

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base  
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

**Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”**



*Laurea triennale in Fisica*

# **Le applicazioni del Lunar Laser Ranging**

**Relatori:**

Prof. Salvatore Capozziello

**Candidato:**

Emanuela Luongo  
Matricola N85000446

A.A. 2018/2019\_



# Sommario

Introduzione .....	4
Capitolo 1    Le premesse .....	6
<hr/>	
1.1 IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA .....	6
1.2 I TEST DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA.....	7
1.3 IL RITARDO DELL'ECO RADAR.....	12
1.4 IL RED-SHIFT GRAVITAZIONALE .....	14
Capitolo 2    Il Lunar Laser Ranging .....	15
<hr/>	
2.1 IL SET DI DATI .....	15
2.2 IL MODELLO MATEMATICO .....	15
2.3 L'ANALISI DEGL'ERRORI .....	17
Capitolo 3    Le applicazioni LLR .....	17
<hr/>	
3.1 IL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA .....	17
3.2 LA PRECESSIONE GEODETICA.....	20
3.3 I PARAMETRI POST-NEWTONIANI .....	22
3.4 LA VARIAZIONE DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE $G$ .....	23
Conclusioni .....	26
<hr/>	
4.1 STE-QUEST E SAAGE .....	27
4.2 GLI SVILUPPI FUTURI DELL'ESPERIMENTO LLR .....	28
Bibliografia .....	30
<hr/>	

# Introduzione

---

Questa tesi si propone di presentare l'esperimento di Lunar Laser Ranging (LLR), attraverso le sue molteplici applicazioni come un test del Principio di Equivalenza, lo studio del moto di precessione geodetica, l'analisi dei Parametri Post-Newtoniani (PPN) e la variazione della costante di gravitazione  $G$ .

L'esperimento LLR prende fortemente spunto dalla bilancia a torsione di Eötvös, può essere infatti considerata la sua evoluzione in ambito macroscopico più precisa.

Per la realizzazione dell'esperimento, nel luglio del 1969, la missione lunare Apollo 11 pose, sulla superficie lunare nel Sea of Tranquillity, una matrice di 100 retroriflettori laser in silice (Fig.1), con lo scopo di emettere un segnale da Terra e studiarne la riflessione. Il primo telescopio ad osservare i fotoni riflessi fu l'Osservatorio McDonald. Con le successive missioni vennero posti nuovi retroriflettori, aumentando l'accuratezza dei dati.

Lo studio del segnale di ritorno permette l'acquisizione di molte informazioni attraverso l'elaborazione dei dati, come la misura della distanza Terra-Luna ( $\approx 350\,000$  km), la quale è un dato fondamentale per l'analisi della precessione geodetica, per cui l'orbita lunare si allontana da quella ellittica ideale geocentrica, a causa della perturbazione solare.

La fonte più importante d'informazioni per i test sono i PPN, poiché i loro valori sperimentali possono essere accuratamente confrontati con quelli teorici, traendo quindi conclusioni sulla validità della teoria.

Con lo scopo di comprendere al meglio lo studio della principale applicazione dell'LLR, ovvero il test del Principio di Equivalenza, vengono introdotti i fenomeni di ritardo dell'eco radar, red-shift gravitazionale ed effetto Nordtvedt. Quest'ultimo nasce dalla necessità di trovare una piccola violazione del Principio di Equivalenza in ambito macroscopico.

L'importanza di questa applicazione è dovuta allo stretto legame con la relatività generale, la cui validità è argomento di discussione nella fisica odierna, ciò è dovuto alla difficoltà di trovarne un inserimento in campo quantistico e cosmologico.

Nasce, quindi lo studio della possibile variazione della costante di gravitazione  $G$ , la quale viene introdotta supponendo che sia valido il Principio di Equivalenza, ma noteremo che per adesso non vengono rilevati evidenti valori della variazione  $\frac{\dot{G}}{G} \leq 8 \times 10^{-12}/yr$ .

Infine, sono confrontati i recenti esperimenti di STE-QUEST e SaAGE, i quali come per l'esperimento LLR sono mirati alla confutazione del Principio di Equivalenza, ma in ambito quantistico.

Si concluderà con gli obiettivi futuri dell'esperimento LLR, al fine di ottenere una maggiore accuratezza dei dati ed esplorare nuove frontiere nelle teorie estese della gravitazione.



Figura 1: Retroriflettore della missione Apollo11 sul suolo lunare.

# Capitolo 1 Le premesse

---

## 1.1 Il Principio di Equivalenza

Il Principio di Equivalenza è alla base della teoria della Relatività Generale e la sua validità è verificata nell'equazione delle forze di un corpo non carico immerso in un campo gravitazionale. Utilizzando la legge di gravitazione universale di Newton:

$$m_i a = \frac{G m_g M}{r^2}$$

dove  $m_i$  e  $m_g$  indicano rispettivamente la massa inerziale e la massa gravitazionale del corpo, allora è possibile affermare che il Principio di Equivalenza debole è valido, se  $m_i = m_g$  e se la traiettoria del corpo, con velocità assegnata nello spazio-tempo, non dipende dalla struttura interna e dalla composizione del corpo.

Quest'ultimo è un principio di fondamentale importanza nello studio della fisica moderna, poiché durante l'elaborazione della teoria della Relatività Generale, Einstein ebbe la necessità di formulare il Principio di Equivalenza, distinguendo gli effetti per corpi auto-gravitanti e non.

Quindi nasce il Principio di Equivalenza in forma debole secondo Einstein [1], per cui:

- è valido il Principio di Equivalenza debole,
- il risultato di un esperimento localmente non gravitazionale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera,
- il risultato di un esperimento localmente non gravitazionale è indipendente da quando e dove viene effettuato.

Mentre distinguiamo il Principio di Equivalenza in forma gravitazionale debole secondo Einstein, per cui:

- il Principio di Equivalenza debole è valido anche per corpi auto-gravitanti,
- il risultato di un esperimento locale è indipendente dalla velocità dell'apparato in caduta libera,
- il risultato di un esperimento locale è indipendente da quando e dove viene effettuato.

Infine, si identifica il Principio di Equivalenza forte, che contiene quello di Einstein, quando s'ignorano le forze gravitazionali. Ciò viene esplicitamente compreso nell'esperimento mentale dell'ascensore in caduta libera, dove gli effetti gravitazionali all'interno di quest'ultimo sono annullati, quindi si comporta come un sistema di riferimento inerziale. Si evince che non è possibile distinguere localmente tra accelerazione uniforme e campo gravitazionale esterno, allora si può sempre individuare un sistema di riferimento inerziale almeno localmente.

La Relatività Generale è fondata sulla validità del Principio di Equivalenza e questa tesi si propone di trattare l'esperimento LLR, che ne dà conferma, almeno in campo gravitazionale debole.

## 1.2 I test del Principio di Equivalenza

Il primo esperimento che verificò la validità del Principio di Equivalenza, con una buona stima (poche parti per miliardo), fu la bilancia a torsione di Eötvös.

Lo scienziato introdusse il parametro  $\eta$  detto *Rapporto di Eötvös* (Tab.1), con lo scopo di valutare, in modo più efficiente a livello sperimentale [1], la differenza delle accelerazioni della Luna e della Terra verso il Sole:

$$\eta = 2 \frac{|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|}$$

dove, più in generale,  $a_1$  e  $a_2$  sono accelerazioni in diversi laboratori.

Il valore teorico del parametro è zero per il Principio di Equivalenza in forma debole secondo Einstein, poiché non ci deve essere una dipendenza dalla diversa composizione dei corpi e non deve esistere un sistema di riferimento privilegiato.

Esperimento	Metodo	Limite su $ \eta $
Newton	Pendolo	$10^{-3}$
Bessel	Pendolo	$2 \times 10^{-5}$
Eötvös	Bilancia a torsione	$5 \times 10^{-9}$
Potter	Pendolo	$2 \times 10^{-5}$
Renner	Bilancia a torsione	$2 \times 10^{-9}$
Princeton	Bilancia a torsione	$10^{-11}$
Mosca	Bilancia a torsione	$10^{-12}$
Monaco	Caduta libera	$3 \times 10^{-4}$
Stanford	Sospensione magnetica	$10^{-4}$
Boulder	Galleggiamento sull'acqua	$4 \times 10^{-11}$
Orbitale	Caduta libera in orbita	$10^{-15} \div 10^{-18}$ non ancora effettuato

Tabella 1: I limiti sperimentali del parametro di Eötvös  $|\eta|$ .

Tra i test fatti nel sistema solare è di fondamentale importanza l'esperimento LLR, il quale tiene conto del possibile effetto Nordtvedt. Quest'ultimo ipotizza che ci sia una violazione del Principio di Equivalenza forte, per cui è prevista una differenza consistente tra le accelerazioni della Terra e della Luna verso il Sole.

È quindi necessario definire un nuovo parametro, dal *Rapporto di Eötvös*, chiamato *Parametro di Nordtvedt*, indicandolo anch'esso con  $\eta$  ed è in funzione dei PPN (Tab.2):

$$\eta = 4\beta - \frac{10}{3}\xi - \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3}\zeta_1 - \frac{1}{3}\zeta_2$$

Parametro	Significato nella Relatività Generale	Valore in Relatività Generale
$\gamma$	la quantità della curvatura spaziale prodotta da una massa unitaria a riposo	1
$\beta$	la quantità di “non-linearità” presente nella gravità	1
$\xi$	esistenza di effetti locali privilegiati	0
$\alpha_1$ $\alpha_2$ $\alpha_3$	esistenza di effetti di riferimento privilegiati	0 0 0
$\zeta_1$ $\zeta_2$ $\zeta_3$ $\zeta_4$	violazione della conservazione del momento totale	0 0 0 0

Tabella 2: Il significato ed il valore dei PPN in Relatività Generale.

Nordtvedt, a differenza del suo predecessore, propose di studiare il possibile contributo dell'energia di legame gravitazionale sulla massa gravitazionale, portando così ad una distinzione con la massa inerziale e alla possibile violazione del Principio di Equivalenza:

$$m_g = m_i(1 + \Delta)$$

dove  $|\Delta| \cong \frac{G_N m}{ac^2}$  ed  $a$  è il raggio caratteristico.

Poiché  $\Delta$  aumenta con la massa, le misure sono apprezzabili in ambito astronomico piuttosto che in laboratorio, inoltre si osserva che per il Principio di Equivalenza in forma fortissima  $\Delta = 0$ .

Al fine di comprendere le conseguenze dell'effetto Nordtvedt sui successivi test del Principio di Equivalenza, si considerino due corpi,  $M_1$  ed  $M_2$  in un'orbita circolare intorno al loro centro di massa, in equilibrio tra accelerazione centrifuga e attrazione gravitazionale.

Allora, ponendo una massa di prova nel campo di gravitazione comune di  $M_1$  ed  $M_2$ , questa sarà in una posizione di equilibrio stabile, detto punto di librazione di Lagrange (Fig.2).

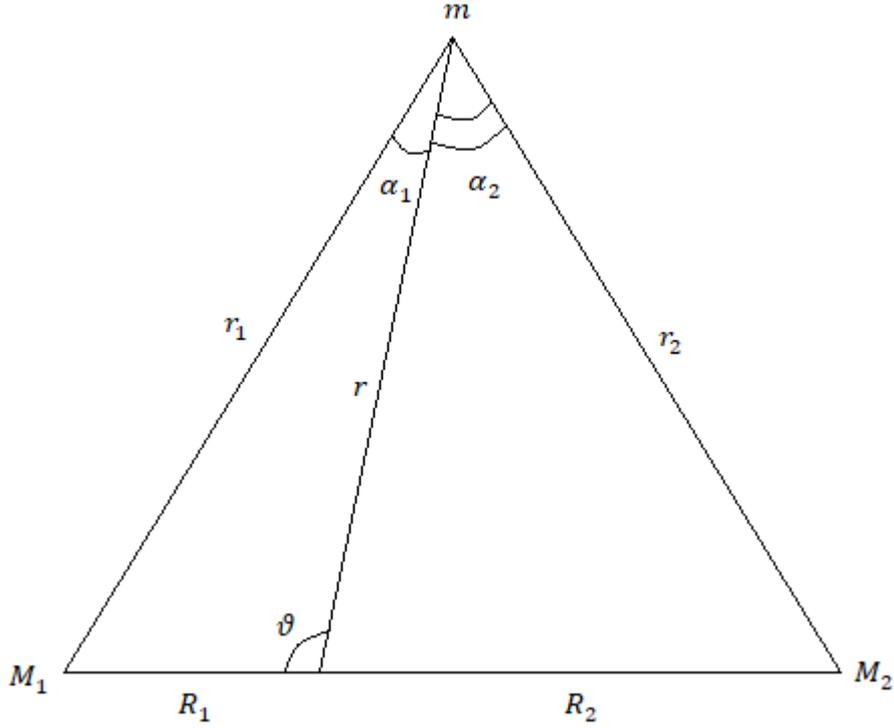


Figura 2: La massa di prova  $m$  è in equilibrio stabile nel punto di librazione di Lagrange.

Si osservi che nel caso di equilibrio, in assenza di effetto Nordtvedt, il precedente triangolo è equilatero, quindi  $r_1 = r_2 = (R_1 + R_2)$ . Lo scopo è dimostrare che in presenza di effetto Nordtvedt  $r_1 \neq r_2$ .

Supponendo che se  $M_1$  ed  $M_2$  risentano dell'effetto Nordtvedt, è possibile affermare che  $\Delta_1, \Delta_2 \neq 0$  tale che:

$$\begin{cases} \frac{m_{g1}}{m_{i1}} = 1 + \Delta_1 \\ \frac{m_{g2}}{m_{i2}} = 1 + \Delta_2 \end{cases}$$

Allora si considerano le equazioni di equilibrio rispettivamente di  $M_1$  ed  $M_2$ :

$$\begin{cases} m_{i1} \omega^2 R_1 = m_{g1} \frac{G_N M_2}{(R_1 + R_2)^2} \\ m_{i2} \omega^2 R_2 = m_{g2} \frac{G_N M_1}{(R_1 + R_2)^2} \end{cases}$$

Sostituendo le equazioni precedenti per effetto Nordtvedt si ottiene:

$$\begin{cases} \omega^2 R_1 = \frac{G_N M_2}{(R_1 + R_2)^2} (1 + \Delta_1) \\ \omega^2 R_2 = \frac{G_N M_1}{(R_1 + R_2)^2} (1 + \Delta_2) \end{cases}$$

Con lo scopo di utilizzarle successivamente, si ricavano le seguenti relazioni, sommando fra di loro le equazioni di equilibrio di  $M_1$  ed  $M_2$ :

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G_N}{(R_1 + R_2)} [M_1(1 + \Delta_2) + M_2(1 + \Delta_1)]$$

e facendone il rapporto:

$$\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2} = \frac{1 + \Delta_1}{1 + \Delta_2}$$

Mentre le relazioni di equilibrio della massa di prova  $m$  sono:

$$\begin{cases} \frac{G_N M_1}{r_1^2} \sin \alpha_1 = \frac{G_N M_2}{r_2^2} \sin \alpha_2 \\ \frac{G_N M_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 + \frac{G_N M_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 = \omega^2 r \end{cases}$$

Dal teorema dei seni:

$$\begin{cases} \frac{R_1}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{\sin \theta} \\ \frac{R_2}{\sin \alpha_2} = \frac{r_2}{\sin \theta} \end{cases}$$

Sostituendo queste ultime nella prima equazione di equilibrio del corpo  $m$  si ottiene:

$$\frac{M_1 R_1}{r_1^3} = \frac{M_2 R_2}{r_2^3}$$

Utilizzandola nell'equazione del rapporto tra le due condizioni di equilibrio di  $M_1$  ed  $M_2$ :

$$\frac{1 + \Delta_1}{r_1^3} = \frac{1 + \Delta_2}{r_2^3}$$

Si deducono le seguenti relazioni geometriche dalla Fig.2:

$$r = r_1 \cos \alpha_1 + R_1 \cos \vartheta = r_2 \cos \alpha_2 - R_2 \cos \vartheta$$

È possibile quindi risolvere il seguente sistema da cui si ricavano le relazioni finali di  $r_1$  ed  $r_2$ :

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{G_N}{(R_1 + R_2)} [M_1(1 + \Delta_2) + M_2(1 + \Delta_1)] \\ \frac{G_N M_1}{r_1^2} \cos \alpha_1 + \frac{G_N M_2}{r_2^2} \cos \alpha_2 = \omega^2 r \\ r = r_1 \cos \alpha_1 + R_1 \cos \vartheta = r_2 \cos \alpha_2 - R_2 \cos \vartheta \end{cases}$$

Semplificando con l'equazione  $\frac{M_1 R_1}{r_1^3} = \frac{M_2 R_2}{r_2^3}$ , si arriva alla seguente equazione:

$$\frac{M_1}{r_1^3} + \frac{M_2}{r_2^3} = \frac{1}{(R_1 + R_2)^2} [M_1(1 + \Delta_2) + M_2(1 + \Delta_1)]$$

La quale, viene posta a sistema con la precedente equazione:

$$\begin{cases} \frac{M_1}{r_1^3} + \frac{M_2}{r_2^3} = \frac{1}{(R_1 + R_2)^2} [M_1(1 + \Delta_2) + M_2(1 + \Delta_1)] \\ \frac{1 + \Delta_1}{r_1^3} = \frac{1 + \Delta_2}{r_2^3} \end{cases}$$

Si ottengono infine:

$$\begin{cases} r_1 = (R_1 + R_2)(1 + \Delta_2)^{-\frac{1}{3}} \\ r_2 = (R_1 + R_2)(1 + \Delta_1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Ciò prova l'asserto secondo cui, se  $\Delta_1, \Delta_2 \neq 0$ , non è possibile ottenere il risultato lagrangiano.

Un esempio evidente di quest'effetto sono gli asteroidi troiani nei punti di librazione lagrangiana in corrispondenza dell'orbita di Giove, dove posto posti  $\Delta_1 \ll \Delta_2 \ll 1$ :

$$\begin{cases} r_1 \cong (R_1 + R_2) \\ r_2 \cong (R_1 + R_2) \left(1 - \frac{1}{3}\Delta_1\right) \end{cases}$$

Supponendo di porre un satellite artificiale in corrispondenza degli asteroidi troiani, sono riportati esempi di valori sperimentali per studiare l'ordine di grandezza possibile delle misure, in particolare verrà posta attenzione sul ritardo di segnale:

$$|\Delta_1| \cong 10^{-6}$$

$$R_1 + R_2 \cong 750 \times 10^6 \text{ km}$$

$$|\delta r_2| \cong 250 \text{ km}$$

$$dt = \frac{|\delta r_2|}{c} \cong 10^{-3} \text{ sec}$$

$$|\delta \vartheta| = \frac{|\delta r_2|}{(R_1 + R_2)} \cong 0,1''$$

La necessità dei test del Principio di Equivalenza nasce dal fatto che non è stata ancora trovata una "vera" teoria della gravità, poiché la Relatività Generale funziona molto bene in campi gravitazionali deboli, ma non in campi gravitazionali forti, in quantistica e cosmologia. Per questo motivo devono essere studiate teoria alternative della gravità fuori dal sistema solare.

### 1.3 Il ritardo dell'eco radar

Per poter verificare la Relatività Generale in ambito planetario, verrà fatto riferimento ad altre verifiche, tra cui il ritardo dell'eco radar, che consiste nello studio del viaggio di andata e ritorno di un segnale luminoso in presenza di un campo gravitazionale.

Si osserva che il tempo necessario, affinché il segnale compia l'intero viaggio, è di durata maggiore in presenza di un campo gravitazionale [1]. Ciò è dovuto alla deflessione della luce, per cui il cammino non sarà rettilineo. Facendo una schematizzazione al primo ordine, si considera ad esempio il test fatto tra Mercurio e Terra:

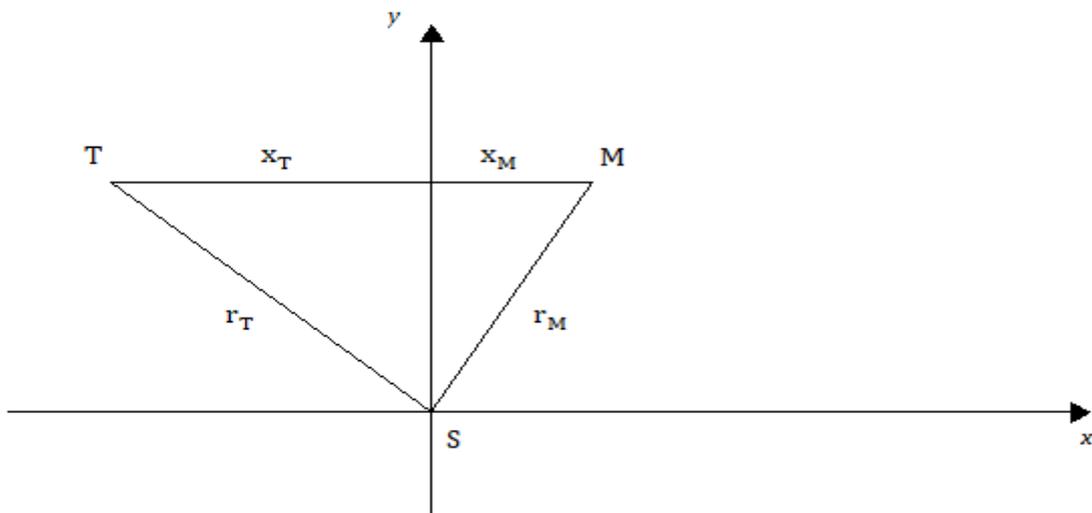


Figura 3: Schematizzazione al primo ordine nel piano  $(x, y)$  in cui giacciono Sole, Terra e Mercurio.

con  $r_T$  ed  $r_M$  rispettivamente la distanza Terra-Sole e Mercurio-Sole, mentre  $x_T + x_M$  il cammino del raggio luminoso.

Immaginando per semplicità che Terra e Mercurio siano fissi, si considera il piano individuato da Mercurio, Terra e Sole  $(x, y)$  (Fig.3), ovvero con  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Per studiare il seguente sistema al primo ordine è necessario utilizzare una metrica isotropa parametrizzata, poiché attraverso l'analisi dei parametri è possibile fare delle valutazioni sperimentali più accurate.

Le coordinate isotrope trasformano la metrica di Schwarzschild:

$$d^2s = \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2G_N M}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

nella seguente forma:

$$ds^2 = A(\rho)c^2 dt^2 - B(\rho)\rho$$

Ed effettuando la parametrizzazione con l'utilizzo dei parametri liberi  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , si ottiene:

$$ds^2 = \left(1 - \alpha \frac{R_S}{\rho} + \beta \frac{R_S}{2\rho^2} + \dots\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\gamma R_S}{\rho} + \dots\right) (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$$

Nel piano  $(x, y)$  in cui è schematizzato il sistema, il segnale è posto parallelo all'asse  $x$  per semplicità di calcoli, allora è possibile studiare la variazione di tempo del segnale in termini della metrica isotropa parametrizzata, in cui  $dy = dz = 0$  e  $ds^2 = 0$ :

$$dt = \pm \frac{dx}{c} \left[ 1 + \frac{(\gamma + 1)R_S}{2r} \right]$$

Integrando da  $x_T$  ad  $x_M$  e poi di nuovo a  $x_T$  si ottiene:

$$\Delta t = 2 \frac{x_M + |x_T|}{c} + \frac{1}{2} (\gamma + 1) \frac{2R_S}{c} \ln \frac{r_M + x_M}{r_T - |x_T|}$$

dove il secondo addendo è il ritardo del segnale.

Per ottenere misure più accurate, conviene che sia  $r_T - x_T \cong 0$ , ovvero quando Mercurio è in congiunzione superiore (Fig.4).

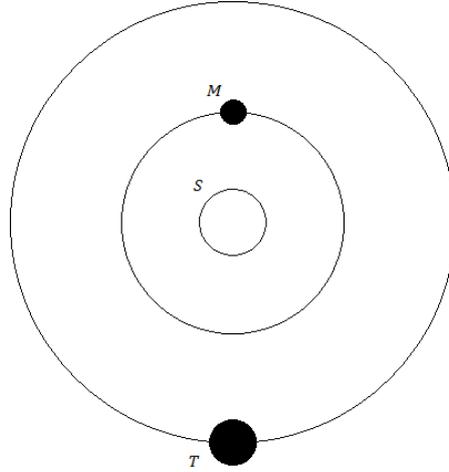


Figura 4: Mercurio in congiunzione superiore rispetto alla Terra.

Per il teorema di Pitagora:

$$x_T^2 + R_{\odot}^2 = r_T^2$$

sviluppando in serie di Taylor, si ricava la posizione:

$$r_T \cong |x_T| + \frac{1}{2} \frac{R_{\odot}^2}{r_T}$$

Sostituendo  $r_T$ , si ottiene una misura migliore del ritardo, osservando Mercurio in congiunzione superiore:

$$\Delta T = \frac{2R_S}{c} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \ln \frac{4r_T r_M}{R_\odot^2}$$

Le misure tendono a confermare  $\gamma = 1$  come previsto dalla teoria, con un ritardo dell'ordine di  $200 \mu\text{sec}$ , osserviamo essere di un ordine di grandezza inferiore rispetto al valore previsto dall'effetto Nordtvedt.

#### 1.4 Il red-shift gravitazionale

Un altro effetto su un segnale immerso in un campo gravitazionale, è il red-shift gravitazionale, ovvero l'arrossamento delle righe spettrali (o blu-shift in caso inverso), che sarà utilizzato nel parametro di Nordtvedt, per verificare la validità del principio di equivalenza nell'esperimento LLR. Da ciò si evince come il campo gravitazionale possa essere visto come un mezzo ottico [1].

Si considerano due osservatori sincronizzati ( $g_{0k} = 0$ ) A e B, dove A è immerso in un campo gravitazionale ed invia un segnale di frequenza  $\nu_A$  verso B. Al tempo  $x_A^0$  l'osservatore A invia il primo impulso, questo arriverà in B al tempo  $x_B^0 = x_A^0 + \frac{1}{c} L_{AB}$  (dove  $L_{AB}$  è la lunghezza propria del fascio), con un numero di picchi:

$$n = \nu_A \Delta \tau_A = \nu_A \sqrt{g_{00}(A)} \frac{\Delta x_A^0}{c}$$

Mentre l'ultima cresta partirà da A al tempo  $x_B^0 + \Delta x_B^0 = x_A^0 + \Delta x_A^0 + \frac{1}{2} L_{AB}$ , allora  $\Delta x_B^0 = \Delta x_A^0$ .

Ponendo la conservazione delle creste  $n_A = n_B$ :

$$n_A = \nu_A \sqrt{g_{00}(A)} \frac{\Delta x_A^0}{c} = \nu_B \sqrt{g_{00}(B)} \frac{\Delta x_B^0}{c} = n_B$$

Si ricava il rapporto tra le frequenze:

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{\sqrt{g_{00}(B)}}{\sqrt{g_{00}(A)}}$$

Da ciò è chiaro che la frequenza misurata in diversi punti dello spazio-tempo, in cui cambia il campo gravitazionale, cambia anch'essa.

Nell'ipotesi di campo gravitazionale debole ( $v \ll c$ ), si ottiene la dipendenza della variazione della frequenza dal potenziale del campo gravitazionale ( $U_A$  e  $U_B$ ):

$$\nu_A = \nu_B \left( 1 - \frac{U_A}{c^2} + \frac{U_B}{c^2} \right) = \nu_B \left[ 1 - r_S \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \right]$$

In particolare, per le considerazioni che verranno fatte in seguito, sarà conveniente formulare il rapporto in termini delle variazioni delle frequenze e dei potenziali:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2}$$

## Capitolo 2 Il Lunar Laser Ranging

---

### 2.1 Il set di dati

L'insieme di dati raccolti nell'esperimento LLR, consiste in misure d'intervalli di tempo, effettuate sul viaggio di andata e ritorno di  $\sim 10^{18}$  fotoni, di cui solo  $\sim 100$  vengono rilevati a Terra. Per poter studiare statisticamente i fotoni che tornano, questi vengono distribuiti in 8427 *normal points*.

Il laser inviato, dagli osservatori verso i retroriflettori lunari, ha una frequenza di 10 Hz e un impulso di ampiezza 200 psec.

L'acquisizione dati, da marzo del 1970 all'anno 1984, è stata eseguita dall'osservatorio McDonald, mentre successivamente sono stati stanziati altri due siti di osservazione, sul Monte Haleakala sulle isole di Maui e l'altro sulla stazione CERGA in Francia.

Per stimare l'accuratezza dei dati, si considera  $\Delta t$  come il tempo trascorso in un viaggio di andata e ritorno di un fotone, allora viene presa come unità di lunghezza di riferimento  $\frac{c\Delta t}{2}$ , osservando che a 1 nsec corrispondono 15 cm.

È interessante notare come da una precisione di 25 cm, risalente al 1970, si è arrivati oggi a 2-3 cm, portando così le misure di distanza lunare dall'errore di 1 km a pochi decimetri in sei anni. Questo miglioramento ha avuto un grande riscontro nella previsione delle efemeridi lunari.

### 2.2 Il modello matematico

È necessario costruire un modello per descrivere al meglio l'intervallo di tempo del viaggio di andata e ritorno del fotone, dall'osservatore al retroflettore, tenendo conto dell'orbita geocentrica, dell'orientazione del sistema Terra-Luna, di eventuali spostamenti delle maree nei siti di osservazione o riflessione e variazioni atmosferiche.

Da queste informazioni, nel Jet Propulsion Laboratory (JPL) sono stati elaborati programmi in grado di presentare una stima dei parametri relativistici, dallo studio delle efemeridi.

Per fare ciò, vengono utilizzate un insieme di coordinate stabilite dall'uso del baricentro del sistema solare nell'integrazione numerica simultanea della Luna e dei pianeti, mentre le coordinate geocentriche degli osservatori e selenocentriche dei retroriflettori, sono modificati attraverso una trasformazione di Lorentz.

Attraverso la metrica in coordinate isotrope, parametrizzata rispetto ai PPN, si calcola il ritardo del segnale e si costruisce un modello ad  $n$ -corpi [2] per descrivere la forza gravitazionale sui nove pianeti, Sole e Luna [3].

Quindi considerando l' $i$ -esimo punto di massa (ovvero l' $i$ -esimo pianeta), la sua accelerazione è data in termini dei PPN:

$$\ddot{r}_{i_{\text{punto di massa}}} = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c}\right)^2 + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c}\right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{r}_i \cdot \dot{r}_j - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(r_i - r_j) \cdot \dot{r}_j}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \cdot \ddot{r}_j \right\} + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \times \{ [r_i - r_j] \cdot [(2 + 2\gamma)\dot{r}_i - (1 + 2\gamma)\dot{r}_j] \} (\dot{r}_i - \dot{r}_j) + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{r}_j}{r_{ij}}$$

in cui  $r_i$ ,  $\dot{r}_i$  ed  $\ddot{r}_i$  sono rispettivamente posizione, velocità e accelerazione dell' $i$ -esimo punto di massa rispetto al baricentro del sistema solare, mentre  $\mu_j = Gm_j$  e  $r_{ij} = |r_j - r_i|$ .

In questa equazione del moto relativistica è già contenuta la precessione geodetica, l'influenza delle maree e delle armoniche gravitazionali di Terra, Luna e asteroidi più grandi.

La prima espressione relativistica completa della variazione di tempo del segnale fu elaborata da Shapiro [4] nel 1964, e indipendentemente da questa, anche da Holdridge nel 1967. Fu infine Moyer a darne la formulazione nella forma estesa del baricentro del sistema solare nel 1977 (di seguito riportata).

Lo studio dell'intervallo di tempo è di fondamentale importanza, poiché da questo si evincono in modo chiaro gli effetti gravitazionali sulla luce, infatti nell'espressione (oltre alla componente geometrica) compare il contributo del ritardo di segnale per la curvatura causata dal Sole e dalla Terra in termini del parametro  $\gamma$ :

$$t_i - t_j = \frac{r_{ij}^B}{c} + \frac{(1 + \gamma)\mu_S}{c^3} \ln \left( \frac{r_i^S + r_j^S + r_{ij}^S + \frac{(1 + \gamma)\mu_S}{c^2}}{r_i^S + r_j^S - r_{ij}^S + \frac{(1 + \gamma)\mu_S}{c^2}} \right) + \frac{(1 + \gamma)\mu_E}{c^3} \ln \left( \frac{r_i^T + r_j^T + r_{ij}^T}{r_i^T + r_j^T - r_{ij}^T} \right)$$

B indica il baricentro del sistema solare, S il Sole e T la Terra, in questo caso  $i$  e  $j$  rappresentano due eventi di fotoni ( $i, j = 1, 2, 3$ ), di cui si indicherà con 1 il fotone trasmesso, 2 il riflesso e 3 il recepito. È ovvio che se si considera  $i$  come il primo evento di fotone e  $j$  il successivo, sarà sempre vero che  $j = i + 1$ , quindi  $r_{ij}^S = |r_j^S - r_i^S|$  e  $r_{ij}^T = |r_j^T - r_i^T|$  rappresentano l'intensità del vettore differenza tra due eventi di fotoni ai tempi  $t_i$  e  $t_j$ , rispettivamente del Sole e della Terra. Mentre, nelle espressioni di  $\mu_S = GM_{Sole}$  e  $\mu_T = GM_{Terra}$  compare il contributo delle masse. Inoltre, sono state indicate le intensità del generico vettore  $\mathbf{r}$  con la seguente notazione  $r = |\mathbf{r}|$ .

Si osserva che in termini di conversione tempo-distanza, il ritardo del segnale dovuto al Sole è di 7,6m, della Terra è 4cm, mentre della Luna è solo 0,6 – 0,7mm.

## 2.3 L'analisi degli errori

Nelle quattro applicazioni dell'LLR, che vengono analizzati in questa tesi, ci sono delle procedure di analisi dei dati in comune. Nel processo di risoluzione compaiono oltre 140 parametri al di fuori di quelli associati alla relatività, che tengono conto dell'orbita lunare, della rotazione, delle coordinate del riflettore, della deformazione elastica, della dissipazione rotazionale, dei momenti d'inerzia, della massa del sistema Terra-Luna, dell'orbita eliocentrica del sistema Terra-Luna, delle posizioni delle stazioni terrestri, della precessione e della nutazione dell'equatore, della rotazione terrestre e delle maree. Molti dati possono fornire una buona stima di questi parametri, ma non direttamente.

Inoltre, si stimano le efemeridi di tutti i pianeti, le distanze in unità astronomica, il rapporto della massa terrestre e lunare e masse di diversi asteroidi selezionati [5], tutto ciò attraverso 64000 osservazioni planetarie.

Sorge il problema riguardo le piccole incertezze su di essi, a causa della grande mole di dati, che favorisce il contributo di errori sistematici. Per ovviare al problema, l'errore viene costruito moltiplicando l'errore standard della procedura dei minimi quadrati, per una costante e tutti i contributi aggiuntivi sommati e posti sotto radice quadrata.

Compaiono diversi contributi di cui tenere conto nell'analisi dell'errore standard con il metodo dei minimi quadrati, come la rotazione terrestre e i parametri planetari ottenuti attraverso lo studio dell'orbita lunare. Inoltre, in esso è presente il peso dei singoli dati e la correlazione tra i parametri.

La costante moltiplicativa dipende dalle misure ed è diversa se i parametri cambiano al variare degli intervalli dei dati, oppure se i valori dei parametri sono noti indipendentemente.

## Capitolo 3 Le applicazioni LLR

---

### 3.1 Il Principio di Equivalenza

Come già trattato, l'effetto Nordtvedt studia una possibile violazione del Principio di Equivalenza che porterebbe ad una diversa accelerazione verso il Sole della Terra e della Luna, per cui compare un termine di dipolo nel campo gravitazionale del Sole sulla Terra.

In conseguenza di ciò si ha una perturbazione radiale anomala con un periodo sinodico Luna-Sole di 29,53 giorni, questa sarà sempre proporzionale al  $\cos D$ , dove  $D = L - L'$ , detta *elongazione media della Luna*, la quale è l'angolo sotto cui è possibile vedere la Luna rispetto alla direzione del Sole sull'eclittica. È stato indicato con  $L$  la *mean longitude* della Luna ed  $L'$  del Sole, quest'ultima è la longitudine eclittica in cui il corpo sarebbe osservato, se avesse l'orbita circolare.

Per comprendere l'associazione fatta tra violazione del Principio di Equivalenza e diversa accelerazione della Luna e della Terra definiamo:

$$E = \left(\frac{M_G}{M_I}\right)_{Terra} - \left(\frac{M_G}{M_I}\right)_{Luna}$$

dove  $E = 0$  se è valido il Principio di Equivalenza.

Questa comparirà nell'espressione dell'accelerazione  $\frac{GM'Er'}{r'^3}$ , dove abbiamo indicato con  $M_G$  la massa gravitazionale,  $M_I$  la massa inerziale,  $M'$  è la massa del Sole,  $\mathbf{r}'$  il raggio vettore che va dal Sole al centro di massa del sistema Terra-Luna ( $r'$  il suo modulo) e  $G$  la costante gravitazionale.

Quindi si definisce *anomalia media lunare*  $l$  l'angolo rispetto al perigeo sull'orbita lunare ed  $a'$  il semiasse maggiore dell'orbita del baricentro Terra-Luna intorno al Sole, con lo scopo di formulare la perturbazione radiale di Nordtvedt al primo ordine per un'orbita quasi circolare:

$$\Delta r = -a'E \frac{\dot{L}'^2(2\dot{L} + \dot{D})}{\dot{D}(\dot{l}^2 - \dot{D}^2)} \cos D.$$

È possibile costruire un'ulteriore perturbazione radiale, che tiene conto di altri elementi in orbita, confrontando così questo valore con quello originale di Nordtvedt.

La scomposizione del Principio di Equivalenza darebbe luogo ad una perturbazione proporzionale al  $\sin D$ , come si evince dalle equazioni di equilibrio del corpo di massa generica  $m$ , nello studio precedentemente fatto dell'effetto Nordtvedt.

A causa della forte influenza solare sull'orbita lunare i coefficienti nella perturbazione radiale, davanti al coseno, per la prima componente, e al seno, per la seconda, aumentano del 40% [6]. Allora compare una correzione nell'espansione del campo solare sulla Terra.

È possibile avere una stima in metri della perturbazione radiale con queste correzioni:

$$\Delta r = -2,87 \times 10^{10} E \cos D$$

I corpi delle dimensioni di Terra e Luna sono influenzati dall'energia gravitazionale  $U_G$ , ricordando l'equazione ottenuta dall'effetto Nordtvedt ( $mg = mi(1 + \Delta)$ ) e dal red-shift gravitazionale ( $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta U}{c^2}$ ):

$$\frac{M_G}{M_I} - 1 = \eta \frac{U_G}{Mc^2}$$

dove  $\eta$  è la costante di Nordtvedt, la cui espressione dipende dai PPN, qui di seguito riportata solo in funzione di  $\beta$  e  $\gamma$ :

$$\eta = 4\beta - \gamma - 3$$

di cui in Relatività Generale i valori attesi sono  $\eta = 0$ ,  $\gamma = 1$  e  $\beta = 1$ .

È possibile esprimere la differenza  $E$  in termini di  $\eta$  ed avere una stima numerica di questa:

$$E = \eta \left( \frac{U_{GT}}{M_T c^2} - \frac{U_{GL}}{M_L c^2} \right) = (-4,64 \times 10^{-10} + 0,19 \times 10^{-10})\eta = -4,45 \times 10^{-10}\eta$$

di conseguenza anche la perturbazione radiale dipenderà da  $\eta$ :

$$\Delta r = 12,8 \eta \cos D$$

Al valore del  $\cos D$  contribuisce anche la distanza lunare oltre all'effetto Nordtvedt, infatti dall'espansione classica dell'orbita lunare [7] si ha un contributo di  $109km \times \cos D$  in termini delle coordinate radiali, questo valore dipende dai rapporti delle masse, dalla distanza media e dal moto lunare con un errore di  $2 mm$ , già compresi nell'analisi degli errori con il metodo dei minimi quadrati.

Mentre compare un contributo relativistico del tipo  $-(6cm) \times \cos D$  [8], un altro per la seconda armonica gravitazionale della Terra sul Sole di  $-(5cm) \times \cos D$  [9] e infine con la pressione di radiazione solare  $-(0,35cm) \times \cos D$  [6], la quale però non è elaborata dal software d'integrazione numerica.

La variazione temporale del segnale trasmesso, riflesso e recepito, nella sua elaborazione, dipende solo dall'interazione e non dalla pressione di radiazione, per questo non sarà soggetto ad anomalie [10].

Dall'integrazione numerica si ottiene come valore  $E = (4,3 \pm 4,6) \times 10^{-13}$  ciò può essere interpretato come un coefficiente del  $\sim -1,2 \pm 1,3 cm$  oppure  $\eta = -0,0010 \pm 0,0010$ , per la violazione del Principio di Equivalenza forte.

È necessario tener conto che il campionamento dell'argomento del  $\cos D$  non sia uniforme, a causa della posizione di Luna piena in cui non è possibile avere delle misure accurate per la forte luminosità del Sole, aumentando così il contributo della pressione di radiazione. Le uniche misure fatte in prossimità della Luna piena sono dell'osservatorio McDonald, ma il metodo più nuovo di misurazione è in eclissi.

Allora, in caso di Luna piena, si suppone di partire da un'incertezza di  $1 cm$  per il coefficiente del  $\cos D$  e quindi ottenere i valori di  $E = 3,5 \times 10^{-13}$  ed  $\eta = 0,0008$ . Se applicassimo a questi la correzione dovuta alla pressione di radiazione, si otterrebbe l'errore sul coefficiente del  $\cos D$  pari a  $-0,9 \pm 1,3 cm$  e i valori di  $E = (3,2 \pm 4,6) \times 10^{-13}$  ed  $\eta = -0,0007 \pm 0,0010$ .

Questi risultati di  $E$  e del coefficiente del  $\cos D$ , sono utilizzati per la verifica del Principio di Equivalenza forte e debole, in particolare, il primo con l'effetto Nordtvedt e in secondo nei risultati di laboratorio, in cui si è in grado di escludere la composizione dei corpi studiati, partendo dall'esperimento di Eötvös [11] [12] [13] [14].

Quindi i risultati dell'esperimento LLR portano a valori di  $E_{LLR}$ , composto da un contributo dovuto al Principio di Equivalenza Debole e un altro al Principio di Equivalenza Forte:

$$E_{LLR} = E_{PEF} + E_{PED}$$

In laboratorio vengono fatte simulazioni con corpi di composizione simile alla Terra e alla Luna [15], misurando il valore di  $E_{PED} = (-1,6 \pm 2,2) \times 10^{-12}$  (dove  $PED$  sta per Principio di Equivalenza

Debole), ed è quindi possibile ricondursi al valore di  $E_{PEF} = (1,9 \pm 2,3) \times 10^{-12}$  (dove  $PEF$  sta per Principio di Equivalenza Forte) dai valori calcolati nell'esperimento  $E_{LLR}$ . È necessario considerare che dal test di Nordtvedt si hanno errori molto piccoli per la validità del Principio di Equivalenza Forte, mentre per quello debole ho degli errori consistenti.

Calcolando  $\gamma$  dalle misure di variazione temporale con un'incertezza di 0,002 dal ritardo di segnale interplanetario [16], e  $\eta$  da quelle di perturbazione radiale (utilizzando  $E_{PED}$  ed  $E_{PEF}$ ), è possibile ottenere una stima di  $\beta = \frac{(\eta+\gamma+3)}{4}$  dal contributo debole e forte:

$$\beta = 0,9989 \pm 0,0014.$$

Allora, confrontando quest'ultimo valore di  $\beta$  con quello che si avrebbe se si trascurasse l'errore dovuto alla validità del Principio di Equivalenza:

$$\beta = 0,9998 \pm 0,0006$$

si nota il piccolo valore dal contributo dell'equivalenza forte.

La necessità di combinare nello studio dell'analisi degli errori il principio di equivalenza forte e debole, è dovuto alle piccole incertezze.

Si osservi infatti, che l'incertezza sull'effetto Nordtvedt è ulteriormente diminuita di 30 volte negli'ultimi 18 anni.

### 3.2 La precessione geodetica

I dati dell'LLR vengono utilizzati per studiare la precessione geodetica, in particolare la velocità di precessione [17] [18] [19] è esprimibile attraverso il PPN  $\gamma$ , dallo studio della metrica al primo ordine di Schwarzschild parametrizzata:

$$P_g = \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \frac{\left(\frac{n'a'}{c}\right)^2 n'}{1 - e'^2}$$

dove è stato indicato con  $c$  la velocità della luce, considerando l'orbita del sistema Terra-Luna intorno al Sole,  $a'$  è il semiasse maggiore,  $e'$  l'eccentricità dell'orbita ed  $n'$  la *mean motion*.

È possibile esprimere con buona approssimazione la distanza dal centro della Terra al centro della Luna, con un'espansione in serie [7] all'ordine di grandezza del kilometro:

$$r = 385001 - 20905 \cos l - 3699 \cos(2D - l) - 2956 \cos 2D + \dots$$

Al primo termine compare la distanza media, il secondo è dovuto all'eccentricità dell'orbita e il terzo e il quarto alla perturbazione solare. Inoltre,  $l$  è l'anomalia lunare con un periodo di 27,56 giorni e  $D$  l'elongazione media della Luna dal Sole di periodo 29,53 giorni.

Non è detto che tutti i parametri che compaiono nell'equazione siano tutti indipendenti, ad esempio è possibile ricavare da  $D$  la velocità di longitudine di perigeo  $\bar{\omega}$ :

$$D = L - L' = \bar{\omega} + l - L'$$

Si può immaginare, infatti come la precessione geodetica influenzi la velocità di precessione sulla longitudine lunare in perigeo. Questa subisce fortemente la perturbazione dovuta al campo gravitazionale solare, sarà quindi necessario tenerne conto nell'analisi degli errori.

Un contributo fondamentale nell'analisi degli errori è dato dai parametri dell'orbita lunare e solare, in particolare sono necessari 18,6 anni per ottenere il massimo di separazione di questi parametri, quindi considerando che l'errore sull'inclinazione dell'orbitale lunare, rispetto all'eclittica sia di 1 marc sec, questa porta ad un'incertezza nella velocità di precessione al perigeo di 0,18 marc sec/anno. Queste stime miglioreranno in futuro, poiché aumenterà l'inclinazione dell'orbita lunare rispetto all'eclittica [20] [21].

Quando la precessione geodetica è fissata ai valori della Relatività Generale, l'incertezza sull'inclinazione è di 0,5 marc sec, portando quindi l'errore sulla velocità di precessione geodetica a 0,09 marc sec/anno, mentre partendo dallo studio di quest'ultima, l'incertezza sull'inclinazione è di 0,7 marc sec, mentre per la velocità di precessione è di 0,12 marc sec/anni.

Un'altra importante fonte, per la stima dell'incertezza della velocità di precessione in perigeo, sono le armoniche sferiche di secondo grado [22], dai dati raccolti del momento angolare  $J_2$  e dalla sua incertezza [23], dà un contributo sull'errore della precessione geodetica di 0,11 marc sec/anno.

I risultati ottenuti sono dovuti alla combinazione dei dati raccolti dalla missione Clementine e Lunar Orbiter Doppler [24] [25] [26].

Sia l'errore dovuto a  $J_2$ , che all'inclinazione, sono analizzati con il metodo dei minimi quadrati.

La precessione geodetica è implicita nell'equazione del moto relativistica (del punto di massa) ed è interessante isolare il termine di precessione del nodo. Introducendo il fattore di scala  $K_{GP}$  (dove  $GP$  sta per precessione geodetica), è possibile studiare la validità della Relatività Generale ( $K_{GP} = 0$  in nella teoria). Ai fini dello studio del rapporto di Eötvös, si analizza la seguente relazione in cui compaiono  $K_{GP}$  e  $\gamma$ :

$$\ddot{r}_L - \ddot{r}_T = K_{GP} \frac{2\mu_S}{c^2 r_B^3} \{ -\gamma [\dot{r}_B \cdot (\dot{r}_L - \dot{r}_T)] r_B + (1 + \gamma) [r_B \cdot (\dot{r}_L - \dot{r}_T)] \dot{r}_B \}$$

dove sono stati indicati con  $\ddot{r}_L$ ,  $\ddot{r}_T$  ed  $\ddot{r}_B$  le accelerazioni di Luna, Terra e baricentro del sistema Terra-Luna, mentre rispettivamente  $\dot{r}_L$ ,  $\dot{r}_T$  e  $\dot{r}_B$  le loro velocità, e  $r_B$  la posizione del baricentro del sistema Terra-Luna, rispetto alle coordinate del centro di massa del sistema solare.

Secondo Nordtvedt è possibile dividere l'equazione precedente in una parte antisimmetrica e una simmetrica, per cui la prima influenza la precessione del giroscopio, mentre la seconda perturba la precessione dell'orbita lunare. Inoltre, è necessario osservare che la precessione del nodo e la precessione della longitudine lunare al perigeo non devono essere uguali e non devono dipendere da  $\gamma$ .

Dai dati dell'LLR una stima di  $K_{GP}$  è:

$$K_{GP} = -0,003 \pm 0,007$$

Dalla differenza tra le accelerazioni di Terra e Luna non si ottiene la stessa velocità di precessione dell'equazione  $P_g$ , ma la seconda si discosta del 10% dalla prima [6] [27] [28].

Si approssima  $\sigma_\gamma \approx \frac{3}{2}\sigma_{K_{GP}}$  e concludiamo che il valore riportato di  $K_{GP}$ , corrisponde all'1% di  $\gamma$ , quindi ad un errore sulla velocità di precessione geodetica di 0,13 marc sec/anno.

Confrontando i test fatti dall'esperimento LLR con ulteriori dati di altri esperimenti, tutti i risultati sono consistenti con  $\gamma = 1$ , concordante con la Relatività Generale.

### 3.3 I Parametri Post-Newtoniani

Tra i Parametri Post-Newtoniani (Tab.3), quelli di maggiore interesse sono  $\beta$  e  $\gamma$ , di cui il primo tiene conto della sovrapposizione gravitazionale, mentre il secondo della curvatura dovuta al campo gravitazionale. Per la Relatività Generale ci si aspetta che il loro valore sia pari ad 1, infatti molti dati di diversi esperimenti portano a questo valore, con un'incertezza di 0,002 su  $\gamma$  [15](Viking lander [29] [30] [31]).

Parametro PPN	Effetto	Limite	Sorgente
$\gamma - 1$	ritardo temporale deflessione della luce	$2,3(5,7) \times 10^{-5}$ $3 \times 10^{-4}$	Doppler di Cassini Interferometria
$\beta - 1$	spostamento del perielio effetto Nordtvedt	$3 \times 10^{-3}$ $5 \times 10^{-4}$	$J_2 = 10^{-3}$ LLR, $\eta = 4\beta - \gamma - 3$
$\xi$	maree terrestri	$\times 10^{-3}$	Gravimetri
$\alpha_1$	Orbitale Polarizzazione	$\times 10^{-4}$ $2 \times 10^{-4}$	LLR LLR
$\alpha_2$	precessione dello spin	$4 \times 10^{-7}$	asse del Sole
$\alpha_3$	auto-accelerazione	$2 \times 10^{-20}$	statistica $\dot{P}$
$\eta$	effetto Nordtvedt	$3 \times 10^{-4}$	LLR
$\zeta_1$	-	$2 \times 10^{-2}$	combinato con i limiti PPN
$\zeta_2$	accelerazione binaria	$4 \times 10^{-5}$	$\ddot{P}$ per PSR 1913+16
$\zeta_3$	terza legge di Newton	$10^{-8}$	accelerazione lunare
$\zeta_4$	-	-	non indipendente

Tabella 3: I limiti attuali dei PPN.

Mentre dal test della precessione geodetica si ha un valore di  $\gamma$  con un'incertezza dell'1%, ma queste stime non tengono conto dell'ulteriore sensibilità dovuta al parametro di Nordtvedt, il quale porta a valori troppo piccoli dell'incertezza di  $\beta$  pari a 0,0014, mentre per test planetari è 0,003.

Dall'equazione del moto relativistica, in cui è compresa la precessione geodetica, è possibile ricavare le stime di  $\beta$  e  $\gamma$  con la stessa accuratezza, senza tener conto del termine di Nordtvedt, ma con un'incertezza più piccola di quella derivata dalla sola precessione geodetica. Non è ancora stata compresa l'origine di tale sensibilità, probabilmente dovuta alla perturbazione solare con le variazioni ellittiche radiali.

Per le piccole incertezze su  $\beta$  e  $\gamma$ , è meglio determinata la loro combinazione lineare  $\beta + \gamma$  con un errore di 0,003, allora si ottiene una buona stima anche del valore dell'anomalia media della Luna  $l$  dai dati dell'LLR, mentre per quelli di portata planetaria migliora l'accuratezza della distanza Sole-Terra.

È necessario separare la sensibilità relativistica dei dati dell'LLR da quelli planetari, poiché nelle soluzioni i parametri compaiono solo per i dati LLR.

Non è possibile ricercare tutta la sensibilità solo nell'angolo  $D$ , altrimenti i due parametri non sarebbero separati ( $\beta$  e  $\gamma$ ), ma ci sono altri termini che danno un piccolo contributo, come quelli di Brumberg ed Ivanova [27] [32], dove quello del  $\cos l'$  dà un contributo relativistico di  $(-16 + 26\beta - 6\gamma)$  cm ed il termine  $\cos D$  il contributo relativistico  $(33 - 48\beta + 10\gamma)$  cm.

Si determinano le incertezze di  $\beta$  e  $\gamma$  con il metodo dei minimi quadrati, arrivando a tre conclusioni, la prima è che se in una soluzione è presente solo il parametro  $\gamma$ , questo sarà affetto da un'incertezza del 25 % rispetto a quella prevista dal  $K_{GP}$ , la seconda è che se  $K_{GP}$  e  $\gamma$  compaiono contemporaneamente nella soluzione, le incertezze sono solo 1,06 volte più grandi di quelle se fossero sole, infine la terza è che l'influenza di  $L'$  su  $D$  è diminuita, evidenziando il contributo planetario.

Soluzioni con dati LLR fornisco un'incertezza di 0,5% meglio del supporto teorico, è quindi più proficuo combinare i dati LLR e planetari.

Questi sono sensibili all'orbita lunare e solare, mentre i planetari presentano una forte sensibilità di  $\gamma$  per il campo gravitazionale solare e  $\beta$  nella precessione del perielio di Mercurio. Combinando le soluzioni si migliorerebbe la separazione dei parametri  $\beta$  e  $J_2$  in campo planetario.

### 3.4 La variazione della costante di gravitazione $G$

L'esperimento LLR potrebbe essere in grado di rilevare una variazione della costante di gravitazione  $G$ , dall'analisi dei parametri di *mean motion*  $n$  e semiasse maggiore  $a$ , utilizzando la terza legge di Keplero è possibile studiare i rapporti delle variazioni di queste grandezze con loro stesse:

$$2 \frac{\dot{n}}{n} + 3 \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{G}}{G}$$

Quindi la diminuzione di  $G$  porta ad un aumento della distanza e del periodo medio.

Applicando lo stesso tipo di analisi alle maree, la relazione utilizzata diventa:

$$2 \frac{\dot{n}}{n} + 3 \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

Dalla quale si evince che una dissipazione delle maree porta ad una maggiore variazione di  $n$  ed  $a$ , più significativo di quello ottenuto dalla variazione di  $G$ :

$$\begin{cases} \frac{\dot{n}}{n} = -1,5 \times 10^{-10} / yr \\ \frac{\dot{a}}{a} = 1,0 \times 10^{-10} / yr \end{cases}$$

È quindi necessario cercare un modello matematico che descriva il fenomeno delle maree in modo più accurato.

Le maree sulla Terra portano ad una dissipazione dell'energia e influenzano il momento angolare dell'orbita lunare, rispetto alla rotazione terrestre.

L'attuale modello per lo studio delle maree, senza il contributo di  $\dot{G}$ , ha un'incertezza del 2% e l'analisi è divisa tra maree diurne e semidiurne sulla Terra, che sono separabili dal termine di anomalia lunare piccolo di 18,6 anni [33].

La dissipazione di energia della Luna è osservata dalla rotazione lunare e non dall'orbita, la quale può avere due sorgenti che influenzano il modello, ovvero la dissipazione di maree di corpi solidi oppure una turbolenza dovuta al nucleo liquido-mantello solido [34]. Nel software del modello di dissipazione delle maree si tiene conto della prima sorgente, ma non della seconda.

Da queste due sorgenti non si ottiene lo stesso effetto orbitalico, mentre il contributo della Luna può dare un errore dell'1,5%, che corrisponde a  $1 \times 10^{-12} / yr$  su  $\frac{\dot{G}}{G}$ .

La variazione di  $G$  porta anche ad accelerazioni nel momento angolare dovute al Sole e contribuiscono nei termini di perturbazioni solari nell'equazione della distanza Terra-Luna, questi danno l'orbita eliocentrica con dei termini quadratici nel tempo.

Dal termine di perturbazione solare, il contributo di  $\dot{G}$  alla distanza radiale, distinto dall'accelerazione delle maree, è:

$$\frac{1}{3} r \frac{\dot{G}}{G} t - 2n' \frac{\dot{G}}{G} [3699 \sin 2D + 2956 \sin(2D - l) + \dots] t^2 \text{ km}$$

Per  $\frac{\dot{G}}{G}$  dell'ordine di  $10^{-11} / yr$  i termini principali nella distanza radiale sono:

$$-1,28t + [0,46 \sin(2D - l) + 0,37 \sin 2D] t^2 \text{ mm}$$

Le variazioni sulle coordinate radiali della Luna, dovute al rapporto  $\frac{\dot{G}}{G} = -1 \times 10^{-11} / yr$  sono confrontabili nel grafico in Fig.4.

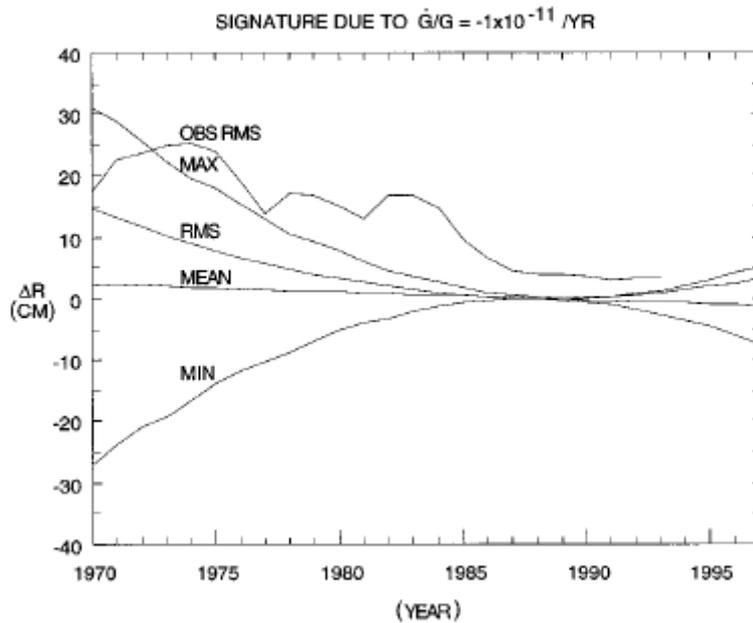


Figura 4: Contributo del rapporto  $\frac{\dot{G}}{G}$  sulla distanza radiale al variare del tempo.

Si notano infatti le curve dovute alle perturbazioni solari che diminuiscono andando avanti nel tempo, questo ha portato e porterà ad una determinazione più accurata del rapporto  $\frac{\dot{G}}{G}$ , in particolare attraverso i dati LLR, oggi si è arrivati alla seguente stima dell'errore,  $\frac{\dot{G}}{G} = (1 \pm 3) \times 10^{-12} / yr$ , ottenuta includendo parametri newtoniani standard e di marea.

Utilizzando un'incertezza nello studio del grafico di 0,7 cm rms, si ottiene un errore del rapporto di  $7 \times 10^{-12} / yr$ , mentre combinandolo con il risultato dei minimi quadrati dai dati LLR diventa  $(1 \pm 8) \times 10^{-12} / yr$ , che aggiunge un'incertezza sulle maree.

Come controllo dell'effetto lineare dell'equazione precedentemente vista, si ricava una soluzione che tenga conto delle maree e di altri parametri, ma non di  $G$ . L'incertezza sulla distanza media è di  $3,5 \text{ mm}/yr$ , quindi quella corrispondente al rapporto  $\frac{\dot{G}}{G}$  è di  $2,7 \times 10^{-11} / yr$ , in cui c'è il contributo della perturbazione solare non lineare.

I risultati LLR [35] su scala planetaria non migliorano significativamente da soli, ma combinandoli con dati rilevati su binarie pulsar [36] [37].

## Conclusioni

Soluzione	Parametro	Valore
Principio di Equivalenza	$E$	$(3,2 \pm 4,6) \times 10^{-13}$
Precessione geodetica	$K_{GP}$	$-0,003 \pm 0,007$
PPN di sovrapposizione e curvatura	$\beta$	$1,003 \pm 0,005$
	$\gamma$	$1,000 \pm 0,005$
Variazione di $G$	$\frac{\dot{G}}{G}$	$(1 \pm 8) \times 10^{-12}/yr$

Tabella 4: Quattro soluzioni dei i parametri relativistici.

I dati LLR sono migliorati nel tempo (Tab.4), e l'effetto Nordtvedt dà una forte sensibilità a qualsiasi violazione del Principio di Equivalenza, notiamo infatti che dalla derivazione parziale numerica del rapporto delle masse si ottiene:

$$\left| \left( \frac{M_G}{M_I} \right)_{Terra} - \left( \frac{M_G}{M_I} \right)_{Luna} \right| \leq 5 \times 10^{-13} .$$

Dalla violazione del Principio di Equivalenza si determinano  $\beta$  e  $\gamma$ , in particolare si ottengono buone stime di  $\gamma$  dalle misure di variazione di tempo del viaggio fotonico, arrivando ad un'incertezza dovuta alla diversa composizione di Terra e Luna pari a  $|\beta - 1| \leq 0,0014$ , mentre assumendo che sia valido il Principio di Equivalenza debole  $|\beta - 1| \leq 0,0006$ .

La precessione geodetica si distacca del 0,7% dal valore ideale di  $19,2 \text{ marc sec/yr}$ . L'incertezza è data anche da altri effetti relativistici ovvero  $J_2$  e l'inclinazione dell'orbita, dipendente dai valori di  $\beta$  e  $\gamma$ . È certo che la combinazione lineare  $0,8\beta + 1,4\gamma$  è testata al livello dell'1%, poiché proviene dagli stessi termini di perturbazione solare del test di precessione geodetica.

Il lavoro di Brumberg ed Ivanova dà un'ulteriore sensibilità a  $\beta$  e  $\gamma$ , infatti dalle soluzioni dell'LLR questi rientrano nei valori previsti dalla Relatività Generale entro l'incertezza di 0,005 e la combinazione lineare  $\beta + \gamma$  entro 0,003. Viene inoltre fatto uso dei dati di portata planetaria per determinare la distanza del sistema Terra-Luna dal Sole, senza contribuire direttamente alla determinazione dei parametri PPN.

Dalla sensibilità ottenuta nell'effetto Nordtvedt si studia la sensibilità di  $4\beta - \gamma$  in combinazione con quella ottenuta da  $\beta + \gamma$ , arrivando ad un'incertezza sul test di  $\gamma$  di 0,003, la quale dovrebbe migliorare in futuro.

Nella variazione di  $G$  non ci sono cambiamenti significativi  $\left| \frac{\dot{G}}{G} \right| \leq 8 \times 10^{-12}/yr$ , ed era previsto, poiché  $\dot{G}$  e l'accelerazione delle maree influenzano sia il periodo dell'orbita lunare, sia la distanza media.  $G$  influenza anche la parte non lineare nel tempo, attraverso le perturbazioni solari che sono già dominanti nell'attuale insieme di dati.

Poiché l'orbita lunare è fortemente influenzata dalla perturbazione solare, il ragionamento della teoria con due soli corpi non è sufficiente.

Ad esempio, il test sulla precessione geodetica trarrà beneficio dall'aumento dei dati, quindi su effetto secolare.

I test su  $\beta$  e  $\gamma$  sono quelli meno compresi, ma con buone aspettative, poiché mettendo in combinazione i dati a portata lunare e planetaria, si dovrebbe essere in grado di migliorare la determinazione della dinamica solare con  $J_2$ .

Infine, ci sono termini di  $\dot{G}$  lunari, non lineari nel tempo, che permetteranno uno sviluppo futuro sui test d'invarianza di  $G$ .

#### 4.1 STE-QUEST e SaAGE

Esistono test del Principio di Equivalenza in ambito quantistico, i quali risultati vengono confrontati con i corrispettivi dell'LLR in ambito planetario.

Dalla Teoria Quantistica dei Campi in congiunzione con la Teoria della Relatività Generale si è stati in grado di descrivere l'unificazione di tre forze fondamentali su quattro: elettromagnetismo, interazione debole e forte, mentre la quarta è la gravitazione.

Il Modello Standard descrive in modo efficiente le particelle osservate, mentre la Relatività Generale l'universo in scala macroscopica, il problema è che sono da considerarsi incomplete, poiché non tengono conto degli effetti quantici.

Una parte dell'attuale comunità scientifica pensa che ciò sia dovuto al fatto che le due teorie descrivano l'universo delle basse energie, mentre è ancora da scoprire quello ad alte energie, da ciò nascono le teorie alternative della gravitazione, che dovranno comprendere l'ambito quantistico e cosmologico.

Per ricercare queste teorie si parte da una minima violazione del Principio di Equivalenza.

Il satellite dell'esperimento STE-QUEST [38] (Space-Time Explorer and QUantum Equivalence Space Test) è stato progettato nel 2010 dall'ESA (European Space Agency), con lo scopo di cercare la violazione del Principio di Equivalenza secondo Einstein con un'elevata precisione e diversi aspetti del suddetto principio, tra cui l'effetto di red-shift gravitazionale, utilizzando sensori quantici.

Ciò viene fatto attraverso un confronto degli orologi a Terra con orologi posti a diversa profondità di un campo gravitazionale, in particolare analizzando lo spostamento verso il rosso.

Mentre attraverso un interferometro quantistico viene studiato il Principio di Equivalenza secondo Einstein, analizzando la possibile variazione nelle accelerazioni di due isotopi,  $\text{Ru}^{85}$  e  $\text{Ru}^{88}$ , utilizzando il parametro di Eötvös.

L'esperimento SaAGE [39] (Space Atomic Gravity Explorer) è stato proposto all'ESA nel 2016 con lo scopo principale di investigare sulle onde gravitazionali, materia oscura e altri aspetti fondamentali della gravità come la connessione tra fisica gravitazionale e fisica quantistica, usando nuovi sensori quantistici, tra cui orologi atomici ottici, basati anche questi su interferometri atomici.

I risultati ottenuti da questi due esperimenti verranno poi confrontati con quelli dell'esperimento LLR.

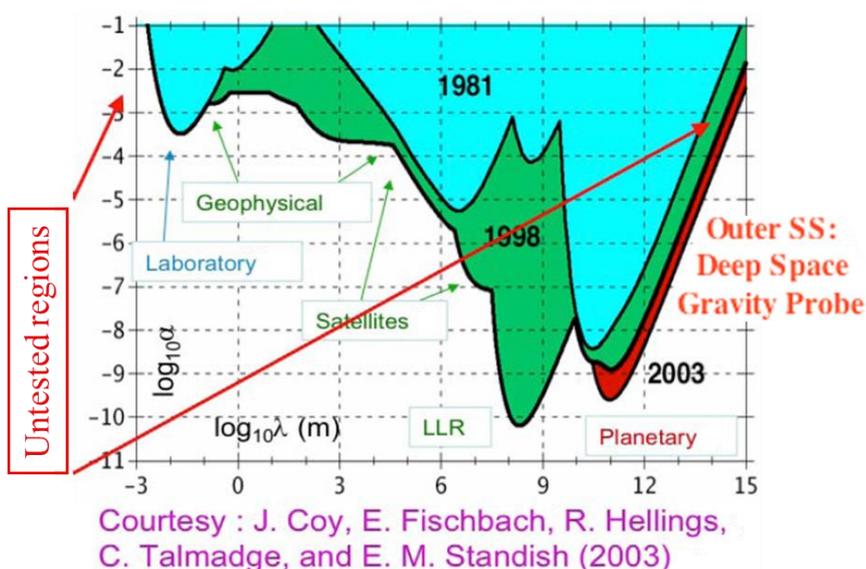
## 4.2 Gli sviluppi futuri dell'esperimento LLR

Per gli sviluppi futuri dell'LLR è stato proposto un posizionamento di nuovi retroriflettori anche su Marte e sulle sue due lune Deimos e Phobos, con lo scopo di migliorare la precisione delle misure in ambito planetario.

Verrà, quindi ulteriormente testata la Relatività Generale, attraverso l'utilizzo della strumentazione laser e retroriflettori, in particolare:

- MoonLIGHT (Moon Laser Instrumentation for General relativity High accuracy Tests) è un singolo grande retroriflettore lunare, con un diametro di 4 pollici, osservando dalla Terra un laser di lunghezza d'onda pari a  $\lambda = 532 \text{ nm}$ .
- INRRI (Instrument for landing-Roving laser Retroreflector Investigations) è un microriflettore dedicato all'osservazione del Sistema Solare e di Marte in particolare, dove il diametro di ogni piccolo retroriflettore è  $\frac{1}{2}$  pollice, osservando ad esempio da LRO (Lunar Reconnaissance Orbiter) con LOLA (Lunar Orbiter Laser Altimeter) ad una lunghezza d'onda di  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ .

I dati delle posizioni della Luna e di Marte sono elaborati dal programma PEP (Planetary Ephemeris Program), sviluppato da Shapiro nel 1960 al centro di astrofisica Harvard-Smithsonian.



Per costruire teorie estese della Relatività Generale, vengono studiati i limiti della possibile deviazione del potenziale gravitazionale dal potenziale di Newton, usando come modello il potenziale di Yukawa dato da  $(\text{potenziale newtoniano}) \times \alpha \times e^{-\frac{r}{\lambda}}$ , dove  $\lambda$  è dell'ordine di grandezza della distanza d'interazione (Fig.4).

Figura 4: Confronto dei dati

LLR con altri test.

È importante osservare che l'accuratezza dei dati migliora di 100 volte, per quanto riguarda i test nell'esperimento MoonLIGHT, rispetto a LGN (Lunar Geo/physics Network) dell'Apollo/Lunokhod (Tab.5).

Misurazione scientifica Test di precisione di violazione della Relatività Generale	Apollo/Lunokhod pochi cm di accuratezza	MoonLIGHTs** mm
Parametro Post-Newtoniano (PPN) $\beta$	$ \beta - 1  < 1,1 \times 10^{-4}$	$10^{-5}$
Principio di Equivalenza Debole (PED)	$\left  \frac{\Delta a}{a} \right  < 1,4 \times 10^{-13}$	$10^{-14}$
Principio di Equivalenza Forte (PEF)	$ \eta  < 4,4 \times 10^{-4}$	$3 \times 10^{-5}$
Variazione nel tempo della costante gravitazionale	$\left  \frac{\dot{G}}{G} \right  < 9 \times 10^{-13} \text{ yr}^{-1}$	$5 \times 10^{-14}$
Legge di proporzionalità Quadrata Inversa	$ \alpha  < 3 \times 10^{-11}$	$10^{-12}$
Precessione Geodetica	$ K_{GP}  < 6,4 \times 10^{-3}$	$6,4 \times 10^{-4}$

\*\*S. Capozziello, S. Dell'Agnello, O. Luongo, in preparazione (2019)

Tabella 5: Confronto tra dati MoonLIGHTs e Apollo/Lunokhod.

MoonLIGHT ha lo scopo di studiare quali teorie estese della gravitazione si adattano meglio ai dati nell'ambito del sistema solare, inoltre si prospetta di falsificare la teoria della Relatività Generale su scala locale ed associare i dati LLR a indagini cosmologiche.

Ciò potrebbe portare anche ad una soluzione della Materia Oscura in campo gravitazionale debole.

# Bibliografia

---

- [1] S. Capozziello, M. Funaro, *Introduzione alla Relatività Generale*, Liguori, Milano, 2005.
- [2] C. M. Will, *Experimental Gravitation*, Academic, New York, 1974.
- [3] E. M. S. J. P. W. X. X. Newhall, *Astron. Astrophys.*, 125, (1983), 150.
- [4] I. I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.*, 13, (1964), 789.
- [5] E. M. Standish, *Astron. Astrophys.*, 233, (1990), 252.
- [6] J. K. Nordtvedt, *Icarus*, 114, (1995), 51.
- [7] J. C. M. Chapront-Touzé, *Astron. Astrophys.*, 190, (1988), 342.
- [8] M. C.-T. J. -F. Lestrade, *Astron. Astrophys.*, 116, (1982), 75.
- [9] J. G. W. e. al., *Phys. Rev. Lett.*, 36, (1976), 551.
- [10] J. K. Nordtvedt, *Phys. Rev. D*, 43, (1991), 3131.
- [11] E. G. A. e. al., *Nature (London)*, 347, (1990), 261-263.
- [12] E. G. Adelberger, *Phys. Rev. D*, 42, (1990), 3267.
- [13] R. K. R. H. P. G. Roll, *Ann. Phys. (New York)*, 26, (1964), 442.
- [14] V. I. P. V. B. Braginsky, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 61, (1971), 873.
- [15] Y. S. e. al., *Phys. Rev. D*, 50, (1994), 3614.
- [16] R. D. R. e. al., *Astrophys. J. Lett.*, 234, (1979), L219.
- [17] D. B. W. de Sitter, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 8, (1938), 213.
- [18] R. F. O. B. M. Barker, *Phys. Rev. D*, 2, (1970), 1428.
- [19] R. F. O. B. M. Barker, *Phys. Rev. D*, 12, (1975), 329.
- [20] I. I. S. e. al., *Phys. Rev. Lett.*, 61, (1988), 2643.
- [21] X. X. N. J. G. W. J. O. Dickey, *Adv. Space Res.*, 9, (1989), 75.
- [22] J. O. D. e. al., *Science*, 265, (1994), 482.

- [23] A. J. F. e. al., *J. Geophys. Res.* , 85, (1980), 3939.
- [24] A. S. K. e. al., *Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference* , Univelt, Victoria BC, 1993.
- [25] M. T. Z. e. al., *Science*, 266, (1994), 1839.
- [26] D. E. S. M. T. Z. F. G. Lemoine, *Eos*, 75, (1994), 400.
- [27] T. V. I. V. A. Brumberg, *Sun and Planetary Systems*, Reidel, Dordrecht, 1982.
- [28] M. C.-T. J.-F. Lestrade, *Astron. Astrophys.*, 116, (1982), 75.
- [29] K. N. e. al., *J- Geophys. Res.*, 82, (1977), 4329.
- [30] D. L. C. e. al., *Bull. Am. Astron. Soc.* , 10, (1978), 387.
- [31] R. W. Hellings, *Proceedings of the 10th International Conference on Relativity and Gravitation*, Reidel, Padova, 1983.
- [32] T. V. I. V. A. Brumberg, *Bull. Inst. Theor. Astron.*, 19, (1985), 3.
- [33] W. S. S. C. F. Y. J. G. Williams, *Geophys. Res. Lett.*, 5, (1978), 943.
- [34] C. F. Yoder, *Philos. Trans. R. Soc. London*, A303, (1981), 327.
- [35] R. D. R. I. I. S. J. F. Chandler, *Bull. Am. Astron.Soc.*, 25, (1993), 1233.
- [36] T. D. e. al., *Phys. Rev. Lett.*, 61, (1988), 1151.
- [37] J. H. T. M. F. R. V. M. Kaspi, *Astrophys. J.*, 428, (1994), 713.
- [38] B. Altschul *et al.*, "*Quantum tests of the EinsteinEquivalence Principle with the STE-QUEST space mission*", *Adv. Space Res* **55** (2015) 501.
- [39] G. M. Tino *et al.*, "*SaAGE: A Proposal for a space Atomic Gravity Explorer*", *Astro. Phy.*2019.

