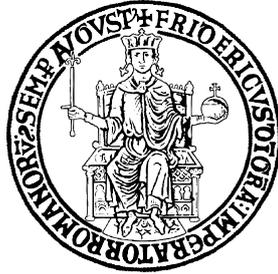


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI
“FEDERICO II”



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”

Laurea Triennale in Fisica

**Analisi della dipendenza sensibile alle condizioni iniziali
del sistema di Lorenz**

Relatore:

Antonio De Candia

Candidato:

Andrea Ponticelli

Matr. N85000761

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Caoticità di un sistema dinamico	3
1.1	Attrattori	4
1.2	Esponenti di Lyapunov	5
1.3	Attrattori caotici strani	6
2	Deterministic Nonperiodic Flow	7
2.1	Dall'equazione di Navier-Stokes e del calore al sistema di Lorenz	8
2.2	Applicazione delle approssimazioni di Oberbeck - Boussinesq	8
2.3	Equazioni di Saltzman	10
2.4	Sistema di Lorenz	11
3	Analisi del sistema di Lorenz	13
3.1	Condizioni di equilibrio stabile e instabile del sistema di Lorenz	13
3.2	Simulazione del sistema mediante integrazione numerica	14
3.2.1	Simulazione con condizioni iniziali lievemente perturbate	15
3.2.2	Simulazione con condizioni iniziali distanti	17
4	Conclusioni	19
A	Dissipatività del sistema di Lorenz	20
B	Codice integrazione numerica	21
C	Tabelle dati	22

Introduzione

Gran parte dei sistemi fisici classici studiati nel corso di laurea triennale sono sistemi *prevedibili*, per cui vale la massima "*piccole cause producono piccoli effetti*". Ma ciò non è sempre possibile.

Esistono perciò dei sistemi in cui si osserva una forte dipendenza alle condizioni iniziali. Diciamo che l'evoluzione temporale di un sistema deterministico è caotico se questo è caratterizzato da una forte dipendenza alle condizioni iniziali: se lo stato di partenza di un sistema con tali proprietà è modificato anche di poco, si possono produrre effetti molto rilevanti nello stato di arrivo. Tali concetti divennero popolari grazie alla famosa citazione di Lorenz "*Può un battito d'ali di una farfalla in Brasile causare un tornado in Texas?*", un modo un po' retorico per dire che piccole cause possono produrre grandi effetti!

L'esempio di sistema caotico esposto in questo lavoro di tesi, e che portò Lorenz a formulare la precedente citazione, è il famoso sistema di Lorenz il quale, pur essendo governato da *leggi deterministiche*, presenta un'evoluzione non prevedibile nelle sue variabili dinamiche.

1 Caoticità di un sistema dinamico

Definizione: si definisce sistema dinamico un sistema descritto da una legge matematica deterministica che delinea l'evoluzione temporale di un numero arbitrario di variabili [1].

Un esempio di sistema dinamico, con variabile temporale t continua, è un sistema di N equazioni differenziali ordinarie autonome del tipo:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]$$

Questo è un sistema dinamico poiché, in linea di principio, fissata la condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$, possiamo risolvere le equazioni ricavando l'evoluzione temporale $\mathbf{x}(t)$ per $t > 0$. Lo spazio N -dimensionale nel quale viene descritto lo stato è detto spazio delle fasi ed il cammino seguito dal sistema che evolve nel tempo è detto traiettoria. Nel caso in cui la variabile temporale non è più continua ma discreta, il sistema dinamico è definito iterativamente, cioè:

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0$$

in cui \mathbf{x}_n è il punto nello spazio delle fasi al tempo t_n . Il sistema differenziale è quindi una mappa definita dall'applicazione f . Ciò vuol dire che assegnato lo stato iniziale \mathbf{x}_0 si può ottenere lo stato \mathbf{x}_1 al tempo t_1 da $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$. Possiamo quindi ricavare la traiettoria del sistema a tempi discreti applicando l'iterazione precedentemente definita.

Dalla teoria dei sistemi dinamici sappiamo che i volumi nello spazio delle fasi si conservano durante l'evoluzione temporale: scelta al tempo $t = 0$ una superficie chiusa $(N - 1)$ -dimensionale S_0 nello spazio delle fasi N -dimensionale e si lascia quindi evolvere fino al tempo t ciascun suo punto, si otterrà una superficie chiusa S_t , il volume N -dimensionale $V(0)$ della regione racchiusa da S_0 sarà uguale al volume $V(t)$ della regione racchiusa da S_t . I sistemi dinamici in cui vale la conservazione dei volumi nello spazio delle fasi nell'evoluzione temporale vengono detti conservativi. I sistemi dinamici per i quali non vale la conservazione dei volumi dello spazio delle fasi nell'evoluzione temporale vengono detti non conservativi, in particolare se il volume si contrae questi vengono chiamati sistemi dissipativi. Per il teorema della divergenza abbiamo

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{S_t} \nabla \cdot \mathbf{F} d^N x \quad (1)$$

se la divergenza del sistema sarà costante e minore di zero, $\nabla \cdot \mathbf{F} = -\alpha$, allora avremo che il volume dello spazio delle fasi si contrarrà nel tempo in maniera esponenziale

$$\frac{d}{dt}V(t) = -\alpha V(0) \quad \Rightarrow \quad V(t) = e^{-\alpha t} V(0)$$

In generale la divergenza di \mathbf{F} sarà una funzione delle variabili x_i , solo nel caso in cui è costante, dal segno della divergenza, si può riconoscere la conservatività del sistema.

Questa è una nozione molto importante nei sistemi dinamici in quanto tipicamente i sistemi dissipativi sono dotati di *attrattori* nello spazio delle fasi. Gli attrattori sono sottoinsiemi dello spazio delle fasi verso i quali evolvono i sistemi dinamici dopo un tempo sufficientemente lungo

1.1 Attrattori

Definizione: sia M^N spazio delle fasi e sia $\mathbf{x}(t) = \phi(t, \mathbf{x}_0) : t \geq 0$ il movimento che si origina dallo stato iniziale \mathbf{x}_0 ; si definisce attrattore un insieme chiuso e limitato $A \subset M^N$ se:

- 1) A è invariante, $\phi(t, A) \subset A, \quad \forall t \geq 0$
- 2) A è attrattivo, esiste un insieme aperto $U \supset A$ tale che $\phi(t, U) \rightarrow A$, per $t \rightarrow \infty$
- 3) A è minimo (o indecomponibile), cioè non esiste nessun sottoinsieme proprio di A che soddisfa le condizioni 1) e 2)

la seconda condizione equivale a "*le traiettorie che arrivano ad essere sufficientemente vicine ad A devono rimanere vicine ad A anche se lievemente perturbate*".

La dinamica su un attrattore può definirsi caotica se presenta una *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*: considerate due orbite $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ di condizioni iniziali $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{x}_2(0)$ vicine, tale che la seconda risulti $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_1(0) + \Delta(0)$, non divergenti per $t \rightarrow \infty$, nel limite $|\Delta(0)| \rightarrow 0$ la loro distanza durante l'evoluzione cresce esponenzialmente nel tempo:

$$\frac{|\Delta(t)|}{|\Delta(0)|} \sim e^{\lambda t} \quad \lambda > 0$$

per orientazioni generiche di $\Delta(0)$. In tal caso diremo che il sistema mostra una sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali e quindi è *caotico*.

È necessario che le orbite restino confinate in una regione limitata dello spazio delle fasi (il motivo è banale in quanto per orbite che vanno all'infinito la loro distanza può facilmente divergere esponenzialmente). Intuitivamente la sensibilità esponenziale alle condizioni iniziali implica il *rapido aumento*, per t sufficientemente grandi, *degli errori delle soluzioni -per quanto questi siano piccoli-*. Di conseguenza piccoli cambiamenti di condizioni iniziali causano un'evoluzione sensibilmente diversa.

Un attrattore si dice strano se ha dimensione frattale e cioè se lo spazio in cui è immerso l'attrattore ha dimensione compresa tra 3 e 2: è chiaro che lo spazio delle fasi può ridurre la sua dimensione se il volume non è conservativo. Solitamente la dinamica che si svolge su attrattori strani è caotica, ma un attrattore caotico può anche non essere strano ed un attrattore strano può non presentare dinamiche caotiche.

Prima definire quando un attrattore è caotico introduciamo gli *esponenti di Lyapunov*.

1.2 Esponenti di Lyapunov

Precedentemente è stato osservato che non è possibile seguire la traiettoria su un attrattore caotico a causa della divergenza esponenziale di orbite vicine. Questa divergenza è caratterizzata con l'ausilio degli esponenti di Lyapunov: sia $\delta\mathbf{x}_0$ la distanza dalla condizione iniziale e $\delta\mathbf{x}_n$ la distanza tra le traiettorie al tempo t_n , si definisce *esponente di Lyapunov* la quantità

$$\lambda(\delta\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{\delta\mathbf{x}_n}{\delta\mathbf{x}_0} \right)$$

Se la dimensione della mappa è N si avranno, per una data condizione iniziale \mathbf{x}_0 , al più N esponenti di Lyapunov distinti ciascuno dipendente dall'orientazione di $\delta\mathbf{x}_0$.

Assegnate le condizioni iniziali in una sfera di raggio ε centrata in \mathbf{x}_0 e si lascia evolvere ciascuna condizione iniziale, dopo n passi si ottiene che essa si evolve in un *ellissoide* di semiassi

$$\varepsilon_i \simeq \varepsilon e^{n\lambda_i(\mathbf{x}_0, \delta\mathbf{x}_0)}$$

per cui passando al limite per $n \rightarrow \infty$ gli esponenti di Lyapunov danno il tasso di crescita o di decrescita rispetto al tempo dei semiassi dell'ellissoide.

Si può dimostrare (ed è anche di facile intuizione) che per tempi sufficientemente lunghi la dinamica del sistema è caratterizzata dall'esponente di Lyapunov maggiore. Il segno dell'esponente di Lyapunov maggiore determina se il sistema è dissipativo, periodico o caotico:

- $\lambda < 0$, il sistema è *dissipativo*. L'orbita converge a un punto fisso o a un'orbita periodica stabile.
- $\lambda = 0$, il sistema è *periodico*. Il sistema presenta una sensibilità a potenza dalle condizioni iniziali e che si evolve seguendo orbite periodiche o quasi periodiche dense su un toro.
- $\lambda > 0$, il sistema è *caotico*. L'orbita è instabile.

È quindi sufficiente che vi sia un solo esponente di Lyapunov positivo affinché il sistema presenti una dinamica caotica. Questo, come detto in precedenza, vale per sistemi dinamici discreti, ovvero per le mappe (caso in cui il tempo non è discreto ma continuo). Si dimostra che sistemi dinamici a tempo continuo sono sempre caratterizzati dalla presenza di almeno un esponente nullo. Infatti la perturbazione di una condizione iniziale lungo la traiettoria della medesima, conduce a due traiettorie uguali eccetto per una differenza finita di passaggio dalle varie configurazioni. Lo stesso non può accadere in sistemi a tempo discreto in quanto non è detto (in realtà è altamente improbabile) che le mappe si equaglino per qualche t_n . Infatti, nel passaggio da tempo continuo a tempo discreto si “perde” l'esponente nullo.

1.3 Attrattori caotici strani

Definizione: un insieme chiuso e limitato $A \subset M^N$, con M^N spazio delle fasi, è un *attrattore caotico strano* se A

- è un attrattore (si veda la definizione nel paragrafo 1.1.1);
- $\max\{ \lambda_i \mid i \leq N \} > 0$, ovvero se il maggiore degli esponenti di Lyapunov è positivo;
- ha dimensione frattale.
- è costituito da almeno tre esponenti di Lyapunov a spettro $(-, 0, +)$ [6]

Quindi, per quanto detto prima, in un attrattore caotico due generiche traiettorie vicine, con condizioni iniziali lievemente perturbate, si allontanano esponenzialmente: questo fenomeno è chiamato *stretching* (Figura 1), cioè caratterizzato da esponenti di Lyapunov positivi. Per definizione di attrattore, A è chiuso e limitato e ciò implica che la distanza tra le traiettorie $\delta \mathbf{x}_n$ per $n \rightarrow \infty$ non si protrarrà all'infinito: la non linearità del sistema riporta le traiettorie vicine. Questo fenomeno è chiamato *folding* (Figura 2) ed è caratterizzato da esponenti di Lyapunov negativi.

Osservazione: per qualsiasi differenze $\delta \mathbf{x}_0$ finite e sufficientemente grandi, la divergenza è (approssimativamente) esponenziale solo all'inizio, successivamente interviene il *folding*. Per differenze infinitesime il sistema invece le traiettorie si separano da un certo punto in poi a causa della crescita esponenziale dell'errore come detto precedentemente.

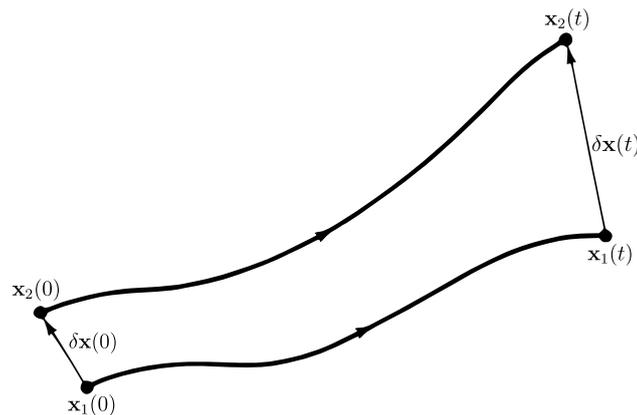


Figura 1: Stretching

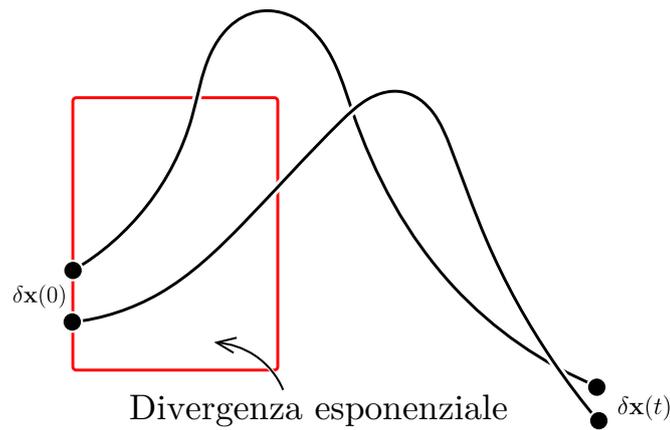


Figura 2: Folding

2 Deterministic Nonperiodic Flow

Di certo per studiare i moti convettivi all'interno dell'atmosfera è necessario partire con l'applicazione di semplificazioni al sistema fisico. Infatti di seguito analizzeremo un sistema fisico composto da un fluido che separa due sorgenti di calore a distanza H fissata e tenute a temperatura costante. La sorgente di calore sottostante sarà posta a temperatura maggiore della sorgente sovrastante, per cui la $\Delta T < 0$. Il sistema di riferimento sarà posto in modo tale che le sorgenti di calore siano considerate infinite e parallele al piano $x - y$, quindi H sarà parallela a z . L'unica forza esterna presente sarà la forza di gravità, anch'essa parallela all'asse z . Tale configurazione genera un flusso a *convezione naturale*, cioè in cui il moto è generato dalle forze di galleggiamento. Infatti le differenze di temperatura vengono introdotte nel campo di velocità attraverso i bordi tenuti a temperatura costante.

Sarebbe profondamente sbagliato sostenere che tale sistema riproduca fedelmente quello dell'atmosfera terrestre, nonostante ciò quello che deriva dall'analisi di questo semplice sistema riproduce qualitativamente la caoticità dei moti convettivi interni a essa.

Simbologia utilizzata

z	Coordinata verticale	ν	Viscosità cinetica
x, y	Coordinate orizzontali	κ	Coefficiente di diffusività termica
t	Tempo	g	Accelerazione di gravità
u, v, w	$dx/dt, dy/dt, dz/dt$	ϵ	Coefficiente di espansione volumica
ρ	Densità	H	Altezza del fluido
T	Temperatura	p	Pressione

2.1 Dall'equazione di Navier-Stokes e del calore al sistema di Lorenz

Come per ogni sistema fisico isolato, al fine di descriverne la dinamica, si impone la conservazione del momento lineare (che nel caso dei fluidi si presenta come campo di velocità) e dell'energia (che appare sotto forma di calore). Per il momento lineare la legge di conservazione è data dall'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F}$$

in cui:

$$\mathbf{V} = (u, v, w) \text{ campo di velocità; } \mathbf{F} \text{ forza di volume}$$

Per l'energia la legge di conservazione è data dall'equazione del calore:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

in cui:

$$T \text{ temperatura; } \kappa \text{ coefficiente di diffusività termica}$$

Nel paragrafo che segue, si effettueranno delle approssimazioni per semplificare lo studio delle precedenti equazioni applicate al caso analizzato. Il primo problema col quale ci si scontra è che queste due equazioni, in tale forma, risultano disaccoppiate; il secondo -di una certa rilevanza- è che l'equazione di Navier-Stokes non ha soluzioni analitiche.

2.2 Applicazione delle approssimazioni di Oberbeck - Boussinesq

Si parte con l'analisi della forza di volume: per come è stato costruito il modello si considera solo la forza di gravità $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$, e parallela all'asse z . Si può inoltre considerare la variazione di densità come segue [4]

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho$$

essendo quindi l'accelerazione di gravità definita $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ con $\phi = \mathbf{g}(z - H)$, si ha

$$\mathbf{F} = -(\rho_0 + \Delta\rho)\nabla\phi = (\rho_0 + \Delta\rho)\mathbf{g}$$

Nella pressione dovrà quindi comparire anche un termine dovuto alla forza di gravità

$$p_{h0} = \rho_0\phi \quad \Rightarrow \quad p = (\bar{p} + p_{h0})(\rho_0)^{-1}$$

Un'altra osservazione da fare è che la $\Delta\rho$ varia linearmente con la temperatura

$$\Delta\rho = -\epsilon\rho_0\Delta T \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_0(1 - \epsilon\Delta T)$$

Nella convezione naturale, tuttavia, è quasi sempre lecito fare ricorso all'ipotesi di Boussinesq, in cui si presume che le variazioni di densità siano comunque molto piccole

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \rho \simeq \rho_0$$

Questo è facilmente deducibile dalla precedentemente citata dipendenza lineare tra densità e temperatura $\Delta\rho = -\epsilon\rho_0\Delta T$. Quindi la validità di queste approssimazioni sono limitate a fluidi in cui $\Delta\rho/\rho_0 = -\epsilon\Delta T$ è molto minore di uno.

Sostituendo nell'equazione di Navier-Stokes le quantità ricavate:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{V} = -\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{V} - \mathbf{g}\epsilon\Delta T$$

Consideriamo ora le approssimazioni di Oberbeck-Boussinesq. Tale approssimazione consiste nel trascurare le variazioni delle proprietà dei fluidi (viscosità, coefficiente di espansione) e della densità ρ ; di fatto ρ appare solo come fattore moltiplicativo di \mathbf{g} . Il modello qui considerato descrive un sistema chiuso, per cui dovrà valere la legge di conservazione sulla massa che sarà data dall'equazione di continuità: sia \mathbf{V} il campo di velocità locale delle particelle del fluido, l'equazione di continuità risulta

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{V}) = 0$$

Tenendo conto quindi dell'approssimazione di Boussinesq l'equazione di continuità si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Applicando tali approssimazioni all'equazione di Navier-Stokes otteniamo che la dinamica del fluido sarà descritta dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p - \nu \nabla^2 u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p - \nu \nabla^2 v = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p - \nu \nabla^2 w - \frac{1}{\rho} F = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

al quale va aggiunta l'equazione del calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

Nell'equazione del flusso di calore rispetto al gradiente termico, la capacità termica ρC_ρ è ritenuta costante. Dalle approssimazioni di O-B sul calore otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla T) = k\nabla^2 T$$

2.3 Equazioni di Saltzman

In accordo con le approssimazioni di Oberbeck-Boussinesq vengono riscritte le equazioni sul campo di velocità del fluido. Il liquido considerato è contenuto in un recipiente di altezza H . Le basi del recipiente sono poste a sorgenti di calore a diverse temperature mantenute costanti nel tempo tali che $\Delta T_0 = \bar{T}_0(0) - \bar{T}_0(H)$. Ricordando che $\mathbf{V} = (u, v, w)$, per semplificare la trattazione matematica, considerando la simmetria delle celle convettive, si analizza lo sviluppo del moto del fluido sul piano verticale $x - z$ (quindi poniamo $v = 0$). In queste condizioni possiamo riscriverci il sistema di equazioni di Navier-Stokes nel modo seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \nabla^2 u = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \nabla^2 w + g \epsilon \Delta T = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Si può ora definire la funzione flusso ψ come segue

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Riconsiderando la conservazione dell'energia e ponendo anche qui $\vec{V} = (u, 0, w)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla T) - k \nabla^2 T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - k \nabla^2 T = 0$$

La T può essere espressa come somma di due componenti: la prima rappresenta la differenza di temperatura tra il margine alto e il margine basso, la seconda rappresenta lo scostamento di T dalla precedente componente

$$T(x, z, t) = \bar{T}(z, t) + T'(x, z, t)$$

Chiaramente, come già detto prima, la differenza di temperatura lungo la verticale è fissata; quindi

$$\bar{T}(z, t) = \left[\bar{T}(0, t) - \frac{\Delta T_0}{H} z \right] + \bar{T}''(z, t)$$

ottenendo

$$T(x, z, t) = \left[\bar{T}(0, t) - \frac{\Delta T_0}{H} z \right] + \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \bar{T}''(z, t) + T'(x, z, t)$$

È quindi legittima la sostituzione di T con θ in quanto nel sistema considerato la temperatura delle sorgenti è tenuta costante nel tempo.

$$\frac{\partial \bar{T}(0)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{T}(H)}{\partial t} = 0$$

Essendo la pressione direttamente proporzionale alla temperatura si sostituisce inoltre il termine P nelle equazioni di Navier-Stokes con θ ottenendo le equazioni di Saltzman della convezione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^4 \psi + \mathbf{g} \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + k \nabla^2 \theta \quad (5)$$

In cui $\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)}$ rappresenta il l'operatore jacobiano¹.

2.4 Sistema di Lorenz

Rayleigh scopre che le equazioni di Saltzman presentano un punto critico in funzione di un fattore moltiplicativo chiamato *numero di Rayleigh* [5]. Egli dimostra che le soluzioni delle equazioni di Saltzman che descrivono la convezione sono della forma:

$$\psi = \psi_0 \sin(\pi a x^*) \sin(\pi z^*) \quad , \quad \theta = \theta_0 \cos(\pi a x^*) \sin(\pi z^*) \quad (6)$$

con ψ_0 e θ_0 costanti, $x^* = H^{-1}x$, $z^* = H^{-1}z$ e a rappresenta la lunghezza d'onda orizzontale del ciclo di convezione. Tali equazioni si ottengono quando il *numero di Rayleigh* così definito

$$R_a = g \epsilon H^3 \Delta T \nu^{-1} \kappa^{-1}$$

supera il valore critico

$$R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$$

Il valore minimo su $R_c = 27\pi^4/4$ si ha quando $a^2 = 1/2$. Questo caso particolare trovato da Rayleigh è stato studiato da Saltzman che espandendo ψ e θ in due serie di Fourier (cioè rispetto a x e z) imponendo la dipendenza temporale solo ai coefficienti

$$\psi(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{m,n}(t) \sin(m\pi a x^*) \sin(n\pi z^*)$$

$$\theta(x, z, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \theta_{m,n}(t) \cos(m\pi a x^*) \sin(n\pi z^*)$$

Sostituire tale espansione nelle equazioni di S. conduce a un sistema infinito di equazioni differenziali ordinarie, è necessario quindi un troncamento: l'espansione viene troncata fino ai coefficienti di ordine $m = 4$ e $n = 2$. Successivamente Saltzman ricavò le soluzioni dipendenti dal tempo mediante un'integrazione numerica. In certi casi tali soluzioni (salvo quelli in cui tre variabili dalle quali dipende il sistema tendono a zero o queste tre variabili subiscono irregolarità) appaiono delle fluttuazioni non periodiche.

Lorenz dimostrò che le stesse soluzioni ottenute da Saltzman si potevano avere troncando la serie per $m = 0, 1$ e $n = 1, 2$ ottenendo un totale di tre termini:

$$\psi_{11}(t) = X(t); \quad \theta_{11}(t) = Y(t); \quad \psi_{02}(t) = Z(t)$$

¹Questa notazione è quella utilizzata da B.Saltzman nell'articolo [2] per compattare i termini non lineari dell'equazione che hanno esattamente la forma dell'operatore jacobiano: $\frac{\partial(a,b)}{\partial(x,z)} = \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} \right)$

$X(t)$ è proporzionale all'intensità del moto convettivo, $Y(t)$ alla differenza di temperatura dalle correnti ascensionali e discensionali e $Z(t)$ alla distorsione del profilo verticale della temperatura (cioè dalla linearità). Esplicitando ora le nuove ψ e θ :

$$\begin{aligned} a(1+a^2)^{-1}\kappa^{-1}\psi &= X\sqrt{2}\sin(\pi ax^*)\sin(\pi z^*) \\ \pi R_c^{-1}R_a\Delta T^{-1}\theta &= Y\cos(\pi ax^*)\sin(\pi z^*) - Z\sin(2\pi z^*) \end{aligned} \quad (7)$$

sostituendo queste funzioni nelle equazioni di Saltzman e omettendo i termini trigonometrici diversi da quelli che si presentano nelle ultime espressioni di ψ e θ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases}$$

i cui coefficienti sono

$$\begin{aligned} \sigma &= \kappa^{-1}\nu & \text{Numero di Prandtl} & & r &= R_c^{-1}R_a & \text{Numero di Rayleigh} \\ \tau &= \pi^2 H^{-1}(1+a^2)\kappa t & & & b &= 4(1+a^2)^{-1} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto un sistema autonomo lineare di tre equazioni differenziali ordinarie. Il problema si è notevolmente semplificato. Da qui basterà applicare la teoria sui sistemi lineari.

Osservazione: nelle equazioni (7) i coefficienti dell'espansione in serie di Fourier rappresentati da X , Y e Z sono stati adimensionalizzati. Da qui in poi si terrà si studierà l'andamento di queste variabili tenendo conto che esse sono proporzionali, rispettivamente, all'intensità del moto convetto e alla temperatura.

3 Analisi del sistema di Lorenz

Innanzitutto è utile riscrivere il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (r-Z) & -1 & -X \\ Y & X & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (8)$$

Applichiamo la teoria sui sistemi lineari per determinarne i punti di stabilità. Riportiamo qui la definizione di punto di equilibrio per un sistema lineare:

Definizione: sia $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$ un sistema autonomo, il punto \mathbf{x}_0 è detto punto di equilibrio se $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. La soluzione $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ è stazionaria $\forall t$.

3.1 Condizioni di equilibrio stabile e instabile del sistema di Lorenz

I punti di equilibrio vanno ora ricercati risolvendo il problema agli autovalori associato alla matrice jacobiana, $\mathbf{J}_0 - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{0}$. Dei punti di equilibrio ne andrà studiata la stabilità. Osserviamo che il punto $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$ è sicuramente di equilibrio in quanto soddisfa la definizione. La matrice jacobiana \mathbf{J} in $\mathbf{0}$ risulta:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (9)$$

con polinomio caratteristico

$$[\lambda + b][\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0.$$

A questo punto si analizza il sistema al variare di r che si ricorda essere il rapporto tra il numero di Rayleigh R_a e il suo valore critico R_c oltre al quale si sviluppano moti di convezione (R_a e R_c sono definiti positivi, quindi r è sempre maggiore di 0).

Per $r < 1$ il polinomio ha tre radici reali negative: l'origine $(0, 0, 0)$ è di equilibrio stabile per il sistema; per $r > 1$ il polinomio ha tre radici reali di cui una soltanto è positiva: l'origine in questo caso è di equilibrio instabile per il sistema. Nei sistemi dinamici spesso avviene che quando un punto fisso perde la stabilità nascono due punti di equilibrio stabile.

Si osserva che esistono altre soluzioni, stavolta solo per $r > 1$, di equilibrio stabile per il sistema: ponendo $\dot{X} = 0$ si ha che $X = Y$ quindi

$$\begin{aligned} \dot{Y} = -Y(Z + 1 - r) = 0 & \Leftrightarrow Z = r - 1 \\ \dot{Z} = -Y^2 - b(r - 1) = 0 & \Leftrightarrow Y = \pm \sqrt{b(r - 1)} \end{aligned}$$

Ottenendo quindi due punti di equilibrio

$$C' = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad ; \quad C'' = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Per entrambi i punti il polinomio caratteristico risulta

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2ab(r-1) = 0$$

il quale possiede una radice reale negativa e due complesse coniugate per $r > 1$; le radici complesse sono puramente immaginarie se

$$r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}. \quad (10)$$

Questo è il valore critico su r per l'instabilità della convezione. Inoltre se $\sigma < b + 1$ nessun valore positivo di r soddisfa la (10) e quindi il moto di convezione di equilibrio è sempre stabile. Nel caso in cui $\sigma > b + 1$, l'equilibrio è instabile per valori abbastanza alti di r . La presenza di radici negative in r mostra che se il moto di convezione di equilibrio viene perturbato, questo varierà in intensità[3].

Per capire cosa accade per piccole perturbazioni e per condizioni iniziali distanti non possiamo applicare l'analisi lineare. Dobbiamo perciò affidarci all'integrazione numerica. Come fatto da Saltzman in [2] porremo $\sigma = 10$ e $a^2 = \frac{1}{2}$, di conseguenza $b = 8/3$. Il valore critico R_c per l'instabilità si ha per $r = 470/19 = 24.74$, nel caso seguente verrà preso un valore leggermente superiore a quello critico $r = 28$. I punti di equilibrio attorno ai quali si svilupperanno le traiettorie non periodiche saranno

$$C' = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27) \quad ; \quad C'' = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$$

3.2 Simulazione del sistema mediante integrazione numerica

L'implementazione è stata effettuata utilizzando il primo metodo esposto da Lorenz nell'articolo [1]: scelto un tempo iniziale t_0 e scelto l'incremento Δt si pone

$$X_{i,n} = X_i(t_0 + n\Delta t) \quad \Rightarrow \quad X_{i,(n+1)} = X_{i,n} + F_i(P_n)\Delta t$$

In cui P_n sono i punti nello spazio delle fasi con coordinate $(X_{1,n}, \dots, X_{M,n})$. Esistono altri algoritmi che in alcuni casi restituiscono risultati più precisi del precedente (il secondo metodo esposto da Lorenz nello stesso articolo o anche il metodo di Runge-Kutta). Tuttavia per l'obiettivo di questa tesi è sufficiente questo metodo poiché l'interesse di questo lavoro è evidenziare il carattere caotico del sistema. È stato utilizzato un incremento temporale $\Delta t = 0.01s$, il numero di iterazioni del codice è di 3000.

Nell'appendice A è riportato il codice sviluppato in linguaggio C. I grafici sono stati ottenuti utilizzando il tool gnuplot. Nell'appendice B sono riportate le tabelle dei dati

ottenuti dall'integrazione numerica, per brevità vengono riportati a step di 100 iterazioni, quindi a step di un secondo. Con N è indicato il numero di iterazione al quale si è ottenuto il dato e il tempo associato all'iterazione è ottenuto da $t = N \cdot \Delta t$ con $\Delta t = 0,01s$. Essendo questa una discussione di tipo qualitativo al fine della verifica della caoticità del sistema di Lorenz ci si affiderà ai grafici dei risultati numerici riportati nelle seguenti sezioni.

3.2.1 Simulazione con condizioni iniziali lievemente perturbate

Verranno di seguito confrontati i grafici relativi ai risultati ottenuti dalle simulazioni con condizioni iniziali:

$$P_{1,0} = (X_{1,0}, Y_{1,0}, Z_{1,0}) = (0, 1.000, 0) \quad ; \quad P_{2,0} = (X_{2,0}, Y_{2,0}, Z_{2,0}) = (0, 1.001, 0)$$

le soluzioni ottenute con condizioni iniziali $P_{1,0}$ sono riportate in blu mentre quelle con condizioni iniziali $P_{2,0}$ in rosso. Nei grafici 3, 4 e 5 sono riportati, rispettivamente, gli andamenti delle X_n , Y_n e Z_n nel tempo. Lo stato di partenza è vicino a quello di riposo, per cui dalla rapida crescita iniziale delle soluzioni si evince una forte instabilità delle traiettorie in vicinanza del punto $(0, 0, 0)$. La Figura 6 è utile per intuire il significato di dimensione frattale di un attrattore; come detto precedentemente la dimensione dell'attrattore sarà sicuramente inferiore a 3 poiché il sistema è dissipativo, infatti si vede in figura che le traiettorie si evolvono su due piani distinti a seconda del punto di equilibrio. Quindi per tempi brevissimi le traiettorie convergono a un punto su un piano, globalmente non è così.

Osserviamo in corrispondenza di circa $17s$ una deviazione dell'orbita perturbata e un suo sviluppo casuale e aperiodico, come detto nel paragrafo **2.1.1** questo è dovuto alla crescita esponenziale della distanza tra le condizioni iniziali. In figura 7 è riportata la proiezione dell'attrattore sul piano $x - y$. Se le soluzioni X_n e Y_n hanno lo stesso segno vuol dire che i moti convettivi sono caratterizzati dalla salita del fluido riscaldato e dalla discesa del fluido raffreddato (l'intensità è concorde al gradiente termico). Se invece hanno segno opposto vuol dire che il fluido caldo scende e quello freddo sale. Come si vede nella proiezione, X_n e Y_n hanno lo stesso segno per gran parte del tempo.

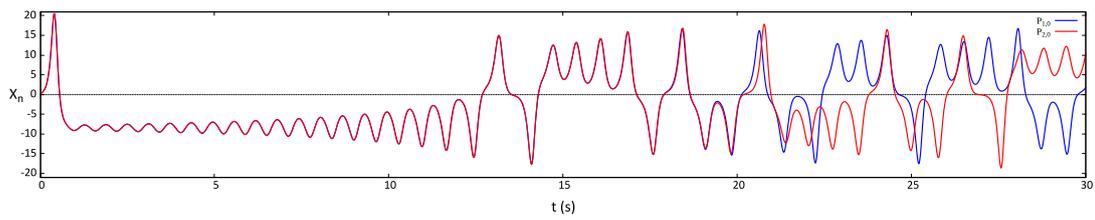
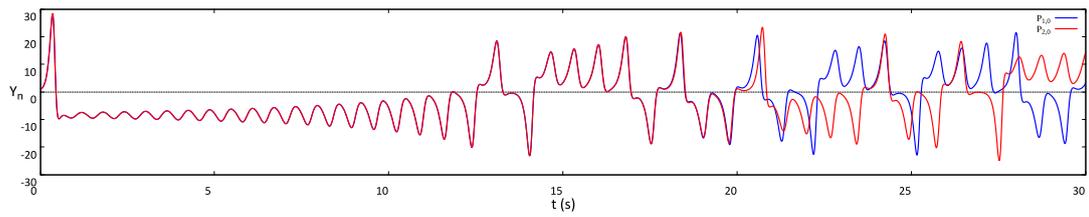
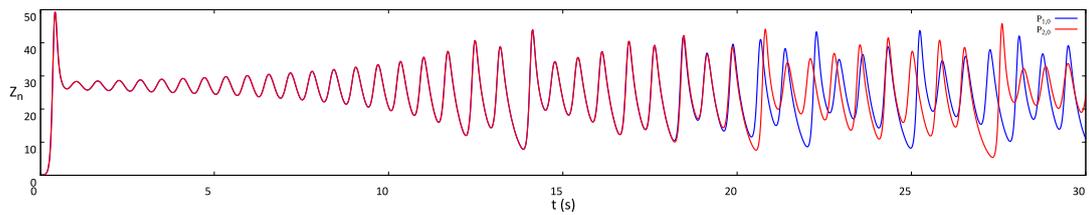
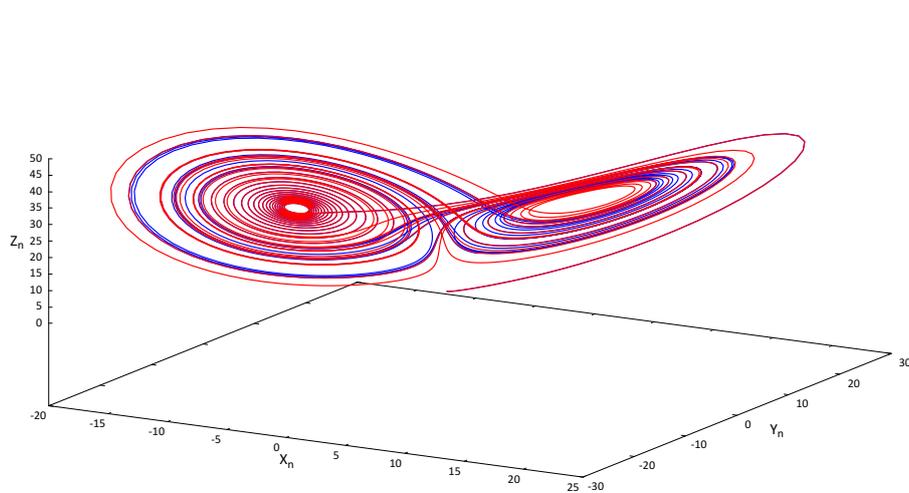
Figura 3: Andamento delle X_n in funzione del tempoFigura 4: Andamento delle Y_n in funzione del tempoFigura 5: Andamento delle Z_n in funzione del tempo

Figura 6: Attrattore di Lorenz

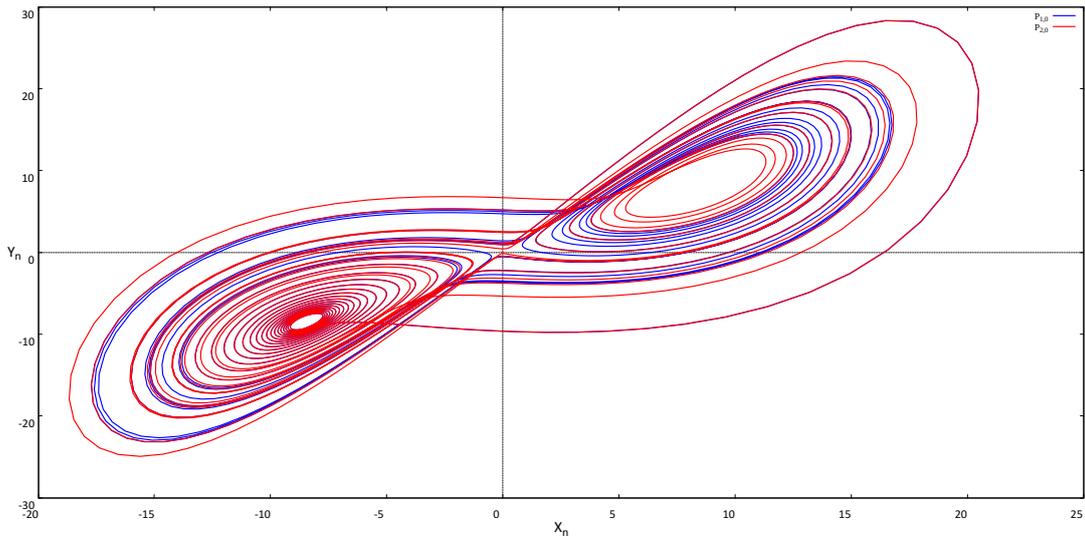


Figura 7: Attrattore di Lorenz

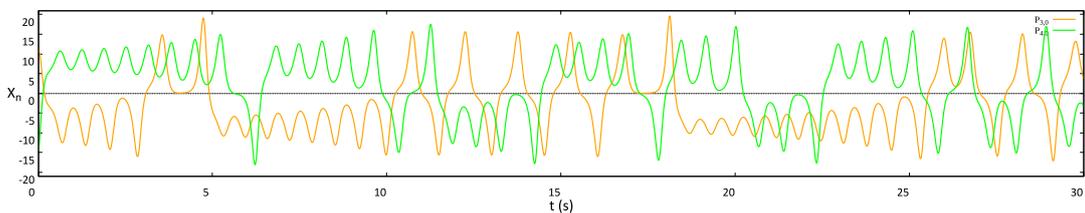
3.2.2 Simulazione con condizioni iniziali distanti

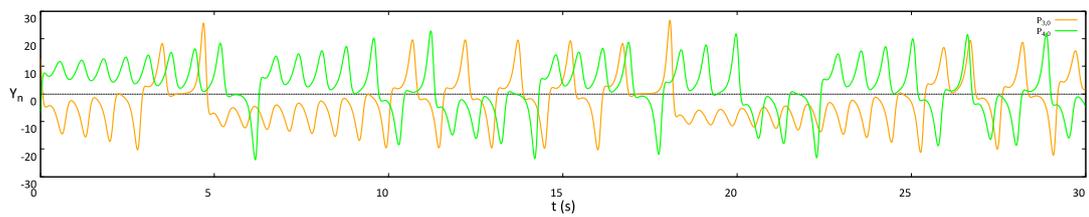
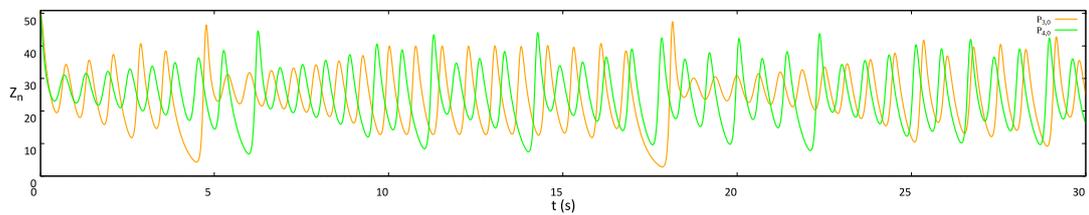
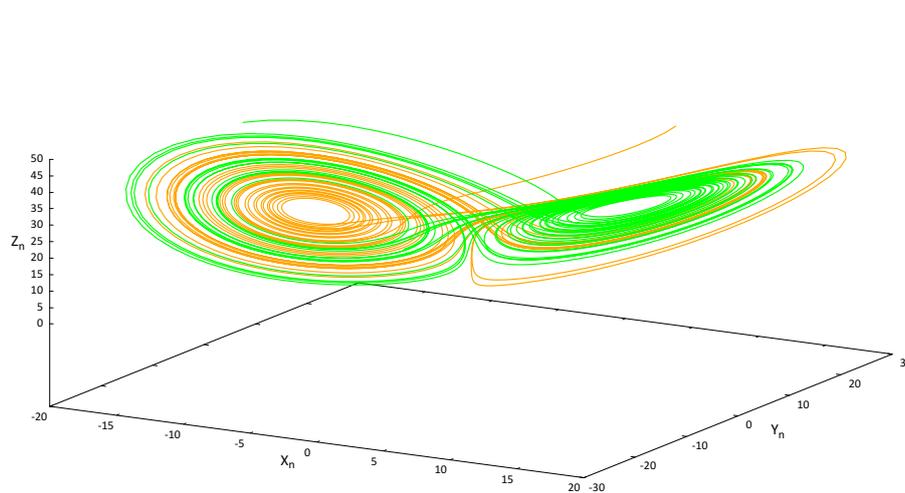
Analogamente a come fatto prima, si confronteranno i grafici associati ai valori ottenuti dalle simulazioni con condizioni iniziali distanti:

$$P_{3,0} = (X_{3,0}, Y_{3,0}, Z_{3,0}) = (10, 15, 50) \quad ; \quad P_{4,0} = (X_{4,0}, Y_{4,0}, Z_{4,0}) = (-15, -10, 50)$$

le soluzioni ottenute con condizioni iniziali $P_{3,0}$ sono riportate in arancione mentre quelle con condizioni iniziali $P_{4,0}$ in verde.

Nei grafici 8, 9 e 10 sono riportate, rispettivamente, l'andamento delle X_n , Y_n e Z_n nel tempo. Si osserva che, sebbene le condizioni iniziali siano tra loro distanti le traiettorie convergono allo stesso attrattore: effetto *folding*. In figura 11 è riportato l'attrattore strano ottenuto da questi dati.

Figura 8: Andamento delle X_n in funzione del tempo

Figura 9: Andamento delle Y_n in funzione del tempoFigura 10: Andamento delle Z_n in funzione del tempoFigura 11: Andamento delle X_n in funzione del tempo

4 Conclusioni

Come verificato tramite l'integrazione numerica si osserva, da un certo punto in poi, una deviazione dall'orbita per piccole variazioni delle condizioni iniziali; in questa tesi si è studiata una variazione delle condizioni iniziali di 10^{-3} . Inoltre l'evoluzione delle soluzioni risulta totalmente casuale e aperiodica attorno ai punti di equilibrio C' e C'' . Nel caso in cui, invece, le condizioni iniziali siano sufficientemente distanti e lontane dai punti di equilibrio si osserva che le traiettorie evolvono egualmente in maniera caotica e aperiodica convergendo comunque allo stesso attrattore.

In sintesi, per qualsiasi condizione iniziale l'evoluzione temporale delle soluzioni oscilleranno sempre attorno ai punti di equilibrio: se ad esempio la traiettoria si sta evolvendo attorno al punto C' , non appena questa supera il punto $(0, 0, 0)$ cambia il punto di equilibrio oscillando attorno a C'' e viceversa.

Tuttavia bisogna tenere conto che le soluzioni ottenute descrivono l'andamento dei primi coefficienti di espansione in serie di Fourier delle soluzioni di Rayleigh. Cioè X , Y e Z non descrivono il moto delle particelle del fluido sottoposto a differenza di temperatura costante.

A Dissipatività del sistema di Lorenz

Verifichiamo in questa sezione il comportamento del volume dello spazio delle fasi, applichiamo infatti l'equazione (1):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lambda$$

Il valore λ deve essere costante nel tempo e negativo affinché si osservi dissipatività. Per \mathbf{F} si intende l'applicazione lineare definita dalla matrice (9):

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right) \begin{pmatrix} -\sigma(X - Y) \\ -XY + rX - Y \\ XY - bZ \end{pmatrix} = -(\sigma + 1 + b)$$

Le quantità σ e b sono definite positive per cui λ è negativo. Da ciò deduciamo che il sistema risulta dissipativo. Come detto nel Capitolo 1, la dissipatività del sistema è la prima condizione per la caoticità delle soluzioni.

B Codice integrazione numerica

```
1 #include <stdio.h>
2
3 int main()
4 {
5     FILE *pf;
6     //Parametri caratteristici del sistema
7     const double s = 10.0, r = 28.0, b = 8.0 / 3.0, t = 0.01;
8     //condizioni iniziali delle variabili
9     double x = 0, y = 1, z = 0;
10    //tempo
11    double T;
12    //numero di iterazioni
13    int niter = 3000;
14
15    pf = fopen("dati.dat", "w");
16    if(pf)
17    {
18        fprintf(pf, "#tempo\tx\ty\tz\n");
19        for (int i = 1; i <= niter; i++ )
20        {
21            T=i*t;
22            x += t * s * (y - x);
23            y += t * (x * (r - z) - y);
24            z += t * (x * y - b * z);
25            //1:tempo, 2:x, 3:y, 4:z
26            fprintf(pf, "%lf\t%lf\t%lf\t%lf\n", T, x, y, z);
27        }
28        fclose(pf);
29    }
30    return 0;
31 }
```

C Tabelle dati

Tabella 1: Dati della simulazione numerica
con condizioni iniziali lievemente perturbate

N	X_n	Y_n	Z_n	N	X_n	Y_n	Z_n
0	0.000	1.000	0.000	0	0.000	1.001	0.000
100	-9.122	-8.851	28.149	100	-9.121	-8.851	28.149
200	-8.141	-8.909	25.591	200	-8.142	-8.910	25.592
300	-7.977	-7.113	27.410	300	-7.977	-7.112	27.408
400	-9.607	-10.002	27.983	400	-9.608	-10.001	27.985
500	-7.184	-7.844	24.497	500	-7.185	-7.846	24.497
600	-8.816	-6.951	29.447	600	-8.814	-6.949	29.446
700	-9.036	-11.098	25.090	700	-9.038	-11.100	25.093
800	-6.025	-5.238	25.155	800	-6.024	-5.239	25.152
900	-11.563	-11.397	31.218	900	-11.563	-11.393	31.222
1000	-4.725	-5.859	20.393	1000	-4.726	-5.861	20.391
1100	-12.451	-8.566	35.564	1100	-12.448	-8.556	35.564
1200	-1.327	-1.286	18.203	1200	-1.327	-1.288	18.198
1300	7.079	12.207	15.672	1300	7.083	12.214	15.675
1400	-10.856	-19.957	16.802	1400	-10.921	-20.037	16.949
1500	3.921	3.303	22.731	1500	3.909	3.303	22.699
1600	11.468	16.777	24.603	1600	11.464	16.791	24.569
1700	5.446	-2.202	31.613	1700	5.584	-2.211	31.813
1800	0.798	1.484	15.085	1800	0.680	1.293	15.029
1900	-10.839	-16.104	23.509	1900	-10.551	-15.606	23.291
2000	-4.667	1.703	30.096	2000	-3.981	1.114	28.520
2100	-2.237	-3.738	17.509	2100	-1.459	-5.236	25.477
2200	-2.915	-5.712	8.531	2200	-11.998	-15.193	28.266
2300	8.361	3.153	32.015	2300	-2.446	-0.937	22.956
2400	3.024	4.807	15.090	2400	2.097	3.791	11.827
2500	-3.877	-7.713	8.200	2500	-14.081	-11.566	36.735
2600	6.589	2.511	29.411	2600	-0.589	2.596	24.732
2700	4.962	8.220	15.300	2700	-0.107	-0.223	11.378
2800	14.020	21.449	26.793	2800	7.810	10.605	22.626
2900	-2.306	-1.233	22.035	2900	6.088	3.706	27.195
3000	1.764	3.251	10.993	3000	10.226	14.349	24.062

Tabella 2: Dati della simulazione numerica
con condizioni iniziali distanti

N	X_n	Y_n	Z_n	N	X_n	Y_n	Z_n
0	10.000	15.000	50.000	0	-15.000	-10.000	50.000
100	-3.742	-3.759	21.368	100	6.365	7.568	22.580
200	-12.729	-17.244	27.938	200	8.999	5.668	31.049
300	-4.557	2.693	30.768	300	7.655	10.972	20.875
400	0.075	0.005	13.879	400	5.808	2.070	28.419
500	-4.395	-7.090	24.680	500	4.436	7.514	14.363
600	-10.581	-8.437	31.795	600	-3.326	-6.788	6.782
700	-6.425	-8.749	20.648	700	6.766	3.456	28.811
800	-7.834	-3.362	30.892	800	8.167	12.502	19.902
900	-5.151	-8.266	16.245	900	5.692	0.181	30.022
1000	-15.411	-11.883	39.372	1000	-1.966	-3.334	17.032
1100	0.184	-1.848	22.518	1100	2.465	4.828	8.450
1200	3.399	6.007	12.943	1200	-9.114	-3.916	32.749
1300	-15.586	-16.417	36.387	1300	-3.201	-4.986	15.615
1400	0.866	-1.868	24.111	1400	-2.730	-5.478	7.398
1500	3.026	5.239	13.693	1500	7.816	3.532	30.711
1600	-13.773	-20.309	27.418	1600	5.769	9.174	16.916
1700	1.905	-0.762	24.489	1700	12.696	4.993	38.437
1800	8.920	18.493	9.470	1800	-0.644	4.114	26.869
1900	-6.608	-6.788	24.469	1900	7.011	11.781	16.357
2000	-9.964	-7.997	30.887	2000	16.495	19.572	36.037
2100	-7.508	-9.878	22.305	2100	-2.356	-2.335	19.728
2200	-6.613	-3.893	28.056	2200	-1.232	-2.359	9.059
2300	-9.718	-13.776	23.266	2300	11.855	8.706	34.244
2400	-3.869	-1.325	25.558	2400	3.158	4.266	17.860
2500	-1.798	-3.188	11.804	2500	10.955	18.267	20.380
2600	13.941	12.311	35.853	2600	-3.866	1.478	28.699
2700	0.522	-1.659	22.979	2700	-2.734	-4.485	19.241
2800	3.788	6.502	14.140	2800	-12.680	-18.646	26.010
2900	-8.688	-16.323	13.782	2900	11.908	0.370	39.659
3000	3.797	1.659	24.960	3000	-3.170	-4.814	16.074

Riferimenti bibliografici

- [1] E. Ott - Chaos in dynamical systems, Cambridge University Press, 1993
- [2] B. Saltzman - Finite Amplitude free convection as an initial value problem, Journal of the atmospheric sciences, 1962
- [3] E. Lorenz - Deterministic nonperiodic flow, Journal of the atmospheric sciences, 1963
- [4] D.J.Tritton - Physical fluid dynamics, Oxford Science Publications, 2007
- [5] Lord Rayleigh - On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, Philosophical Magazine and Journal of Science, 1916
- [6] Tito Arecchi - p.163 Caos e complessità nel vivente, researchgate.net, 2003