

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”**



**Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali**

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Fenomeni di riflessione e trasmissione in un modello
di Meccanica Quantistica con Principio di
Indeterminazione Generalizzato**

Relatori:
Prof. Gennaro Miele

Candidato:
Lucio Vacchiano
Matr. N85000770

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Introduzione	2
1.1	Preambolo	2
1.2	Il Principio di Indeterminazione Generalizzato	2
2	Rappresentazione nello spazio di Hilbert	5
2.1	Rappresentazione nello spazio dei momenti	7
2.2	Analisi funzionale dell'operatore Posizione	8
2.3	Generalizzazione a n Dimensioni	10
3	Lo spazio delle Quasiposizioni	11
3.1	Stati di massima localizzazione	11
3.2	La funzione d'onda della quasiposizione	13
4	Potenziale a δ di Dirac	17
4.1	L'equazione di Schrödinger per la Delta	17
4.1.1	Stati Legati	19
4.1.2	Stati di scattering	21
4.2	Conclusioni	24
5	Appendice	25
5.1	Richiami sugli operatori	25
5.2	Proprietà Operatori Essenzialmente Autoaggiunti	26

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Preambolo

Come indicato nell'articolo di Kempf, Mangano e Mann [1] da cui sono stati tratti gli aspetti salienti di tutta la successiva trattazione, l'esistenza di una lunghezza minima osservabile è stata a lungo suggerita nell'ambito della Gravità Quantistica così come nella Teoria delle Stringhe. In questo contesto è stata derivata una relazione di indeterminazione posizione-impulso generalizzata che dal punto di vista della Meccanica Quantistica descrive l'esistenza di una lunghezza elementare in termini di minima indeterminazione nelle misure di posizione. In questo lavoro studieremo la struttura matematica che sottostà a questa relazione di incertezza.

1.2 Il Principio di Indeterminazione Generalizzato

Un possibile effetto dell'introduzione dell'interazione gravitazionale in un sistema quantistico potrebbe manifestarsi proprio nella quantizzazione dello spazio stesso dovuta al fatto che le energie impiegate per risolvere distanze molto piccole finiscano per disturbare significativamente la struttura dello spazio-tempo per via degli effetti gravitazionali, inducendo un limite inferiore nella precisione con cui si possono misurare le distanze. L'argomento può essere giustificato in maniera euristica.

Si supponga di voler stimare posizione e momento di una particella utilizzando un fascio di luce monocromatica [3]. Osserveremmo sullo schermo una figura di diffrazione che nel caso ideale ci consentirebbe di determinare la posizione della particella con indeterminazione

$$\Delta x \simeq \frac{\lambda}{\sin\theta} \quad (1.1)$$

Dove θ è l'angolo sotto il quale la figura di interferenza è vista dalla posizione della particella. Inoltre dobbiamo considerare anche l'indeterminazione sull'impulso del fotone legata al fatto che non possiamo conoscere con esattezza lungo quale direzione sia stato diffuso

$$\Delta P_x \simeq \frac{h \sin \theta}{\lambda} \quad (1.2)$$

Poichè nell'urto il momento si conserva, l'impulso della particella sarà affetto dalla medesima indeterminazione, per cui

$$\Delta x \Delta P_x \simeq h \quad (1.3)$$

Questo risultato fornisce in prima approssimazione il Principio di Indeterminazione.

$$\Delta x \Delta P_x \geq \hbar \quad (1.4)$$

Ripetiamo l'esperimento mentale includendo la gravità nell'ipotesi in cui il fotone sia una particella classica di massa $\frac{E}{c^2}$, la particella subirebbe un'accelerazione

$$a = \frac{G E}{r^2 c^2} \quad (1.5)$$

dove r è la distanza tra le particelle. Sia L la lunghezza che identifica il volume in cui l'interazione ha luogo, si misurerebbero variazioni di velocità e di posizione

$$\Delta v = \frac{G E}{r^2 c^2} \left(\frac{L}{c} \right) \quad (1.6)$$

$$\Delta x = \frac{G E}{r^2 c^2} \left(\frac{L}{c} \right)^2 = \frac{G P}{c^3} \quad (1.7)$$

dove si è assunto che $L \simeq r$. Come evidente la variazione di posizione dipende da P , quindi si può concludere che l'interazione gravitazionale contribuisca all'indeterminazione sulla posizione di un fattore

$$\Delta x = \frac{L_p^2 P}{\hbar} \quad \text{con} \quad L_p = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} \quad (1.8)$$

la costante L_p è la lunghezza di Planck, dunque se l'incertezza sul momento della particella è dell'ordine del momento del fotone, il principio di Indeterminazione diventa

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} + \frac{L_p^2 \Delta p^2}{\hbar} \quad (1.9)$$

Una prima, immediata, conseguenza di questo principio generalizzato è il fatto che, contrariamente a quanto visto in assenza di gravità, l'indeterminazione sulla posizione non può più essere resa arbitrariamente piccola aumentando adeguatamente quella sugli impulsi, in altri termini Δx ha adesso un estremo inferiore. In tal modo, senza ricorrere a teorie di carattere più generale è possibile studiare gli effetti dell'introduzione della gravità nell'ambito di una Meccanica Quantistica non relativistica fondata sulla sopraccitata relazione di incertezza. A questo punto ci occuperemo di costruire una rappresentazione nello Spazio di Hilbert di tale relazione di indeterminazione, di studiarne le caratteristiche peculiari e le deviazioni dalla Meccanica Quantistica ordinaria. A tal proposito precisiamo che l'approccio appena illustrato può essere ulteriormente esteso in modo tale da far emergere una minima indeterminazione anche per gli impulsi, ma ciò esula dalla seguente trattazione dal momento che bisognerebbe rinunciare ad una qualsiasi apprensione esplicita degli stati fisici sia nello spazio degli impulsi sia in quello delle posizioni, mentre se si preserva l'usuale continuità almeno per i momenti è possibile rappresentare le funzioni d'onda nello spazio degli impulsi sebbene, come vedremo, non sia più possibile esplicitare gli stati nello spazio delle posizioni.

Capitolo 2

Rappresentazione nello spazio di Hilbert

In una dimensione il più semplice principio generalizzato assume la forma

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta \Delta p^2 + \gamma] \quad \text{con } \beta, \gamma > 0 \quad (2.1)$$

le costanti β e γ sono indipendenti da Δx e Δp ma non necessariamente dai loro valori di aspettazione.

Come mostrato dalla curva di minima indeterminazione il termine in Δp^2 fa in modo che Δx non tenda a zero quando Δp cresce, formalizzando l'idea di una minima incertezza sulle misure di posizione.

Ricordando che per ogni coppia di operatori simmetrici A e B, sul dominio di A^2 e B^2 vale la relazione

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2} \quad (2.2)$$

ed un possibile commutatore tra x e p che soddisfa l'equazione è

$$[x, p] = i\hbar(1 + \beta p^2) \quad \text{con } \beta > 0 \quad (2.3)$$

cosicché risulta come desiderato

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta \Delta p^2 + \beta \langle p^2 \rangle] \quad (2.4)$$

da cui

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta} - \langle p \rangle^2} \quad (2.5)$$

quindi

$$\Delta x_{min}(\langle p \rangle) = \hbar\sqrt{\beta} \sqrt{1 + \beta \langle p \rangle^2} \quad e \quad \Delta x_o = \hbar\sqrt{\beta} \quad (2.6)$$

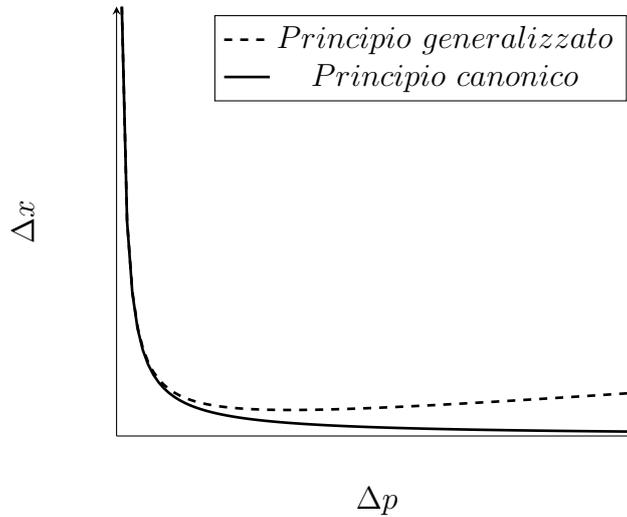


Figura 2.1: Curve di minima indeterminazione a confronto

dove Δx_o è il valore minimo nell'incertezza sulle misure di posizione. E' importante sottolineare che, come si evince dall'espressione dell'indeterminazione minima, il parametro β è dimensionalmente l'inverso del quadrato di un'energia che nel nostro caso, se conoscessimo il valore del parametro, rappresenterebbe la scala di energie alle quali gli effetti gravitazionali sui sistemi quantistici diventerebbero assolutamente non trascurabili. Inoltre se Δx_o fosse pari alla lunghezza di Planck la relativa energia calcolabile tramite $\Delta x_o = \hbar\sqrt{\beta}$ sarebbe proprio l'energia di Planck, il cui valore va ben oltre i livelli di energia attualmente sondabili nei laboratori [2]. Sarà interessante, come vedremo a breve, ricavare le correzioni indotte dal principio generalizzato e analizzarle al variare del parametro β o equivalentemente della lunghezza minima per poter dedurre almeno in parte l'entità di tali grandezze. Costruiamo ora una rappresentazione degli stati nello Spazio di Hilbert fondata sulla relazione di commutazione tra x e p . E' importante notare che gli stati fisici debbano sempre trovarsi nel dominio comune degli operatori x , p , x^2 e p^2 , ciò introduce un primo confinamento degli stati fisici permessi. Nella Meccanica Quantistica ordinaria x e p sono rappresentati come operatori di moltiplicazione o derivazione che agiscono sulle funzioni a quadrato sommabile nello spazio dei momenti o in quello delle posizioni sulle funzioni d'onda

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad ; \quad \psi(p) = \langle p|\psi\rangle \quad (2.7)$$

dove $|x\rangle$ e $|p\rangle$ sono gli autostati di x e p e non sono stati fisici in quanto non normalizzabili. Tuttavia x e p sono essenzialmente autoaggiunti quindi le rispetti-

ve autofunzioni possono essere approssimate con precisione arbitraria da serie di $|\psi_n\rangle$ di stati fisici di crescente localizzazione sia nello spazio che negli impulsi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x |\psi_n\rangle = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta p |\psi_n\rangle = 0 \quad (2.8)$$

Nel caso analizzato ciò non è più possibile

$$\Delta x |\psi\rangle = \langle \psi | (x - \langle \psi | x | \psi \rangle)^2 | \psi \rangle \geq \Delta x_o \quad \forall \psi \quad (2.9)$$

Ciò indica che non possono esistere autostati della posizione, che invece avrebbero interminazione nulla, almeno nel dominio comune degli operatori x , p , x^2 e p^2 , che indicheremo come D_{x,p,x^2,p^2} . Ciò non esclude però l'esistenza di autovettori formali di x al di fuori dell'insieme D_{x,p,x^2,p^2} . Dal momento che non esistono autofunzioni proprie di $|x\rangle$ non è possibile esprimere le funzioni d'onda in termini di $\langle x | \psi \rangle$ ma, come vedremo, gli stati di massima localizzazione spaziale sono stati fisici ben definiti ed è possibile ricorrere ad una cosiddetta rappresentazione nello spazio delle *quasiposizioni*. Tale rappresentazione, sebbene non diagonalizzi x ha una diretta interpretazione fisica circa le misure di posizione.

2.1 Rappresentazione nello spazio dei momenti

Per quanto appena detto si è costretti a rinunciare a scrivere le funzioni d'onda nello spazio delle posizioni, ma non avendo introdotto alcun limite inferiore alla precisione sulle misure di impulso si può preservare la scrittura $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$. Consideriamo x e p come i seguenti operatori

$$\hat{p}\psi(p) = p\psi(p) \quad ; \quad \hat{x}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi(p) \quad (2.10)$$

definiti sul dominio delle funzioni a decrescenza rapida S_∞ . Rispetto al prodotto scalare

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p)\phi(p) \quad (2.11)$$

\hat{p} è automaticamente simmetrico mentre la simmetria di \hat{x} può essere facilmente verificata tramite il calcolo diretto

$$\langle \psi | x\phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p)(i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\phi(p)) \quad (2.12)$$

da cui integrando per parti e ricordando che le funzioni sono di S_∞ si ha

$$\langle \psi | x\phi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi^*(p)\phi(p) = \quad (2.13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} [i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p \psi(p)]^* \phi(p) = \langle x\psi | \phi \rangle \quad (2.14)$$

Dati $\langle \psi |$ e $|\phi \rangle$ si ha

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p) = \quad (2.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle \quad (2.16)$$

Osserviamo inoltre che

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle \quad (2.17)$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1 \quad \text{Operatore Identità} \quad (2.18)$$

e

$$\langle p' | \phi \rangle = \phi(p') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle p' | p \rangle \phi(p) \quad (2.19)$$

dunque il prodotto scalare degli autostati del momento è

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p') \quad (2.20)$$

2.2 Analisi funzionale dell'operatore Posizione

Malgrado non esistano autofunzioni proprie per \hat{x} , si può in ogni caso impostare il problema agli autovalori per cercare autostati formali. L'equazione agli autovalori si traduce nell'equazione differenziale

$$i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p \psi(p) = \lambda \psi(p) \quad (2.21)$$

che fornisce la soluzione

$$\psi_\lambda(p) = C \exp\left\{-\frac{i\lambda \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\beta}\right\} \quad (2.22)$$

normalizzando

$$|c|^2 = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \quad (2.23)$$

ma queste $\psi_\lambda(p)$ non sono stati fisici. Notiamo che per i 2 autovalori $\pm i$ esiste solo un'autofunzione normalizzabile, ciò significa che l'operatore \hat{x}^{**} , il doppio aggiunto di \hat{x} che è simmetrico e definito densamente, è anch'esso simmetrico, chiuso e ha un sottospazio di difetto non vuoto

$$L_{\pm i, \hat{x}^{**}}^+ = Ker(\hat{x}^{***} \pm i) D\hat{x}^{***} \quad (2.24)$$

I sottospazi di difetto sono entrambi di dimensione 1, ragion per cui l'operatore posizione possiede una famiglia di estensioni autoaggiunte a un parametro. Per costruire l'estensione calcoliamo

$$\langle \psi_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \exp\left\{-\frac{i(\lambda' - \lambda) \arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\beta}\right\} = \quad (2.25)$$

$$\frac{\hbar\sqrt{\beta}}{i(\lambda' - \lambda)\pi} \left[\exp\left(\frac{i(\lambda' - \lambda)\pi}{\hbar\beta}\right) - \exp\left(\frac{-i(\lambda' - \lambda)\pi}{\hbar\beta}\right) \right] = \quad (2.26)$$

$$\frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda' - \lambda)} \sin\left(\frac{\pi(\lambda' - \lambda)}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right) \quad (2.27)$$

Questi autostati formali non sono in genere ortogonali ma è comunque possibile costruire una famiglia di autostati formali ortonormali parametrizzati da $\lambda \in [-1, 1]$

$$\left\{ |\psi_{(2n+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}}\rangle \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (2.28)$$

$$\langle \psi_{(2n+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}} | \psi_{(2n'+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}} \rangle = \frac{1}{\pi(n - n')} \sin(n - n')\pi = \delta_{n, n'} \quad (2.29)$$

Questo set è anche completo. Possiamo immaginare queste autofunzioni improprie come un reticolo di autostati formali di passo $2\hbar\sqrt{\beta}$. potremmo essere tentati di interpretare questo risultato come se stessimo descrivendo la fisica su un reticolo dello spazio delle posizioni, ma questi stati non sono fisici perchè al di fuori del dominio di \hat{p} . Tant'è vero che hanno indeterminazione infinita nel momento e anche energia divergente

$$\langle \psi_\lambda | \frac{p^2}{2m} | \psi_\lambda \rangle = \text{divergente} \quad (2.30)$$

In generale tutti gli stati con $\Delta x |\psi\rangle < \Delta x_o$, in altre parole che si trovano nella regione vietata, hanno energia infinita.

2.3 Generalizzazione a n Dimensioni

Una naturale generalizzazione che preservi la simmetria per rotazioni è

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}(1 + \beta p^2) \quad (2.31)$$

che implica una minima indeterminazione non nulla rispetto ad ogni coordinata della posizione. Richiediamo però che le componenti del momento commutino

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (2.32)$$

La rappresentazione nello spazio degli impulsi si generalizza facilmente

$$\hat{p}_i\psi(p) = p_i\psi(p) \quad (2.33)$$

$$\hat{x}_i\psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_{p_i}\psi(p) \quad (2.34)$$

Queste relazioni di commutazione portano ad una geometria non commutativa in cui

$$[x_i, x_j] = 2i\hbar\beta(p_i x_j - p_j x_i) \quad (2.35)$$

Gli operatori \hat{x}_i e \hat{p}_i sono simmetrici rispetto al prodotto scalare

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n p}{(1 + \beta p^2)} \psi^*(p)\phi(p) \quad (2.36)$$

$$I_d = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n p}{1 + \beta p^2} |p\rangle\langle p| \quad \text{con} \quad \langle p'|p\rangle = (1 + \beta p^2)\delta^n(p' - p) \quad (2.37)$$

Anche in più dimensioni gli operatori impulso sono autoaggiunti mentre quelli di posizione sono solo simmetrici e continuano a non avere autostati fisici. Il generatore delle rotazioni può essere ancora scritto in funzione di \hat{x}_i e \hat{p}_i , cioè

$$\hat{L}_{ij} = \frac{1}{(1 + \beta p^2)}(\hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i) \quad (2.38)$$

che in 3 dimensioni corrisponde a

$$\hat{L}_k = \frac{1}{(1 + \beta p^2)}\epsilon_{ijk}\hat{x}_i\hat{p}_j \quad (2.39)$$

La rappresentazione esplicita di \hat{L}_{ij} è

$$\hat{L}_{ij}\psi(p) = i\hbar(p_i\partial_{p_j} - p_j\partial_{p_i})\psi(p) \quad (2.40)$$

e valgono le seguenti relazioni

$$[\hat{p}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{p}_j - \delta_{ij}\hat{p}_k) \quad (2.41)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{L}_{jk}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{x}_j - \delta_{ij}\hat{x}_k) \quad (2.42)$$

con

$$[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{kh}] = i\hbar(\delta_{ik}\hat{L}_{jh} - \delta_{ih}\hat{L}_{jk} + \delta_{jh}\hat{L}_{ik} - \delta_{jk}\hat{L}_{ih}) \quad (2.43)$$

del tutto equivalente alla Meccanica Quantistica Ordinaria.

Capitolo 3

Lo spazio delle Quasiposizioni

3.1 Stati di massima localizzazione

In Meccanica Quantistica ordinaria tutta l'informazione sulla posizione è contenuta negli elementi di matrice dell'operatore posizione, i quali possono essere calcolati in qualunque base, anche in quella degli autostati del momento. Ora oltre a non avere una base di autostati propri per $|x\rangle$ non possiamo neppure interpretare fisicamente gli elementi di matrice $\langle x|\psi\rangle$. E' tuttavia possibile ottenere informazioni sulla posizione studiando gli stati che hanno indeterminazione minima sulla posizione. Calcoliamo esplicitamente questi stati $|\psi_\xi\rangle$ di massima localizzazione intorno alla posizione ξ , richiedendo le proprietà :

$$1) \quad \langle \psi_\xi | \hat{x} | \psi_\xi \rangle = \xi ; \quad (3.1)$$

$$2) \quad \Delta x | \psi_\xi \rangle = \Delta x_o \quad (3.2)$$

Ricordiamo che in generale Δx_o dipende da $\langle p \rangle$ e per qualsiasi stato $|\psi\rangle$ appartenente al dominio in cui x, p, x^2 e p^2 sono simmetrici possiamo scrivere

$$\| \{ \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2\Delta p^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \} | \psi \rangle \| \geq 0 \quad (3.3)$$

Ricordando che $[\hat{x}, \hat{p}]$ è immaginario si ottiene

$$\langle \psi | (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 - \left(\left| \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2\Delta p^2} \right| \right)^2 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 | \psi \rangle \geq 0 \quad (3.4)$$

come sappiamo

$$\Delta x \Delta p \geq \left| \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2} \right| \quad (3.5)$$

quindi $|\psi\rangle$ è uno stato limite se e solo se $\Delta x \Delta p = |\frac{\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle}{2}|$ cioè se

$$\left\{ \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle}{2\Delta p^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right\} |\psi\rangle = 0 \quad (3.6)$$

che si traduce nell'equazione differenziale

$$\left[i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p - \langle x \rangle + i\hbar(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \frac{1 + \beta\Delta p^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2}{2\Delta p^2} \right] \psi(p) = 0 \quad (3.7)$$

la cui soluzione è

$$\psi(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1 + \beta\Delta p^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2}{4\beta\Delta p^2}} \exp \left[\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} + \frac{1 + \beta\Delta p^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2}{2\sqrt{\beta}\Delta p^2} \right) \arctan(\sqrt{\beta}p) \right] \quad (3.8)$$

ponendo $\langle \hat{p} \rangle = 0$ e $\Delta p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, condizioni sotto le quali si ha $\Delta x = \Delta x_o$, si ottiene

$$\psi_\xi(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right\} \quad (3.9)$$

infine

$$1 = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} = |N|^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} \quad \text{quindi} \quad N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \quad (3.10)$$

Questi stati, a differenza delle $|\psi_\lambda\rangle$, sono stati fisici di energia finita

$$\langle \psi_\xi | \frac{p^2}{2m} | \psi_\xi \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p^2 dp}{2m(1 + \beta p^2)^2} \quad (3.11)$$

applicando il teorema dei residui per il calcolo dell'integrale si ottiene

$$\langle \psi_\xi | \frac{p^2}{2m} | \psi_\xi \rangle = \frac{1}{2\beta m} \quad (3.12)$$

gli stati di massima localizzazione non sono in genere ortogonali

$$\langle \psi_\xi | \psi_{\xi'} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \exp \left\{ -\frac{\xi' - \xi}{i\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right\} \quad (3.13)$$

dal calcolo diretto

$$\langle \psi_{\xi'} | \psi_{\xi} \rangle = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\xi' - \xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right) - \left(\frac{\xi' - \xi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \sin \left(\frac{(\xi' - \xi)\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right) \quad (3.14)$$

Come sarà mostrato nella prossima sezione gli stati di massima localizzazione oltre ad essere quelli che minimizzano l'indeterminazione sulla posizione possono essere impiegati per rappresentare altri stati in uno spazio detto delle "quasiposizioni".

3.2 La funzione d'onda della quasiposizione

In Meccanica Quantistica ordinaria è spesso utile espandere gli stati $|\psi\rangle$ nella base che diagonalizza \hat{x} , cioè $|x\rangle$, come $\langle x|\psi\rangle$. Come già detto più volte, generalizzando il principio di indeterminazione si rinuncia ad un qualunque set di stati fisici che formino una base di autostati per l'operatore posizione, esiste solo una famiglia a un parametro di autofunzioni formali che, oltre a non essere stati fisici consentiti, non possono neppure essere approssimati da stati fisici di crescente localizzazione. Tuttavia possiamo proiettare il generico stato $|\psi\rangle$ sullo stato di massima localizzazione intorno a alla posizione ξ ($|\psi_{\xi}\rangle$), ottenendo l'ampiezza di probabilità di trovare la particella maggiormente localizzata intorno a alla suddetta posizione. Chiamiamo queste proiezioni $\langle \psi_{\xi} | \phi \rangle$ "Funzioni d'onda della quasiposizione" dello stato ϕ :

$$\langle \psi_{\xi} | \phi \rangle = \phi(\xi) \quad (3.15)$$

La trasformazione dallo spazio degli impulsi a quello delle quasiposizioni è la seguente

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{\frac{3}{2}}} \exp \left\{ \frac{-\xi}{i\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p) \right\} \psi(p) \quad (3.16)$$

la funzione d'onda della quasi posizione che si ottiene applicando questa trasformazione agli autostati dell'impulso $\psi_{\tilde{p}}(p) = \delta(\tilde{p} - p)$ di energia $E = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$ è ancora un'onda piana del tipo

$$A(\tilde{p}) = \exp \left\{ \frac{-\xi}{i\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}\tilde{p}) \right\} \quad (3.17)$$

tuttavia la relazione di dispersione muta completamente diventando:

$$k(\tilde{p}) = \frac{1}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}\tilde{p}) = \frac{2\pi}{\lambda(\tilde{p})} \quad (3.18)$$

da cui

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\beta}{\arctan(\sqrt{2m\beta E})} \quad (3.19)$$

possiamo notare che l'esistenza di un limite di precisione entro il quale poter risolvere le posizioni si manifesta nel fatto che, data la limitatezza dell'arcotangente, esiste una lunghezza d'onda minima non nulla. Le decomposizioni di Fourier delle funzioni d'onda pertanto non possono contenere componenti di lunghezza d'onda inferiore al valore

$$\lambda_o = 4\hbar\sqrt{\beta} \quad (3.20)$$

Da queste considerazioni emerge un ulteriore contrasto con la Meccanica Quantistica ordinaria. Dal momento che

$$E = \tan^2\left(\frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\lambda}\right) \frac{1}{2m\beta} \quad (3.21)$$

le funzioni d'onda non possono avere increspature arbitrariamente fini poichè E diverge al tendere di λ a λ_o . La trasformazione che mappa lo spazio degli impulsi in quello delle quasiposizioni è una trasformata di Fourier generalizzata, che resta ancora invertibile. Per trovarla esplicitamente calcoliamo

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p)\psi(p)dp \quad (3.22)$$

La funzione che stiamo cercando è la $K^{-1}(\xi, p)$ per cui si ha

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\xi, p)\psi(\xi)d\xi \quad (3.23)$$

Sostituendo l'espressione integrale di $\psi(\xi)$ nel secondo integrale si abbia

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\xi, p) \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p')\psi(p')dp'd\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p') \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p')K^{-1}(\xi, p)dp'd\xi \quad (3.24)$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\xi, p')K^{-1}(\xi, p)d\xi = \delta(p - p') \quad (3.25)$$

Per confronto si ottiene

$$K(\xi, p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}(1 + \beta p^2)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p\right\} \quad (3.26)$$

e

$$K^{-1}(\xi, p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}}(1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p\right\} \quad (3.27)$$

come si può verificare dal calcolo diretto. Dunque la funzione d'onda d'onda nello spazio dei momenti si ottiene da :

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p\right\} \psi(\xi) \quad (3.28)$$

Nello spazio delle quasiposizioni può essere costruita una rappresentazione dell'algebra di Heisenberg. Il prodotto scalare si può scrivere come

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp d\xi d\xi' (8\pi\hbar\sqrt{\beta})^{-1} \exp\left\{\frac{\xi - \xi'}{i\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta}p)\right\} \psi^*(\xi) \phi(\xi') \quad (3.29)$$

Per trovare la rappresentazione di \hat{p} nello spazio delle $\psi(\xi)$ osserviamo che

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \partial_{\xi} \left(e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \right) \phi(\xi) = \quad (3.30)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \partial_{\xi} \phi(\xi) \quad (3.31)$$

per l'integrazione per parti, ma si ha anche

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \partial_{\xi} \left(e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \right) \phi(\xi) = \quad (3.32)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} i \frac{\arctan \sqrt{\beta}p}{\sqrt{\beta}\hbar} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \phi(\xi) \quad (3.33)$$

L'azione di \hat{p} nello spazio delle quasi posizioni è

$$\hat{p}\psi(\xi) = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi})}{\sqrt{\beta}} \psi(\xi) \quad (3.34)$$

Per quanto riguarda x

$$\hat{x}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \partial_p \left[(1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \right] \phi(\xi) \quad (3.35)$$

Calcoliamo a parte la derivata

$$\partial_p \left[(1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \right] = \left\{ (1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \beta p - (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \frac{i\xi}{\hbar(1 + \beta p^2)} \right\} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} = \quad (3.36)$$

$$= (1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\beta p - \frac{i}{\hbar} \xi \right] e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta}p} \quad (3.37)$$

e dunque

$$\hat{x} \psi(p) = i\hbar \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left(\beta p - \frac{i}{\hbar} \xi \right) (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\xi}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p} \psi(\xi) \quad (3.38)$$

da cui segue che la rappresentazione di \hat{x} nello spazio delle quasi posizioni è

$$\hat{x} \psi(\xi) = \xi + i\hbar\sqrt{\beta} \tan\left(-i\hbar\sqrt{\beta} \partial_{\xi}\right) \psi(\xi) \quad (3.39)$$

Commentiamo le caratteristiche peculiari di questa rappresentazione. Possiamo notare che \hat{x} e \hat{p} sono scrivibili come funzioni degli operatori di moltiplicazione e derivazione ξ e $-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_{\xi}$ i quali obbediscono alle usuali leggi di commutazione della Meccanica Quantistica. Ovviamente neppure nello spazio delle $\psi(\xi)$ è possibile diagonalizzare l'operatore posizione. Il maggior vantaggio dellarappresentazione quasiposizionale risiede nella diretta interpretazione fisica così sintetizzabile : le $\psi(\xi)$ rappresentano l'ampiezza di probabilità di trovare la particella con massima localizzazione intorno alla posizione ξ con la minima indeterminazione Δx_o . Concludiamo questa sezione con alcune osservazioni sulle trasformazioni dall'Algebra di Heisenberg classica a quella generalizzata e sul significato del fatto che non rientrino nella classe delle trasformazioni canoniche. Esistono omomorfismi tra l'algebra generalizzata $H(\hat{x}, \hat{p})$ e quella convenzionale $H_o(\hat{x}_o, \hat{p}_o)$. In una dimensione l'omomorfismo è il seguente:

$$h : H \longrightarrow H_o \quad (3.40)$$

$$h : \begin{cases} x \longrightarrow x_o + \beta p_o x_o p_o \\ p \longrightarrow p_o \end{cases} \quad (3.41)$$

Infatti

$$h([x, p]) = [h(x), h(p)] = [x_o + \beta p_o x_o p_o, p_o] = [x_o, p_o] + \beta [p_o x_o p_o, p_o] \quad (3.42)$$

da cui, applicando la regola di Leibniz per i commutatori

$$h([x, p]) = [x_o, p_o] + \beta p_o [x_o p_o, p_o] = [x_o, p_o] + \beta p_o [x_o, p_o] p_o \quad (3.43)$$

e dunque

$$h([x, p]) = i\hbar(1 + \beta p_o^2) \quad (3.44)$$

Sappiamo che le trasformazioni unitarie conservano le relazioni di commutazione, nel nostro caso queste relazioni non vengono preservate dunque possiamo affermare che nessuna rappresentazione di H è unitariamente equivalente ad alcuna rappresentazione di H_o , questo implica che l'intero set di previsioni, stati fisici, autovalori o ampiezze di probabilità calcolato in H_o non potrà in alcun modo coincidere con quello ottenuto in H .

Capitolo 4

Potenziale a δ di Dirac

4.1 L'equazione di Schrödinger per la Delta

Un caso interessante da studiare in quanto può essere utilizzato per schematizzare molti fenomeni è quello del potenziale a δ di Dirac. Ovviamente qualsiasi potenziale sarà per definizione funzione della posizione pertanto risulta particolarmente complesso risolvere l'equazione di Schrödinger nella rappresentazione nello spazio degli impulsi. Per questo motivo è molto più agevole trovare la forma esplicita degli operatori nello spazio delle quasiposizioni e continuare a trattare i potenziali nella loro naturale dipendenza spaziale. Come abbiamo appena visto se ad ogni funzione d'onda $|\phi\rangle$ associamo la sua proiezione su uno stato di massima localizzazione, tramite la trasformata di Fourier generalizzata, è possibile capire come agiscono \hat{x} e \hat{p} sugli stati della quasiposizione. L'espressione ottenuta prima per gli operatori è solo la più naturale tra tutte quelle possibili ma può essere modificata con l'unico vincolo di rispettare la relazione di commutazione di partenza. Consideriamo quindi la seguente trasformazione

$$\begin{cases} \hat{x} = \left(\xi + \sqrt{\beta} \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi) \right) \longrightarrow \hat{X} = \xi \\ \hat{p} = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \longrightarrow \hat{P} = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \end{cases} \quad (4.1)$$

dati gli operatori classici

$$\hat{x}_o = x \quad (4.2)$$

$$\hat{p}_o = -i\hbar\partial_x \quad (4.3)$$

la trasformazione appena introdotta equivale a rappresentare \hat{x} e \hat{p} come

$$\hat{X} = \hat{x}_o \quad (4.4)$$

$$\hat{P} = \frac{\tan(\sqrt{\beta}\hat{p}_o)}{\sqrt{\beta}} \quad (4.5)$$

Quindi l'operatore impulso resta immutato, mentre quello di posizione è stato semplicemente decurtato della parte dipendente da \hat{p}_o . E' semplice verificare che le due forme sono del tutto equivalenti dal momento che rispettano la stessa regola di commutazione. Infatti

$$\hat{X} = \hat{x} - \beta\hat{p}\hat{P} = \hat{p} \quad (4.6)$$

da cui

$$[\hat{X}, \hat{P}] = [\hat{x} - \beta\hat{p}, \hat{p}] = [\hat{x}, \hat{p}] \quad (4.7)$$

La nuova rappresentazione è però più facilmente riconducibile a quella classica, infatti \hat{x} resta invariato e \hat{p} è funzione di \hat{p}_o . A questo punto tramite una semplice espansione della tangente nella variabile β arrestata al terzo ordine si giunge alle indentità

$$\hat{X} = \hat{x}_o \quad (4.8)$$

$$\hat{P} = \hat{p}\left(1 + \frac{\beta}{3}\hat{p}^2\right) \quad (4.9)$$

L'equazione di Schrödinger stazionaria nel caso specifico è

$$\frac{\hat{P}^2}{2m} - V_o\delta(\xi)\phi(\xi) = \left\{ \frac{1}{2m} \left(\hat{p}\left(1 + \frac{\beta}{3}\hat{p}^2\right) \right)^2 - V_o\delta(\xi) \right\} \phi(\xi) = E\phi(\xi) \quad (4.10)$$

trascurando i termini in β^2 nello sviluppo del quadrato di \hat{P} si giunge a [6]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} \phi(\xi) + \beta \frac{\hbar^4}{3m} \frac{d^4}{d\xi^4} \phi(\xi) - V_o\delta(\xi)\phi(\xi) = E\phi(\xi) \quad (4.11)$$

dove V_o è una costante positiva. E' importante sottolineare che i termini del quarto ordine in questa nuova equazione di Schrödinger modificano le correnti di probabilità, che diventano

$$J = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi} \psi \right) + \frac{i\beta\hbar^3}{m} \left[\left(\psi^* \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^3} - \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial \xi^3} \psi \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial \xi} \right) \right] \quad (4.12)$$

ma resta inalterata la densità di probabilità

$$\rho = |\psi|^2 \quad (4.13)$$

Integrando l'equazione tra $-\epsilon$ e $+\epsilon$ (con ϵ costante positiva arbitrariamente piccola) si ha

$$\left[\frac{d}{d\xi} \phi_+(0) - \frac{d}{d\xi} \phi_-(0) \right] - \frac{2}{3} \beta \hbar^2 \left[\frac{d^3}{d\xi^3} \phi_+(0) - \frac{d^3}{d\xi^3} \phi_-(0) \right] + \frac{2mV_o}{\hbar^2} \phi(0) = 0 \quad (4.14)$$

dove ϕ_+ e ϕ_- corrispondono rispettivamente alle soluzioni dell'equazione rispettivamente per $x > 0$ e $x < 0$. Dato che la derivata terza della funzione d'onda quasiposizionale ha una discontinuità nell'origine richiediamo che le derivate prima e seconda siano ivi continue. Quindi

$$-\frac{\beta}{3} \left[\frac{d^3}{d\xi^3} \phi_+(0) - \frac{d^3}{d\xi^3} \phi_-(0) \right] = \frac{mV_o}{\hbar^4} \phi(0) \quad (4.15)$$

E' ben noto che la soluzione dell'equazione ottenuta tenendo conto del segno di E conduce a due differenti risultati, precisamente emergono un unico stato legato a energia negativa e un set di stati detti di scattering a energia positiva.

4.1.1 Stati Legati

Nel caso in cui le energie siano negative la soluzione più generale dell'equazione differenziale si scrive come

$$\phi_{\pm}(\xi) = A_{\pm} e^{k\xi} + B_{\pm} e^{-k\xi} + C_{\pm} e^{k_{\beta}\xi} + D_{\pm} e^{-k_{\beta}\xi} \quad (4.16)$$

Sviluppando le radici del polinomio associato al primo ordine in β le costanti k e k_{β} diventano

$$k = k_o \left(1 + \frac{1}{3} \beta \hbar^2 k_o^2 \right) \quad (4.17)$$

$$k_{\beta} = \sqrt{\frac{3}{2\hbar^2\beta}} \left(1 - \frac{1}{3} \beta \hbar^2 k_o^2 \right) \quad (4.18)$$

$$k_o = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}} \quad (4.19)$$

I coefficienti possono essere trovati, a meno di una costante di normalizzazione, richiedendo la continuità della soluzione, delle sue derivate prima e seconda e che questa resti finita quando $\xi \rightarrow \pm\infty$. Imponendo queste condizioni si ricava

$$A_+ = 0 \quad C_+ = 0 \quad (4.20)$$

$$B_- = 0 \quad D_- = 0 \quad (4.21)$$

$$C_- = -\frac{k}{k_{\beta}} A_- \quad (4.22)$$

$$D_+ = -\frac{k}{k_{\beta}} B_+ \quad (4.23)$$

$$A_- = B_+ = A \quad (4.24)$$

Si perviene al risultato

$$\begin{cases} \phi_- = Ae^{k\xi} - \frac{k}{k_\beta} Ae^{k_\beta\xi}, & \xi < 0 \\ \phi_+ = Ae^{-k\xi} - \frac{k}{k_\beta} Ae^{-k_\beta\xi}, & \xi > 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

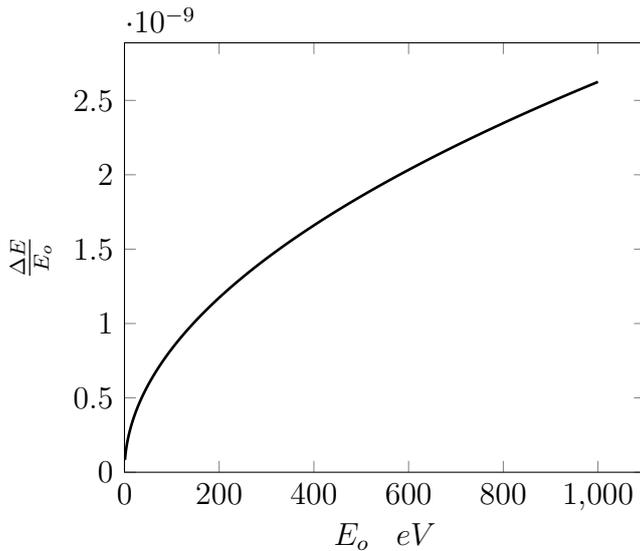
con A costante di normalizzazione. Esiste dunque un'unica autofunzione e il corrispondente autovalore può essere ricavato utilizzando la condizione di discontinuità nell'origine della derivata terza, da cui

$$E = -\frac{mV_o^2}{2\hbar^2} + \sqrt{\frac{2\beta}{3} \frac{m^2V_o^2}{\hbar^3}} - 2\beta \frac{m^3V_o^4}{\hbar^4} \quad (4.26)$$

differente dallo spettro classico

$$E = -\frac{mV_o^2}{2\hbar^2} \quad (4.27)$$

E' importante notare come il primo termine correttivo introdotto dipenda dalla radice di β che abbiamo all'origine legato alla lunghezza minima. Se considerassimo la massa di un elettrone e un valore arbitrario dell'energia di legame E_o calcolata nel caso classico, fissata la lunghezza minima osservabile, potremmo ottenere l'andamento della differenza relativa di energie tra caso classico e generalizzato in funzione di E_o . Nel grafico la lunghezza elementare da cui dipende β è stata fissata a 10^{-20} e le energie E_o variano in un intervallo che va da 1 eV a 1 KeV. Come si può vedere, sotto queste condizioni, a 1KeV $\frac{\Delta E}{E_o}$ è dell'ordine di 10^{-9} , ma per una lunghezza elementare pari a quella di Planck questo rapporto sarebbe di ben 17 ordini di grandezza inferiore. Ovviamente rilevare una discrepanza di tale entità per poter verificare la veridicità di tale correzione va ben aldilà delle attuali possibilità sperimentali.



4.1.2 Stati di scattering

A questo punto è lecito chiedersi se, oltre alle correzioni all'energia dello stato legato introdotte dalla generalizzazione del principio di indeterminazione, possano essere ricavate delle correzioni ai coefficienti di riflessione e trasmissione per studiare ad esempio eventuali deviazioni nella probabilità di tunneling. In questo caso la soluzione più generale dell'equazione di Schrödinger diventa

$$\phi_{\pm}(\xi) = A_{\pm}e^{ik\xi} + B_{\pm}e^{-ik\xi} + C_{\pm}e^{k_{\beta}\xi} + D_{\pm}e^{-k_{\beta}\xi} \quad (4.28)$$

$$k_{\beta} = \sqrt{\frac{3}{2\hbar^2\beta}} \left(1 + \frac{1}{3}\beta\hbar^2k_o^2 \right) \quad (4.29)$$

Richiediamo che non ci sia un'onda riflessa per $\xi > 0$, e che la soluzione resti finita quando $\xi \rightarrow \pm\infty$, quindi

$$B_+ = C_+ = D_- = 0 \quad (4.30)$$

In questo caso la continuità nell'origine della funzione e delle sue derivate fino al secondo ordine non è più una condizione sufficiente per determinare la soluzione, è necessario allora utilizzare la condizione di discontinuità della derivata terza per poter determinare i coefficienti. Dopo qualche passaggio algebrico si ricava

$$\begin{cases} \phi_- = Ae^{ik\xi} + \frac{k_{\beta}k\frac{A}{b}e^{-ik\xi}}{-} \frac{A}{b}e^{k_{\beta}\xi}, & \xi < 0 \\ \phi_+ = \frac{a}{b}Ae^{-ik\xi} - \frac{A}{b}e^{k_{\beta}\xi}, & \xi > 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

$$a := 1 + \frac{2\beta\hbar^4k_{\beta}}{2mV_o} \left(k_{\beta}^2 + k^2 \right) \quad (4.32)$$

$$b := a - i\frac{k_{\beta}}{k} \quad (4.33)$$

Nota la soluzione è possibile calcolare le correnti di probabilità associate all'onda incidente, quella riflessa e quella trasmessa, rispettivamente J_i , J_r e J_t . Ottenute le correnti, i coefficienti di riflessione e trasmissione, R e T , sono definiti come

$$R = \frac{|J_r|}{|J_i|} \quad T = \frac{|J_t|}{|J_i|} \quad (4.34)$$

Dal calcolo risulta

$$R = \left(\frac{k_{\beta}}{k} \right)^2 \frac{1}{\left[1 + \frac{2\beta\hbar^4k_{\beta}}{2mV_o} \left(k_{\beta}^2 + k^2 \right) \right]^2 + \left(\frac{k_{\beta}}{k} \right)^2} \quad (4.35)$$

$$T = \left(\frac{k_\beta}{k}\right)^2 \frac{\left[1 + \frac{2\beta\hbar^4 k_\beta}{2mV_o} (k_\beta^2 + k^2)\right]^2}{\left[1 + \frac{2\beta\hbar^4 k_\beta}{2mV_o} (k_\beta^2 + k^2)\right]^2 + \left(\frac{k_\beta}{k}\right)^2} \quad (4.36)$$

Si può verificare che, come ci si aspetta

$$R + T = 1 \quad (4.37)$$

E' bene esplicitare tutti i termini dipendenti da β e dall'energia e espandere al primo ordine in $\sqrt{\beta}$ i coefficienti per paragonarli con quelli calcolabili in Meccanica Quantistica ordinaria. Si giunge alle espressioni

$$R = \left(1 + \frac{2\hbar^2|E|}{mV_o^2}\right)^{-1} \left[1 - \sqrt{\frac{2\beta}{3}} \frac{2mV_o}{\hbar} \left(1 + \frac{mV_o^2}{2\hbar^2|E|}\right)^{-1}\right] \quad (4.38)$$

$$T = \left(1 + \frac{mV_o^2}{2\hbar^2|E|}\right)^{-1} \left[1 - \sqrt{\frac{2\beta}{3}} \frac{m^2V_o^3}{\hbar^3|E|} \left(1 + \frac{mV_o^2}{2\hbar^2|E|}\right)^{-1}\right] \quad (4.39)$$

Dal confronto con i risultati canonici si deduce una diminuzione della probabilità di tunneling. Nel primo grafico è mostrato l'andamento della variazione relativa del coefficiente di trasmissione in funzione della lunghezza minima per una particella di energia $E_o \simeq 1eV$ e di massa pari a quella dell'elettrone, sia nel caso in cui la δ simuli una buca di potenziale (curva continua), sia nel caso di un gradino di potenziale (curva tratteggiata). Per L_{min} di circa $10^{-17}m$ la variazione relativa di T è considerevolmente piccola (dell'ordine di 10^{-9}) per poter essere rilevata, ma come si può vedere dal secondo grafico, lo scenario cambia radicalmente alle scale tipiche delle interazioni note, consideriamo $E_o \simeq 1MeV$, $L_{min} \simeq 10^{-17}m$ e una massa pari a quella del protone. In questa situazione la deviazione dalla previsione canonica è considerevole, motivo per cui è ragionevole concludere che la lunghezza minima debba essere molto lontana dalle scale di dimensioni tipiche, ad esempio, dell'interazione elettrodebole e invece più prossima alla scala di Planck, dove però diventa anche virtualmente impossibile riuscire ad apprezzare le discrepanze indotte dalla generalizzazione del principio di indeterminazione.

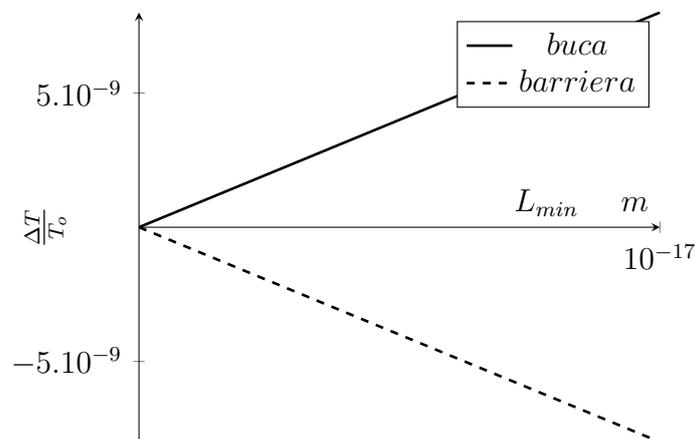


Figura 4.1: Variazione relativa del coefficiente di trasmissione per $E_0 = 1 \text{ eV}$

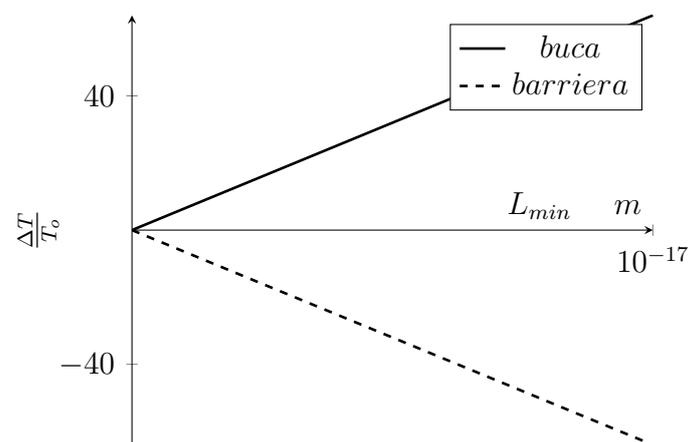


Figura 4.2: Variazione relativa del coefficiente di trasmissione per $E_0 = 1 \text{ MeV}$

4.2 Conclusioni

Per quanto appena discusso, se gli effetti gravitazionali implicassero in Meccanica Quantistica l'esistenza di un'indeterminazione minima non nulla nelle misure di posizione, alla quale corrisponderebbe una lunghezza minima osservabile, questa avrebbe numerose conseguenze non solo sulla struttura teorica e matematica che soggiace alla Meccanica Quantistica ma anche nelle predizioni della teoria stessa. Nell'esempio dei fenomeni di riflessione e trasmissione studiati con l'algebra di Heisenberg generalizzata è evidente come l'ipotesi di partenza conduca a soluzioni formalmente differenti da quelle canoniche e che i risultati ordinari, relativamente ai nuovi, si dimostrino essere delle approssimazioni. Probabilmente l'aspetto più rilevante fisicamente, come è stato esposto nell'ultima parte del lavoro, risiede nella possibilità di effettuare delle stime, anche sulla base di quanto già noto, di quali siano concretamente le lunghezze o le energie da esplorare affinché le correzioni previste si manifestino ma per quanto visto questi effetti sembrano essere relegati ad ambiti non facilmente accessibili sperimentalmente.

Capitolo 5

Appendice

5.1 Richiami sugli operatori

Se T è un operatore nello spazio di Hilbert \mathbb{H} , con dominio $D(T)$ denso in \mathbb{H} , l'operatore *aggiunto* di T , indicato con T^* , è l'operatore definito sul sottospazio:

$$D(T^*) = \{\varphi \in \mathbb{H} \mid \exists \xi \in \mathbb{H} \text{ tale che } \langle \varphi | T\psi \rangle = \langle \xi | \psi \rangle \quad \forall \psi \in D(T)\} \quad (5.1)$$

e tale che $\hat{T}^*\varphi = \xi$.

Si osservi che non è detto che $D(T^*)$ sia denso in \mathbb{H} per cui, in generale, non esiste $(T^*)^*$.

Diremo che un operatore T estende V se $D(V) \subset D(T)$ e

$$V\varphi = T\varphi \quad \forall \varphi \in D(V) \quad (5.2)$$

T si dice *chiuso* se \forall successione $\varphi_n \in D(T)$ che converge a $\varphi \in \mathbb{H}$ e tale che la successione dei vettori trasformati $T\varphi_n$ sia anch'essa convergente a $\xi \in \mathbb{H}$ si ha che $\varphi \in D(T)$ e che $T\varphi = \xi$.

L'operatore T si dice *chiudibile* se $\forall \varphi_n \in D(T)$ con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0 \quad (5.3)$$

tale che esista il limite ξ della successione $T\varphi_n$, si ha che $\xi = 0$.

Teorema 1. *Sia T un operatore densamente definito su \mathbb{H} . Si ha*

1. T^* è un operatore chiuso
2. T è chiudibile $\leftrightarrow D(T^*)$ è denso. In tal caso

$$T \subseteq \bar{T} = (T^*)^* \quad (5.4)$$

Un operatore S è detto *simmetrico* se

$$\langle \psi | S\varphi \rangle = \langle S\psi | \varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in D(S) \quad (5.5)$$

e $D(S)$ è denso.

Dalla definizione discende che l'aggiunto di un operatore simmetrico ha un dominio che certamente contiene $D(S)$ e che su tale dominio S^* opera come S . Dunque S^* è densamente definito e estende l'operatore stesso.

S è detto *autoaggiunto* se $D(S)$ è denso e $S = S^*$. Un operatore simmetrico è dunque autoaggiunto se e solo se $D(S) = D(S^*)$.

Un operatore A è detto *essenzialmente autoaggiunto* se $D(A)$ e $D(A^*)$ sono densi e $A^* = (A^*)^*$ o, equivalentemente, se $D(A)$ è denso, A è chiudibile e vale $A^* = \bar{A}$. Osserviamo che le seguenti definizioni coincidono quando il dominio dell'operatore è tutto \mathbb{H} (e dunque per gli operatori limitati, i quali possono essere estesi per continuità su tutto \mathbb{H}).

5.2 Proprietà Operatori Essenzialmente Autoaggiunti

- Se $D(A), D(A^*), D(A^{**})$ sono densi si ha

$$A^* = (\bar{A})^* = \bar{A}^* = A^{***} \quad (5.6)$$

- A è essenzialmente autoaggiunto $\leftrightarrow \bar{A}$ è autoaggiunto
- Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora A ammette una sola estensione autoaggiunta che è proprio \bar{A}

Teorema 2 (Operatori Autoaggiunti). *Sia A un operatore simmetrico su \mathbb{H} . Sono equivalenti le seguenti condizioni*

1. A è autoaggiunto
2. A è chiuso e $\text{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$
3. $\text{Ran}(A \pm i) = \mathbb{H}$

1 \rightarrow 2. Se $A = A^*$, A è chiuso poichè A^* è chiuso. Se $\phi \in \text{Ker}(A^* + i)$ allora

$$A^*\phi = -i\phi \quad (5.7)$$

e quindi

$$\langle -i\phi | \phi \rangle = i \langle \phi | \phi \rangle = \langle A^*\phi | \phi \rangle = \langle A\phi | \phi \rangle = \langle \phi | A\phi \rangle = \langle \phi | -i\phi \rangle = -i \langle \phi | \phi \rangle \quad (5.8)$$

da cui $\langle \phi | \phi \rangle = 0 \rightarrow \phi = 0$. La prova per $-i$ è identica. \square

Teorema 3 (Operatori Essenzialmente Autoaggiunti). *Sia A un operatore simmetrico su \mathbb{H} . Sono equivalenti le seguenti condizioni*

1. A è essenzialmente autoaggiunto
2. $\text{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$
3. $\overline{\text{Ran}(A \pm i)} = \mathbb{H}$

1 \rightarrow 2. Se A è essenzialmente autoaggiunto, allora $A^* = A^{**}$ e quindi A^* è autoaggiunto (e dunque chiuso).

Per il teorema precedente $\text{Ker}(A^{**} \pm i) = \{0\}$, ma poichè $A^{**} = A^*$ si ha $\text{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$. \square

Il prossimo risultato ci mostra dei criteri di esistenza per le estensioni autoaggiunte.

Teorema 4. *Sia A un operatore simmetrico su \mathbb{H} . Definiti gli indici di difetto*

$$d_{\pm}(A) = \dim \text{Ker}(A^* \pm i) \quad (5.9)$$

vale :

- A ammette estensioni autoaggiunte se e solo se $d_+(A) = d_-(A)$
- A è autoaggiunto se e solo se $d_+(A) = d_-(A) = 0$

In particolare, il numero di parametri da cui dipende la famiglia di estensioni autoaggiunte è pari a d .

Bibliografia

- [1] Kempf, Achim, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann. "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation." *Physical Review D* 52.2 (1995): 1108.
- [2] Bosso, Pasquale. "Generalized uncertainty principle and quantum gravity phenomenology." arXiv preprint arXiv:1709.04947 (2017).
- [3] Vitagliano Edoardo. "Modelli di generalizzazione dell'algebra di Heisenberg e oscillazione di neutrini" Tesi di Laurea (2010/2011)
- [4] Moretti, Valter, and M. F. N. Facolta di Scienze. "Operatori in Spazi di Hilbert e Struttura Matematica della Meccanica Quantistica: un'Introduzione." (2010).
- [5] Maria B. Barbaro, Marialuisa Frau, Stefano Sciuto. "Introduzione ai metodi matematici della fisica." (2004).
- [6] Gusson, Oakes, Francisco, Furtado, Fabris, Nogueira. "Dirac delta-function potential in quasiposition representation of a minimal-length scenario". arXiv: 1704.08236v2 (2018).