

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI “FEDERICO II”

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE  
AREA DIDATTICA DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



*Laurea triennale in Fisica*

# La teoria della percolazione

**Relatore:** Prof. Mario Nicodemi

**Candidato:** Erica Roviello

**Matricola:** N85000637

ANNO ACCADEMICO 2018/2019

A coloro che non hanno la possibilità  
di vivere la propria libertà.

La libertà di scegliersi la vita,  
di vivere nel paese in cui si è nati,  
di studiare e di avere un lavoro dignitoso.

Ad Ibrahim, Omar, Nbah e Yunus  
perché un giorno possa guardare  
i loro occhi e vederli pieni di libertà.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Numero di Cluster</b>	<b>2</b>
1.1 I cluster . . . . .	2
1.2 Distribuzione di un olio in una roccia porosa . . . . .	4
1.3 Altri tipi di reticoli . . . . .	5
1.4 Soluzione esatta in una dimensione . . . . .	7
1.5 Numero di cluster in d dimensioni . . . . .	10
1.6 Soluzione esatta nel caso infinito dimensionale . . . . .	12
1.7 Leggi di scala per il numero di cluster . . . . .	18
<b>2 Struttura dei cluster</b>	<b>26</b>
2.1 Massa del cluster incipiente . . . . .	26
2.2 Perimetro reale del cluster . . . . .	28
2.3 Raggio di girazione del cluster incipiente e funzione di scala . . . . .	30
2.4 Lunghezza di correlazione . . . . .	31
2.5 Legge di scala . . . . .	32
2.6 Cluster infinito alla soglia e nuova funzione di scala . . . . .	33
<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>

# Introduzione

Con il termine percolazione si intende il lento movimento di un fluido attraverso un materiale poroso.

La teoria della percolazione è un concetto probabilistico che risale al 1957 con una pubblicazione dei matematici Broadbent e Hammersley, i quali la proposero come modello per descrivere in modo statistico le connessioni a lunga distanza di sistemi contenenti numerosi oggetti, collegati tra loro da relazioni aleatorie a corta distanza; in particolare essa studia la formazione di aggregati di tali oggetti (chiamati *cluster*) e la loro geometria.

Uno dei mezzi che gioca un ruolo molto importante per la percolazione è il computer, poiché vengono analizzati e simulati reticoli contenenti migliaia di milioni di siti e quindi spesso è molto difficile calcolare le grandezze coinvolte per via analitica, pertanto si ricorre a quella computazionale.

In questa tesi affronteremo prima il problema della formazione e del numero di cluster trovando delle soluzioni esatte solo nel caso unidimensionale e nel caso infinito dimensionale e successivamente ne studieremo la loro struttura. In particolare analizzeremo queste soluzioni nei pressi del cosiddetto (*punto critico*), dove le grandezze misurabili si comportano in maniera molto simile tra loro.

# Capitolo 1

## Numero di Cluster

La percolazione è un processo casuale che spiega le proprietà e il numero dei cluster (oggetto di studio di questo processo). Differenti reticoli di percolazione conterranno cluster di differenti dimensioni e forme. In questo capitolo studieremo la distribuzione del numero di cluster. Cominceremo con alcune definizioni ed esempi utili e successivamente calcoleremo l'esatta soluzione del numero di cluster, nel caso unidimensionale e nel caso infinito dimensionale per il reticolo di Bethe. Utilizzando le leggi di potenza avanzaeremo un'ipotesi di scala per il numero di cluster.

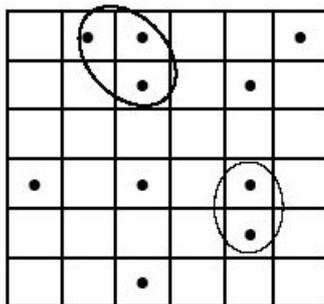
### 1.1 I cluster

Immaginiamo un reticolo bidimensionale quadrato, che indicheremo con  $\mathbb{Z}^2$ . Una parte dei quadrati del reticolo è riempita con un punto nel centro, mentre l'altra parte è vuota.

I quadrati con un lato in comune prendono il nome di "primi vicini", mentre quelli che si toccano in un angolo prendono il nome di "secondi vicini".

Quindi si definisce *cluster* una catena ininterrotta di "primi vicini", come possiamo notare dalla figura (1.1).

Figura 1.1: Rappresentazione di cluster (cerchiati) di un reticolo 2D quadrato



L'occupazione dei quadrati del reticolo è del tutto casuale, cioè non dipende dall'occupazione dei loro vicini.

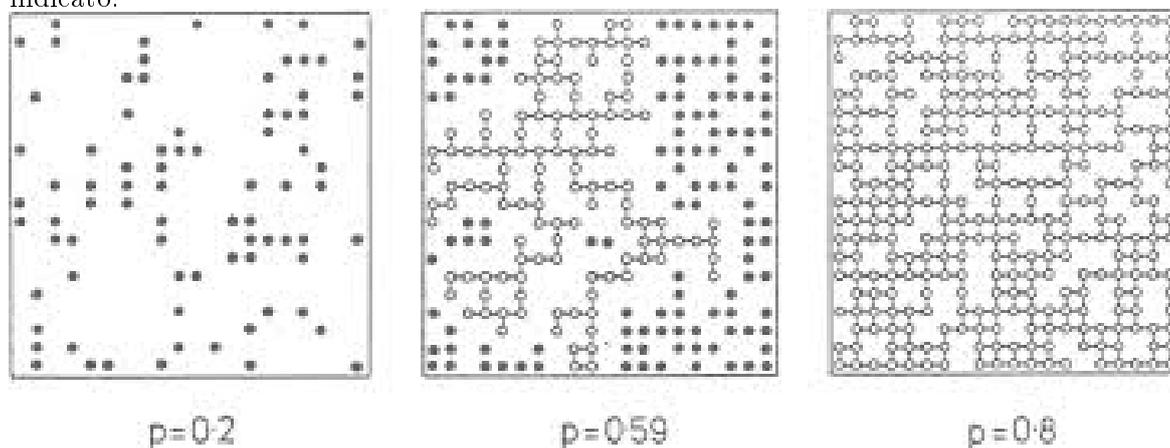
Chiamiamo  $p$  la probabilità di un sito di essere occupato da un punto, questo significa che se  $N$  è il numero totale di quadrati del reticolo si avrà che  $pN$  quadrati saranno occupati, invece  $(1 - p)N$  quadrati saranno vuoti.

La percolazione studia in particolare come il valore di  $p$  modifica il sottografico casuale  $\mathbb{Z}^2$  che si forma. Come si evince dalle simulazioni, in un reticolo quadrato (Fig.1.2), per  $p \geq 0.6$  il cluster si estende da sopra a sotto e da sinistra verso destra ed è quindi un cluster infinito, invece per  $p < 0.6$  è finito.

Il valore  $p_c = 0.6$  è definito come **soglia di percolazione** (o **probabilità critica**), ed è il valore per il quale il cluster "*percola*" attraverso il sistema. Diciamo che il cluster *percola* attraverso il sistema come l'acqua che *percola* attraverso una caffettiera.

Le definizioni di cluster e di soglia di percolazione le abbiamo date per reticoli bidimensionali quadrati, ma come vedremo nei successivi paragrafi in generale esistono diversi tipi di reticoli a seconda del fenomeno che si vuole modellizzare.

Figura 1.2: Esempio di percolazione su un reticolo quadrato 2D per variazione di  $p$ , come indicato.



## 1.2 Distribuzione di un olio in una roccia porosa

La percolazione può essere usata per realizzare modelli semplici di distribuzione di un olio o di un gas che scorrono in una roccia porosa. Considerando un reticolo bidimensionale, immaginiamo che i quadrati vuoti rappresentino una regione riempita con roccia dura, mentre quelli occupati rappresentino i pori riempiti con olio o gas. La concentrazione media di olio nella roccia coincide con la probabilità di occupazione  $p$ . Per  $p < p_c$  l'olio è presente solo in cluster finiti connessi. Per studiare invece la situazione in cui  $p > p_c$ , consideriamo un grande cluster, poniamo una cornice  $L \times L$  attorno ad una parte di esso e contiamo quanti punti della cornice vi appartengono (cioè vogliamo determinare la massa del cluster  $M(L, p)$ , definita più dettagliatamente nel capitolo 2). Il cluster cresce linearmente con l'area della cornice  $L^2$ .

Si definisce la densità di punti connessi al pozzo come:

$$P(L, p) = \frac{M(L, p)}{L^2}$$

diminuisce al diminuire di  $p$ .

La situazione invece cambia quando  $p \simeq p_c$  perché il cluster è piuttosto ramificato e ha molti fori che a sua volta contengono altri cluster che possono essere abbastanza grandi. Il valore di  $M(L, p)$  non è più lineare nell'area  $L^2$  e si ha:

$$M(L, p) \propto L^{1.9}$$

dove 1.9 rappresenta la dimensionalità frattale. Questo implica che la densità media  $P(L, p)$  non è più costante ma decade come  $L^{-0.1}$ .

Esiste una tipica lunghezza  $\xi$  chiamata *lunghezza di correlazione* per la quale si ha che:

$$\begin{cases} M(L, p) = L^2 & \text{se } L > \xi \\ M(L, p) = L^{1.9} & \text{se } L < \xi \end{cases}$$

Tutto questo lo analizzeremo in maniera più dettagliata e generale quando studieremo la geometria dei cluster nel capitolo 2.

### 1.3 Altri tipi di reticoli

Nella realtà però non esistono solo i reticoli quadrati, anzi, possiamo studiare diversi reticoli per ogni dimensione. In due dimensioni, oltre al reticolo quadrato, possiamo trovare anche il reticolo a nido d'ape e il reticolo triangolare. In tre dimensioni, invece, riconosciamo il reticolo cubico, quello a corpo centrato, quello a facce centrate e il reticolo diamantato.

La teoria della percolazione si può applicare anche ai legami e prende il nome di *percolazione dei legami*. In questa teoria non si considerano i siti, bensì la linea (legame) tra due siti, che può essere un legame aperto con probabilità  $p$  o un legame chiuso con probabilità  $(1 - p)$ . In questo caso, si definisce *cluster* un insieme di siti connessi da legami aperti. Questo significa che due siti prossimi

vicini occupati possono formare un cluster di dimensione due nell'ambito della percolazione dei siti e un cluster di dimensione uno nell'ambito della percolazione dei legami. Pertanto, quando si misura la dimensione di un cluster è importante specificare se ci troviamo nell'ambito della percolazione dei siti o nell'ambito della percolazione dei legami. Il valore della soglia di percolazione  $p_c$  dipende sia dalle dimensioni reticolari sia dal tipo di percolazione; considerando un reticolo del tipo  $\mathbb{Z}^d$ , indichiamo i diversi valori di  $p_c$  nella seguente tabella, ricordando che è quel valore di  $p$  per la quale una rete infinita appare in un reticolo infinito:

<b>Reticolo</b>	$p_c(\text{Siti})$	$p_c(\text{Legami})$
Quadrato	0.593	0.500
Triangolare	0.500	0.347
Nido d'ape	0.696	0.652
Diamantato	0.43	0.388
Corpo centrato	0.246	0.180
Facce centrate	0.198	0.119
Cubico semplice	0.311	0.248

Per visualizzare la percolazione dei siti su un reticolo triangolare, possiamo mettere numerose piccole sfere di uguale dimensione ma con due colori, nero e bianco, dentro una grande scatola. Queste sfere rotoleranno da sopra a sotto della scatola se questa è grande abbastanza da evitarne la sovrapposizione. Se la scatola è leggermente inclinata, tutte le sfere rotoleranno su un lato. Scuotendo la scatola formeranno un reticolo triangolare. I due colori diversi simboleggiano i siti occupati e vuoti; se avessimo lo stesso numero di colori potremmo studiare il comportamento alla soglia di percolazione  $p_c = \frac{1}{2}$ . Ripetiamo che per tutti i reticoli, ogni sito è randomicamente occupato con probabilità  $p$  e vuoto con probabilità  $(1 - p)$ .

## 1.4 Soluzione esatta in una dimensione

Consideriamo un reticolo unidimensionale, cioè una catena lineare infinitamente lunga dove i siti del reticolo sono situati ad una distanza finita l'uno dall'altro e studiamo per questo reticolo i siti di percolazione con l'esempio che segue.

Supponiamo che esista un cluster centrale costituito da 5 siti pieni, che si trova in prossimità di due siti vuoti. La situazione è schematizzata in figura:

Figura 1.3: Cluster in un reticolo unidimensionale



La probabilità di ciascun sito di essere occupato è  $p$  e dal momento che tutti i siti sono occupati casualmente la probabilità di cinque siti arbitrari di essere occupati è  $p^5$ . Invece la probabilità di un sito finale del cluster di avere un vicino vuoto è  $(1 - p)$  e di conseguenza quella di due siti finali è  $(1 - p)^2$ . Allora la probabilità totale che si formi un cluster di dimensione 5, considerando il passo del reticolo unitario, è  $p^5(1 - p)^2$ .

Volendo trattare la questione in modo del tutto generico, lavoriamo nell'ipotesi di reticolo infinito. In tal modo andremo a studiare un percorso ininterrotto di siti occupati, ovvero un percorso in cui nessun sito è vuoto. La probabilità che si formi un cluster di dimensione  $s$ , cioè un cluster di lunghezza  $l=s$ , dipende dalla probabilità di avere  $s$  siti vicini prossimi:

$$n_s = p^s(1 - p)^2 \quad (1.1)$$

La grandezza  $n_s$  è detta **distribuzione del numero di cluster** e rappresenta il numero di cluster di dimensione  $s$  per reticolo, cioè la densità di cluster.

Per  $p < 1$  la distribuzione del numero di cluster va esponenzialmente a zero se la dimensione  $s$  del cluster va ad infinito, ciò significa che per questi valori non c'è percolazione.

Per  $p = 1$  tutti i siti della catena sono occupati e l'intera catena costituisce un singolo cluster.

Per  $p > 1$  non è possibile osservare la regione in una dimensione.

Inoltre la probabilità che un qualunque sito appartenga ad un cluster di dimensione  $s$  è  $n_s s$ , e si può dimostrare che:

$$\sum_{s=1}^{\infty} n_s s = p \quad (p < p_c) \quad (1.2)$$

Questa equazione è ristretta per  $p < p_c$  perché per alte dimensioni continua a valere, ma solo considerando separatamente i siti nel cluster infinito.

Inoltre la probabilità che un cluster, a cui un arbitrario sito occupato appartiene, abbia esattamente dimensione  $s$  è:

$$w_s = \frac{n_s s}{\sum_s n_s s}$$

Così la dimensione media del cluster che stiamo misurando in questo processo è data da:

$$S = \sum_{s=1}^{\infty} w_s s = \sum_s \frac{n_s s^2}{\sum_s n_s s} \quad (1.3)$$

Possiamo calcolare esplicitamente  $S$  sfruttando l'equazione 1.2 e trovare che:

$$S = \frac{(1+p)}{(1-p)} \quad (p < p_c)$$

Quindi vediamo che  $S$  diverge se ci avviciniamo alla soglia di percolazione, questo succede perché ci sono infiniti cluster sopra la soglia  $p_c$ , quindi leggermente

sotto la soglia troviamo ancora molti cluster seppur finiti. Quando  $p = p_c$  appare un unico cluster di dimensione infinita ( $S = \infty$ ).

Definiamo adesso la **funzione di correlazione**, ovvero la probabilità che un sito a distanza  $r$  da un sito occupato appartenga comunque allo stesso cluster;  $r$  è una variabile discreta.

$$g(r) = p^r \quad (\forall p, r) \quad (1.4)$$

Per  $r = 0$ ,  $g(0)$  sarà uguale ad 1.

Per  $r = 1$ , il sito vicino appartiene allo stesso cluster se e solo se è occupato, quindi  $g(1)$  sarà uguale a  $p$ .

Possiamo riscrivere questa equazione in funzione della lunghezza di correlazione già vista nelle precedenti sezioni:

$$g(r) = e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (1.5)$$

definendo la lunghezza di correlazione nel caso unidimensionale come:

$$\xi = -\frac{1}{\ln(p)} \quad (1.6)$$

Questa equazione è valida solo per  $p$  vicina al valore critico  $p_c = 1$  (questa situazione prende il nome di *fenomeno critico*), in questo caso possiamo sviluppare la lunghezza di correlazione in serie di Taylor attorno a  $p_c$  e ottenere:

$$\xi = \frac{1}{(p_c - p)} \quad (1.7)$$

da cui si vede che questa diverge per  $p \rightarrow p_c$  questa diverge.

Da cui si osserva che:

$$S = \frac{(1+p)}{(1-p)} = \frac{(1+p)}{(p_c - p)} = (1+p)\xi \quad (1.8)$$

quindi la dimensione media del cluster è proporzionale alla lunghezza di correlazione ( $S \propto \xi$  per  $p \rightarrow p_c$ ).

Questo risultato si può estendere al caso multidimensionale, tuttavia si complica di molto. In generale la lunghezza di correlazione è proporzionale al diametro medio del cluster, nel caso unidimensionale questa coincide proprio con la lunghezza media del cluster  $S$ .

Una relazione nel caso unidimensionale valida in generale è:

$$\sum_{r=0}^{\infty} g(r) = S \quad (\text{r distanza positiva}) \quad (1.9)$$

Questo significa che certe quantità divergono alla soglia di percolazione e questa divergenza può essere descritta dalla semplice legge di potenza  $\frac{1}{(p_c-p)}$ , almeno asintoticamente vicino a  $p$ .

## 1.5 Numero di cluster in d dimensioni

Per calcolare il numero di cluster in più dimensioni possiamo applicare lo stesso principio utilizzato nel caso unidimensionale?

Per rispondere a questa domanda consideriamo un reticolo quadrato bidimensionale (come in figura 1.1) e calcoliamo la probabilità che un sito arbitrario sia un cluster di dimensione  $s = 1$ . Perchè ciò accada, il sito stesso deve essere occupato (con probabilità  $p$ ) e i 4 siti primi vicini devono essere vuoti (con probabilità  $(1 - p)$ ). Il numero di cluster in questo caso è:

$$n_1 = p(1 - p)^4$$

Se invece di un sito occupato ne consideriamo due, bisogna che questa volta questi abbiano 6 primi vicini vuoti. Quindi il numero di cluster è:

$$n_2 = 2p^2(1 - p)^6$$

Il fattore moltiplicativo 2 compare perchè sono possibili due orientazioni spaziali nel reticolo per i due siti occupati, cioè questi possono orientarsi o verticalmente o orizzontalmente.

Similarmente per tre siti occupati che hanno 8 primi vicini vuoti si ha:

$$n_3 = 2p^3(1 - p)^8$$

Generalmente allora si ha per  $s$  siti su un reticolo quadrato bidimensionale:

$$n_s = 2p^s(1 - p)^{2s+2}$$

Si nota che ogni cluster lineare ha  $(2s + 2)$  primi vicini.

Se invece adesso consideriamo un reticolo cubico semplice tridimensionale si ha che ogni cluster lineare con  $s$  siti possiede  $(4s + 2)$  primi vicini e inoltre sono possibili tre orientazioni spaziali.

Quindi il numero di cluster di dimensione  $s$  per reticolo è:

$$n_s = 3p^s(1 - p)^{4s+2}$$

Infine considerando un reticolo ipercubico di dimensione  $d$  si ha che:

- Per ogni sito occupato si hanno  $(2d - 2)$  vicini vuoti, quindi per un  $s$ -cluster si hanno  $2 + (2d - 2)s$  vicini vuoti.
- Si hanno  $d$  possibili orientazioni spaziali.

Allora il numero di cluster in questo caso è:

$$n_s = dp^s(1 - p)^{2+(2d-2)s}$$

Tuttavia questo tipo di ragionamento tiene conto soltanto dei cluster lineari, ma generalmente si possono trovare anche cluster con configurazioni ad "*angolo*". Dobbiamo tener conto sia del numero di possibili configurazioni, che ovviamente dipende dalla dimensione del cluster, sia del numero di vicini vuoti.

Generalmente il numero di vicini vuoti di un cluster è chiamato **perimetro** che verrà indicato con  $t$ .

Per esempio: per un reticolo quadrato avente un cluster di dimensione  $s = 3$ , sono possibili 4 orientazioni ad "angolo" e 2 configurazioni lineari. Quindi avremo  $t = 7$  per le 4 configurazioni ad "angolo" e invece  $t = 8$  per le due configurazioni lineari.

Il numero medio per le configurazioni ad "angolo" è:

$$n_3 = 4p^3(1 - p)^7$$

Combinandolo poi con il risultato delle configurazioni lineari, si ha:

$$n_3 = 2p^3(1 - p)^8 + 4p^3(1 - p)^7$$

Se adesso definiamo il numero di configurazioni possibili di un  $s$ -cluster di perimetro  $t$ , indicato come la funzione  $g_{s,t}$ , otteniamo:

$$n_s = \sum_t g_{s,t} p^s (1 - p)^t \quad (1.10)$$

che è il numero medio di un  $s$ -cluster per sito del reticolo.

Nel nostro caso con  $s = 3$ , la funzione  $g_{3,t}$  assumerà i seguenti valori:  $g_{3,8} = 2$  e  $g_{3,7} = 4$ .

Questa formula è molto importante perchè è valida per ogni reticolo. La difficoltà però sta nel fatto che  $g_{st}$  deve essere trovata caso per caso, pertanto si evince che non è possibile trovare una forma generale di  $n_s$ .

## 1.6 Soluzione esatta nel caso infinito dimensionale

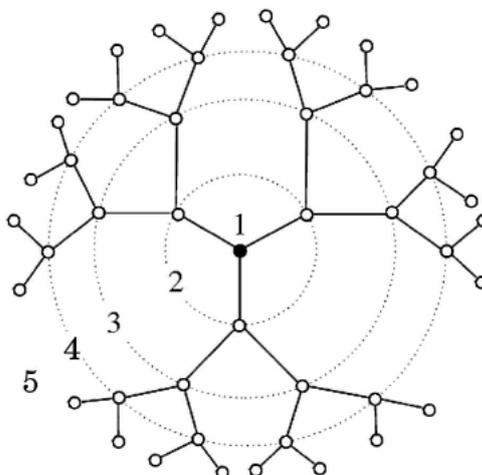
Nelle precedenti sezioni abbiamo trovato una soluzione esatta della teoria della percolazione nel caso unidimensionale, in questa sezione ci limiteremo a trovare questa soluzione anche nel caso infinito dimensionale.

Il **reticolo di Bethe**, per esempio, è un reticolo avente dimensione  $d = \infty$ .

Si può descrivere questo reticolo come a forma di "albero ramificato": si parte da un nodo centrale, chiamato origine, che ha  $z$  legami. Ogni legame termina in un altro sito che presenta a sua volta altri  $z$  legami, di cui uno di questi è connesso con l'origine, mentre gli altri  $(z - 1)$  legami conducono ad altri siti. Questo processo ramificato continua ancora e ancora. Solo sulla superficie del reticolo, dove appunto si ferma la ramificazione, è presente un unico legame che collega il sito di superficie al suo interno, questo rappresenta una strada senza uscita. Notiamo allora che in un reticolo infinito non possiamo trovare siti di superficie.

Adesso proviamo a trovare una soluzione esatta per  $d = \infty$ , considerando un piccolo reticolo di Bethe avente  $z = 3$  vicini prossimi, come mostrato in figura:

Figura 1.4: Reticolo di Bethe avente  $z=3$  vicini. Gli anelli indicano la generazione di appartenenza dei siti.



Visto che ci troviamo nel caso infinito dimensionale possiamo innanzitutto notare che:

- Non esistono loop chiusi in questa struttura, questo significa che possiamo raggiungere sempre nuovi siti a meno che non torniamo indietro.

- Il rapporto tra il numero di siti sulla superficie del reticolo e il numero di siti contenuti all'interno di essa è costante. Questo significa che per  $d \rightarrow \infty$  (ipercubo) la superficie è proporzionale al volume, cioè:

$$V \propto r^d \quad e \quad S \propto r^{(d-1)}$$

Quindi:

$$S \propto V^{(1-\frac{1}{d})} \tag{1.11}$$

cioé

$$\frac{S}{V} \propto \text{costante}$$

Questo è vero anche per il reticolo di Bethe.

Sulla base di queste considerazioni, proviamo allora alcuni risultati per il nostro reticolo di Bethe (con  $z = 3$ ). Notiamo che l'origine è circondato da una shell con tre siti (prima generazione), seguito da una seconda shell contenente sei siti (seconda generazione) seguiti a sua volta da una shell con dodici siti (terza generazione) e così via.

Per prima cosa calcoliamo la soglia di percolazione.

Cominciamo dall'origine e cerchiamo di capire se abbiamo una chance di trovare un infinito percorso di vicini occupati. Se andiamo in tale percorso verso fuori troviamo  $(z - 1)$  nuovi legami emanati da ogni nuovo sito, tranne da quello da cui siamo venuti. Ognuno di questi  $(z - 1)$  legami porta a nuovi vicini che sono occupati con probabilità  $p$ .

Così in media abbiamo  $(z - 1)p$  nuovi vicini occupati, da cui possiamo continuare il percorso. Se questo numero è minore di 1 il numero medio di sentieri differenti che vanno all'infinito decresce ad ogni generazione di questo fattore minore di 1. Quindi la probabilità di trovare un percorso continuo di vicini occupati va a zero esponenzialmente con la lunghezza del percorso se  $p < \frac{1}{(z-1)}$ , dove ri-

cordiamo che  $p$  è la probabilità di un sito arbitrario di essere occupato. Perciò la *soglia di percolazione* è:

$$p_c = \frac{1}{(z-1)} \quad (1.12)$$

Definiamo adesso la **forza del cluster infinito**  $P$  indicata come la probabilità che l'origine, o qualsiasi altro sito arbitrario, appartenga a cluster infinito.

Chiamiamo  $Q$  la probabilità che un sito arbitrario non sia connesso all'infinito attraverso un ramo fisso originato dallo stesso sito. Allora per la *regola delle probabilità indipendenti* si ha che la probabilità che l'origine è occupato ma non connesso ad infinito attraverso uno dei suoi tre rami è  $pQ^3$ . Così otteniamo:

$$\begin{cases} P = 0 & \text{per } p \leq p_c \\ P = p(1 - Q^3) & \text{per } p > p_c \end{cases}$$

Dove il valore di  $Q$  è:

$$Q = 1 - p + pQ^2$$

Quindi otteniamo per  $p$  maggiore della soglia:

$$\frac{P}{p} = 1 - \frac{(1-p)^3}{p^3} \quad (1.13)$$

La forza del cluster infinito è definita con la frazione di atomi che appartengono ad una rete infinita e sostanzialmente indica la transizione tra una fase percolante e una non percolante.

Per ricavare invece la dimensione media del cluster  $S$ , dobbiamo definire  $T$ , indicata come la dimensione media del cluster per un ramo, cioè il numero medio dei siti a cui l'origine è connesso e che appartiene ad un ramo. I sotto rami, infatti, hanno lo stesso  $T$ . Se il vicino è vuoto (probabilità  $(1-p)$ ) la dimensione del cluster per questi rami è zero, se invece è occupato (probabilità  $p$ ) la dimensione media del

cluster contribuisce con la propria massa e aggiunge anche la massa  $T$  per ognuno dei suoi sottorami. Così:

$$T = (1 - p)0 + p(1 + 2T)$$

da cui si ottiene che:

$$T = \frac{p}{(1 - 2p)} \quad (\text{per } p < p_c)$$

Allora:

$$\begin{cases} S = 0 & \text{se l'origine é vuoto} \\ S = 1 + 3T = \frac{1+p}{1-2p} & \text{se l'origine é pieno} \end{cases}$$

Abbiamo allora derivato l'esatta formula per  $S$  e per  $P$ .

Adesso invece calcoliamo la quantità  $n_s(p)$  per il reticolo di Bethe, che è il numero medio (per sito) di cluster che contengono  $s$  siti ognuno. La dimensione di un cluster è unicamente relazionata al suo perimetro  $t$  che ricordiamo essere il numero di vicini vuoti del sito di cluster occupato.

Nel caso generale di  $z$  vicini per sito, l'isolato è circondato da  $z$  siti perimetrali mentre la coppia ha  $(2z - 2)$  vicini vuoti.

Così il perimetro totale nel reticolo di Bethe è:

$$t = (z - 2)s + 2$$

notiamo che è proporzionale ad  $s$  per  $s$  grande.

Se adesso per calcolare  $n_s(p)$  applichiamo il risultato generale dato dall'equazione (1.10), otteniamo:

$$n_s(p) = g_s p^s (1 - p)^{[(z-2)s+2]} \quad (1.14)$$

In prossimità della soglia di percolazione  $p_c$  è possibile sviluppare la  $n_s(p)$  in serie di Taylor intorno a  $p_c$  (rimaniamo per semplicità sempre sull'esempio di  $z = 3$ ),

ottenendo:

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = \frac{(1-p)^2 p^s (1-p)^s}{(1-p_c)^2 p_c^s (1-p_c)^s} = \frac{(1-p)^2}{(1-p_c)^2} [1 - a(p-p_c)^2]^s$$

con  $a = 4$  in questo caso. Si ottiene allora:

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \propto e^{-cs}$$

ovvero:

$$n_s(p) \propto n_s(p_c) e^{-cs} \quad (1.15)$$

dove  $c = -\ln[1 - a(p-p_c)^2] \propto (p-p_c)^2$ .

Ora troviamo il comportamento asintotico nei numeri del cluster  $n_s(p)$  alla soglia (cioè per  $p = p_c$ ).

Sappiamo che generalmente la dimensione media del cluster è:

$$S \propto \sum_s s^2 n_s$$

questa somma è infinita per  $p = p_c$ . Se però  $n_s(p_c)$  decade esponenzialmente con  $s$  allora  $S$  rimane finita per  $p = p_c$ . In prossimità del valore critico di percolazione ( $p_c$ ), si può dimostrare che:

$$S \propto |p_c - p|^{-1}$$

Per  $s$  grande, rappresentiamo una legge che è valida sempre:

$$n_s(p) \propto s^{-\tau} e^{-cs} \quad (1.16)$$

dove  $\tau$  è l'*esponente di Fisher* e si dimostra che nel reticolo di Bethe  $\tau = \frac{5}{2}$ .

Allora:

$$n_s(p) \propto s^{-\frac{5}{2}} e^{-cs} \quad (1.17)$$

## 1.7 Leggi di scala per il numero di cluster

Come abbiamo accennato prima, per la teoria della percolazione non esiste una soluzione esatta e generale per il numero di cluster, tranne che, come abbiamo visto, nel caso unidimensionale per un reticolo quadrato e nel caso infinito dimensionale per il reticolo di Bethe.

Tuttavia esiste una legge di scala basata su alcune assunzioni (**assunzioni di scala**), dalle quali, nel caso bidimensionale e tridimensionale, non è ancora stato trovato alcun discostamento. Costruiremo allora queste leggi di scala a partire dai risultati esatti ottenuti nelle precedenti sezioni.

Abbiamo appena visto che  $n_s(p)$  quando  $p$  si avvicina alla soglia  $p_c$  è:

$$n_s(p) \propto s^{-\tau} e^{-cs}$$

Postuliamo ora che:

$$c \propto |p - p_c|^{\frac{1}{\sigma}} \quad (1.18)$$

ponendo:

$$s_\xi = \frac{1}{c} \propto |p - p_c|^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (1.19)$$

Osserviamo dunque che:

$$n_s(p) = \begin{cases} s^{-\tau} & \text{se } s \ll s_\xi \\ \text{decade rapidamente} & \text{se } s \gg s_\xi \end{cases}$$

Quindi solo i cluster con  $s \ll s_\xi$  contribuiscono in maniera significativa alle medie dei numeri di cluster.

- CASO 1

Studiamo il caso unidimensionale di cui conosciamo la soluzione esatta:

$$n_s(p) = p^s (1 - p)^2$$

che si può riscrivere come:

$$n_s(p) = (1 - p)^2 e^{-(p_c - p)s}$$

Siccome però davanti all'esponenziale non abbiamo una potenza di  $s$ , questa soluzione non è un caso particolare della legge di scala. Questo però non ci porterà a cambiare la nostra assunzione, perché il caso unidimensionale è un caso che si allontana dalla realtà dei fenomeni critici, quindi certamente non potremmo mai avere  $p_c = 1$ . E se provassimo a porre  $\tau = 0$  per risolvere la non consistenza con la legge di scala? Risponderemo a questa domanda in seguito.

- CASO 2

Avevamo ottenuto dall'equazione (1.10):

$$n_s = \sum_t g_{s,t} p^s (1 - p)^t$$

con  $n_s(p)$  polinomio finito e quindi avrà tutte le derivate rispetto a  $p$  finite. Utilizzando la nostra legge di scala si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dn_s(p)}{dp} &\propto s^{-\tau} \frac{1}{\sigma} (p - p_c)^{\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)} e^{(-s(p - p_c)\frac{1}{\sigma})} \\ \frac{d^2 n_s(p)}{dp^2} &\propto (p - p_c)^{\left(\frac{1}{\sigma} - 2\right)} \\ \frac{d^3 n_s(p)}{dp^3} &\propto (p - p_c)^{\left(\frac{1}{\sigma} - 3\right)} \end{aligned}$$

Se consideriamo un reticolo quadrato bidimensionale, avente  $\sigma = 36/91$ , osserviamo che quando  $p \rightarrow p_c$  la derivata terza diverge in totale disaccordo con l'equazione (1.10). Risolveremo questo problema dopo, ora invece assumendo che la nostra legge di scala sia valida, calcoliamo la forza del cluster infinito  $P$  :

$$P = p - \sum_{s=1}^{\infty} n_s p = p_c - \sum_{s=1}^{\infty} n_s p + p - p_c = \sum_{s=1}^{\infty} s n_s(p_c) - \sum_{s=1}^{\infty} s n_s(p) + o(p - p_c)$$

Quindi:

$$P \propto s = 1^\infty s^{1-\tau} (1 - e^{-cs}) \quad (1.20)$$

Sostituiamo la sommatoria con un integrale perchè siamo in realtà interessati solo al comportamento vicino alla soglia di percolazione  $p_c$ :

$$P \propto \int s^{1-\tau} (1 - e^{-cs}) ds$$

integrandolo per parti si ottiene:

$$P \propto c^{\tau-2} \propto (p - p_c)^{\frac{(\tau-2)}{\sigma}} \propto (p - p_c)^\beta \quad (1.21)$$

Allora si ha:

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\sigma} \quad (1.22)$$

L'esponente critico  $\beta$  è detto **relazione di scala**.

Ricordando che un cluster infinito si forma solo quando la concentrazione di siti occupati è maggiore del valore critico, si ha:

$$P = \begin{cases} 0 & \text{per } p \leq p_c \\ (p - p_c)^\beta & \text{per } p \rightarrow p_c^+ \end{cases}$$

È comparso un nuovo problema che analizzeremo dopo.

Calcoliamo adesso la dimensione media del cluster:

$$\begin{aligned} S &\propto \sum_s s^2 n_s(p) \propto \int s^2 n_s ds \\ &\propto \int s^{2-\tau} e^{-cs} ds \propto c^{\tau-3} \int z^{2-\tau} e^{-z} dz \propto c^{\tau-3} \propto |p - p_c|^{\frac{\tau-3}{\sigma}} \end{aligned}$$

Allora:

$$S \propto |p - p_c|^\gamma \quad (1.23)$$

Abbiamo quindi definito:

$$\gamma = \frac{\tau - 3}{\sigma} \quad (1.24)$$

Quindi si ha una nuova relazione di scala per l'esponente critico  $\gamma$ . Visto che  $n_s(p)$  è un polinomio finito deve esserlo anche  $S$  per ogni  $p \rightarrow p_c$ ; questo implica che  $\gamma > 0$  quindi  $\tau < 3$ .

Questo giustifica il fatto che nel CASO 1, la soluzione unidimensionale non è coerente con la nostra legge di scala, perchè se lo fosse si otterrebbe  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = 1$  e quindi  $\tau = 2$ . Pertanto, per rispondere alla domanda del CASO 1, non si può risolvere l'incoerenza con la legge di scala per ovviare al problema della potenza di  $s$  mancante ponendo  $\tau = 0$ .

- CASO 3

Quando abbiamo ricavato  $P$  non abbiamo mai dovuto assumere che  $p \geq p_c$  quindi, se ci basiamo sulla nostra legge di scala, può esistere un cluster infinito anche per  $p < p_c$  e dovrebbe svanire solo per  $p = p_c$ . Ma questo è ovviamente sbagliato.

Siamo quindi costretti a passare ad una nuova legge di scala più generale per i numeri di cluster:

$$n_s(p) = q_0 s^{-\tau} f[q_1 (p - p_c) s^\sigma] \quad (\text{per } s \rightarrow \infty \text{ e } p \rightarrow p_c) \quad (1.25)$$

Dove:

- $\sigma$  e  $\tau$  sono esponenti di scala universali e dipendono solo dalla dimensione spaziale del reticolo.
- $q_0$  e  $q_1$  sono fattori di proporzionalità e come la soglia di percolazione  $p_c$  dipendono dal reticolo considerato.

- La funzione  $f(z)$  ( $z = q_1(p - p_c)s^\sigma$ ) è detta funzione di scala; si avvicina ad un valore costante per  $|z| \ll 1$  e decade velocemente per  $z \gg 1$ . Notiamo che non c'è nessuna legge di scala che ci permette di calcolarla, essa va determinata in via computazionale.

Rianalizziamo ora i tre casi visti precedentemente con la nostra nuova legge di scala più generale.

- CASO 1

Per  $p \rightarrow p_c$  e  $s \rightarrow \infty$  otteniamo per il caso unidimensionale:

$$\begin{aligned} n_s(p) &= p^s(1-p)^2 = (p_c - p)^2 e^{-(p_c-p)s} \approx (p_c - p) e^{-(p_c-p)s} \\ &= s^{-2} (s(p_c - p))^2 e^{-(p_c-p)s} \\ &= s^{-2} f[s^\sigma(p_c - p)] \end{aligned}$$

Siamo interessati solo all'andamento funzionale, quindi omettiamo i fattori di proporzionalità  $q_0$  e  $q_1$ .

Come avevamo visto prima, il caso unidimensionale corrisponde al caso  $\tau = 2$ , che in questo caso verifica la coerenza con la nuova assunzione fatta. Quindi:

$$n_s(p) = s^{-2} f(z) \quad (\text{per } p \simeq 1 \text{ e } s \text{ grande}) \quad (1.26)$$

- CASO 2

In questo caso vogliamo capire se la nostra nuova assunzione porta ancora una volta a divergenze proibite delle derivate dei numeri di cluster rispetto a  $p$ . Per questo lavoro ipotizziamo che la funzione  $f(z)$  sia analitica, cioè possiamo assumere che tutte le derivate di  $f(z)$  rispetto a  $z$  sono finite ovunque e in

particolare per  $z = 0$ . Inoltre, dal momento che  $\frac{dz}{dp} = s^\sigma$ , tutte le derivate di  $n_s(p)$  rispetto a  $p$  rimangono finite per  $p = p_c$ .

Quindi, scrivendo la derivata n-esima:

$$\frac{d^n n_s(p)}{dp^n} = q_0 s^{-\tau} f^{(n)}[q_1(p - p_c)s^\sigma] q_1^k s^{k\sigma} \quad (1.27)$$

visto che abbiamo detto che  $f(z)$  è finita, non sussiste il problema della divergenza. In questo modo abbiamo risolto anche il problema del CASO 2.

- CASO 3

Procediamo adesso con il calcolo della forza del cluster infinito, con l'integrazione e considerando l'equazione (1.22) per l'esponente  $\beta$ , poichè continua a valere con la nuova assunzione.

$$\begin{aligned} -P &= \sum_s n_s p - p = \int s^{1-\tau} [f(z) - f(0)] ds \\ &= |p - p_c|^{\frac{\tau-2}{\sigma}} \int |z|^{(-1+\frac{2-\tau}{\sigma})} [f(z) - f(0)] \frac{dz}{\sigma} \\ &(\beta + \gamma) |p - p_c|^\beta \int |z|^{(-1-\beta)} [f(z) - f(0)] dz \end{aligned}$$

In questa integrazione  $z$  va da 0 a  $+\infty$  per  $p > p_c$  e va da  $-\infty$  a 0 per  $p < p_c$ .

Vogliamo che la funzione si annulli per valori minori di  $p_c$ , quindi la funzione di scala deve comportarsi come:

$$\int |z|^{(-1-\beta)} [f(z) - f(0)] dz = 0$$

o alternativamente:

$$\int |z|^{-\beta} \left[ \frac{df}{dz} \right] dz = 0$$

La prima relazione ci dice che per  $p < p_c$  la funzione  $f(z)$  deve essere talvolta più piccola e talvolta più grande di  $f(0)$ , la seconda invece ci dice che non

può crescere sempre se  $z$  cresce da  $-\infty$  a 0. Fortunatamente  $f(z)$  ha solo un massimo per il problema di percolazione ( $p < p_c$ ), questo massimo lo chiamiamo  $f_{max}$ . Si avrà:

$$f(z_{max}) = f_{max} \quad f(z) < f_{max} \quad z \neq z_{max}$$

Per una dimensione fissa del  $s$ -cluster si ha che  $n_s$  ha un massimo a  $p_{max} < p_c$  con:

$$p_{max} = p_c + z_{max} s^{-\sigma} \quad (1.28)$$

Quindi tutti i problemi che si presentavano con la prima legge di scala sono adesso scomparsi.

Possiamo riscrivere la funzione di scala in termini della dimensione del cluster  $s$ :

$$n_s(p) \propto s^{-\tau} f\left(\frac{s}{s_\xi}\right) \quad (\text{per } p \rightarrow p_c \text{ e } s \rightarrow \infty)$$

Osserviamo che  $s_\xi$  è il valore di cutoff della dimensione di quei cluster che contribuiscono maggiormente al valore della dimensione media del cluster a  $p$  fissata. Quindi cluster con  $s \gg s_\xi$  sono rari.

Allora la funzione  $f\left(\frac{s}{s_\xi}\right)$  decade quando  $\left(\frac{s}{s_\xi}\right) \gg 1$ .

Essendo analitica la possiamo espandere in serie di Taylor intorno a  $z = 0$ :

$$f\left(\frac{s}{s_\xi}\right) = f(0) + f'(0)\left(\frac{s}{s_\xi}\right) + \frac{1}{2}f''(0)\left(\frac{s}{s_\xi}\right)^2 + \dots$$

In una dimensione otteniamo che  $f(0) = f'(0) = 0$  e  $f''(0) = 2$ , in più dimensioni invece accade che  $f(0) \neq 0$ .

Quindi:

$$f\left(\frac{s}{s_\xi}\right) = \begin{cases} \left(\frac{s}{s_\xi}\right)^2 & \text{per } d = 1 \\ f(0) & \text{per } d > 1 \end{cases} \quad (1.29)$$

In ultimo possiamo notare che volendo calcolare la dimensione media del cluster per questa nuova assunzione, per calcolare l'esponente  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} S &\propto \sum_s s^2 n_s \propto \int s^{2-\tau} f(z) ds \\ &= |p - p_c|^{\frac{\tau-3}{\sigma}} \int |z|^{(-1+\frac{3-\tau}{\sigma})} f(z) \frac{dz}{\sigma} \\ &\propto |p - p_c|^{-\frac{3-\tau}{\sigma}} = |p - p_c|^{-\gamma} \end{aligned}$$

Quindi notiamo che anche  $\gamma$ , come  $\beta$ , rimane lo stesso dell'equazione (1.24), nonostante la nostra nuova assunzione.

Possiamo concludere questo capitolo dicendo che questi esponenti sono importanti perchè sono delle quantità universali, indipendenti dalla struttura del reticolo e dipendenti solo dalla sua dimensionalità.

# Capitolo 2

## Struttura dei cluster

In questo capitolo discuteremo della geometria dei cluster. Ci concentreremo sul calcolo della massa del cluster incipiente e quella del cluster infinito, nel quale avrà un ruolo importante la lunghezza di correlazione che definiremo. Verranno introdotte nuove leggi di scala che saranno caratterizzate da nuovi esponenti critici, ma dimostreremo che questi esponenti dipenderanno in ogni caso da quelli introdotti nel capitolo 1.

### 2.1 Massa del cluster incipiente

Riprendiamo i concetti della sezione 1.2 del capitolo 1 per studiare in maniera più generale la massa del cluster. Consideriamo un cluster percolante in un reticolo infinito (quindi  $p \geq p_c$ ), selezioniamo una finestra di dimensione lineare  $L$ .

Definiamo quindi la massa del cluster incipiente percolante  $M(L, p)$ , intesa come il numero di siti lineari nella finestra considerata.

Per un reticolo di generica dimensione  $d$ , si ha che:

$$M(L, p) = L^d P(L, p) \tag{2.1}$$

Dove  $P(L, p)$  è stata definita come la densità di massa del cluster percolante ed inoltre è legata al concetto di forza di un cluster infinito dalla relazione:

$$P(L, p) = \lim_{L \rightarrow \infty} P(L, p) \tag{2.2}$$

Se consideriamo il caso in cui  $p = p_c$  sappiamo che  $P(p_c) = 0$ , quindi:

$$P(L, p_c) = \lim_{L \rightarrow \infty} P(L, p_c) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M(L, p_c)}{L^d} = 0$$

Questo implica che deve sussistere la seguente relazione introdotta dal matematico B. Mandelbrot:

$$M(L, p_c) \propto L^D \quad \text{con } D < d \tag{2.3}$$

Dove l'esponente  $D$  è detto **dimensione frattale**, viene calcolato per via computazionale e può essere anche frazionario, mentre  $M(L, p_c)$  è la **massa del cluster percolante** attraverso un reticolo di dimensione lineare  $L$ .

Pertanto questa relazione è in perfetto accordo con il fatto che la geometria del cluster è frattale.

Se invece adesso consideriamo il caso di un cluster finito avente  $s$  siti osserviamo immediatamente che la massa del cluster dipenderà anche dal numero di questi siti.

Se la lunghezza di scala  $L$  è molto piccola possiamo considerare il cluster come infinito, se invece  $L$  è molto grande tutto il cluster è contenuto all'interno della finestra di lunghezza  $L$  e appare quindi finito. Si ha allora:

$$M(s, L, p_c) = \begin{cases} s & \text{se } L \text{ é molto grande} \\ L^D & \text{se } L \text{ é molto piccola} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dove il senso di "molto grande" e "molto piccola" lo spiegheremo nel paragrafo 2.3, quando introdurremo il raggio del cluster.

## 2.2 Perimetro reale del cluster

Come abbiamo visto il perimetro di un cluster indica il numero di siti vuoti vicini a siti occupati. Può essere visto come una sorta di superficie, simile al perimetro di un cerchio dove  $2\pi r$  è proporzionale alla radice quadrata dell'area (*massa*) del cerchio  $A = \pi r^2$ . Così ci aspettiamo che:

$$t \propto s^{1-\frac{1}{d}} \quad (\text{in } d \text{ dimensioni})$$

Quello che vogliamo dimostrare in questo paragrafo è che questo tipo di ragionamento è sbagliato.

Sappiamo che per  $p > p_c$  il cluster contiene dei buchi al suo interno che contribuiranno al valore del perimetro. Se per esempio abbiamo un solo buco ogni trenta siti, il perimetro sarà proporzionale al numero di siti della rete infinita.

Per un cluster largo ma finito ci si aspetta lo stesso comportamento di una rete infinita, quindi:

$$t \propto s \quad (\text{per } s \rightarrow \infty)$$

Per dimostrare quanto appena detto definiamo una media del perimetro  $t_s$  di un cluster contenente  $s$  siti, dove l'equazione del numero medio di un  $s$ -cluster per sito del reticolo  $n_s$  (equazione 1.10) ci dice che cluster differenti con stessa massa hanno perimetri diversi. (Ricordiamo che per un cluster finito la massa del cluster  $M(s, L, p_c) = s$  per  $L$  grande). Allora:

$$t_s = \sum_s \frac{t n_{s,t}}{n_s}$$

Dove:

$$\sum_s n_{s,t} = n_s$$

Adesso deriviamo la quantità  $n_{s,t}$  rispetto a  $p$  e otteniamo:

$$\frac{dn_s}{dp} = \sum_t g_{s,t} [sp^{s-1}(1-p)^t - p^s t(1-p)^{t-1}]$$

che porta a:

$$t_s = s \left( \frac{1-p}{p} \right) - (1-p) \frac{d \ln(n_s)}{dp} \quad (2.5)$$

con  $\ln(n_s) = -cs^\zeta$  e  $\frac{d \ln(n_s)}{dp}$  che varia come  $s^\zeta$

dove l'esponente è:

$$\zeta = 1 - \frac{1}{d} \quad (2.6)$$

Allora l'equazione (2.1) diventa:

$$t_s = s \left( \frac{1-p}{p} \right) + cost_s^\zeta \quad (s \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

Da questa equazione notiamo che per cluster sufficientemente grandi il perimetro  $t_s$  è sempre proporzionale alla massa, quindi non è una sorta di superficie. L'ipotesi precedente è sbagliata.

Quasi ogni sito occupato è parte di una rete infinita di siti occupati e quasi ogni sito vuoto è parte di una rete infinita di siti vuoti connessi. Ogni cluster grande di siti occupati è penetrato da una rete di siti vuoti connessi con l'esterno. Questo ci dice che anche il perimetro esterno è proporzionale al volume e non alla superficie del cluster.

CASO PARTICOLARE:

In due dimensioni questo non vale poichè alla soglia di percolazione  $p_c$  ogni cluster ha molti buchi interni che non possono raggiungere l'esterno. Possiamo separare l'esterno e l'interno dei siti perimetrali e così solo il totale dei loro numeri combinati obbedisce all'equazione 2.3.

## 2.3 Raggio di girazione del cluster incipiente e funzione di scala

Si definisce *raggio di girazione* la media distanza dei siti del cluster dal suo centro di massa:

$$R^2(s) = \sum_{i=1}^s \frac{|\vec{r}_i - \vec{r}_0|^2}{s} \quad (2.8)$$

Dove  $\vec{r}_i$  è la posizione dell  $i$ -esimo sito del cluster, invece  $\vec{r}_0$  è la posizione del centro di massa definita come:

$$\vec{r}_0 = \sum_{i=1}^s \frac{\vec{r}_i}{s}$$

Se calcoliamo la media su tutti i cluster che hanno dimensione  $s$ , la media della radice quadrata è  $R_s^2$ .

Se adesso usiamo questa media come elemento di confronto per l'equazione 2.4, otteniamo:

$$M(s, L, p_c) = \begin{cases} s & \text{se } L \gg R_s \\ L^D & \text{se } L \ll R_s \end{cases} \quad (2.9)$$

Quando invece  $L \approx R_s$  imponiamo la continuità della massa, ottenendo:

$$s \propto R_s^D$$

Di modo che:

$$M(s, L, p_c) \propto \begin{cases} R_s^D & \text{se } x \gg 1 \\ L^D & \text{se } x \ll 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Dove  $x = \frac{L}{R_s}$ .

Se adesso in funzione di questo parametro definiamo la funzione di scala  $m(x)$ , otteniamo che questa è costante per  $L \ll R_s$  e quindi la massa del cluster appare

frattale, mentre essa decade con una legge di potenza ad esponente  $D$  per  $L \gg R_s$  quindi la massa del cluster appare costante. Quindi notiamo che  $L \approx R_s$  è la linea di separazione tra l'andamento frattale e quello omogeneo.

## 2.4 Lunghezza di correlazione

La funzione di correlazione  $g(r)$  è la probabilità che un sito a distanza  $r$  da un altro sito occupato è occupato e appartiene allo stesso cluster. Il numero medio dei siti al quale un sito occupato è connesso all'origine è  $\sum_r g(r)$ , cioè la somma che scorre su tutti i siti del reticolo  $r$ . D'altro canto:

$$\sum_r g(r) = \sum_s s^2 \frac{n_s}{p}$$

Visto che  $\frac{n_s}{p}$  è la probabilità che un sito occupato appartenga ad un  $s$ -cluster si ha che:

$$pS = \sum_s s^2 n_s = p \sum_r g(r) \quad (p < p_c) \quad (2.11)$$

Notiamo che per  $p > p_c$  questa relazione è ancora valida se sottraiamo il contributo del cluster infinito, ovvero sostituiamo  $g(r)$  ovunque con  $(g(r) - p^2)$ .

Definiamo adesso la *lunghezza di correlazione* come una distanza media di due siti appartenenti allo stesso cluster:

$$\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)} \quad (2.12)$$

Dal momento che per un cluster dato  $2R_s^2$  è la distanza media tra due siti di cluster e dal momento che un sito appartiene con probabilità  $n_s s$  ad un  $s$ -cluster e in ultimo dal momento che è connesso ad  $s$  siti, otteniamo:

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (2.13)$$

che è il raggio di quei cluster che danno il principale contributo alla distribuzione della dimensione del cluster, vicino alla soglia di percolazione  $p_c$ .

Si ha che siccome  $S(P)$  diverge, con una legge di potenza, quando  $p \rightarrow p_c$  anche  $\xi$  diverge al valore critico:

$$\xi \propto |p - p_c|^{-v}$$

È chiaro quindi che la lunghezza di correlazione è legata alla dimensione media del cluster; più grande sarà il suo valore più grande sarà  $S$ .

Infine notiamo che  $v$  e  $D$  sono gli esponenti critici di una nuova legge di scala.

## 2.5 Legge di scala

I due nuovi esponenti critici possono esser riscritti in funzione degli esponenti critici che conosciamo già  $\beta$  e  $\sigma$ . Abbiamo visto che:

$$s \propto R_s^D \quad (\text{per } p = p_c \text{ e } s \gg 1)$$

quindi:

$$R_s \propto s^{\frac{1}{D}} \quad \text{per } p \rightarrow p_c$$

Se sostituiamo questa nuova scrittura nell'equazione (2.13), tenendo conto della seguente relazione per i momenti di ordine  $k$  della distribuzione  $n_s(p)$ :

$$\sum_{s=1}^{+\infty} s^k n_s(p) \propto |p - p_c|^{\frac{\tau-1-k}{\sigma}}$$

otteniamo:

$$\xi^2 \propto \frac{\sum_s s^2 s^{\frac{2}{D}} n_s(p)}{\sum_s s^2 n_s(p)} \propto \frac{|p - p_c|^{\tau-2-\frac{2}{D\sigma}}}{|p - p_c|^{\tau-1-\frac{2}{\sigma}}} \propto |p - p_c|^{-\frac{2}{D\sigma}}$$

Dal momento che:

$$\xi \propto |p - p_c|^{-v}$$

si ottiene:

$$\frac{1}{D} = \sigma \nu \tag{2.14}$$

Quindi si è ridotto a tre il numero dei parametri liberi per descrivere le proprietà percolative.

## 2.6 Cluster infinito alla soglia e nuova funzione di scala

La domanda che ci poniamo è se esiste o no un cluster infinito per  $p = p_c$ .

Un cluster infinito è tale se collega la linea superiore con la linea di fondo; in questo caso notiamo, tramite una simulazione al computer, che per  $p = p_c$  una frazione finita di tutti i reticoli (per esempio metà) ha un cluster infinito, mentre l'altra no. Quindi la risposta alla nostra domanda è forse.

Visto che però rappresentare un cluster infinito è impossibile, possiamo considerare il cluster più grande in un sistema finito e vedere che anche per  $p \ll p_c$  il sistema ha ancora un grande cluster, ma solo per  $p > p_c$  la dimensione di questo grande cluster è dell'ordine del sistema.

Adesso quindi proviamo a determinare la massa di questo grande cluster. Anche in questo caso, come in quello del cluster incipiente, dobbiamo definire una lunghezza di scala (nel cluster incipiente era il raggio di girazione).

La massa del cluster percolante può essere scritta come  $M(L, \xi)$  poichè si ha che  $\xi$  dipende da  $p$ .

Anche in questo caso individuiamo una lunghezza lineare  $L$  nel reticolo e distinguiamo il caso in cui:

- $L \ll \xi$  corrisponde al caso del cluster incipiente (perchè è come se fosse  $\xi = \infty$ ), quindi la geometria del cluster è frattale e si ha:

$$M(L, \xi) \propto L^D$$

- $L \gg \xi$  dividiamo la lunghezza lineare  $L$  in varie sottosezioni pari alla lunghezza di correlazione  $\xi$ , così la massa del cluster è omogenea ed è:

$$M(L, \xi) = L^d P(p) = L^d (p - p_c)^\beta = L^d \xi^{-\frac{\beta}{\nu}}$$

Se  $L$  è dello stesso ordine di  $\xi$  queste due espressioni sono dello stesso ordine e quindi otteniamo:

$$PL^d = \text{cost} L^D \quad \text{con } L = \xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

ovvero:

$$\beta - d\nu = -\nu D \quad \text{o } D = d - \frac{\beta}{\nu} \quad (2.15)$$

Unendo queste relazioni alle altre leggi di scala e all'equazione espressa dalla (2.14)  $\nu D = \frac{1}{\sigma} = \beta + \gamma$ , otteniamo ancora:

$$d\nu = \gamma + 2\beta = \frac{\tau - 1}{\sigma} \quad (2.16)$$

Questa legge è chiamata **relazione di iperscala** ed è usata anche per le transizioni della fase termica.

In questo modo abbiamo ridotto a due il numero di esponenti liberi per descrivere il problema delle percolazioni.

Allora abbiamo ottenuto che:

$$M(L, \xi) = \begin{cases} L^D & \text{per } L \ll \xi \\ \xi^D \left(\frac{L}{\xi}\right)^d & \text{per } L \gg \xi \end{cases} \quad (2.17)$$

Quindi per  $L \gg \xi$  partendo dall'equazione (2.17) e dal fatto che  $M(L, \xi) \propto PL^d$  si ha che:

$$P \propto (p - p_c)^\beta \propto \xi^{D-d}$$

Inoltre se in maniera analoga al cluster incipiente definiamo il rapporto  $\frac{L}{\xi} = x$  definiamo una nuova funzione di scala:

$$m(x) \propto \begin{cases} \text{costante} & x \ll 1 \\ x^{D-d} & x \gg 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Per  $L$  dell'ordine di  $\xi$  la dipendenza su  $L$  deve apparire solo sul rapporto in scala  $\frac{L}{\xi}$ , così:

$$M(L, \xi) = L^D m(x)$$

La funzione di scala  $m(x)$  assume il senso di funzione che fa da linea di separazione tra un andamento geometrico frattale e uno euclideo.

## Bibliografia

- [1] Aharony A., Stauffer D., *Introduction to percolation theory* , Londra: Taylor e Francis, 2003
- [2] Den Berg J., *A note on percolation theory*, University of Utrecht, The Netherlands, 1981
- [3] Sahimi,M. *Applications of percolation theory*, Londra: Taylor e Francis, 1994
- [4] Harry K. *percolation theory for mathematicians*, Birkhauser.

## Ringraziamenti