x_{|\psi\rangle} = \langle\psi|(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2|\psi\rangle \geq \Delta x_0 \tag{2.3}$$

implica che non ci può essere nessuno stato fisico che può essere un autostato della posizione dal momento che, per definizione, un autostato di $\hat{x}$ ha un indeterminazione nulla nella posizione.
Questo però non esclude l'esistenza di "autostati formali della posizione" definiti nel dominio di $\hat{x}$ ma non in $D_{x,x^2,p,p^2}$. Vedremo che questi autostati formali esistono e hanno energia infinita.
La novità importante è che non è più possibile approssimare questi autostati formali con una serie di stati fisici sempre più localizzati in quanto tutti gli stati fisici devono avere una minima incertezza nella posizione. Tecnicamente, come vedremo, una minima indeterminazione nella posizione si traduce nel fatto che l'operatore posizione non è più essenzialmente autoaggiunto ma solo simmetrico. Dunque, dal momento che non esistono più autostati della posizione,l'algebra di Heisenberg non può essere rappresentata nello spazio delle configurazioni in termini delle funzioni d'onda $\langle x|\psi\rangle$. Lavoreremo allora nel caso $\alpha = 0$, questo ci permetterà di lavorare in modo conveniente nello spazio dei momenti dove è ancora possibile rappresentare gli stati in termini di $\langle p|\psi\rangle$.

## 2.1 Rappresentazione dell'algebra di Heisenberg nello spazio dei momenti

Consideriamo l'algebra di Heisenberg generata da $\hat{x}$ e $\hat{p}$ che obbedisce alla seguente regola di commutazione

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2) \tag{2.4}$$

Il corrispondente principio di indeterminazione è

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}(1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle p\rangle^2) \tag{2.5}$$

La curva che delimita la regione permessa è

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta} - \langle p\rangle^2} \tag{2.6}$$

per cui deve essere che

$$\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 \geq \frac{1}{\beta} + \langle p\rangle^2$$

da cui

$$\Delta x \geq \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1+\beta\langle p\rangle^2}$$

Dunque la più piccola incertezza nella posizione si ottiene per $\langle p\rangle = 0$ e si ha

$$\Delta x_0 = \hbar\sqrt{\beta} \tag{2.7}$$

Come abbiamo già accennato, non essendoci una minima incertezza nel momento, possiamo rappresentare l'algebra di Heisenberg nello spazio dei momenti. In questa rappresentazione, $\hat{p}$ e $\hat{x}$ agiscono come segue :

$$\begin{aligned} \hat{p}\,\psi(p) &= p\,\psi(p) \\ \hat{x}\,\psi(p) &= i\hbar(1+\beta p^2)\partial_p\psi(p) \end{aligned} \tag{2.8}$$

nel dominio $S_\infty$ delle funzioni che descrescono più velocemente di qualsiasi polinomio.
È immediato verificare che cosi definiti, gli operatori soddisfano la regola di commutazione (2.4). Inoltre $x$ e $p$ sono simmetrici su $S_\infty$ ma rispetto al prodotto scalare

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\phi(p)$$

Per $p$ è immediato verificarlo, per quanto riguarda $x$ si ha

$$\langle\psi|x\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)(i\hbar(1+\beta p^2)\partial_p\phi(p)$$

da cui integrando per parti e ricordando che le funzioni sono di $S_\infty$ si ha

$$\langle\psi|x\phi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}i\hbar(1+\beta p^2)\partial_p\psi^*(p)\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}[i\hbar(1+\beta p^2)\partial_p\psi(p)]^*\phi(p) = \langle x\psi|\phi\rangle$$

Osserviamo inoltre che

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\langle\psi|p\rangle\langle p|\phi\rangle$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}|p\rangle\langle p| = 1 \qquad \text{Operatore Identità} \tag{2.9}$$

e

$$\langle p'|\phi\rangle = \phi(p') = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\langle p'|p\rangle\phi(p)$$

e dunque il prodotto scalare degli autostati del momento è

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta p^2)\delta(p-p') \tag{2.10}$$

Mentre $p$ è ancora essenzialmente autoaggiunto, è possibile verificare che per x esistono estensioni autoaggiunte.

## 2.2 Analisi Funzionale Operatore Posizione

Il problema agli autovalori per l'operatore posizione, nello spazio dei momenti, ha la forma di un'equazione differenziale

$$i\hbar(1+\beta p^2)\partial_p\psi_\lambda(p) = \lambda\psi_\lambda(p)$$

Risolvendola,si ottengono le autofunzioni "formali" della posizione

$$\psi_\lambda(p) = c\exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar\beta}\arctan\sqrt{\beta}p\right)$$

Essi sono normalizzabili e si ha

$$\langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle = 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}|c|^2 = |c|^2\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$$

e dunque

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}}\exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar\beta}\arctan\sqrt{\beta}p\right) \tag{2.11}$$

Tuttavia sappiamo, dal principio di indeterminazione, che queste autofunzioni formali non sono stati fisici.
Possiamo osservare però che per $\lambda = i$ e $\lambda = -i$ esiste un unica autofunzione normalizzabile. Questo significa che il $Ker(x^* \pm i)$ è non vuoto. Poichè gli indici di difetto sono

$$d_+(x^*) = d_-(x^*) = 1$$

l'operatore posizione ammette una famiglia di estensioni autoaggiunte dipendenti da un parametro. (Si veda il teorema 4 nell'appendice)
Nel caso che stiamo analizzando, è possibile costruire questa famiglia che diagonalizza x esplicitamente. Per far ciò calcoliamo il prodotto scalare degli autostati formali $|\psi_\lambda\rangle$

$$\langle\psi_{\lambda'}|\psi_\lambda\rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{1+\beta p^2}\exp\left(\frac{-i(\lambda-\lambda')}{\hbar\beta}\arctan\sqrt{\beta}p\right)$$

poniamo $t = \arctan\sqrt{\beta}p \rightarrow dt = \sqrt{\beta}\frac{dp}{1+\beta p^2}$
Si ha :

$$\langle\psi_{\lambda'}|\psi_\lambda\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt\exp\left(\frac{-i(\lambda-\lambda')}{\hbar\beta}t\right) =$$

$$\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda'-\lambda)\pi}\Big[\exp\left(\frac{i(\lambda'-\lambda)}{\hbar\beta}\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(\frac{-i(\lambda'-\lambda)}{\hbar\beta}\frac{\pi}{2}\right)\Big]$$

$$= 2\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda'-\lambda)}\sin\big(\frac{\lambda'-\lambda}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\big)$$

Questi autostati formali in generale non sono ortogonali, ma il set di autofunzioni parametrizzate da $\lambda \in [-1; 1[$

$$\left\{ \left| \psi_{(2n+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}} \right\rangle \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

sono autovettori ortonormali,infatti

$$\left\langle \psi_{(2n+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}} \middle| \psi_{(2n'+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}} \right\rangle = \frac{1}{\pi(n-n')} \sin{(n-n')\pi} = \delta_{n,n'}$$

Si può dimostrare che questo set è anche completo.
Possiamo immaginare che queste autofunzioni formino un reticolo di autostati formali, con passo del reticolo $2\hbar\sqrt{\beta}$, ovvero $2\Delta x_0$. Queste diagonalizzano (formalmente) x. Potremmo essere tentati di interpretare questo risultato come se stessimo descrivendo la fisica su un reticolo nello spazio delle configurazioni, ma è un interpretazione sbagliata dal momento che gli autostati formali $|\psi_\lambda\rangle$ non sono stati fisici. Questo perchè essi non sono definiti nel dominio di $p$. Fisicamente ciò significa che hanno un indeterminazione infinita nel momento e in particolare energia infinita

$$\langle\psi_\lambda|\frac{p^2}{2m}|\psi_\lambda\rangle = divergente$$

## 2.3 Recuperare informazioni sulla posizione : Stati di massima localizzazione

Nella meccanica quantistica ordinaria, tutta l'informazione sulla posizione è codificata negli elementi di matrice dell'operatore posizione. Gli elementi di matrice possono essere calcolati in qualsiasi base, anche nella base di autostati del momento.
Ora non abbiamo più alcuna base di autostati $|x\rangle$ della posizione, i cui elementi di matrice $\langle x|\psi\rangle$ avrebbero la diretta interpretazione fisica sulla posizione.
D'altronde è ancora possibile avere informazioni sulla posizione. A questo scopo, studieremo gli stati che realizzano la massima localizzazione permessa.

### Stati di massima localizzazione

Calcoliamo esplicitamente gli stati $|\psi_\xi\rangle$ di massima localizzazione attorno alla posizione $\xi$, ovvero gli stati che hanno le proprieta

- $\langle\psi_\xi|x|\psi_\xi\rangle = \xi$
- $\Delta x_{|\psi_\xi\rangle} = \Delta x_0$

Ricordiamo che $\Delta x_0$ dipende da $\langle p\rangle$ e che la minima incertezza assoluta si ha per $\langle p\rangle = 0$ Ricordiamo che in generale per qualsiasi stato $|\psi\rangle$ appartenente al dominio in cui $x$, $p$, $x^2$ e $p^2$ sono simmetrici,la norma definita in questo modo è positiva :

$$\left\|\left\{\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle+\frac{\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle}{2\Delta p^2}(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)\right\}|\psi\rangle\right\| \geq 0 \tag{2.12}$$

Ricordando che $[\hat{x},\hat{p}]$ è immaginario si ottiene

$$\langle\psi|\,(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2-\left(\left|\frac{\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle}{2\Delta p^2}\right|\right)^2\big(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle\big)^2\,|\psi\rangle \geq 0 \tag{2.13}$$

come sappiamo

$$\Delta x\Delta p \geq |\frac{\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle}{2}| \tag{2.14}$$

quindi $|\psi\rangle$ è uno stato limite se e solo se $\Delta x\Delta p = |\frac{\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle}{2}|$ cioè se

$$\left\{\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle+\frac{\langle[\hat{x},\hat{p}]\rangle}{2\Delta p^2}(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)\right\}|\psi\rangle = 0 \tag{2.15}$$

che si traduce nell'equazione differenziale

$$\left[i\hbar(1+\beta p^2)\partial_p-\langle x\rangle+i\hbar(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)\frac{1+\beta\Delta p^2+\beta\langle\hat{p}\rangle^2}{2\Delta p^2}\right]\psi(p) = 0 \tag{2.16}$$

la cui soluzione è

$$\psi(p) = N(1+\beta p^2)^{-\frac{1+\beta\Delta p^2+\beta\langle\hat{p}\rangle^2}{4\beta\Delta p^2}}exp\left[\left(\frac{\langle\hat{x}\rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}}+\frac{1+\beta\Delta p^2+\beta\langle\hat{p}\rangle^2}{2\sqrt{\beta}\Delta p^2}\right)arctan(\sqrt{\beta}p)\right] \tag{2.17}$$

ponendo $\langle\hat{p}\rangle = 0$ e $\Delta p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ , condizioni sotto le quali si ha $\Delta x = \Delta x_o$ , si ottiene

$$\psi_\xi(p) = N(1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}}exp\left\{\frac{\langle\hat{x}\rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}}arctan(\sqrt{\beta}p)\right\} \tag{2.18}$$

infine

$$1 = |N|^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{(1+\beta p^2)^2} = |N|^2\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \quad quindi \quad N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \tag{2.19}$$

Questi stati, a differenza delle $|\psi_\lambda\rangle$ , sono stati fisici di energia finita

$$\langle\psi_\xi|\,\frac{p^2}{2m}\,|\psi_\xi\rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^2dp}{2m(1+\beta p^2)^2} \tag{2.20}$$

applicando il teorema dei residui per il calcolo dell'integrale si ottiene

$$\langle\psi_\xi|\,\frac{p^2}{2m}\,|\psi_\xi\rangle = \frac{1}{2\beta m} \tag{2.21}$$

gli stati di massima localizzazione non sono in genere ortogonali

$$\langle\psi_\xi|\psi_\xi\rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{(1+\beta p^2)^2}exp\bigg\{-\frac{\xi'-\xi}{i\hbar\sqrt{\beta}}arctan(\sqrt{\beta}p)\bigg\} \tag{2.22}$$

dal calcolo diretto

$$\langle\psi_{\xi'}|\psi_\xi\rangle = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\xi'-\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)-\left(\frac{\xi'-\xi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)^3\right]^{-1}\sin\left(\frac{(\xi'-\xi)\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right) \tag{2.23}$$

Come sarà mostrato nella prossima sezione gli stati di massima localizzazione oltre ad essere quelli che minimizzano l'indeterminazione sulla posizione possono essere impiegati per rappresentare altri stati in uno spazio detto delle "quasiposizioni".

## 2.4 Funzione d'onda della quasiposizione

Nella meccanica quantistica ordinaria è spesso utile espandere gli stati $|\psi\rangle$ nella base che diagonalizza $x$, cioè $|x\rangle$, come $\langle x|\psi\rangle$.
Come già più volte detto, nella nuova MQ non abbiamo questa base ma una famiglia a un parametro di estensioni autoaggiunte di $x$, che però non sono stati fisici e in più non possono essere approssimati da stati sempre più localizzati.
Tuttavia possiamo proiettare il generico stato $\phi$ sullo stato di massima localizzazione $|\psi_\xi\rangle$ per ottenere l'ampiezza di probabilità per la particella di essere maggiormente localizzata attorno alla posizione $\xi$.
Definiamo queste proiezioni *funzioni d'onda della quasi posizione* $\phi$

$$\phi(\xi) = \langle\psi_\xi|\phi\rangle \tag{2.24}$$

Dunque la trasformazione della funzione d'onda dallo spazio dei momenti a quello delle *"quasiposizioni"* è

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{(1+\beta p^2)^{\frac{3}{2}}}\exp\bigg\{\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p\bigg\}\psi(p) \tag{2.25}$$

La funzione d'onda della quasiposizione degli autostati del momento $\psi_{\tilde{p}}(p) = \delta(p-\tilde{p})$ di energia $E = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$ è ancora un'onda piana del tipo

$$A(\tilde{p})\exp\bigg\{\frac{i}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\Big(\sqrt{\beta}\tilde{p}\Big)\xi\bigg\}$$

Tuttavia, per la sua lunghezza d'onda otteniamo una diversa relazione di dispersione

$$k(\tilde{p}) = \frac{\arctan\left(\sqrt{\beta}\tilde{p}\right)}{\hbar\sqrt{\beta}} = \frac{2\pi}{\lambda(\tilde{p})}$$

da cui

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\arctan\left(\sqrt{2m\beta E}\right)} \tag{2.26}$$

L'esistenza di un limite nella precisione con cui può essere distinta la posizione si manifesta nel fatto che, essendo l'arcotangente limitata, esiste una lunghezza d'onda minima apprezzabile. La decomposizione di Fourier della funzione d'onda della quasiposizione non contiene componenti di lunghezze d'onda più piccole di

$$\lambda_0 = 4\hbar\sqrt{\beta}$$

dal momento che l'energia diverge per $\lambda \to \lambda_0$
La trasformazione che mappa le funzioni d'onda nello spazio dei momenti in quello delle quasi posizioni è una generalizzazione della trasformata di Fourier ed è ancora invertibile. Per trovarla esplicitamente osserviamo che la (2.25) può essere riscritta in questo modo

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p)\psi(p)dp$$

La funzione che stiamo cercando noi è $K^{-1}(\xi, p)$ per cui si ha

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\xi, p)\psi(\xi)d\xi$$

Sostituendo l'espressione integrale di $\psi(\xi)$ nel secondo integrale si ha

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\xi, p)\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p')\psi(p')dp'd\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p')\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p')K^{-1}(\xi, p)dp'd\xi$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p')K^{-1}(\xi, p)d\xi = \delta(p - p')$$

Per confronto si ottiene

$$K(\xi, p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}(1 + \beta p^2)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right\}$$

e

$$K^{-1}(\xi, p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}}(1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan\sqrt{\beta}p\right\}$$

come si può verificare dal calcolo diretto. Dunque la funzione d'onda d'onda nello spazio dei momenti si ottiene da :

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p\right\}\psi(\xi)$$

## 2.5 Azione degli operatori x e p nello spazio delle quasiposizioni

Il prodotto scalare degli stati nella rappresentazione della quasi posizione diventa :

$$\langle\psi|\phi\rangle = \frac{1}{8\pi\sqrt{\beta}\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi dp d\xi'(1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i(\xi-\xi')}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\psi^*(\xi)\phi(\xi')$$

Vogliamo determinare le rappresentazioni di $x$ e $p$ nello spazio delle quasiposizioni. Per quanto riguarda il momento, osserviamo che

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}}\partial_\xi\left(e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\right)\phi(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\partial_\xi\phi(\xi)$$

per l'integrazione per parti, ma si ha anche

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}}\partial_\xi\left(e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\right)\phi(\xi) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}} i\frac{\arctan\sqrt{\beta}p}{\sqrt{\beta}\hbar} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\phi(\xi)$$

L'azione di p nello spazio delle quasi posizioni è

$$\hat{p}\psi(\xi) = \frac{\tan\left(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi\right)}{\sqrt{\beta}}\psi(\xi) \tag{2.27}$$

Per quanto riguarda $x$

$$\hat{x}\,\psi(p) = i\hbar(1+\beta p^2)\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\partial_p\left[(1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\right]\phi(\xi)$$

Calcoliamo a parte la derivata

$$\partial_p\left[(1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\right] = \left\{(1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}}\beta p - (1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}}\frac{i\xi}{\hbar(1+\beta p^2)}\right\} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p} =$$

$$= (1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}}\big[\beta p - \frac{i}{\hbar}\xi\big]e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}$$

e dunque

$$\hat{x}\,\psi(p) = i\hbar\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\Big(\beta p - \frac{i}{\hbar}\xi\Big)(1+\beta p^2)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p}\psi(\xi)$$

da cui segue che la rappresentazione di x nello spazio delle quasi posizioni è

$$\hat{x}\psi(\xi) = \xi + i\hbar\sqrt{\beta}\tan\Big(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi\Big)\psi(\xi) \tag{2.28}$$

Concludiamo con alcune importanti caratteristiche della rappresentazione nello spazio delle quasiposizioni. Come visto,gli operatori $x$ e $p$ sono esprimibili in termini di operatori di moltiplicazione e differenziali $\xi$ e $-i\hbar\partial_\xi$ i quali obbediscono alle regola di commutazione canonica.
Osserviamo che $x$ e $p$ sono ben definiti solo quando agiscono su $\psi(\xi)$. Su una generica funzione di $\xi$ l'espansione in serie di potenze di $-i\hbar\partial_\xi$ della tangente potrebbe non convergere. In aggiunta,l'operatore posizione non è diagonalizzabile in nessun dominio in cui $x^2$ e $p^2$ sono simmetrici, in particolare la rappresentazione nello spazio delle quasiposizioni non lo diagonalizza.
Il maggior vantaggio della rappresentazione nello spazio delle quasiposizioni è che essa ha una diretta interpretazione fisica. Ricordiamo infatti che $\psi(\xi)$ rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare la particella con massima localizzazione attorno a $\xi$ e con deviazione standard $\Delta x_0$.

## 2.6 Osservazioni : Legame tra differenti algebre di Heisenberg

È importante capire se è possibile legare la nuova meccanica quantistica con quella ordinaria nel limite in cui $\beta \to 0$ Esistono omomorfismi di algebre tra la nuova algebra di Heisenberg appena sviluppata e quella canonica $[x_0, p_0] = i\hbar$. In una dimensione l'omomorfismo di algebre è il seguente

$$h\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}_0$$

$$h\colon p \to p_0 \qquad\qquad h\colon x \to x_0 + \beta p_0 x_0 p_0$$

Infatti

$$h([x,p]) = [h(x), h(p)] = [x_0 + \beta p_0 x_0 p_0, p_0] = [x_0, p_0] + \beta[p_0 x_0 p_0, p_0]$$

e per la regola di Leibniz

$$h([x,p]) = [x_0, p_0] + \beta p_0[x_0 p_0, p_0] = [x_0, p_0] + \beta p_0[x_0, p_0]p_0$$

e dunque

$$h([x,p]) = i\hbar(1 + \beta p_0^2) \tag{2.29}$$

Tuttavia, tutte queste trasformazioni $h$ non sono unitarie. Infatti, dal momento che le trasformazioni unitarie conservano le regole di commutazione,nessuna rappresentazione di $\mathbb{H}$ è unitariamente equivalente ad alcuna rappresentazione di $\mathbb{H}_0$ . Dunque tutto il set di misure e predizioni, come ad esempio i valor medi o le ampiezze di transizione, su un sistema fisico della nuova meccanica quantistica non si accorda con il set di misure della meccanica quantistica ordinaria. Infatti, per il teorema di Stone-Von Neumann, un isomorfismo tra due spazi di Hilbert esiste ed è determinato a meno di un fattore di fase, laddove vengano preservate le regole di commutazione tra operatori irridicubili : variando queste relazioni, potrebbero variare anche le predizioni.

# Capitolo 3

# Oscillatore Armonico

Applichiamo ora il formalismo appena sviluppato al rilevante caso dell'oscillatore armonico 1-D. L'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico è

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

L'equazione di Schr$\ddot{o}$dinger nella nuova rappresentazione nello spazio dei momenti ha la seguente forma:

$$\psi''(p) + \frac{2\beta p}{1+\beta p^2}\psi'(p) + \frac{1}{(1+\beta p^2)^2}[\epsilon - \eta^2 p^2]\psi(p) = 0 \tag{3.1}$$

dove

$$\epsilon = \frac{2E}{m\omega^2\hbar^2}$$
$$\eta^2 = \frac{1}{(m\omega\hbar)^2}$$

L'usuale equazione di Schr$\ddot{o}$dinger ($\beta = 0$) ha una singolarità all'infinito, ma non è fuchsiana. In quel caso,la procedura è quella di scrivere la soluzione come il prodotto di una Gaussiana e una funzione che soddisfa un'altra equazione differenziale (Equazione di Hermitte) le cui soluzioni sono i polinomi di Hermitte.
Con l'introduzione di $\beta$ , cambia totalmente la struttura matematica (e dunque le singolarità) dell'equazione. Ora abbiamo tre singolarità : il solito punto all'infinito e punti $p = \pm\frac{i}{\sqrt{\beta}}$. Esse sono tutte e tre singolarità fuchsiane dal momento che

$$P(p) = \frac{2\beta p}{1+\beta p^2}$$

ha un polo di ordine 1 in $p = \pm\frac{i}{\sqrt{\beta}}$ e la funzione $\frac{P(p)}{p}$ è regolare per $p \to \infty$ mentre

$$Q(p) = \frac{\epsilon - \eta^2 p^2}{(1+\beta p^2)^2}$$

ha poli doppi in $p = \pm\frac{i}{\sqrt{\beta}}$ e $\frac{Q(p)}{p^2}$ è regolare per $p \to \infty$
Dunque abbiamo a che fare con un'equazione di Papperitz-Riemann le cui soluzioni sono espresse in termini di funzioni ipergeometriche, che a loro volta possono essere espresse in termini di serie ipergeometriche di Gauss. Per trovare la soluzione esplicita è utile introdurre una nuova variabile $\zeta$ per shiftare i poli in $0, 1, \infty$

$$\zeta = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p$$

In termini della nuova variabile,l'equazione assume la seguente forma

$$\psi''(\zeta) + \frac{2\zeta - 1}{\zeta(\zeta - 1)}\psi'(\zeta) - \frac{q + r(1 - 2\zeta)^2}{\zeta^2(1 - \zeta)^2}\psi(\zeta) = 0$$

con

$$q = \frac{\epsilon}{4\beta} \qquad\qquad r = \frac{\eta^2}{4\beta^2}$$

La soluzione è rappresentata dal simbolo di Riemann

$$\psi = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \zeta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Dal calcolo diretto (vedere in appendice Simbolo P di Riemann) si ha

$$\alpha_1 = -\sqrt{q + r} \qquad\qquad \alpha_2 = \sqrt{q + r}$$

$$\beta_1 = -\sqrt{q + r} \qquad\qquad \alpha_2 = \sqrt{q + r}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 16r}) \qquad\qquad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 16r})$$

La soluzione dell'equazione è legata alla soluzione dell'equazione ipergeometrica $F(a; b; c; \eta)$. Sfruttando le proprietà del simbolo P si ha:

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \zeta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = \zeta^{\alpha_1}(1 - \zeta)^{\beta_1} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 & \zeta \\ \alpha_2 - \alpha_1 & \beta_2 - \beta_1 & \gamma_2 + \alpha_1 + \beta_1 & \end{Bmatrix}$$

Posto

$$a = \gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 16r}) - 2\sqrt{q + r}$$

$$b = \gamma_2 + \alpha_1 + \beta_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 16r}) - 2\sqrt{q + r}$$

$$c = 1 - 2\sqrt{q + r}$$

si osservi che $2\sqrt{q+r} = 1-c = c-a-b$ e dunque

$$P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \zeta \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{Bmatrix} = \zeta^{\alpha_1}(1-\zeta)^{\beta_1} P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & \zeta \\ 1-c & c-a-b & b & \end{Bmatrix} =$$

$$= \zeta^{\alpha_1}(1-\zeta)^{\beta_1} F(a;b;c;\zeta)$$

con

$$F(a;b;c;\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)b(b+1)\dots(b+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1)} \frac{1}{k!}\zeta^k$$ *Serie iper-geometrica*

Come si può far vedere facilmente

$$\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)}$$

Possiamo dunque esprimere la soluzione finale nella variabile p, che sarà del tipo

$$\psi(p) \propto \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} F(a;b;c;\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p)$$

Dal momento che sappiamo che per $\beta = 0$ le autofunzioni sono il prodotto di una Gaussiana per i polinomi di Hermitte, ora cerchiamo le soluzioni per $\beta \neq 0$ nel caso in cui la serie ipergeometrica si riduce ad un polinomio. Questo si ha quando

$$a = -k \Rightarrow 2\sqrt{q+r} = k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\sqrt{1+16r})$$

$$b = -k \Rightarrow 2\sqrt{q+r} = k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{1+16r})$$

da cui

$$\sqrt{q+r} = \frac{1}{2}\Big(k+\frac{1}{2}\Big) \pm \frac{1}{4}\sqrt{1+16r}$$

In questo caso F diventa un polinomio di grado $k$. Tuttavia, se scegliamo $a = -k$, la funzione d'onda non ha il giusto andamento all'infinito e in particolare, non appartiene al dominio di $\hat{p}^2$. Infatti, se $a = -k$, per $p \to \infty$ si ha

$$\psi(p) \propto \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} F(a;b;c;\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p) \to \frac{1}{p^k}\frac{1}{p^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+16r})}} p^k$$

e dunque per $p \to \infty$

$$\psi(p) \to p^{\frac{1}{2}(\sqrt{1+16r}-1)}$$

che diverge.
Quindi è la condizione $b = -k$ che permette di ricavare lo spettro e le corrispondenti autofunzioni proprie proprie. In questo caso $\sqrt{q+r} > 0\ \forall k$ e per $p \to \infty$ la funzione d'onda va come

$$\psi(p) \sim p^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+16r})}$$

La $\psi(p)$ in questo caso è normalizzabile rispetto alla misura $\frac{dp}{1+\beta p^2}$.
Si noti che,$\forall k$ fissato, maggiore è il valore di r(minore è il valore di $\beta$ ) e maggiore è la velocità con cui va a zero la funzione d'onda per $p \to \infty$. In particolare, nel limite per $\beta \to 0$

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r}}} = e^{-\frac{\eta^2 p^2}{2}}$$

Dunque ad ogni numero quantico k corrisponde l'autofunzione

$$\psi_k(p) \propto \frac{1}{(1+\beta p^2)^{\sqrt{q+r_k}}} F(a_k; -k; c_k; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{\beta}}{2}p)$$

dove

$$\sqrt{q+r_k} = \frac{1}{2}\Big(k+\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{4}\sqrt{1+16r} \tag{3.3}$$

$$a_k = -k - \sqrt{1+16r} \qquad\qquad c_k = 1 - 2\sqrt{q+r_k}$$

Dalla (3.3) si ha

$$q + r = \frac{1}{4}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{16}(1+16r) + \frac{1}{4}\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\sqrt{1+16r}$$

$$4q = \Big(k+\frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4} + \Big(k+\frac{1}{2}\Big)\sqrt{1+16r}$$

$$4q = k^2 + \Big(k+\frac{1}{2}\Big)(1+\sqrt{1+16r})$$

Ricordando che $q = \frac{\epsilon}{4\beta}$ e ricordando il legame tra $\beta$ e tra $\epsilon$ e E si ha

$$4q = \frac{4E}{\hbar\omega}\sqrt{r}$$

si ottiene lo spettro energetico dell'oscillatore armonico

$$E_n = \hbar\omega\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\Big[\frac{1}{4\sqrt{r}} + \sqrt{1+\frac{1}{16r}}\Big] + \hbar\omega\frac{1}{4\sqrt{r}}n^2$$

Si noti che l'usuale spettro si ha per $\beta \to 0$; per $\beta \neq 0$ i livelli energetici dipendono anche da $n^2$ e,asintoticamente,essi crescono con $n^2$. Non proveremo che il set di autofunzioni $\Big\{\psi_n(p)\Big\}$ è completo, ma d'altronde lo si può immaginare dal momento che le $\psi_n(p)$ si riducono alle ordinarie autofunzioni dell'oscillatore armonico per $\beta \to 0$, la cui completezza è nota.

## 3.1 Conclusioni

In conclusione, abbiamo visto come l'introduzione di effetti gravitazionali su sistemi quantomeccanici nell'ambito di una meccanica quantistica non relativistica provoca un cambiamento sostanziale nella struttura matematica della teoria e con essa variano anche i possibili esiti delle misure. Infatti, nel caso dell'oscillatore armonico 1-D abbiamo visto come compare un termine in $n^2$ nello spettro di H che asintoticamente contribuisce maggiormente all'energia. Tuttavia questi effetti sono modulati dal parametro $\beta$ e dunque dalla lunghezza minima $\Delta x_0$ osservabile. Poiché questi effetti non sono ancora stati rilevati sperimentalmente, ciò fa supporre che la lunghezza minima sia molto lontana dalle scale che possiamo raggiungere in laboratorio.

# Appendice A

# Appendice

## A.1 Richiami sugli operatori [?]

Se $T$ è un operatore nello spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ , con dominio $D(T)$ denso in $\mathbb{H}$ , l'operatore *aggiunto* di $T$ , indicato con $T^*$ , è l'operatore definito sul sottospazio:

$$D(T^*) = \{\varphi \in \mathbb{H} \,|\, \exists \xi \in \mathbb{H} \quad tale\, che\, \langle\varphi|T\psi\rangle = \langle\xi|\psi\rangle \qquad \forall\psi \in D(T)\}$$

e tale che $\hat{T}^*\varphi = \xi$.
Si osservi che non è detto che $D(T^*)$ sia denso in $\mathbb{H}$ per cui, in generale, non esiste $(T^*)^*$.
Diremo che un operatore T estende V se $D(V) \subset D(T)$ e

$$V\varphi = T\varphi \qquad \forall\varphi \in D(V)$$

T si dice *chiuso* se $\forall$ successione $\varphi_n \in D(T)$ che converge a $\varphi \in \mathbb{H}$ e tale che la successione dei vettori trasformati $T\varphi_n$ sia anch'essa convergente a $\xi \in \mathbb{H}$ si ha che $\varphi \in D(T)$ e che $T\varphi = \xi$.
L'operatore T si dice *chiudibile* se $\forall\varphi_n \in D(T)$ con

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$$

tale che esista il limite $\xi$ della successione $T\varphi_n$, si ha che $\xi = 0$.

**Teorema 1.** *Sia T un operatore densamente definito su* $\mathbb{H}$*. Si ha*

1. *$T^*$ è un operatore chiuso*

2. *T è chiudibile $\leftrightarrow$ $D(T^*)$ è denso. In tal caso*

$$T \subseteq \bar{T} = (T^*)^*$$

Un operatore S è detto *simmetrico* se

$$\langle\psi|S\varphi\rangle = \langle S\psi|\varphi\rangle \qquad \forall\psi,\varphi \in D(S)$$

e $D(S)$ è denso.
Dalla definizione discende che l'aggiunto di un operatore simmetrico ha un dominio che certamente contiene $D(S)$ e che su tale dominio $S^*$ opera come S. Dunque $S^*$ è densamente definito e estende l'operatore stesso.
S è detto *autoaggiunto* se $D(S)$ è denso e $S = S^*$. Un operatore simmetrico è dunque autoaggiunto se e solo se $D(S) = D(S^*)$.
Un operatore A è detto *essenzialmente autoaggiunto* se $D(A)$ e $D(A^*)$ sono densi e $A^* = (A^*)^*$ o, equivalentemente, se $D(A)$ è denso, $A$ è chiudibile e vale $A^* = \bar{A}$. Osserviamo che le seguenti definizioni coincidono quando il dominio dell'operatore è tutto $\mathbb{H}$ (e dunque per gli operatori limitati, i quali possono essere estesi per continuità su tutto $\mathbb{H}$).

# Proprietà Operatori Essenzialmente Autoaggiunti

- Se $D(A), D(A^*), D(A^{**})$ sono densi si ha
$$A^* = (\bar{A})^* = \bar{A}^* = A^{***}$$
- A è essenzialmente autoaggiunto $\leftrightarrow$ $\bar{A}$ è autoaggiunto
- Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora A ammette una sola estensione autoaggiunta che è proprio $\bar{A}$

**Teorema 2** (Operatori Autoaggiunti)**.** *Sia A un operatore simmetrico su* $\mathbb{H}$. *Sono equivalenti le seguenti condizioni*

1. *A è autoaggiunto*
2. *A è chiuso e* $Ker(A^* \pm i) = \{0\}$
3. $Ran(A \pm i) = \mathbb{H}$

$1 \to 2$. Se $A = A^*$ , $A$ è chiuso poichè $A^*$ è chiuso. Se $\phi \in Ker(A^* + i)$ allora

$$A^*\phi = -i\phi$$

e quindi

$$\langle -i\phi|\phi\rangle = i\langle\phi|\phi\rangle = \langle A^*\phi|\phi\rangle = \langle A\phi|\phi\rangle = \langle\phi|A\phi\rangle = \langle\phi|-i\phi\rangle = -i\langle\phi|\phi\rangle$$

da cui $\langle\phi|\phi\rangle = 0 \to \phi = 0$. La prova per $-i$ è identica. □

**Teorema 3** (Operatori Essenzialmente Autoaggiunti)**.** *Sia A un operatore simmetrico su $\mathbb{H}$. Sono equivalenti le seguenti condizioni*

1. *$A$ è essenzialmente autoaggiunto*
2. *$Ker(A^* \pm i) = \{0\}$*
3. *$\overline{Ran(A \pm i)} = \mathbb{H}$*

$1 \rightarrow 2$. Se $A$ è essenzialmente autoaggiunto, allora $A^* = A^{**}$ e quindi $A^*$ è autoaggiunto ( e dunque chiuso).
Per il teorema precedente $Ker(A^{**} \pm i) = \{0\}$ , ma poichè $A^{**} = A^*$ si ha $Ker(A^* \pm i) = \{0\}$. □

Il prossimo risultato ci mostra dei criteri di esistenza per le estensioni autoaggiunte.

**Teorema 4.** *Sia A un operatore simmetrico su $\mathbb{H}$. Definiti gli indici di difetto*

$$d_{\pm}(A) = dim\ Ker(A^* \pm i)$$

*vale :*

- *A ammette estensioni autoaggiunte se e solo se $d_+(A) = d_-(A)$*
- *A è autoaggiunto se e solo se $d_+(A) = d_-(A) = 0$*

*In particolare, il numero di parametri da cui dipende la famiglia di estensioni autoaggiunte è pari a $d$.*

## A.2 Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine in $\mathbb{C}$ [?]

La forma più generale di equazione differenziale ordinaria del secondo ordine omogenea è (in forma standard)

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0 \tag{A.1}$$

Le proprietà delle soluzioni dipendono dal comportamento di P(z) e Q(z) in $\mathbb{C}$.
- Se P(z) e Q(z) sono regolari in $z_0$ allora $z_0$ è un punto regolare.
-Se P(z) e Q(z) sono singolari in $z_0$ allora $z_0$ è un punto singolare, che a loro volta sono classificati in singolarità *fuchsiane* o singolarità *essenziali*.

$z_0$ è una singolarità fuchsiana se

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z)=p_0 \tag{A.2}$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2Q(z)=q_0 \tag{A.3}$$

con $p_0$ e $q_0$ finiti , ovvero se P(z) ha un polo semplice in $z_0$ e Q(z) un polo doppio. Questo vale per le singolarità al finito (la singolarità all'inifinito va trattata in altro modo che dopo vedremo).

### A.2.1 Soluzione nell'intorno di un punto regolare

Se $z_0$ è regolare,è possibile cercare una soluzione che abbia la forma di uno sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0$

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \tag{A.4}$$

Poichè P(z) e Q(z) sono analitiche in $z_0$ ,vale

$$P(z)=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(z-z_0)^l$$

$$Q(z)=\sum_{l=0}^{\infty}q_l(z-z_0)^l$$

e quindi

$$u'(z)=\sum_{l=1}^{\infty}c_l(z-z_0)^{l-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n$$
$$u''(z)=\sum_{l=2}^{\infty}l(l-1)c_l(z-z_0)^{l-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}(z-z_0)^n$$

Sostituendo nell'equazione si ha :

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+2)c_{n+2}+\sum_{l=0}^{n}(l+1)c_{l+1}p_{n-l}+\sum_{l=0}^{n}c_lq_{n-l}]\,(z-z_0)^n=0 \tag{A.5}$$

Per ottenere questa relazione abbiamo usato il prodotto di Cauchy tra due serie di potenze. Infatti, date due serie di potenze

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z-z_0)^n \qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(z-z_0)^n$$

la serie prodotto è ancora una serie di potenze

$$(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

i cui coefficienti $c_n$ sono

$$c_n = \sum_{l=0}^{n} f_l g_{n-l}$$

Dalla (2.8) si ottengono delle relazioni di ricorrenza per determinare i coefficienti $c_k$ una volta noti $c_0$ e $c_1$. Per n=0 si ottiene

$$2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = 0$$

Per n = 1

$$6c_3 + c_1 p_1 + 2c_2 p_0 + c_0 q_1 + c_1 q_0 = 0$$

Le costanti arbitrarie $c_0$ e $c_1$ , fissate dalle condizioni iniziali

$$c_0 = u(z_0)$$

$$c_1 = u'(z_0)$$

determinano univocamente la soluzione u(z).
Se per esempio $u_1(z)$ è la soluzione corrispondente a $c_0$ = 1 e $c_1$ = 0 e $u_2(z)$ quella corrispondente a $c_0$ = 0 e $c_1$ = 1, la soluzione generale sarà

$$u(z) = c_0 u_1(z) + c_1 u_2(z)$$

Le due soluzioni sono linearmente indipendenti poichè

$$W(z_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

### A.2.2 Soluzione nell'intorno di un punto fuchsiano

*Teorema di Fuchs* : Se $z_0$ è un punto singolare fuchsiano, esiste sempre almeno una soluzione del tipo

$$u_1(z) = (z - z_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{A.6}$$

La seconda soluzione è ancora di questo tipo, oppure contiene un termine aggiuntivo $cu_1(z) \log{(z - z_0)}$.

Come si determina l'esponente $\rho$?
Supponiamo che $z_0$ sia un punto singolare fuchsiano. In questo caso P(z) e Q(z) possono essere scritte come

$$P(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} p_l (z-z_0)^l}{z-z_0}$$

$$Q(z) = \frac{q(z)}{(z-z_0)^2} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} q_l (z-z_0)^l}{(z-z_0)^2}$$

dove p(z) e q(z) sono analitiche in $z_0$. Calcoliamo le derivate :

$$u_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho+k)(z-z_0)^{\rho+k-1}$$

$$u_1''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\rho+k)(\rho+k-1)(z-z_0)^{\rho+k-2}$$

e dunque moltiplicando per $(z-z_0)^2$ e sostituendo nell'equazione si ha :

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k)(\rho+k-1)(z-z_0)^{\rho+k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho+k) \sum_{l=0}^{\infty} p_l (z-z_0)^{\rho+k+l} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{\infty} q_l (z-z_0)^{\rho+k+l} = 0$$

Uguagliamo a zero il coefficiente della potenza $(z-z_0)^\rho$ ponendo $k = l = 0$, si ottiene :

$$c_0[\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0] = 0$$
$$\rho^2 + (p_0-1)\rho + q_0 = 0 \tag{A.7}$$

dove

$$p_0 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z) \qquad q_0 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 Q(z)$$

Ricavati $\rho_1$ e $\rho_2$ , il teorema di Fuchs ci assicura che una soluzione è del tipo

$$u_1(z) = (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$$

i cui coefficienti si determinano in modo univoco in funzione di $c_0$ sostituendo la serie nell'equazione differenziale e ricavando delle relazioni di ricorrenza.
La seconda soluzione linearmente indipendente dalla prima si ottiene a seconda dei valori di $\rho_1$ e $\rho_2$ . Si ha

$$u_2(z) = \begin{cases} (z-z_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k, & \text{se } \rho_1-\rho_2 \neq intero, \\ (z-z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-z_0)^k + c u_1(z)\log(z-z_0), & \text{se } \rho_1-\rho_2 = intero. \end{cases}$$

dove $c$ e i $d_k$ si determinano per sostituzione in funzione di $d_0$. Può anche accadere che $c = 0$, ma solo se $\rho_1 \neq \rho_2$ .

### A.2.3 Studio del punto all'infinito nelle equazioni differenziali

Il comportamento delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0$$

nell'intorno del punto $z \to \infty$ si studia effettuando il cambiamento di variabile $t = \frac{1}{z}$ e studiando il comportamento di $u(\frac{1}{t})$ per $t \to 0$.Vediamo come si modifica l'equazione

$$u'(z) = \frac{du(\frac{1}{t})}{dt}\frac{dt}{dz} = -t^2\frac{du(\frac{1}{t})}{dt}$$

$$u''(z) = \frac{du'(\frac{1}{t})}{dt}\frac{dt}{dz} = 2t^3\frac{du(\frac{1}{t})}{dt} + t^4\frac{d^2u(\frac{1}{t})}{dt^2}$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$t^4\frac{d^2u}{dt^2} + (2t^3 - t^2P)\frac{du}{dt} + Qu = 0$$

e in forma standard

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{P}{t^2}\right)\frac{du}{dt} + \frac{Q}{t^4}u = 0$$

Il punto $t = 0$ è un punto regolare se

$$\tilde{P}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} - \frac{P}{t^2}$$

$$\tilde{Q}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{Q}{t^4}$$

sono regolari in $t = 0$.
Le condizioni necessarie e sufficienti affiinchè $z = \infty$ sia fuchsiano sono che le funzioni

$$\tilde{p}(t) = t\tilde{P}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\tilde{q}(t) = t^2\tilde{Q}\left(\frac{1}{t}\right)$$

sono regolari in $t = 0$.
Il metodo di risoluzione è analogo a quello già visto. L'equazione indiciale relativa all'equazione differenziale è

$$\rho^2 + (\tilde{p_0} - 1)\rho + \tilde{q_0} = 0$$

dove

$$\tilde{p_0} = \lim_{t\to 0} t\left(\frac{2}{t} - \frac{P}{t}\right) = 2 - \lim_{t\to 0}\frac{P}{t^2}$$

$$\tilde{q_0} = \lim_{t\to 0} \frac{Q}{t^2}$$

In termini di z si ha

$$\tilde{p_0} = 2 - \lim_{z\to\infty} zP(z)$$
$$\tilde{q_0} = \lim_{z\to\infty} z^2 Q(z)$$

## A.3 Equazioni con 3 punti fuchsiani : Equazione di Papperitz-Riemann

L'equazione di Papperitz-Riemann è la pià generale equazione totalmente fuchsiana con 3 punti fuchsiani. Le soluzioni dell'equazione costituiscono la vasta classe delle funzioni ipergeometriche. L'equazione ha la forma

$$w''(z) + [\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}]w'(z) +$$
$$[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}]\frac{w(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0 \tag{A.8}$$

dove $a, b$ e $c$ sono singolarità fuchsiane e

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

con $\alpha$ e $\alpha'$ sono gli esponenti caratteristici delle soluzioni in corrispondenza di $z = a$ , dove abbiamo

$$w_1(z) = (z-a)^\alpha \varphi_1(z) \qquad w_2(z) = (z-a)^{\alpha'} \varphi_2(z)$$

con $\varphi_{1,2}(z)$ olomorfa in $z = a$. Per dire che w(z) è soluzione dell'equazione di Papperitz-Riemann si introduce il *simbolo P di Riemann* scrivendo

$$w(z) = P \left\{ \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\} \tag{A.9}$$

## A.4 Proprietà del Simbolo P di Riemann [?]

Data un equazione di Papperitz-Riemann aventi $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ punti fuchsiani, se $(\alpha_1, \beta_1)$ , $(\alpha_2, \beta_2)$ e $(\alpha_3, \beta_3)$ sono i rispettivi esponenti delle soluzioni, allora il simbolo P di Riemann è

$$w(z) = P \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{matrix} \right\} \tag{A.10}$$

Notiamo che esso indica una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale data. La prima proprietà è l'invarianza per permutazione delle prime tre colonne

$$w(z) = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & z \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 & z \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_1 & \end{Bmatrix}$$

La seconda proprietà è

$$w(z) = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_3 & z \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_3 & \end{Bmatrix}$$

La terza proprietà è l'invarianza per moltiplicazione di una costante

$$w(z) = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = KP\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix}$$

Un'altra proprietà è l'invarianza per trasformazioni (omografiche) del tipo :

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad\qquad ad - bc \neq 0$$

Vale infatti la relazione

$$w(z) = P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* & \xi_3^* & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix}$$

dove

$$\xi^*(z) = \xi(\frac{az+b}{cz+d})$$

In questo modo si posso shiftare le singolarità.
Un'altra relazione molto importante è quella che permette di lasciare invariate le singolarità ma di modificarne gli esponenti e quindi l'andamento delle soluzioni in un loro intorno. La più generale trasformazione è

$$P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = (z-\xi_1)^{\gamma_1}(z-\xi_2)^{\gamma_2}(z-\xi_3)^{\gamma_3} P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1-\gamma_1 & \alpha_2-\gamma_2 & \alpha_3-\gamma_3 & z \\ \beta_1-\gamma_1 & \beta_2-\gamma_2 & \beta_3-\gamma_3 & \end{Bmatrix}$$

con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ arbitrarie e legate dalla relazione

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$$

condizione necessaria per mantenere valida la relazione tra gli esponenti $\alpha_i$ e $\beta_i$. Come caso particolare di questa proprieta si ha

$$P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = \left(\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}\right)^\gamma P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ \alpha_1-\gamma & \alpha_2+\gamma & \alpha_3 & z \\ \beta_1-\gamma & \beta_2+\gamma & \beta_3 & \end{Bmatrix}$$

e se ad esempio il punto $\xi_3$ è all'infinito

$$P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \infty & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{Bmatrix} = (z-\xi_1)^\gamma P\begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \infty & \\ \alpha_1-\gamma & \alpha_2 & \alpha_3+\gamma & z \\ \beta_1-\gamma & \beta_2 & \beta_3+\gamma & \end{Bmatrix}$$

poichè

$$(z-\xi_1)^\gamma \sim (1/z)^{-\gamma} \qquad\qquad per\ z \to \infty$$

# Bibliografia


[1] Kempf, Achim, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann. "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation." Physical Review D 52.2 (1995): 1108.

[2] Bosso, Pasquale. "Generalized uncertainty principle and quantum gravity phenomenology." arXiv preprint arXiv:1709.04947 (2017).

[3] Vitagliano Edoardo."Modelli di generalizzazione dell'algebra di Heisenberg e oscillazione di neutrini" Tesi di Laurea (2010/2011)

[4] Moretti, Valter, and M. F. N. Facolta di Scienze. "Operatori in Spazi di Hilbert e Struttura Matematica della Meccanica Quantistica: un'Introduzione." (2010).

[5] Maria B. Barbaro,Marialuisa Frau,Stefano Sciuto. "Introduzione ai metodi matematici della fisica." (2004).

[6] Wikipedia: Simbolo P di Riemann `https://it.wikipedia.org/wiki/Simbolo_P_di_Riemann`