UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Oscillazioni dei neutrini in presenza di una lunghezza di minima indeterminazione

Relatore:
Prof. Gennaro Miele

Candidato:
Andrea Lama
Matr. $N85001006$

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione **2**

1 Rappresentazione dello spazio di Hilbert del GUP **3**
- 1.1 Perché generalizzare l'algebra di Heisenberg 3
  - 1.1.1 Il microscopio di Heisenberg 3
- 1.2 L'algebra deformata KMM 5
- 1.3 Rappresentazione dello spazio di Hilbert 7
  - 1.3.1 Rappresentazione sullo spazio dei momenti 8
  - 1.3.2 Analisi funzionale dell'operatore posizione 9
- 1.4 Recupero di informazioni sulla posizione 11
  - 1.4.1 Stati di massima localizzazione 11
  - 1.4.2 Rappresentazione nello spazio delle quasi-posizioni 13

Osservazioni **15**

2 L'oscillazione dei neutrini **16**
- 2.1 Introduzione storica 16
- 2.2 L'oscillazione dei neutrini nel vuoto 17
  - 2.2.1 Mixing a due neutrini 17
- 2.3 Oscillazioni nella materia 20

Osservazioni **24**

3 L'oscillazione dei neutrini nel caso del GUP **25**
- 3.1 GUP, relatività ristretta e relazione di dispersione 26
- 3.2 Oscillazione dei neutrini nell'algebra KMM 27
  - 3.2.1 TXS 0506+056 29

Conclusioni **31**

Bibliografia **32**

Introduzione

Molti sono stati gli sforzi negli ultimi decenni di costruire una teoria quantistica che incorpori coerentemente gli effetti dell'interazione gravitazionale, e non sono pochi i problemi se si decide di percorrere questa strada.
L'idea su cui si basa questa tesi (che accomuna la maggior parte di teorie che provano ad unificare gravità e quantistica) è che le energie alte abbastanza da sondare lunghezze dell'ordine della lunghezza di Planck $\mathcal{L}p$, perturbino in maniera non trascurabile la struttura dello spazio tempo con i loro effetti gravitazionali, inducendo un limite superiore nelle frequenze UV, e quindi un limite inferiore nelle lunghezze d'onda. Un'assunzione che può essere fatta in maniera intuitiva (ma non banale) è quella di trattare questa lunghezza minima x_0 come una lunghezza di minima indeterminazioneΔx_0.
La tesi è così strutturata:

- Capitolo 1: studio del commutatore

$$[x, p] = \imath\hbar f(p)$$

  che induce una generalizzazione del principio di indeterminazione di Heisenberg(Generalized Uncertainity Principle, a cui d'ora in poi ci riferiremo con GUP), e lo sviluppo di un formalismo che includa l'esistenza di una lunghezza minima di indeterminazione.

- Capitolo 2:Viene introdotto il fenomeno dell'oscillazione del neutrino, sia nel vuoto che nella materia , nel caso di densità elettronica costante

- Capitolo 3: Si applicano i risultati del capitolo 1 all'oscillazione dei neutrini, facendo prima un'introduzione sul legame fra la modifica del principio di Heisenber, la relatività ristretta e la relazione di dispersione.

Capitolo 1

Rappresentazione dello spazio di Hilbert della relazione di indeterminazione di lunghezza minima

1.1 Perché generalizzare l'algebra di Heisenberg

L'esistenza di una lunghezza minima osservabile è prevista da diverse teorie quantistiche che cerchino di inglobare gli effetti della gravità. Ciò ha portato nel corso degli anni a studiare diversi modelli fenomenologici che implicassero l'esistenza di tale lunghezza. In questa tesi in particolare viene seguito l'approccio di Kempf, Mangano e Mann [1] in cui la lunghezza minima è introdotta dalla deformazione dell'algebra di Heisenberg canonica in una del tipo

$$[x, p] = i\hbar f(p) \tag{1.1}$$

che porta ovviamente ad un nuovo e generalizzato principio di indeterminazione. Per dare una giustificazione nello scegliere un'algebra di questo tipo, si analizza l'esperimento mentale del microscopio di Heisenberg, tramite il quale egli formulò per la prima volta il suo famoso principio [2], aggiungendo poi un termine di interazione gravitazionale come mostrato in [3][1].

1.1.1 Il microscopio di Heisenberg

Diamo adesso un veloce richiamo sui risultati riportati da Heisenberg, per poi riprendere il tutto includendo gli effetti dell'interazione gravitazionale.

[1] in [3] lo stesso risultato viene trovato anche in relatività generale

Supponiamo di voler misurare la posizione di un elettrone (trattato come una particella classica e di cui supponiamo di conoscere il momento iniziale P) tramite un microscopio ottico, illuminando l'elettrone con un fascio di luce monocromatica. Da risultati dell'ottica, è possibile sapere che lo sperimentatore osserverà l'elettrone tramite una figura di diffrazione.
E' possibile quindi ricavare che

$$\Delta X \approx \frac{\lambda}{\sin \epsilon} \tag{1.2}$$

Dove ϵ è la semi apertura angolare con cui l'obbiettivo del microscopio guarda l'elettrone.
E' anche vero però, che per osservare la posizione dell'elettrone abbiamo utilizzato una radiazione che consideriamo quantizzata come fotone; questo sarà portatore di un certo momento legato alla sua lunghezza d'onda λ; dato che stiamo lavorando nell'ipotesi di conoscere il momento iniziale dell'elettrone P, l'indeterminazione sul suo momento finale sarà dell'ordine del momento del fotone p. Dalla relazione di de Broglie otteniamo

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{1.3}$$

e dato che non conosco a priori la direzione in cui viene diffuso il fotone

$$\Delta P_x \approx \frac{h}{\lambda} \sin \epsilon \tag{1.4}$$

e quindi

$$\Delta P \Delta X \approx h \tag{1.5}$$

Questa è ovviamente una versione approssimata del ben noto principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta X \Delta P \geqslant \frac{\hbar}{2} \tag{1.6}$$

Introduciamo adesso nel computo il termine di interazione gravitazionale fra fotone e elettrone. La trattazione di seguito è molto approssimativa, in quanto viene usata la gravità Newtoniana che certamente non è adeguata alla trattazione della dinamica di un fotone; tuttavia lo scopo del seguente ragionamento è quello di provare che un GUP che generi una lunghezza minima sia ottenibile tramite considerazioni alquanto generali sulla gravità [3].
Supponiamo di aver confinato l'elettrone in una regione sperimentale di lunghezza caratteristica L, all'interno della quale avviene l'interazione con il fotone (quest'ultimo verrà trattato come una particella di massa $m = E/c^2$). Quindi, l'elettrone risentirà nella suddetta regione di un'accelerazione di modulo

$$\ddot{r} = \frac{G\left(\frac{E}{c^2}\right)}{r^2} \tag{1.7}$$

Nel tempo caratteristico $\frac{L}{c}$ ci sarà una variazione della velocità e della posizione dell'elettrone dell'ordine

$$\Delta V \approx \frac{G\left(\frac{E}{c^2}\right)}{r^2}\left(\frac{L}{c}\right) \tag{1.8}$$

$$\Delta X \approx \frac{G\left(\frac{E}{c^2}\right)}{r^2}\left(\frac{L}{c}\right)^2 \tag{1.9}$$

Dato che l'elettrone potrebbe essere in un qualsiasi punto della regione, la distanza fra fotone e elettrone sarà dell'ordine

$$r \approx L$$

e quindi, riscrivendo l'energia del fotone in termini del suo momento p, si ha che :

$$\Delta X \approx \frac{Gp}{c^3} \tag{1.10}$$

È possibile riscrivere questi risultati in funzione della lunghezza di Planck

$$\mathcal{L}p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35}m \tag{1.11}$$

e dato che l'incertezza sul momento dell'elettrone è dell'ordine del momento del fotone otteniamo

$$\Delta X \approx \mathcal{L}p^2\frac{\Delta P}{\hbar} \tag{1.12}$$

Aggiungendo il termine "classico", otteniamo

$$\Delta X \approx \frac{\hbar}{\Delta P} + \mathcal{L}p^2\frac{\Delta P}{\hbar} \tag{1.13}$$

Una prima immediata osservazione è che, a differenza di prima, anche mandando ΔP all'infinito, ΔX non si azzera.

1.2 L'algebra deformata KMM

Vogliamo studiare adesso il formalismo relativo a relazioni di indeterminazioni del tipo

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}\left(1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma\right) \tag{1.14}$$

che abbiamo provato essere di interesse a partire da semplici ragionamenti e che costituiscono le relazioni più semplici che prevedono l'esistenza di una lunghezza

minima di indeterminazione (è già da qui possibile capire che esistono valori di Δx e Δp proibiti agli stati,si veda la figura 1.1).
Nella relazione di sopra, β e γ sono quantità positive, indipendenti da $(\Delta x)^2$ o $(\Delta p)^2$, ma che in genere possono dipendere dai valori di aspettazione di momento e posizione. Questo tipo di GUP permette di trattare la lunghezza minima come una minima lunghezza di indeterminazione sulla posizione Δx_0.
In genere in realtà potrebbe essere utilizzata la relazione

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}\left(1+\alpha(\Delta x)^2+\beta(\Delta p)^2+\gamma\right) \tag{1.15}$$

che comporta anche un'indeterminazione minima sul momento Δp_0 (con $\alpha > 0$).

Metteremo da parte la relazione più generale espressa in (1.15) a favore della (1.14), dato che, come vedremo , un'indeterminazione minima sulla posizione non rende possibile sfruttare la rappresentazione nello spazio delle configurazioni, e l'esistenza di una Δp_0 comporterebbe anche l'impossibilità di lavorare nello spazio dei momenti, rendendo estremamente più complessa la trattazione matematica del problema.Quindi d'ora in poi porremo $\alpha = 0$.

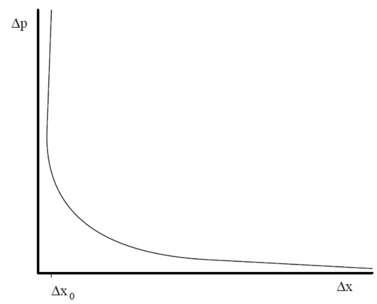

Figura 1.1: Δp in funzione di Δx nel caso valga la (1.14) per gli stati di minima indeterminazione

E' ben noto che dati due osservabili A e B definiti tramite operatori simmetrici sui domini di A^2 e B^2, vale la relazione

$$\Delta A \Delta B \geqslant \frac{1}{2}|\langle [A,B]\rangle| \tag{1.16}$$

é facile dimostrare che un commutatore del tipo

$$[x,p] = \imath\hbar\left(1+\beta(\Delta p)^2\right) \tag{1.17}$$

Soddisfi la relazione di indeterminazione (1.14) ponendo

$$\gamma = \beta\langle p\rangle^2 \tag{1.18}$$

Denomineremo la suddetta **algebra KMM** dagli autori di [1].
Troviamo adesso il valore di Δx_0.

Dalla (1.14) si ricava che per gli stati sul bordo della regione permessa dal nuovo GUP vale

$$\frac{\hbar}{2}\Delta^2 p - \Delta x \Delta p + \frac{\hbar}{2}\left(1 + \beta\langle p\rangle^2 + \gamma\right) = 0 \tag{1.19}$$

Quindi

$$\Delta p = \frac{\Delta x \pm \sqrt{\Delta^2 x - \hbar^2\beta(1 + \beta\langle p\rangle^2 + \gamma)}}{\hbar\beta} \tag{1.20}$$

Dovendo risultare che

$$\Delta p \in \mathbb{R}$$

Dato che p è simmetrico, vale che

$$\Delta^2 x - \hbar^2\beta(1 + \beta\langle p\rangle^2 + \gamma) \geqslant 0 \tag{1.21}$$

Possiamo quindi ottenere $\Delta^2 x_{min}$ in funzione di $\langle p\rangle$ e in particolare, ponendo $\langle p\rangle = 0$ e ricordando come avevamo definito γ in (1.18), otteniamo la più piccola in assoluto incertezza sulla posizione

$$\Delta x_0 = \hbar\sqrt{\beta} \tag{1.22}$$

E' importante notare che mandando β a zero, si ritrovi la classica relazione

$$[x, p] = \imath\hbar$$

nonché tutti i noti risultati che ne derivano.

1.3 Rappresentazione dello spazio di Hilbert

Nella meccanica quantistica ordinaria gli operatori x e p possono essere rappresentati come operatrori di moltiplicazione o di derivazione a seconda che si lavori su funzioni d'onda nello spazio delle configurazioni o in quelle dei momenti:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad \text{oppure} \quad \psi(p) = \langle p|\psi\rangle \tag{1.23}$$

dove $|x\rangle$ e $|p\rangle$ sono gli autostati di posizione e momento; questi non sono propriamente stati fisici, ma si può immaginare di ottenerli come limiti una successione di stati ad incertezza decrescente

$$\lim_n \Delta x_{|\psi_n\rangle} = 0 \tag{1.24}$$

$$\lim_n \Delta p_{|\psi_n\rangle} = 0 \tag{1.25}$$

L'esistenza di Δx_0 ovviamente implica che nessuno stato fisico può essere autostato della posizione (in quanto dovrebbe avere indeterminazione minore di Δx_0).Questo quindi, come anticipato, non ci permette di rappresentare l'algebra KMM nello spazio delle configurazioni, ed è per questo che abbiamo scelto di lavorare con $\Delta p_0 = 0$.
Ovviamente è possibile trovare degli "autostati formali" della posizione, che però come è mostrato esplicitamente in [1] sono ad energia infinita, e che quindi non sono di interesse fisico.
Quello che invece sarà di interesse è la costruzione di uno spazio delle "quasi-posizioni", che come base ha gli stati di massima localizzazione.

1.3.1 Rappresentazione sullo spazio dei momenti

Definiamo l'azione di x e p nello spazio dei momenti come segue

$$p\psi(p) = p\psi(p) \tag{1.26}$$

$$x\psi(p) = \imath\hbar \frac{1}{1+\beta p^2}\frac{\partial \psi(p)}{\partial p} \tag{1.27}$$

con $\psi(p) \in S_\infty$ spazio delle funzioni infinitamente derivabili e a decrescenza rapida, su cui risulta essere essenzialmente autoaggiunta una serie di operatori fondamentali della meccanica quantistica ordinaria. Inoltre il duale di questo spazio è quello delle distribuzione temperate su cui è ben definita la trasformata di Fourier.
E' immediato verificare che gli operatori x e p siano simmetrici su questo dominio, ma rispetto al prodotto scalare

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\phi(p) \tag{1.28}$$

Per p è ovvio, per x basta integrare per parti:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\left(x|\phi\rangle\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}\psi^*(p)\imath\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial\phi(p)}{\partial p} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1+\beta p^2}&\left(\imath\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial\psi(p)}{\partial\psi}\right)^*\phi(p) = \left(\langle\psi|x\right)|\phi\rangle \end{aligned} \tag{1.29}$$

Si possono definire in maniera coerente l'operatore identità

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)} |p\rangle\langle p| \tag{1.30}$$

e il prodotto scalare fra autostati del momento

$$\langle p|p'\rangle = (1+\beta p^2)\delta(p-p') \tag{1.31}$$

Infatti:

$$f(p) = \langle p|f\rangle = \langle p|\mathbb{1}|f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp'}{(1+\beta p'^2)} \langle p|p'\rangle f(p') \tag{1.32}$$

Come ci si aspettava, l'operatore p è ancora essenzialmente autoaggiunto, mentre l'analisi funzionale sull'operatore x può mostrare che questo non è più il caso.

1.3.2 Analisi funzionale dell'operatore posizione

L'equazione agli autovalori per l'operatore posizione ha la forma

$$\imath\hbar(1+\beta p^2)\frac{\partial\psi_\lambda(p)}{\partial p} = \lambda\psi_\lambda(p) \tag{1.33}$$

che può essere risolta trovando come autostati formali

$$\psi_\lambda(p) = c\, e^{-\imath\frac{\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}}\arctan\sqrt{\beta}p} \tag{1.34}$$

Normalizzandoli si ottiene

$$c = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \tag{1.35}$$

Abbiamo già stabilito che questi non sono stati fisici, in quanto violano l'indeterminazione minima; procediamo quindi con una breve analisi formale,riportando di seguito alcuni risultati di analisi funzionale [4].
Sia (S, D_S) un operatore, di cui definiamo l'aggiunto $(S*, D_{S^*})$ un operatore tale che

$$(\psi, S\phi) = (S^*\psi.\phi) \quad \forall\phi\in D_S\,,\ \psi\in D_{S^*} \tag{1.36}$$

Un operatore si dice simmetrico se

$$(\psi, S\phi) = (S\psi.\phi) \quad \forall\psi,\phi\in D_S \tag{1.37}$$

Un operatore si definisce autoaggiunto se

$$(S, D_S) = (S^*, D_{S^*}) \tag{1.38}$$

Un operatore è essenzialmente autoaggiunto se il suo aggiunto è autoaggiunto.
Si può dimostrare che, definiti gli indici di difetto

$$m_{\pm} = dim\, Ker_{S^{*}\mp\imath} \tag{1.39}$$

che se $m_+ = m_-$, l'operatore simmetrico S ammette una famiglia di estensioni autoaggiunte dipendenti da un numero di parametri uguale a $m\pm$. Con questo tipo di analisi è possibile dimostrare che l'operatore x non è autoaggiunto, ma ammette una famiglia di estensioni autoaggiunte dipendenti da un solo parametro [5].
Andando a valutare il prodotto scalare

$$\langle\psi_{\lambda'}|\psi_{\lambda}\rangle = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda-\lambda')}\sin\left(\frac{\lambda-\lambda'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right) \tag{1.40}$$

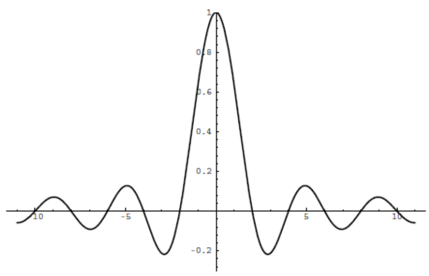

Figura 1.2: $\langle\psi_{\lambda'}|\psi_{\lambda}\rangle$ in funzione di $\frac{\lambda-\lambda'}{\hbar\sqrt{\beta}}$

osserviamo che gli autostati non sono più in genere ortonormali; possiamo adesso stabilire le possibili diagonalizzazioni di x parametrizzate da $\lambda \in [-1,+1]$ con autovettori ortonormali

$$\{|\psi_{(2n+\lambda)\hbar\sqrt{\beta}}\rangle \quad |n \in \mathbb{Z}\} \tag{1.41}$$

E' possibile mostrare che i set siano completi.
Inoltre (come era intuibile partendo dalla richiesta di diagonalizzazione di x), i vari autostati spaziano fra loro $2\hbar\sqrt{\beta} = 2\Delta x_0$; si potrebbe quindi fare l'ipotesi di una struttura di lattice dello spazio, ma non bisogna dimenticarsi che questi stati non sono nel dominio di p, hanno un'incertezza infinita sul momento e in particolare energia infinita.
Questo risultato era ottenuto per gli autostati della posizione anche in MQO; tuttavia, nel contesto del GUP, possiamo concludere un risultato più forte, ovvero che gli stati che vivono nella regione "proibita"

$$0 \leqslant \Delta x \leqslant \Delta x_0 \tag{1.42}$$

non possono avere energia finita.
Quindi, a differenza degli autostati di posizione in MQO , in questo nuovo contesto non è più possibile approsimarli con una successione di stati ad indeterminazione decrescente. C'è quindi un limite alla localizzabilità.

1.4 Recupero di informazioni sulla posizione

Generalmente tutte le informazioni sulla posizione sono racchiuse negli elementi di matrice che ne rappresentano l'operatore; tuttavia, nell'algebra KMM abbiamo visto non esistere una baste di autostati fisici per la quale gli elementi di matrice assumerebbero l'usuale significato.
Studiamo di seguito il formalismo dello spazio delle quasi-posizioni, la cui base è costituita dagli stati fisici a massima localizzazione.

1.4.1 Stati di massima localizzazione

Definiamo stati di massima localizzazione $|\psi_\xi^{ml}\rangle$ stati che soddisfano le seguenti relazioni:

$$\langle\psi_\xi^{ml}|x|\psi_\xi^{ml}\rangle = \xi \tag{1.43}$$

$$(\Delta x)_{|\psi_\xi^{ml}\rangle} = \Delta x_0 \tag{1.44}$$

Il nostro scopo è quindi quello di ricostruire le informazioni sula posizione a partire dagli stati di massima localizzazione.
E' noto che in MQO sfruttando la positività della norma

$$\|[x - \langle x\rangle + \frac{\langle[x,p]\rangle}{2(\Delta p)^2}(p - \langle p\rangle)]|\psi\rangle\| \geqslant 0 \tag{1.45}$$

che

$$\langle\psi|[x - \langle x\rangle + \frac{\langle[x,p]\rangle}{2(\Delta p)^2}(p - \langle p\rangle)]|\psi\rangle \geqslant 0 \tag{1.46}$$

che implica a sua volta

$$\Delta x\Delta p \geqslant \frac{\langle[x,p]\rangle}{2} \tag{1.47}$$

Si raggiunge la minima indeterminazione per stati che soddisfano

$$[x - \langle x\rangle + \frac{\langle[x,p]\rangle}{2(\Delta p)^2}(p - \langle p\rangle)]|\psi\rangle = 0 \tag{1.48}$$

Riscriviamo la precedente nello spazio di momenti usando la (1.27)

$$\left(\imath\hbar(1+\beta p^2)\partial_p - \langle x\rangle + \imath\hbar\frac{1+\beta(\Delta p)^2+\beta\langle p\rangle^2}{2(\Delta p)^2}(p - \langle p\rangle)\right)\psi(p) = 0 \tag{1.49}$$

Che è possibile risolvere ottenendo

$$\psi(p) = N(1+\beta p^2)^{-\frac{1+\beta(\Delta p)^2+\beta\langle p\rangle^2}{4\beta(\Delta p)^2}} e^{\left(\frac{\langle x\rangle}{\imath\hbar\sqrt{\beta}}-\frac{(1+\beta(\Delta p)^2+\beta\langle p\rangle^2)\langle p\rangle}{2(\Delta p)^2\sqrt{\beta}}\right)\arctan\left(\sqrt{\beta}p\right)} \tag{1.50}$$

Infine, per trovare gli stati di massima localizzazione basta porre $\langle p\rangle = 0$ per ottenere

$$\psi_\xi^{ml}(p) = N(1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\imath\frac{\xi\arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}} \tag{1.51}$$

(abbiamo scelto quindi come stati di massima localizzazione quelli con $\Delta p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, vedi la (1.20) con $\langle p\rangle = 0$ e $\Delta x = \Delta x_0$)
Dalle condizioni di normalizzazione otteniamo

$$\psi_\xi^{ml}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}(1+\beta p^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\imath\frac{\xi\arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}} \tag{1.52}$$

che sono la generalizzazione che onde piane nello spazio dei momenti e delle δ di Dirac nello spazio delle configurazioni; a differenza degli ultimi però, questi sono stati fisici ed hanno un'energia finita

$$\langle\psi_\xi^{ml}|\frac{p^2}{2m}|\psi_\xi^{ml}\rangle = \frac{1}{2m\beta} \tag{1.53}$$

Come è intuibile , gli stati di massima localizzazione non sono ortonormali:

$$\langle\psi_{\xi'}^{ml}|\psi_\xi^{ml}\rangle = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\xi-\xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{\xi-\xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\right)^3\right)^{-1} \sin\left(\frac{\xi-\xi'}{2\hbar\sqrt{\beta}}\pi\right) \tag{1.54}$$

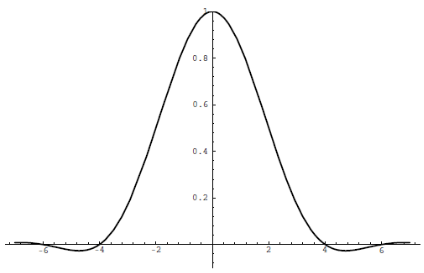

Figura 1.3: $\langle\psi_{\xi'}^{ml}|\psi_\xi^{ml}\rangle$ in funzione di $\frac{\xi-\xi'}{\hbar\sqrt{\beta}}$

1.4.2 Rappresentazione nello spazio delle quasi-posizioni

Trovata la forma esplicita degli stati di massima localizzazione, possiamo adesso costruire una rappresentazione dello spazio delle quasi posizioni: proietteremo quindi in genere le funzioni nello spazio dei momenti $\psi(p)$ (e in particolari le autofunzioni dello spazio dei momenti) non più sugli autostati di posizione $|x\rangle$ (che come già detto non hanno senso fisico, né possono essere approssimati da una successione di stati fisici) ma sugli stati massimamente localizzati attorno un certo punti ξ , $|\psi_\xi^{ml}\rangle$.Preferiamo questa rappresentazione a quella usuale per l'intuitivo significato fisico.
Definiamo quindi gli stati nella suddetta rappresentazione

$$\phi(\xi) \equiv \langle \psi_\xi^{ml} | \phi \rangle \tag{1.55}$$

In analogia al caso classico, questa è l'ampiezza di probabilità di osservare lo stato ϕ massimamente localizzato attorno al punto ξ con deviazione standard Δx_0. (Ovviamente, nel limite $\beta \to 0 \ \to \phi(\xi) = \langle \xi | \phi \rangle$).
Quindi per la generica $\psi(p)$ avremo

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\imath \xi \arctan(\sqrt{\beta} p)}{\hbar \sqrt{\beta}}} \psi(p) \tag{1.56}$$

In particolare , l'autofunzione dei momenti $\psi_{\overline{p}} = \delta(p - \overline{p})$ è ancora un'onda piana, ma con una diversa relazione di dispersione per la sua lunghezza d'onda.
Con $p = \sqrt{2mE}$, si ottiene

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\arctan\left(\sqrt{2m\beta E}\right)} \tag{1.57}$$

E' importante notare che, dato che la relazione fra k e p non è più lineare, anche mandando all'infinito l'energia non si riescono a sondare distanze arbitrariamente piccole, e compare una lunghezza d'onda minima

$$\lambda_0 = 4\hbar\sqrt{\beta} = 4\Delta x_0 \tag{1.58}$$

Questo significa che la decomposizione tramite analisi di Fourier non prevede l'esistenza di contributi caratterizzati da lunghezza d'onda $\lambda < \lambda_0$.
Per completare la trattazione del passaggio fra spazio dei momenti e spazio delle quasi-posizioni, è facile verificare che la trasformata di Fourier generalizzata utilizzata sopra sia invertibile.(Utilizzeremo l'approccio generale mostrato in [6]).
Sia una generica trasformata integrale

$$f(\xi) = \int_{p_1}^{p_2} K(\xi, p) f(p) dp \tag{1.59}$$

dove $p \in \mathbb{R}$ e $K(\xi, p)$ è il kernel. Vogliamo trovare il kernel dell'anti-trasformata $K^{-1}(\xi, p)$ che soddisfi

$$f(p) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} K^{-1}(\xi, p) f(\xi) d\xi \tag{1.60}$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} K^{-1}(\xi, p) K(\xi, p') d\xi = \delta(p - p') \tag{1.61}$$

Nel nostro caso è facile verificare che

$$K(\xi, p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \frac{1}{(1 + \beta p^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\imath \xi \arctan\left(\sqrt{\beta} p\right)}{\hbar \sqrt{\beta}}} \tag{1.62}$$

$$K^{-1}(\xi, p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar} (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\imath \xi \arctan\left(\sqrt{\beta} p\right)}{\hbar \sqrt{\beta}}} \tag{1.63}$$

e che quindi

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\imath \xi \arctan\left(\sqrt{\beta} p\right)}{\hbar \sqrt{\beta}}} \psi(\xi) d\xi \tag{1.64}$$

Sempre in questo contesto si può definire il prodotto scalare tramite la (1.56)

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \psi^*(p) \phi(p) = \\ = \frac{1}{8\pi\hbar^2\sqrt{\beta}} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, d\xi\, d\xi'\, e^{\frac{\imath(\xi - \xi') \arctan\left(\sqrt{\beta} p\right)}{\hbar \sqrt{\beta}}} \psi^*(\xi) \phi(\xi) \end{aligned} \tag{1.65}$$

Rimane solo da stabilire la forma operatoriale di momento e posizione in questa rappresentazione; ci muoveremo nell'ottica che, con $\beta \to 0$, si devono ottenere i solito risultati. Sapendo che in questo limite $\xi \to x$, e che $p \to \frac{\imath \hbar \partial}{\partial \xi}$ deriviamo ottenendo

$$\partial_\xi \phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\imath \xi \arctan\left(\sqrt{\beta} p\right)}{\hbar \sqrt{\beta}}} \partial_\xi \left(\frac{-\imath \xi \arctan\left(\sqrt{\beta} p\right)}{\hbar \sqrt{\beta}} \right) \phi(\xi) \tag{1.66}$$

E quindi otteniamo l'azione di p nello spazio delle quasi posizioni:

$$p = \frac{\tan\left(-\imath \hbar \sqrt{\beta} \partial_\xi\right)}{\sqrt{\beta}} \tag{1.67}$$

Analogamente è possibile mostrare che

$$x = \xi + \imath \hbar \beta p = \xi + \imath \hbar \sqrt{\beta} \tan\left(-\imath \hbar \sqrt{\beta} \partial_\xi\right) \tag{1.68}$$

Osservazioni capitolo 1

Abbiamo introdotto in questo capitolo un'algebra deformata di Heisenberg per tenere conto degli effetti dell'interazione gravitazionale a partire dal semplice esperimento mentale del microscopio. Abbiamo quindi sviluppato il formalismo relativo al GUP, mostrando l'impossibilità di lavorare nella rappresentazione classica dello spazio delle posizioni, creando una rappresentazione dello spazio delle quasi-posizioni. Questa rappresentazione ha come vantaggio l'immediata interpretazione fisica, tuttavia ovviamente non diagonalizza l'operatore posizione, né tanto meno è possibile ottenere questo risultato su qualsiasi dominio su cui sia ben definito p^2. Un'osservazione fatta più volte è che al tendere di β a 0 si ritrovino i risultati classici; tuttavia, dato che la rappresentazione classica e quella del GUP non condividono le stesse regole di commutazione , le due non possono essere collegate da alcuna trasformazione unitaria e quindi, per il teorema di Stone-Von Neumann , le predizioni (come i valori di aspettazione) relative alle due rappresentazioni non è deto che coincidano; è proprio su questo ultimo punto che si basa l'analisi dell'oscillazione dei neutrini in nella rappresentazione del GUP.

Capitolo 2

L'oscillazione dei neutrini

2.1 Introduzione storica

Il neutrino fu ipotizzato per la prima volta da Pauli nel 1930 nel tentativo di spiegare lo spettro continuo dell'energia dell'elettrone nel decadimento β; all'epoca si pensava che il decadimento β fosse un decadimento a due corpi, mentre oggi sappiamo che (per il β^-):

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu_e} \tag{2.1}$$

Una prima teoria fu sviluppata da Fermi nel 1933 , dimostrando che il neutrino sarebbe potuto essere a massa nulla.
Oggi sappiamo che, in accordo con il modello standard il neutrino è un leptone di carica nulla con tre possibili sapori: elettronico, muonico e tauonico. Può interagire solo tramite interazione debole o gravitazionale, e quindi la sua piccolissima sezione d'urto spiega il perché si dovette aspettare fino al 1956 con gli esperimenti di Cowan e Reines perché fosse osservato per la prima volta.
Un problema relativo ai neutrini nacque negli anni '60, quando diversi risultati sperimentali riportarono un deficit significativo nel flusso di neutrini elettronici solari in arrivo sulla terra (il deficit era di circa 2/3 del valore previsto).
Di fronte a queste evidenze sperimentali,si approfondì l'ipotesi avanzata nel 1957 da Bruno Pontevorvo sull'oscillazione dei neutrini, da lui proposta in analogia all'oscillazione $K^0 \leftrightarrows \overline{K^0}$.
Questa oscillazione fra sapori del neutrino , può accadere se valgono le seguenti ipotesi:

- a differenza di quanto sostenuto nel modello standard , il neutrino ha massa non nulla, seppur picolissima
- gli autostati di sapore non sono anche autostati dell'Hamiltonian di massa.

Nel corso degli anni sono state raccolte diverse prove che confermano sperimentalmente questa ipotesi.
Di seguito andiamo a trattare l'oscillazione dei neutrini prima nel vuoto, e poi nella materia.

2.2 L'oscillazione dei neutrini nel vuoto

In questa sezione ricaveremo la probabilità di transizione di un neutrino nel caso in cui quest'ultimo sia ultra relativistico (dato che la massa del neutrino è circa $m_\nu \approx 1eV$ e che possono essere rivelati solo neutrini con un'energia $E \approx 100KeV$). Verrà seguito l'approccio di [7] durante la trattazione.
Prendiamo un neutrino creato in un certo autostato di sapore debole $|\alpha\rangle$, e supponiamo che questo abbia un certo momento $\vec{p}$; possiamo rappresentare questo stato nella base degli autostati di massa come segue:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U^*_{\alpha k}|\nu_k\rangle \tag{2.2}$$

Dove U è la matrice di Mixing, con l'indice greco $\alpha = \{e, \nu\tau\}$ indichiamo il sapore mentre con l'indice latino indichiamo l'autostato di massa; questi non li limitiamo in numero a priori (dato che sappiamo esistere tre tipi di neutrini attivi, ci dovranno essere almeno tre autostati di massa, ma la presenza di uno o più eventuali neutrini sterili aumenterebbe questo numero, ma non riguarderebbe il calcolo della probabilità di transizione).
Un metodo semplice di ottenere autostati di massa ortonormali è quello di prendere in considerazione un volume di normalizzazione finito V; e dato che U è unitaria, anche gli autostati di sapore saranno ortonormali.
Lo scopo della sezione è far vedere che data la differente velocità di fase delle componenti di massa degli autostati di sapore, è possibile che un neutrino cambi sapore durante la propagazione.

2.2.1 Mixing a due neutrini

Passiamo adesso per semplicità di calcolo al caso di mixing a due neutrini,ovvero il caso in cui prendiamo in considerazione solo due dei tre neutrini massivi;la scelta è ben giustificata dal fatto che la maggior parte degli esperimenti non sia abbastanza sensibile da tenere in conto degli effetti di un terzo neutrino, e che quindi l'analisi dei dati può essere fatta usando un modello di mixing a due neutrini.
I due stati di sapore di cui andremo ad analizzare la probabilità di transizione, in linea di principio potrebbero essere sia stati di sapore puro, che di sapore misto.

Scriveremo quindi la matrice di mixing $U(\theta)$ come

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dove θ è l'angolo di mixing.
Vogliamo adesso scrivere l'evoluzione temporale dello stato $|\nu_\alpha\rangle$ per calcolare poi la probabilità di transizione in $|\nu_\beta\rangle$; per farlo ricordiamo che, preso un generico autostato di massa $|\nu_k\rangle$ questo soddisferà l'equazione agli autovalori dell'Hamiltoniana di particella libera

$$H|\nu_k\rangle = E_k|\nu_k\rangle \tag{2.3}$$

con autovalore

$$E_k = \sqrt{m_k^2 + |\vec{p}|^2} \tag{2.4}$$

Lo stato quindi , data l'equazione di Schrödinger

$$\imath\frac{d}{dt}|\nu_k(t)\rangle = H|\nu_k(t)\rangle \tag{2.5}$$

evolve nel tempo come un'onda piana

$$|\nu_k(t)\rangle = |\nu_k\rangle e^{-\imath E_k t} \tag{2.6}$$

Notiamo adesso che la (2.2) è invertibile, ovvero

$$|\nu_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k}|\nu_\alpha\rangle \tag{2.7}$$

e che quindi sostituendo la (2.6) vale:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k \sum_\beta U^*_{\alpha k} U_{\beta k}|\nu_\beta\rangle e^{-\imath E_k t} \tag{2.8}$$

L'ampiezza di probabilità della transizione $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ vale quindi

$$\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_k U^*_{\alpha k} U_{\beta k} e^{-\imath E_k t} \tag{2.9}$$

Possiamo infine esplicitare questi risultati nel caso di mixing a due neutrini, ottenendo per la probabilità di transizione:

$$P_\beta(t) = \left|-\cos\theta\sin\theta e^{-\imath E_1 t} + \cos\theta\sin\theta e^{-\imath E_2 t}\right|^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{4}\left[2 - 2\cos(E_2 - E_1)t\right] \tag{2.10}$$

Dato che i neutrini sono ultrarelativistici , possiamo approssimare la relazione di dispersione

$$E_k \simeq E + \frac{m_k^2}{2E} \tag{2.11}$$

con

$$E = |\vec{p}| \tag{2.12}$$

e quindi

$$E_2 - E_1 \simeq \frac{\Delta m^2}{2E} \tag{2.13}$$

con

$$\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2 \tag{2.14}$$

Possiamo quindi riscrivere la probabilità di transizione come

$$P_\beta(t) = \frac{\sin^2 2\theta}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}t\right)\right] \tag{2.15}$$

In realtà noi negli esperimenti, non conosciamo il tempo di propagazione del neutrino, ma la distanza tra la sorgente e il rivelatore L; quindi, sempre perché i neutrini sono ultrarelativistici $\rightarrow t \approx L$, otteniamo come risultato finale:

$$P_\beta(t) = \frac{\sin^2 2\theta}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{\Delta m^2}{2E}L\right)\right] \tag{2.16}$$

Come anticipato, la probabilità di transizione non nulla nell'altro sapore è dovuta ad un effetto di interferenza fra le componenti di massa degli autostati di sapore; questo effetto è generato dalla differente velocità di fase fra ν_1 e ν_2.
Possiamo definire quindi una lunghezza di oscillazione, che è la distanza da percorrere per fare aumentare il fattore di fase di 2π

$$l_{osc} \equiv \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \tag{2.17}$$

Finora è stata sottesa un'ipotesi: stiamo analizzando, alla luce di questi fenomeni di interferenza, il caso in cui le componenti di massa del neutrino siano coerenti; nel caso in cui i neutrini dovessero essere prodotti o rivelati in maniera incoerente, il fattore di interferenza svanirebbe, lasciando quindi costante la probabilità di transizione.
Osserviamo poi che l'angolo di mixing determina l'ampiezza dell'oscillazione di probabilità (è importante osservarlo, perché come mostreremo nella sezione successiva, alcuni effetti dell'interazione con la materia tendono a massimizzare questo fattore in determinate condizioni, dando vita a dei fenomeni di risonanza).

2.3 Oscillazioni nella materia

Finora non abbiamo incluso nell'Hamiltoniana del sistema nessun termine di interazione; in presenza di materia i neutrini possono interagire tramite interazione debole in due tipi di processi: le interazioni di corrente carica (CC) mediate dal bosone carico $W^{\pm}$ e le interazioni di corrente neutra (NC) mediate dal bosone neutro Z^0; le prime possono avvenire solo fra leptoni della stessa famiglia, le seconde anche fra famiglie diverse.

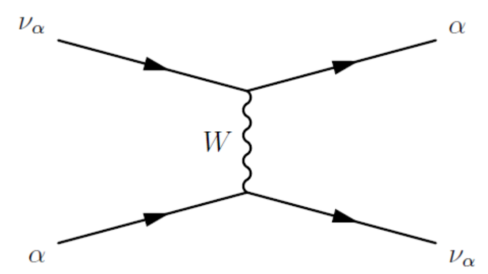

Figura 2.1: Interazione CC nel caso di scattering elastico

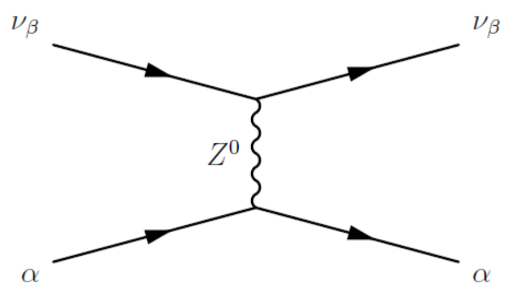

Figura 2.2: Interazione NC nel caso di scattering elastico

Dato che le interazioni NC sono indipendenti dal sapore del neutrino, non sono di interesse per l'analisi del fenomeno delle oscillazioni, perché contribuirebbero nella propagazione tramite un fattore di fase comune a tutti i sapori, e quindi non modificherebbe la differenza di fase che è quella che ci interessa.
Diversa è la storia per le interazioni CC : infatti nella materia ordinaria (es. nel sole) la densità di muoni e tauoni è generalmente trascurabile rispetto a quella di elettroni , e quindi solo i neutrini elettronici riceveranno un contributo di fase

aggiuntivo nella propagazione.
In particolare ci occuperemo del caso di scattering in avanti, ovvero del caso in cui il momento del neutrino $\vec{p}$ si conserva :

$$\nu_e(\vec{p})\, e^- \to \nu_e(\vec{p})\, e^- \tag{2.18}$$

Si può dimostrare che l'Hamiltoniana che descrive l'interazione è

$$H_1 = \sqrt{2} G_F N_e \tag{2.19}$$

Dove G_F è la costante di Fermi, e N_e è la differenza fra la densità di elettroni e la densità di positroni nel mezzo; questa in genere ha una dipendenza dalla posizione, e si possono trovare soluzioni numeriche per ogni profilo di densità; noi ci occuperemo del caso a densità costante, di cui si conosce la soluzione esatta.
Guardiamo sempre per semplicità, il caso a due neutrini, con $\alpha = e, \mu$; tramite la matrice di mixing è possibile scrivere l'Hamiltoniana H_0 del vuoto nella base dei sapori:

$$\begin{aligned} \underline{H_0} &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E + \frac{m_1^2}{2E} & 0 \\ 0 & E + \frac{m_2^2}{2E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu 1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu 2}^* \end{pmatrix} = \\ &= E\mathbb{1} + \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} (m_1^2 |U_{e1}|^2 + m_2^2 |U_{e2}|^2 & m_1^2 U_{e1} U_{\mu 1}^* + m_2^2 U_{e2} U_{\mu 2}^* \\ m_1^2 U_{e1} * U_{\mu 1} + m_2^2 U_{e2}^* U_{\mu 2} & m_1^2 |U_{\mu 1}| + m_2^2 |U_{\mu 2}| \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dato che il pezzo in E dà, come le interazioni NC, un contributo di fase uguale a tutti i sapori, possiamo evitare di tenerlo in considerazione nella nostra trattazione.
Sostituendo i valori di $U(\theta)$ nell'equazione di sopra otteniamo

$$\underline{H_0} = \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} m_1^2 \cos^2\theta + m_2^2 \sin^2\theta & \frac{\Delta m^2}{2} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta m^2}{2} \sin 2\theta & m_1^2 \sin^2\theta + m_2^2 \cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Reiterando il ragionamento di prima, secondo cui aggiungere un termine reale proporzionale all'identità non cambia niente, posso aggiungere a $\underline{H_0}$ il termine $-\frac{m_1^2 + m_2^2}{4}\mathbb{1}$ ottenendo

$$\underline{H_0} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Possiamo quindi aggiungere il termine di interazione con la materia H_1[1]

$$\underline{H} = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

[1]Abbiamo assunto che uno dei due sapori sia quello elettronico

Dove $V_{CC} = \sqrt{2}G_F N_e$. Con lo stesso ragionamento di prima aggiungiamo il termine $\frac{-V_{CC}}{2}\mathbb{1}$ ottenendo

$$\underline{H} = \frac{1}{4E}\begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + 2EV_{CC} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - 2EV_{CC} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

Un'idea avanzata per la prima volta da Wolfenstein per trattare il problema fu quello di ricondurre l'Hamiltoniana di sopra alla forma dell'Hamiltoniana nel vuoto tramite la definizione di un nuovo angolo di mixing θ_M e di una nuova differenza di massa Δm_M^2, così da poter utilizzare i risultati già noti dell'oscillazione nel vuoto. Basta quindi che vengano verificate le seguenti:

$$\begin{cases} \Delta m^2 \cos 2\theta - 2EV_{CC} = \Delta m_M^2 \cos 2\theta_M \\ \Delta m^2 \sin 2\theta = \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M \end{cases}$$

Ovvero, esplicitando i nuovi parametri:

$$\begin{cases} \tan 2\theta_M = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - V_{CC}/2\Delta m^2} \\ \Delta m_M^2 = \Delta m^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - 2EV_{cc}/\Delta m^2)^2} \end{cases}$$

(Un metodo analogo per ottenere questi risultati per θ_M e Δm_M^2 era quello di diagonalizzare la (2.23))
Questo ci permettere di riscrivere l'Hamiltoniana come

$$\underline{H} = \frac{\Delta m_M^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta_M & \sin 2\theta_M \\ \sin 2\theta_M & \cos 2\theta_M \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Questa manipolazione in caso di densità N_e costante, ci permette di scrivere la probabilità di transizione $e \to \mu$ come

$$P_{e\to\mu} = \sin^2 2\theta_M \sin^2\left(\frac{\Delta m_M^2 L}{4E}\right) \tag{2.26}$$

Andiamo adesso ad analizzare tre casi notevoli per questo risultato:

- $V_{CC} \ll \Delta m^2/\mathrm{E}$
  in questo caso la densità elettronica è molto bassa, ed è come ritornare al caso delle oscillazioni nel vuoto, infatti

$$\begin{aligned} \theta_M &\to \theta \\ \Delta m_M^2 &\to \Delta m^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

- $V_{CC} = \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta$ In questo caso ci troviamo in una condizione di risonanza; infatti per il valore di densità elettronica
$$N_e = \frac{2\Delta m^2 \cos^2 2\theta}{\sqrt{2} E\, G_F} \tag{2.28}$$
si ottiene una condizione di massimo mixing, infatti $\theta_M = \pi/4$ e quindi
$$\begin{cases} \left|\nu_1^M\right\rangle = \dfrac{|\nu_e\rangle - |\nu_\mu\rangle}{\sqrt{2}} \\ \left|\nu_2^M\right\rangle = \dfrac{|\nu_e\rangle + |\nu_\mu\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
inoltre l'ampiezza della probabilità di transizione sarà massima per la (2.26) e Δm_M^2 raggiungerà il suo valore minimo $\Delta m_M^2 = \sin^2 2\theta$; questo fenomeno di risonanza nella materia è noto come effetto MSW (da Mikheev, Smirnov e Wolfenstein)

- $V_{CC} \gg \Delta m^2/E$
in questo caso vengono soppresse le transizioni di sapore, infatti $\theta_M = \pi/2$, e la (2.26) va a zero.

Osservazioni capitolo 2

Abbiamo quindi studiato il fenomeno dell'oscillazione dei neutrini nel vuoto e nella materia nel caso di densità costante, trovando un effetto di risonanza; tuttavia, noi abbiamo sempre trattato per semplicità il neutrino con il formalismo dell'onda piana, mentre un formalismo più corretto è sicuramente quello del pacchetto d'onda; formalismo che in realtà è necessario per descrivere in maniera corretta il concetto di propagazione del neutrino fra due eventi localizzati come quelli di creazione e di misurazione (obbiettivo per il quale l'onda piana, essendo estesa a tutto lo spazio e il tempo, non risulta adeguata). Inoltre è possibile dimostrare (come fatto in [10]) che se si immagina di conoscere il processo in cui viene creato il neutrino, e se si misura l'energia delle altre particelle che prendono parte al processo, con una precisione che permette di distinguere i due neutrini di massa, per il principio di Heinsenberg si avrebbe un'incertezza sulla posizione per il neutrino maggiore di l_{osc}, facendo venire meno il fenomeno di oscillazione; sarebbe quindi necessario prendere in considerazione non neutrini con $\vec{p}$ fissato, ma con una distribuzione di momenti centrata intorno a questo valore. Fortunatamente si può dimostrare che i risultati ottenuti con il formalismo del pacchetto d'onda siano essenzialmente gli stessi, e che quindi non sia necessaria una trattazione formale più complessa.

Capitolo 3

L'oscillazione dei neutrini nel caso del GUP

Vogliamo adesso applicare i risultati dell'analisi del GUP ottenuti nel capitolo 1 all'oscillazione dei neutrini.
Da dove cominciare?
Come già detto, l'oscillazione dei neutrini nasce da un fenomeno di interferenza fra le componenti di massa di un sapore α, interferenza dovuta alla diverse velocità di propagazione di queste componenti, a sua volta dovuta alla differenza di massa.
Per studiare la propagazione, siamo andati a guardare come lo stato $|\alpha\rangle$ evolvesse nel tempo; dopo averlo scomposto nelle componenti di massa, ci siamo basati sulla relazione di Einstein $E_k = \omega_k$ per dire che queste evolvessero come

$$|\nu_k(t)\rangle = |\nu_k(0)\rangle \, e^{-\imath E_k t} \tag{3.1}$$

Abbiamo però visto nel capitolo 1 come l'introduzione di una lunghezza minima modifichi la relazione che sussiste normalmente fra $\vec{k}$ e $\vec{p}$; è lecito chiedersi a questo punto se un GUP non comporti anche una nuova relazione fra la frequenza ω e l'energia E. La risposta è ovviamente sì, anche perché se non modificassimo questa relazione, e in particolare se la relazione a legare ω e E non fosse la stessa che lega $\vec{k}$ e $\vec{p}$, la velocita della luce c cambierebbe. È bene precisare che esistono teorie che prevedono la modifica di c, ma noi lavoreremo sempre nell'ipotesi in cui vale

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = c \tag{3.2}$$

3.1 GUP, relatività ristretta e relazione di dispersione

In questa tesi abbiamo ricavato la necessità di una lunghezza minima a partire da un nuovo principio di Heisenberg; la necessità di una lunghzza minima può essere studiata anche da altri punti di vista, ovvero tramite una modifica della relatività ristretta o della relazione di dispersione.
Finora abbiamo infatti sottaciuto le implicazioni che l'esistenza di una lunghezza minima abbiano per esempio sulla relatività ristretta: ci aspettiamo la lunghezza minima sia un invariante relativistico (a meno di fare ipotesi su una classe privilegiata di osservatori); altrimenti, infatti, se questa misurasse Δx_0 in un sistema di riferimento, sarebbe possibile tramite un boost mandarla a zero; è necessario quindi trovare delle trasformazioni di Lorentz deformate in cui a c si affianchi un nuovo invariante Δx_0; si parlerà in questo caso di DSR≡ Deformed Special Relativity. Come mostrato in [12], è possibile dimostrare che il GUP implichi una DSR e viceversa:

$$GUP \Longleftrightarrow DSR \tag{3.3}$$

Come anticipato, un ulteriore metodo per l'introduzione di una lunghezza minima è quello di modificare la relazione di dispersione (MDR ≡ Modified Dispersion Relation) per esempio in modo da avere

$$\omega^2 - k^2 - m^2 = \Pi(k)^2 \tag{3.4}$$

La relazione che intercorre fra MDR e GUP o DSR è più complicata della (3.3) , ci sono infatti due possibili visioni:

- si possono considerare MDR e GUP come due facce della stessa medaglia, con la stessa relazione che intercorre fra la rappresentazione di Scrödinger e quella di Heisenberg; infatti come mostrato in [13] gli effetti di GUP e MDR possono coincidere.
- l'altra possibilità è che descrivano diversi aspetti della fisica, e che sia necessario modificare contemporaneamente sia il principio di Heisenberg che la relazione di dispersione.

D'ora in poi noi lavoreremo nella prima ipotesi, mantenendo valida la relazione di dispersione

$$E^2 - p^2 - m^2 = 0 \tag{3.5}$$

3.2 Oscillazione dei neutrini nell'algebra KMM

Dopo aver fatto le dovute osservazioni, possiamo infine calcolare le nuove probabilità di transizione fra sapore dei neutrini.
Nel capitolo 2 avevamo dimostrato la seguente relazione:

$$P_{e\to\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta\omega L}{2}\right) \tag{3.6}$$

Dove nel caso di prima

$$\Delta\omega = \frac{\Delta m^2}{2E} \tag{3.7}$$

Dobbiamo adesso calcolare il nuovo $\Delta\omega$; per farlo ricordiamo che nel capitolo 1 avevamo dimostrato che

$$k(p) = \frac{\arctan\sqrt{\beta}p}{\sqrt{\beta}} \tag{3.8}$$

Abbiamo però concluso che la relazione fra k e p deve essere la stessa che lega ω e E; vale quindi

$$\omega(E) = \frac{\arctan\sqrt{\beta}E}{\sqrt{\beta}} \tag{3.9}$$

Possiamo quindi andare a calcolare $\Delta\omega$:

$$\begin{aligned}\Delta\omega = \omega(E_2) - \omega(E_1) = \frac{\arctan\sqrt{\beta}E_2}{\sqrt{\beta}} - \frac{\arctan\sqrt{\beta}E_1}{\sqrt{\beta}} = \\ = \frac{\arctan\left[\frac{\sqrt{\beta}(E_2-E_1)}{1+(E_2-E_1)\beta}\right]}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{\arctan\left[\frac{\sqrt{\beta}\Delta m^2}{2E}\frac{1}{1+\beta E^2}\right]}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{\Delta m^2}{2E}\frac{1}{1+\beta E^2}\end{aligned} \tag{3.10}$$

troviamo quindi che la nuova probabilità di transizione vale:

$$P_{e\to\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}\frac{1}{1+\beta E^2}L\right) \tag{3.11}$$

Osserviamo quindi che l'algebra KMM porta alla soppressione della probabilità di oscillazione ad alte energie. Potremmo chiederci a questo punto cosa succederebbe se non lavorassimo con l'algebra KMM, ma con un'altra algebra; ad esempio, se scegliessimo l'algebra usata in [14]

$$[x,p] = \imath e^{l_0^2 p^2} \tag{3.12}$$

otterremmo una nuova relazione fra ω e E:

$$\omega(E) = \frac{\sqrt{\pi}}{2l_0}\,\mathrm{erf}(l_0 E) \tag{3.13}$$

dove l_0 è la lunghezza minima.
Questa porterebbe ad una probabilità di transizione

$$P_{e\to\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E} L\, e^{-l_0^2 E^2}\right) \tag{3.14}$$

Osserviamo che anche in questo caso la presenza di una lunghezza minima porti alla soppressione della probabilità di transizione ad alte energie; cerchiamo di capire allora se questo risultato è comune a tutte le algebre che prevedono l'esistenza di una lunghezza minima.
In [15] è mostrato che presa un'algebra del tipo

$$[x,p] = f(p) \tag{3.15}$$

per cui vale

$$f(p) = \frac{dp}{dk} \to k(p) = \int_0^p \frac{1}{f(p)} \tag{3.16}$$

la funzione $f(p)$ è tale da comportare una lunghezza minima se vale

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(p)} \leq \infty \tag{3.17}$$

se supponiamo che f(p) sia monotona, questo implica che

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{f(p)} = 0 \implies \lim_{p\to\infty} \frac{dk}{dp} = 0 \tag{3.18}$$

Adesso andiamo a riscrivere in funzione della generica algebra il valore di $\Delta\omega$

$$\Delta\omega = \omega(E_2) - \omega(E_1) \approx \frac{d\omega}{\text{m}^2}\Delta m^2 = \frac{d\omega}{dE}\frac{dE}{dm^2}\Delta m^2 = \frac{d\omega}{dE}\frac{\Delta m^2}{2E} \tag{3.19}$$

Questo implica che avremo una generica probabilità di transizione :

$$P_{e\to\mu} = \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4E}\frac{d\omega}{dE} L\right) \tag{3.20}$$

Ma dato che avevamo chiesto che la relazione fra k e p fosse la stessa a legare ω e E, vale che

$$\lim_{E\to\infty} \frac{d\omega}{dE} = 0 \tag{3.21}$$

e quindi, all'aumentare dell'energia, a prescindere dall'algebra che abbiamo scelto in partenza, ci sarà una soppressione dell'oscillazione fra sapori; è importante osservare che questo risultato non è banale, in quanto non è possibile legare a priori

le previsioni di teorie con principi di indeterminazione differenti.
Andiamo infine ad analizzare le conseguenze della lunghezza minima sulle oscillazioni nella materia.
In questo caso, non solo la differenza di fase cambierà in funzione di $\frac{d\omega}{dE}$, ma anche l'ampiezza dell'oscillazione, modulata da θ_M. Infatti, una volta importati gli effetti dell'algebra KMM, otteniamo

$$\tan 2\theta_M = \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{2EV_{CC}}{\Delta m_M^2 \cos 2\theta \frac{d\omega}{dE}}} \tag{3.22}$$

$$\Delta m_M^2 = \sqrt{\Delta m^2 \frac{d\omega}{dE} \sin^2 2\theta + (\cos 2\theta \Delta m^2 \frac{d\omega}{dE} - 2EV_{CC})^2} \tag{3.23}$$

Se ci mettiamo nell'ipotesi in cui nel caso "ordinario" ci troviamo nella condizione di massimo mixing,ovvero

$$V_{CC} = \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta \tag{3.24}$$

e calcoliamo lo shift di probabilità rispetto al modello con il GUP, otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta P = \left| sin^2 \left[\arctan \left(\frac{\tan 2\theta}{\beta E^2} \right) \right] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{M_{GUP}}^2 L}{4E} \right) - \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 \sin 2\theta L}{4E} \right) \right| \approx \\ \approx \left| 2 \sin \left(\frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{2E} L \right) \frac{\sin 2\theta \Delta m^2}{4} \beta E L \right| \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2.1 TXS 0506+056

Cerchiamo adesso di farci un'idea dell'entità di questo shift di probabilità, o meglio cerchiamo di capire di che ordine di grandezza dovrebbe essere $\sqrt{\beta}$ affinché le variazioni di probabilità siano dell'ordine del per cento.
Per questa stima useremo i parametri del neutrino rivelato da Ice Cube nel 22 Settembre 2017 generato dal blazar TXS 0506+056. L'energia del neutrino rivelata era di circa $290\, TeV$ e il blazar dista circa $5.7 \cdot 10^9$ anni luce dalla terra. Come parametri dell'oscillazione useremo $\Delta m^2 \approx 10^{-3}\, eV^2$ e $\sin^2(2\theta) \approx 0.9$.
Sostituendo otteniamo che affinché lo shift sia dell'ordine del per cento con questi parametri, deve essere

$$\sqrt{\beta} \approx 10^{-16}\, MeV^{-1} \tag{3.26}$$

ovvero $\Delta x_0 \approx 10^{-29}\, m$ (ricordiamo che $\mathcal{L}p \sim 1.6 \cdot 10^{-35}\, m$).
Ovviamente questa stima non fa altro che confermare l'enorme sforzo che dovrà essere fatto dal punto di vista sperimentale per confermare un risultato del genere

dato che fra l'altro niente ci assicura che gli effetti di un GUP diventino apprezzabili a queste scale, e niente ci assicura che aumentando le energie in gioco e sondando distanze sempre più piccole non entri in gioco una nuova fisica che ancora non conosciamo.

Conclusioni

In questa tesi, tramite la modifica del noto esperimento mentale di Heisenberg, abbiamo introdotto un principio di indeterminazione generalizzato, che abbiamo poi studiato da un punto di vista formale nel caso dell'algebra KMM; abbiamo quindi mostrato che l'esistenza di una lunghezza minima comporti una relazione non lineare fra vettore d'onda e momento, e fra frequenza ed energia, sfruttando nel terzo capitolo proprio queste relazioni per studiare le nuove previsioni sull'oscillazione fra sapori dei neutrini. Le differenze fra i risultati così ottenuti e quelli della meccanica quantistica ordinaria sono ovviamente estremamente difficili da osservare; tuttavia i neutrini sono degli ottimi candidati per questo tipo di ricerca: essendo in grado di propagarsi liberamente nello spazio per enormi distanze, dovrebbero riuscire ad "accumulare" gli effetti dovuti alla lunghezza minima; oppure, qualora vi sia interazione con la materia nella propagazione, si potrebbe cercare di osservare lo shift di energia alla quale avviene l'effetto MSW.

Bibliografia

[1] A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation," *Physical Review D*, vol. 52, no. 2, p. 1108, 1995.

[2] P. Caldirola, R. Cirelli, and G. M. Prosperi, *Introduzione alla fisica teorica.* Utet, 1982.

[3] R. J. Adler and D. I. Santiago, "On gravity and the uncertainty principle," *Modern Physics Letters A*, vol. 14, no. 20, pp. 1371–1381, 1999.

[4] G. Cosenza, *Metodi matematici della fisica.* Bollati Boringhieri, 2004.

[5] A. Kempf, "Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 35, no. 9, pp. 4483–4496, 1994.

[6] A. Farrell, B. P. van Zyl, and Z. MacDonald, "Evaluation of inverse integral transforms for undergraduate physics students," *Canadian Journal of Physics*, vol. 90, no. 1, pp. 1–9, 2011.

[7] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics.* Oxford university press, 2007.

[8] G. Fantini, A. G. Rosso, F. Vissani, and V. Zema, "The formalism of neutrino oscillations: an introduction," *arXiv preprint arXiv:1802.05781*, 2018.

[9] B. Kayser, "On the quantum mechanics of neutrino oscillation," *Physical Review D*, vol. 24, no. 1, p. 110, 1981.

[10] J. Lesgourgues, G. Mangano, G. Miele, and S. Pastor, *Neutrino cosmology.* Cambridge University Press, 2013.

[11] S. Hossenfelder, "A note on theories with a minimal length," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 5, p. 1815, 2006.

[12] L. Xiang, "Dispersion relation, black hole thermodynamics and generalization of uncertainty principle," *Physics Letters B*, vol. 638, no. 5-6, pp. 519–522, 2006.

[13] M. Sprenger, P. Nicolini, and M. Bleicher, "Neutrino oscillations as a novel probe for a minimal length," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, no. 23, p. 235019, 2011.

[14] T. Masłowski, A. Nowicki, and V. Tkachuk, "Deformed heisenberg algebra and minimal length," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, no. 7, p. 075309, 2012.