

Università degli Studi di Napoli “Federico II”

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica “Ettore Pancini”



Laurea triennale in Fisica

Equazioni dell'idrodinamica per stelle di sequenza principale

Relatori:

Prof.ssa Addolorata Marasco

Candidato:

Valerio Busillo

Matricola N85/746

A.A. 2018/2019

Introduzione

Lo studio della struttura ed evoluzione delle stelle ed in particolare delle *stelle di sequenza principale*, come ad esempio il Sole, è di fondamentale importanza in fisica. A seguito delle prime osservazioni sperimentali, cominciarono a svilupparsi modelli matematici in grado di fornire una spiegazione teorica come quelli proposti da Lane (1867), Emden (1909), Eddington (1926), Chandrasekhar (1939), etc.

In letteratura, accanto ai cosiddetti *modelli standard* basati sulla struttura microscopica di una stella, sono molto diffusi quelli dedotti dalla meccanica dei continui che, nell'adottare un punto di vista macroscopico, pongono le equazioni dell'idrodinamica alla base delle equazioni di struttura. Questo lavoro di tesi, che prende in esame la seconda tipologia di modelli, è organizzato come segue:

1. Nel primo capitolo sono riportate le equazioni di evoluzione newtoniana per una stella dotata di simmetria sferica e viene formulato il corrispondente problema a frontiera libera, evidenziando le difficoltà connesse alla determinazione delle soluzioni per via analitica o numerica.
2. Il secondo capitolo è dedicato all'equazione di Lane-Emden che, trascurando i fenomeni termici, si pone l'obiettivo di descrivere in *condizioni statiche* la struttura interna di una stella attraverso campi dotati di simmetria sferica. Tale modello, assumendo un'equazione di stato politropica per il fluido in esame, fornisce sia soluzioni analitiche che numeriche in relazione all'indice politropico n . Nello stesso capitolo sono confrontati gli andamenti di densità, massa e pressione per il Sole previsti dall'equazione di Lane-Emden per $n = 0, 1, 3, 5$ con quelli ottenuti mediante il modello solare standard.
3. Nel terzo ed ultimo capitolo è presentato un recente approccio analitico per l'integrazione del modello idrodinamico in *condizioni stazionarie* per *stelle di sequenza principale*. In particolare, assumendo che una stella di sequenza principale possa schematizzarsi come formata da un nucleo centrale, da una zona radiativa e da uno strato convettivo, si descriverà il problema al contorno relativo alla struttura stellare, particolarizzando le equazioni corrispondenti alle due zone nucleo-radiativa e convettiva. Infatti, laddove nella zona nucleo-radiativa è possibile assumere sia condizioni stazionarie che campi dotati di *simmetria sferica*, nella zona convettiva

per la presenza di *celle convettive* sarà possibile in condizioni stazionarie ipotizzare campi dotati di simmetria sferica solo al primo ordine di approssimazione.

Studiando opportunamente il problema posto, sarà possibile esibire una soluzione *analitica* di classe C^1 per l'intera struttura stellare e confrontare i risultati ottenuti per i campi di densità, pressione, temperatura e luminosità con quelli ottenuti da un classico modello standard per il Sole. Tale metodo consentirà anche la determinazione indiretta dell'opacità e del rapporto tra i calori specifici del fluido in esame.

Parte delle computazioni e tutti i grafici presenti in questa tesi sono stati ottenuti mediante il software Mathematica 12 ed i corrispondenti notebook sono ad essa associati.

Indice

1	Equazioni dell'idrodinamica per stelle di sequenza principale	5
1.1	Analisi preliminare	6
2	Equazione di Lane-Emden	9
2.1	Equazioni di struttura stellare in condizioni statiche	9
2.2	Ipotesi politropica ed equazione di Lane-Emden	10
3	L'approccio stazionario proposto in Marasco-Romano (2019)	16
3.1	Campo di velocità e profilo di densità in simmetria radiale	16
3.2	Equazioni di struttura stellare in condizioni stazionarie	20
3.3	Analisi adimensionale e soluzioni analitiche delle equazioni di struttura stellare	22
3.3.1	Massa adimensionale	24
3.3.2	Pressione adimensionale	25
3.3.3	Funzione specifica dei gas e temperatura adimensionale	26
3.3.4	Luminosità e produzione di potenza specifica	29
3.3.5	Opacità e funzione γ	31
A	Opacità	33
B	Costanti fisiche e grandezze fondamentali utilizzate nel testo	35

Capitolo 1

Equazioni dell'idrodinamica per stelle di sequenza principale

In questo capitolo si presenteranno le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione di una **stella di sequenza principale**, cioè di *quella particolare tipologia di stelle per cui la temperatura centrale sia inferiore a $1.7 \cdot 10^7$ K e che risultino posizionate sulla diagonale principale del diagramma temperatura-luminosità*, anche noto come **diagramma Hertzsprung-Russell**, evidenziandone i problemi connessi con l'integrazione analitica e/o numerica.

Una stella di sequenza principale è solitamente schematizzabile come una sfera gassosa formata da un **nucleo centrale**, nel quale avvengono *reazioni di fusione nucleare*, circondato da una **zona radiativa** nella quale *il calore generato dalle reazioni nucleari viene trasferito verso l'esterno principalmente mediante processi di irraggiamento termico*, a sua volta ricoperta da una **zona convettiva** esterna, nella quale *il meccanismo principale di trasferimento del calore risulta essere la convezione termica*.

1.1 Analisi preliminare

Le equazioni idrodinamiche che descrivono l'evoluzione di una **stella di sequenza principale**¹ sono

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \rho \dot{\mathbf{v}} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi, \\ \rho \dot{\epsilon} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{h}) + \rho s, \\ \Delta \Phi = 4\pi G \rho, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $\rho(\mathbf{r}, t)$ è la **densità di massa**, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ il **campo di velocità**, $p(\mathbf{r}, t)$ la **pressione**, $\epsilon(\mathbf{r}, t)$ l'**energia interna specifica**, $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ il **vettore flusso di calore**, $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ il **vettore flusso di energia radiativa**, $s(\mathbf{r}, t)$ la **produzione di potenza specifica**, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ il **potenziale gravitazionale** e G è la **costante di gravitazione universale**².

Il sistema (1.1) è formato da sei equazioni scalari. Per ottenere il pareggiamento tra equazioni e incognite, è necessario assegnare le seguenti **equazioni costitutive**

$$p = p(\rho, T), \quad \epsilon = \epsilon(\rho, T), \quad s = s(\rho, T), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\rho, T, \nabla T), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}(\rho, T, \nabla T), \quad (1.2)$$

dove $T(\mathbf{r}, t)$ è la **temperatura assoluta**. In tal modo è possibile ridursi a sei funzioni incognite: $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$ e $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Allo scopo di semplificare le equazioni (1.1), s'introdurranno le seguenti ipotesi:

1. La stella abbia una distribuzione perfettamente sferica, di raggio $R(t)$.
2. La conduzione del calore sia completamente trascurabile: $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.
3. Si supponga che il problema abbia **simmetria radiale**, cioè che *tutti i campi associati al fluido dipendano esclusivamente dalla coordinata radiale r e dal tempo t* .

Sotto tali ipotesi, il sistema (1.1) si può riscrivere come

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) = -\frac{p}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h) + \rho s, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho, \end{cases} \quad (1.3)$$

¹Il fluido costituente la stella sarà modellizzato come una miscela di **gas perfetto**, cioè *un particolare tipo di fluido per cui il tensore degli sforzi di Cauchy può essere scritto come $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$* .

²Per i valori delle costanti fisiche fondamentali, vedere l'Appendice B.

dove v ed h rappresentano le componenti radiali di \mathbf{v} ed \mathbf{h} . Sostituendo ora nelle equazioni (1.3)_{2,4} $\partial\Phi/\partial r$ con $Gm(r,t)/r^2$, dove $m(r,t)$ è la massa contenuta in una sfera di raggio r al generico istante t , il sistema (1.3) diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2\rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{Gm}{r^2}, \\ \rho \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + v \frac{\partial\epsilon}{\partial r} \right) = -\frac{p}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h) + \rho s, \\ \frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho, \end{cases} \quad (1.4)$$

dove, avendo scelto un modello di fluido perfetto, le equazioni costitutive (1.2)_{1,2} assumono la seguente espressione

$$p(r, T) = \mathcal{R}_g \rho T, \quad \epsilon(r, T) = c_v T, \quad (1.5)$$

con \mathcal{R}_g **funzione specifica del fluido perfetto** e c_v **calore specifico a volume costante**. Si noti che \mathcal{R}_g e c_v non sono semplicemente *costanti* del fluido perfetto, in quanto dipendono dalla composizione chimica del fluido, che a sua volta è una *funzione* della coordinata radiale r .

Il sistema (1.4) è formato da quattro equazioni scalari nelle quattro funzioni incognite

$$\rho(r, t), \quad m(r, t), \quad v(r, t), \quad T(r, t). \quad (1.6)$$

Ci si trova tuttavia in presenza di un **problema a frontiera libera**, in quanto è necessario determinare le funzioni incognite (1.6) nella regione $[0, R(t)] \times [t_0, +\infty[$, con $R(t)$ a sua volta *funzione incognita*, in quanto l'evoluzione della frontiera della stella è a priori sconosciuta.

È possibile ottenere un'equazione per determinare la funzione $R(t)$ imponendo la **condizione di salto di Rankine-Hugoniot** alla frontiera materiale della stella

$$p(R(t), t) = p_b(t), \quad (1.7)$$

dove $p_b(t)$ è la pressione sul bordo della stella (assegnata a priori).

In letteratura, è usualmente introdotta anche la **luminosità totale** $L_r(r, t)$ che attraversa la sfera di raggio r ad un dato istante t . Essa è legata al flusso di energia radiativa h dalla relazione seguente

$$L_r = 4\pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{L_r}{4\pi r^2}. \quad (1.8)$$

Ad L_r è associata la seguente equazione costitutiva, valida nel caso in cui il trasferimento di calore nella regione considerata avvenga prevalentemente per

irraggiamento termico

$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma}{3\chi\rho} \frac{\partial T^4}{\partial r}, \quad (1.9)$$

dove χ è l'**opacità**³ della stella e σ è la **costante di Stephan-Boltzmann**. Dall'equazione (1.9) è possibile ottenere la seguente equazione differenziale per la temperatura assoluta:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\chi\rho}{64\pi r^2 \sigma} \frac{L_r}{T^3}. \quad (1.10)$$

In tal modo, si ottiene una formulazione alternativa del sistema (1.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{Gm}{r^2}, \\ \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) = -\frac{p}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v) - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial L_r}{\partial r} + \rho s, \\ \frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\chi\rho}{64\pi r^2 \sigma} \frac{L_r}{T^3}. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Il sistema (1.6) (o, equivalentemente, il sistema (1.11)) *non ammette soluzioni analitiche*, e persino l'integrazione numerica presenta notevoli difficoltà. In letteratura [1, 2, 3], si procede assegnando a priori un campo di velocità $v(r, t)$ in corrispondenza del quale determinare un profilo di densità $\rho(r, t)$ che soddisfi le seguenti condizioni:

1. $\rho(r, t)$ sia soluzione dell'equazione di continuità (1.11)₁,
2. $\rho(r, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in [0, R(t)[\times [t_0, +\infty[$,
3. $\rho(R(t), t) = \rho_b(t) \quad \forall t \in [t_0, +\infty[$,
4. $M = 4\pi \int_0^{R(t)} r^2 \rho(r, t) dr$, con M **massa totale** della stella all'istante t .

Nel Capitolo 2 sarà presentato un approccio statico al problema, mediante il quale verranno ricavate le **equazioni di Lane-Emden**. La risoluzione di tali equazioni permetterà di ottenere dei profili di struttura stellare per stelle di sequenza principale confrontabili con i dati del modello solare standard. Nel Capitolo 3 infine, verrà descritto un approccio alternativo mediante il quale sarà possibile ottenere soluzioni analitiche di classe C^1 per le equazioni di struttura stellare in condizioni stazionarie.

³Per maggiori informazioni sull'opacità, vedere l'Appendice A.

Capitolo 2

Equazione di Lane-Emden

2.1 Equazioni di struttura stellare in condizioni statiche

Ipotizzando che *i tempi d'evoluzione del sistema stellare siano talmente lunghi rispetto a quelli d'osservazione da poter considerare il fluido in equilibrio*, cioè $\mathbf{v} = 0$ ed $\dot{\epsilon} = 0 \forall t$, il sistema (1.11) assume la seguente forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2}, \\ \frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho s, \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{3\chi\rho}{64\pi r^2 \sigma} \frac{L_r}{T^3}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Usualmente ([3, pag. 72]) al sistema (2.1) sono associate le seguenti condizioni al bordo¹

$$\begin{aligned} m &= 0 \text{ se } r = 0, \\ L_r &= 0 \text{ se } r = 0, \\ \rho &= 0 \text{ se } r = R, \\ p &= 0 \text{ se } r = R, \\ T &= 0 \text{ se } r = R. \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹Si noti che, per $r = R$, si dovrebbe avere in linea di principio $\rho = \rho_b$, $p = p_b$ e $T = T_b$. Tuttavia, alcune fonti ([4, tabella 7]; [5, tabella 14.2]) mostrano che $\rho_b \approx 1.99 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$, $p_b \approx 8 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ e $T_b = 5778 \text{ K}$, ed è quindi ragionevole supporre nulli i valori di densità, pressione e temperatura al bordo se confrontati con le rispettive quantità nel centro della stella.

Le (2.1) e (2.2) sono le **equazioni classiche di struttura stellare**². Per ottenere un problema ben posto, è necessario inoltre fornire l'opacità χ e la produzione di potenza specifica s .

Anche sotto tali condizioni tuttavia, la derivazione della struttura stellare a partire da (2.1) e (2.2) è possibile solo mediante metodi numerici, in quanto il sistema in generale non ammette soluzioni analitiche.

2.2 Ipotesi politropica ed equazione di Lane-Emden

Un metodo che consenta di risolvere più agevolmente le equazioni di struttura stellare e di ottenere, in casi particolari, soluzioni analitiche, consiste nell'effettuare un'**ipotesi politropica**³ sul fluido stellare, in modo tale da *disaccoppiare la pressione dalla temperatura rendendo la prima funzione della sola densità*⁴

$$p = p(\rho) = k \cdot \rho^\gamma, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

dove k è una costante di proporzionalità associata alla trasformazione politropica e γ è l'**indice adiabatico**. Usualmente l'indice γ è espresso in termini dell'**indice politropico** $n \in \mathbb{R}$ tale che $\gamma = \frac{n+1}{n}$, per cui la (2.3) si scrive

$$p(\rho) = k \cdot \rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (2.4)$$

inoltre la densità ρ è espressa in termini di una funzione $\theta(r)$ tale che

$$\rho(r) = \rho_c \theta^n(r), \quad (2.5)$$

dove ρ_c è la **densità centrale della stella**. Per le (2.4) e (2.5), la pressione si può riscrivere rispetto a $\theta(r)$ come

$$p(r) = k \cdot \rho_c^{\frac{n+1}{n}} \theta^{n+1}(r). \quad (2.6)$$

È possibile ora ottenere, a partire dall'equazione di Poisson, un'equazione differenziale ordinaria nella funzione incognita $\theta(r)$ nota come **equazione di Lane-Emden**.

²Si noti che, mediante tale approccio, la zona convettiva risulta essere completamente trascurata.

³Si definisce **trasformazione politropica** una trasformazione termodinamica descritta dalla seguente legge:

$$pv^k = \text{cost.}$$

dove p e v sono rispettivamente pressione e volume specifico del gas, e k è un esponente variabile a seconda del particolare tipo di trasformazione considerata. Tra l'esponente k ed il **calore specifico** $c := \frac{dQ}{dT}$ intercorre la relazione $k = \frac{c-c_p}{c-c_v}$, dove c_p e c_v sono i calori specifici rispettivamente a pressione ed a volume costante [8].

⁴Si noti tuttavia che, così facendo, sarà necessario determinare il profilo di temperatura mediante altri tipi di considerazioni termodinamiche, in quanto l'ipotesi politropica elimina il legame funzionale tra pressione e temperatura, che invece si avrebbe nel caso in cui si adoperasse l'equazione di stato (1.5)₁.

Si consideri l'equazione di Poisson in ipotesi di simmetria radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi\rho G, \quad (2.7)$$

che per la (2.1)₂ si scrive

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(-\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = 4\pi\rho G. \quad (2.8)$$

Sostituendo (2.5) e (2.6) in (2.8), segue

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 k \rho_c^{\frac{1}{n}} (n+1) \frac{d\theta}{dr} \right] = -4\pi G \rho_c \theta^n. \quad (2.9)$$

S'introduca ora la **coordinata adimensionale** $\xi := \frac{r}{a}$, con a costante [3, pag. 133]

$$a = \left(\frac{(1+n) k \rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Tenuto conto della (2.10), sostituendo nella (2.9) si ottiene con semplici passaggi l'**equazione di Lane-Emden**

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right] = -\theta^n. \quad (2.11)$$

All'equazione (2.11) sono usualmente associate le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} \theta(0) &= 1, \\ \theta'(0) &= 0. \end{aligned}$$

È possibile risolvere *analiticamente* l'equazione (2.11) solo per alcuni indici politropici. In particolare si ottengono soluzioni *positive*, note come **politropi di ordine n** , solo per opportuni valori di ξ minori di un certo ξ_{max} , il quale dipende da n :

- Se $n = 0$, $\theta_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}$, $\forall \xi \in [0, \sqrt{6}]$,
- Se $n = 1$, $\theta_1(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$, $\forall \xi \in [0, \pi]$,
- Se $n = 5$, $\theta_5(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{3}}}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$. ⁽⁵⁾

⁵Si noti che questa soluzione è associata ad un raggio ξ_s infinito, cioè $\theta_5(\xi)$ è un politropo che descrive una distribuzione fluida *priva di bordo*. Tale proprietà è condivisa con tutti i politropi aventi $n \geq 5$.

Ciò significa che per ogni indice politropico $n < 5$ si ottiene *un modello di stella avente un preciso raggio R_{max} fissato dalla relazione*

$$R_{max} = a \cdot \xi_{max}. \quad (2.12)$$

In particolare:

- Per $n = 0$, $R_{max} \cong 8.54151 \cdot 10^7$ m,
- Per $n = 1$, $R_{max} \cong 1.54926 \cdot 10^8$ m,
- Per $n = 3$, $R_{max} \cong 4.80994 \cdot 10^8$ m.

Il politropo più frequentemente utilizzato per modellizzare la zona radiativa di una stella di sequenza principale, pur non avendo una forma analitica esplicita, è quello per $n = 3$ (cfr. [13, pag. 64-68]). Un grafico dei politropi per $n = 0, 1, 3$ e 5 è mostrato in Figura 2.1, mentre un confronto tra le rispettive densità normalizzate e i dati del modello solare standard è mostrato in Figura 2.2:

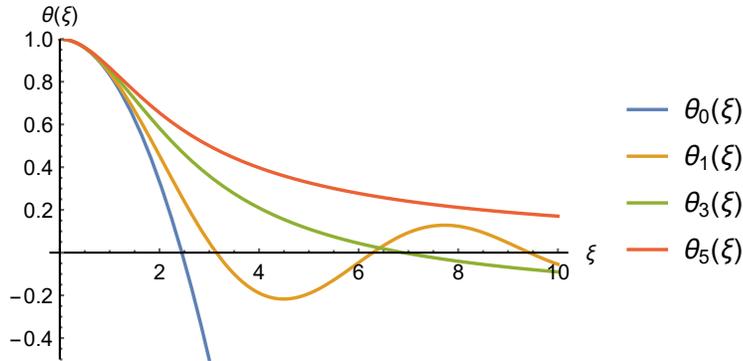


Figura 2.1: Soluzioni dell'equazione di Lane-Emden per $n = 0, 1, 3, 5$.

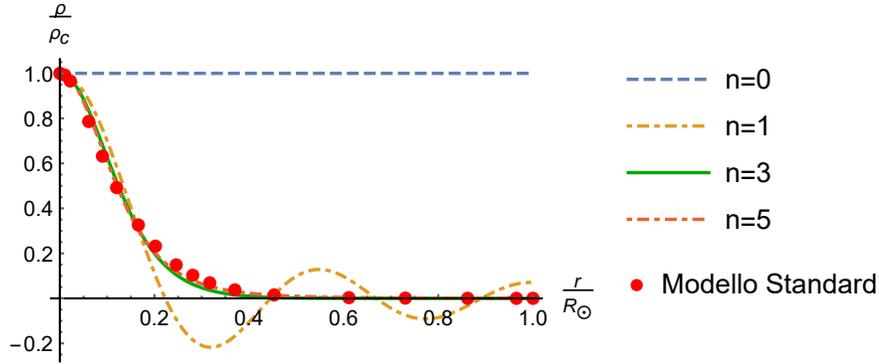


Figura 2.2: Confronto tra i profili di densità ottenuti dall'equazione di Lane-Emden normalizzati rispetto alla densità centrale del Sole e i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7]. Si noti che i profili mostrati hanno senso fisico solo per $r < R_{max}$.

Si noti tuttavia che *al politropo avente indice politropico $n = 3$ è associato un raggio massimo minore di quello del Sole*. Ciò significa che per $r/R_\odot \gtrsim 0.69158$ il profilo di densità risulta essere negativo, come si può osservare nella Figura 2.3:

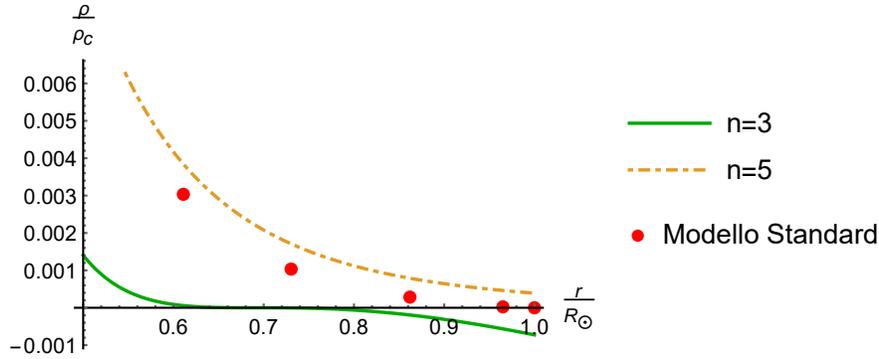


Figura 2.3: Particolare della Figura 2.2 per $r/R_\odot \in [0.5, 1]$.

È quindi possibile ottenere il profilo di pressione mediante la (2.4), e la massa contenuta in una sfera di raggio r integrando la (2.1)₄. Un confronto dei suddetti profili, considerando il politropo $n = 3$, rispetto ai dati del modello stellare standard, è mostrato nelle Figure 2.4 e 2.5:

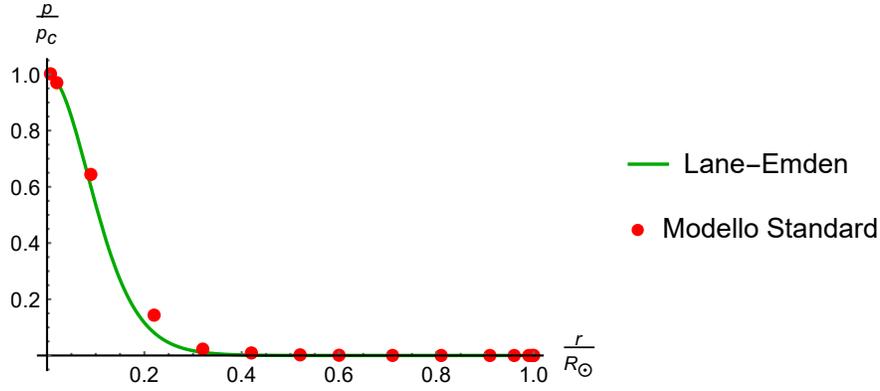


Figura 2.4: Profilo di pressione normalizzato associato al politropo di indice $n = 3$ confrontato con i dati del modello solare standard proposto in [5, Tabella 14.2].

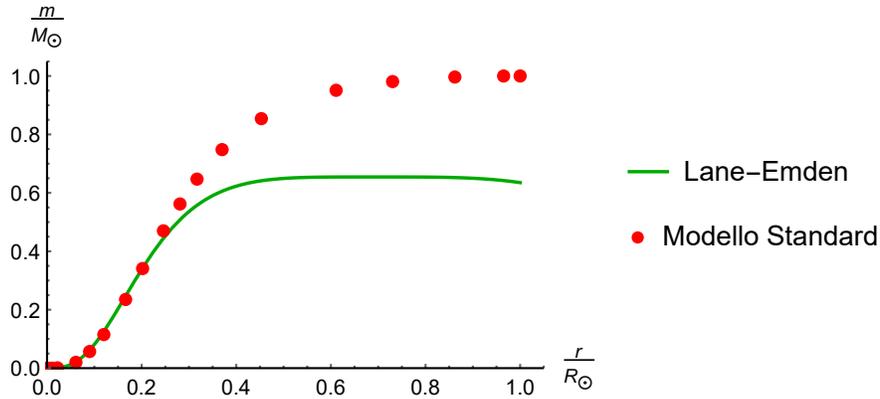


Figura 2.5: Andamento della massa contenuta in una sfera di raggio r/R_\odot associato al politropo di indice $n = 3$ confrontato con i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7]. Si noti che, a causa della sottostima del raggio dovuta alla scelta dell'indice politropico, la massa totale della stella risulta essere sottostimata e il profilo è decrescente per $r/R_\odot \gtrsim 0.69158$.

Per determinare i restanti campi incogniti, in letteratura (cfr. [12, pag.126]) si procede supponendo che all'interno della stella valga la seguente legge di proporzionalità tra pressione e temperatura

$$p \propto T^{n+1}, \tag{2.13}$$

dove n è ancora l'indice politropico. Si può dimostrare che tale legge è compatibile con l'ipotesi di politropia solo per processi adiabatici e isoentropici in

presenza di simmetria sferica [14]. Nel caso particolare del Sole, vengono considerati due **indici politropici effettivi** a seconda della zona da descrivere: $n = 3.5$ per la zona radiativa ed $n = 1.5$ per la zona convettiva. Determinato il campo di temperatura mediante la (2.13), è infine possibile ottenere la luminosità integrando la (2.1)₅ e la produzione di potenza specifica mediante la (2.1)₃, una volta assegnata l'opacità.

Capitolo 3

L'approccio stazionario proposto in Marasco-Romano (2019)

Un approccio alternativo, presentato in *A. Marasco-A. Romano* [6], consente di determinare soluzioni analitiche di classe C^1 per le equazioni di struttura stellare, considerando sia la **zona nucleo-radiativa** centrale, sia la **zona convettiva** esterna, in condizioni *stazionarie*¹.

3.1 Campo di velocità e profilo di densità in simmetria radiale

Si inizi cercando, in condizioni dinamiche, un profilo di densità che rispetti le proprietà 1.-2.-3.-4. delineate al termine della Sezione 1.1. Si consideri il profilo di velocità

$$v(r, t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}r, \quad (3.1)$$

e si scomponga la densità in una parte centrale, dipendente solo dal tempo, ed una parte radiale che tenda a zero per $r \rightarrow 0$

$$\rho(r, t) = \rho_c(t) + r\rho_r(r, t). \quad (3.2)$$

¹Si noti che in questo caso non è possibile imporre l'equilibrio idrostatico, in quanto la trasmissione del calore per convezione, preponderante nella zona convettiva, richiede che le particelle di fluido in tale regione si muovano. Almeno nella zona convettiva quindi si avrà $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Introducendo (3.1) e (3.2) nell'equazione di continuità (1.4), si ottiene

$$\begin{aligned}
& \frac{d\rho_c}{dt} + r \frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 (\rho_c + r \rho_r) \frac{\dot{R}}{R} \right] = 0 \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{d\rho_c}{dt} + r \frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\dot{R}}{R} \left(3r^2 \rho_c + 4r^3 \rho_r + r^4 \frac{\partial \rho_r}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow \\
& \rightarrow 3 \frac{\dot{R}}{R} \rho_c + r^2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial \rho_r}{\partial r} + 4r \frac{\dot{R}}{R} \rho_r + r \frac{\partial \rho_r}{\partial t} + \frac{d\rho_c}{dt} = 0 \rightarrow \\
& \frac{d\rho_c}{dt} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \rho_c = - \left(r^2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial \rho_r}{\partial r} + 4r \frac{\dot{R}}{R} \rho_r + r \frac{\partial \rho_r}{\partial t} \right). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

È dunque possibile determinare la densità centrale ρ_c imponendo che sia verificata l'equazione di continuità della massa per $r = 0$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\rho_c}{dt} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \rho_c = 0 \rightarrow \int \frac{d\rho_c}{\rho_c} = -3 \int \frac{\dot{R}}{R} dt \rightarrow \\
& \rightarrow \ln[\rho_c] = -3 \ln[R] + K_1 \rightarrow \rho_c = \frac{e^{K_1}}{R^3(t)}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Introducendo $\rho_c = C_1/R^3(t)$, con C_1 costante d'integrazione arbitraria nella (3.3) si ottiene

$$r^2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial \rho_r}{\partial r} + 4r \frac{\dot{R}}{R} \rho_r + r \frac{\partial \rho_r}{\partial t} = 0, \tag{3.5}$$

che è risolvibile per separazione delle variabili. Infatti, posto $\rho_r(r, t) = X(r)Y(t)$, si ha

$$\begin{aligned}
& r^2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\partial}{\partial r} (X(r)Y(t)) + 4r \frac{\dot{R}}{R} X(r)Y(t) + r \frac{\partial}{\partial t} (X(r)Y(t)) = 0 \rightarrow \\
& \rightarrow r^2 \frac{\dot{R}}{R} Y(t) \frac{\partial X(r)}{\partial r} = -r X(r) \left(4 \frac{\dot{R}}{R} Y(t) + \frac{\partial Y(t)}{\partial t} \right) \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{r}{X(r)} \frac{\partial X(r)}{\partial r} = - \left(4 + \frac{R(t)}{\dot{R}(t)} \frac{1}{Y(t)} \frac{\partial Y(t)}{\partial t} \right), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

dove il membro di sinistra dipende esclusivamente da r , mentre il membro di destra solo da t . Ponendo ambo i membri uguali ad una costante λ arbitraria e risolvendo le equazioni differenziali ordinarie che ne seguono, si ottiene

$$X(r) = C_2 r^\lambda, \tag{3.7}$$

$$Y(t) = C_3 R^{-(4+\lambda)}(t). \tag{3.8}$$

Dalla linearità dell'equazione (3.5) segue che una soluzione generale dell'equazione di continuità, regolare in $r = 0$, ha la seguente forma

$$\rho(r, t) = \frac{C_1}{R^3(t)} + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \frac{r^{n+1}}{R^{n+4}(t)}. \tag{3.9}$$

La serie di potenze presente in (3.9) risulta difficile da trattare, in quanto è necessario considerare problemi associati all'uniforme convergenza della serie e alla positività del profilo di densità associato.

In *Kwak-Jun* [10], la funzione di densità proposta è la seguente

$$\rho(r, t) = \frac{15M}{8\pi R^3(t)} - \frac{15M}{8\pi} \frac{r^2}{R^5(t)}, \quad (3.10)$$

che è ricavabile dalla (3.9) troncando la serie al prim'ordine, imponendo $A_0 = 0$ e determinando i coefficienti C_1 e A_1 mediante le seguenti condizioni:

- $\rho(R(t), t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$,
- $M = 4\pi \int_0^{R(t)} r^2 \rho(r, t) dr$,

con M **massa complessiva della stella**. Un grafico del profilo (3.10) associato al Sole è mostrato in Figura 3.1:

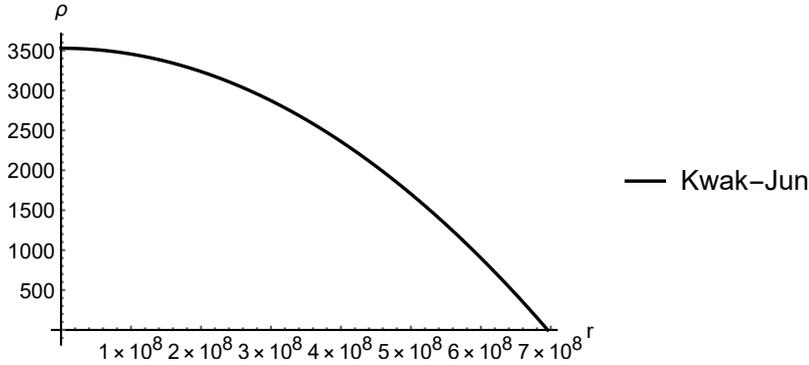


Figura 3.1: Andamento del profilo di densità (3.10) associato al Sole, in unità MKS.

D'altro canto, il risultato (3.9) suggerisce che anche il profilo di densità

$$\rho(r, t) = \frac{C_1}{R^3(t)} F\left(\frac{r}{R(t)}\right), \quad (3.11)$$

con F funzione di classe C^1 arbitraria nella variabile r/R , sia soluzione dell'equazione di continuità. Si può pertanto scegliere ad arbitrio la seguente forma per la densità

$$\rho(r, t) = \frac{C_1}{R^3(t)} \left[\left(1 - \frac{r}{R(t)}\right) e^{-a\left(\frac{r}{R(t)}\right)^\beta} + b \right], \quad (3.12)$$

con C_1 , a , b e β costanti positive.

Il profilo (3.12) è positivo per ogni $(r, t) \in [0, R(t)] \times [0, +\infty[$. Per determinare C_1

e b esplicitamente, è sufficiente imporre le condizioni al contorno $\rho(0, 0) = \rho_c(0)$ e $\rho(R(0), 0) = \rho_b(0)$, da cui

$$C_1 = R^3(0) [\rho_c(0) - \rho_b(0)], \quad (3.13)$$

$$b = \frac{\rho_b(0)}{\rho_c(0) - \rho_b(0)}. \quad (3.14)$$

Il profilo (3.12) si esplicita allora come segue

$$\rho(r, t) = \frac{R_0^3 [\rho_{c,0} - \rho_{b,0}]}{R^3(t)} \left[\left(1 - \frac{r}{R(t)}\right) e^{-a\left(\frac{r}{R(t)}\right)^\beta} + \frac{\rho_{b,0}}{\rho_{c,0} - \rho_{b,0}} \right]. \quad (3.15)$$

Si può dimostrare che a è legato a β dalla seguente relazione implicita

$$M = \frac{4\pi R^3(0) a^{-\frac{4}{\beta}}}{3\beta} \left\{ 3[\rho_c(0) - \rho_b(0)] \left[a^{\frac{1}{\beta}} \left(\Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{\beta}, a\right) \right) + \Gamma\left(\frac{4}{\beta}, a\right) - \Gamma\left(\frac{4}{\beta}\right) \right] + \beta \rho_b(0) a^{\frac{4}{\beta}} \right\}, \quad (3.16)$$

dove $\Gamma(x)$ e $\Gamma(d, x)$ sono rispettivamente la **funzione Gamma di Eulero** e la **funzione Gamma incompleta**, definite come segue:

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (3.17)$$

$$\Gamma(d, x) := \int_x^{+\infty} t^{d-1} e^{-t} dt. \quad (3.18)$$

Un grafico della funzione implicita (3.16) per il Sole è mostrato in Figura 3.2:

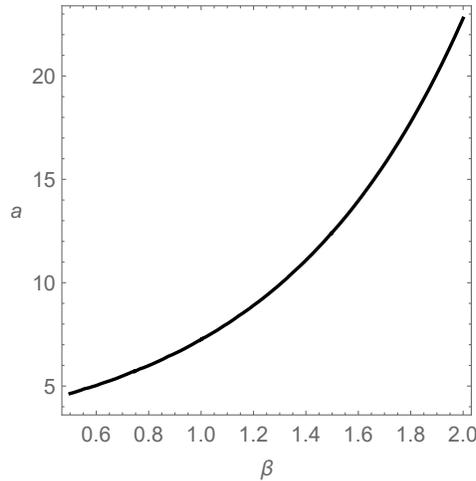


Figura 3.2: Grafico della relazione implicita $a(\beta)$ per il Sole, con β compreso tra 0.5 e 2.

Al variare del parametro β dunque, si ottiene un'intera famiglia di profili di densità $\rho(r, t)$ che soddisfano le proprietà richieste. Alcuni esempi, al variare di β , sono mostrati in Figura 3.3.

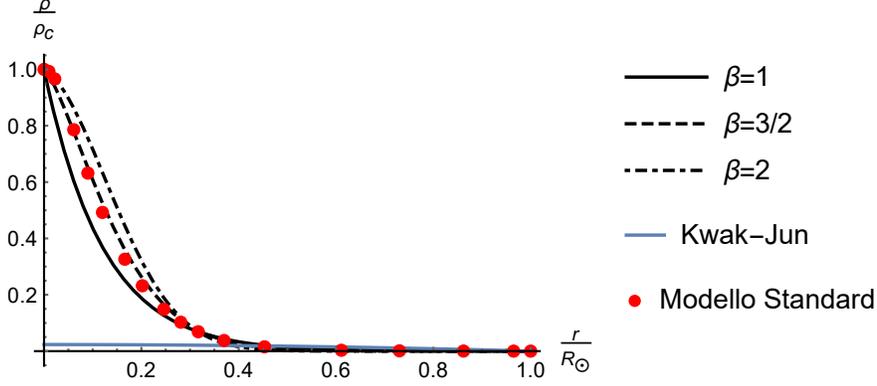


Figura 3.3: Profili di densità normalizzati associati alla famiglia (3.15), per tre diversi valori di β , confrontati con il profilo di densità (3.10) e con i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7].

3.2 Equazioni di struttura stellare in condizioni stazionarie

Verranno ora ricavate le equazioni di struttura stellare in condizioni stazionarie. Per quanto riguarda la zona nucleo-radiativa, si può supporre che il fluido sia a riposo, dunque ritenendo validi gli stessi ragionamenti effettuati nella Sezione 2.1 le equazioni di struttura in tale zona saranno

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{Gm}{r^2} = 0, \\ \frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho s, \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{3\chi\rho}{64\pi r^2 \sigma} \frac{L_r}{T^3}, \end{cases} \quad r \in [0, R_r], \quad (3.19)$$

dove R_r è il raggio corrispondente alla frontiera che separa la regione nucleo-radiativa da quella convettiva. Fornite le funzioni s , χ e l'equazione costitutiva $p = \mathcal{R}_g \rho T$, il sistema presenta le funzioni incognite $\rho(r)$, $m(r)$, $p(r)$, $L_r(r)$ e $T(r)$.

Per quanto riguarda la zona convettiva invece, la natura delle celle convettive presenti al suo interno rendono non più valide sia l'ipotesi di simmetria radiale che quella di materia a riposo. Pur supponendo che il campo di velocità sia

stazionario, l'assenza di simmetria radiale impone in ogni caso l'utilizzo delle equazioni (1.1) per la descrizione di tale zona.

Al fine di semplificare il problema, si supponga che in tale regione ogni campo possa essere scritto come

$$f = f_0(r) + f_1(\mathbf{r}), \quad (3.20)$$

con $f_1(\mathbf{r})$ quantità del prim'ordine. Il campo di velocità dunque si potrà scrivere come

$$\mathbf{v} = v(r)\mathbf{e}_r + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}), \quad (3.21)$$

dove \mathbf{e}_r è il versore radiale uscente, e $v(r)$, $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ sono entrambe quantità del prim'ordine. Sotto tali condizioni, si può dimostrare (cfr. [9]) che nella regione convettiva valgono i seguenti risultati:

$$\begin{cases} v(r) = -\langle \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e}_r \rangle, \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr} + \frac{Gm}{r^2} = 0, \\ \frac{dL_{r,0}}{dr} = 0, \\ \frac{dT_0}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T_0}{p_0} \frac{dp_0}{dr}, \end{cases} \quad (3.22)$$

dove $\rho_0, p_0, L_{r,0}$ e T_0 sono le quantità di ordine zero dello sviluppo (3.20), le quali possono essere considerate come un prolungamento per continuità dei rispettivi campi definiti nella zona nucleo-radiativa².

Per quanto riguarda la zona convettiva quindi, le equazioni di struttura risultano essere, a meno di termini del prim'ordine

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0, \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dr} + \frac{Gm}{r^2} = 0, \\ \frac{dL_{r,0}}{dr} = 0, \\ \frac{dT_0}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T_0}{p_0} \frac{dp_0}{dr}, \end{cases} \quad (3.23)$$

nelle funzioni incognite $\rho_0(r), m_0(r), p_0(r), L_{r,0}(r), T_0(r)$ e con $\gamma := \frac{c_p}{c_v}$. Verranno in seguito omessi i pedici, in quanto tutti i campi della zona convettiva saranno ritenuti estensioni regolari dei campi analoghi associati alla zona nucleo-radiativa.

²Si noti che il secondo membro dell'equazione (3.22)₄ è nullo, in quanto la produzione di energia s è nulla nella zona convettiva.

In definitiva, è possibile ottenere la struttura stellare o risolvendo separatamente i sistemi (3.19) e (3.23), con le seguenti condizioni al bordo:

$$\rho(R) = \rho_R, m(R) = M, L_r(R) = L_R, T(R) = T_R, \quad (3.24)$$

la qual cosa tuttavia non garantisce che le soluzioni soddisfino anche le condizioni al centro della stella

$$m(0) = 0, L_r(0) = 0, \quad (3.25)$$

oppure cercare una soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{Gm}{r^2} = 0, & r \in [0, R], \\ \frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho s, \\ \frac{dT}{dr} = -\frac{3\chi\rho}{64\pi r^2 \sigma} \frac{L_r}{T^3}, & r \in [0, R_r], \\ \frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{p} \frac{dp}{dr}, & r \in]R_r, R], \end{cases} \quad (3.26)$$

che sia globalmente di classe C^1 , una volta forniti i campi $s(r)$, $\chi(r)$, $\gamma(r)$, l'equazione costitutiva $p = \mathcal{R}_g \rho T$ e le condizioni al bordo (3.24).

L'approccio utilizzato in [9] è il secondo e si determina una soluzione globale di classe C^1 del sistema (3.26) supponendo a priori che il profilo di densità sia (3.15), con $\beta = 1$ ⁽³⁾.

3.3 Analisi adimensionale e soluzioni analitiche delle equazioni di struttura stellare

Per $\beta = 1$ e supponendo che il fluido sia in condizioni stazionarie, l'equazione (3.15) si riduce a

$$\rho(r) = (\rho_c - \rho_b) \left[\left(1 - \frac{r}{R_0}\right) e^{-a\left(\frac{r}{R_0}\right)} + \frac{\rho_b}{\rho_c - \rho_b} \right]. \quad (3.27)$$

Un grafico di (3.27), adimensionalizzato rispetto alla densità centrale ρ_c del Sole, è mostrato in Figura 3.4:

³Seppure il miglior fit del profilo di densità (3.15) rispetto ai dati del modello stellare standard si ottenga per $\beta = 3/2$, con tale scelta non è possibile esibire una soluzione *analitica* delle equazioni (3.26).

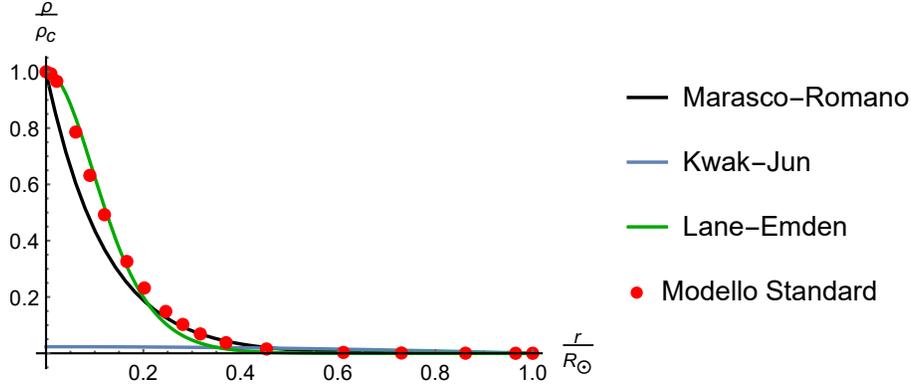


Figura 3.4: Andamento del profilo di densità (3.27) adimensionalizzato, confrontato con i profili di densità (3.10), (2.5) per $n = 3$ e con i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7].

Si riformulino ora le equazioni (3.26)₁₋₃ in forma adimensionale, in modo da trovare soluzioni indipendenti dalle caratteristiche fisiche della stella.

Introducendo le **grandezze di riferimento**

$$\rho_0 = \rho_c, R_0 = R(0), M_0 = M, p_0 = p_c, \quad (3.28)$$

$$T_0 = \frac{p_0}{\mathcal{R}_{g,0}\rho_0}, L_0 = L_{R_0}, s_0 = s_c, \quad (3.29)$$

dove L_{R_0} è la luminosità al bordo della stella e $p_c, s_c, \mathcal{R}_{g,0}, \rho_c$ sono rispettivamente la pressione, la produzione di potenza specifica, la funzione specifica dei gas e la densità valutate al centro della stella, le equazioni (3.26)₁₋₃ diventano

$$\begin{cases} \frac{M_0}{R_0} \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = 4\pi\rho_0 R_0^2 \hat{\rho} \hat{r}^2 \\ \frac{p_0}{\rho_0 R_0} \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{d\hat{p}}{d\hat{r}} + \frac{M_0}{R_0^2} \frac{G\hat{m}}{\hat{r}^2} = 0 \\ \frac{L_0}{R_0} \frac{d\hat{L}_r}{d\hat{r}} = 4\pi R_0^2 \rho_0 s_0 \hat{r}^2 \hat{\rho} \hat{s} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = \frac{4\pi\rho_0 R_0^3}{M_0} \hat{\rho} \hat{r}^2 \\ \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{d\hat{p}}{d\hat{r}} + \frac{GM_0 R_0 \rho_0}{p_0 R_0^2} \frac{G\hat{m}}{\hat{r}^2} = 0 \\ \frac{d\hat{L}_r}{d\hat{r}} = 4\pi \frac{R_0^3 \rho_0 s_0}{L_0} \hat{r}^2 \hat{\rho} \hat{s} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} = 3\alpha \hat{\rho} \hat{r}^2, \\ \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{d\hat{p}}{d\hat{r}} + A \frac{\hat{m}}{\hat{r}^2} = 0, \\ \frac{d\hat{L}_r}{d\hat{r}} = 4\pi B \hat{r}^2 \hat{\rho} \hat{s}, \end{cases} \quad (3.30)$$

dove $\alpha = 4\pi\rho_0 R_0^3/3M_0$, $A = GM_0\rho_0/p_0 R_0$ e $B = R_0^3\rho_0 s_0/L_0$.

3.3.1 Massa adimensionale

Introducendo l'espressione adimensionale della densità

$$\hat{\rho}(\hat{r}) := \frac{\rho\left(\frac{r}{R_\odot}\right)}{\rho_c} = \frac{\rho_c - \rho_b}{\rho_c} \left[(1 - \hat{r}) e^{-a\hat{r}} + \frac{\rho_b}{\rho_c - \rho_b} \right], \quad (3.31)$$

nell'equazione (3.30)₁, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{m}}{d\hat{r}} &= \frac{3\alpha(\rho_c - \rho_b)}{\rho_c} \hat{r}^2 \left[(1 - \hat{r}) e^{-a\hat{r}} + \frac{\rho_b}{\rho_c - \rho_b} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{m} &= \frac{3\alpha(\rho_c - \rho_b)}{\rho_c} \int_0^{\hat{r}} x^2 \left[(1 - x) e^{-ax} + \frac{\rho_b}{\rho_c - \rho_b} \right] dx, \end{aligned} \quad (3.32)$$

da cui, integrando, si ottiene la **massa adimensionale contenuta in una sfera di raggio \hat{r}**

$$\begin{aligned} \hat{m}(\hat{r}) &= \frac{6(a-3)\alpha}{a^4(b+1)} \left[\left(\frac{a^4 b \hat{r}^3}{6(a-3)} + 1 \right) - e^{-a\hat{r}} \cdot \left(-\frac{a^3 \hat{r}^3}{2(a-3)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a^2 \hat{r}^2}{2} + a\hat{r} + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Un grafico del profilo (3.33) è mostrato in Figura 3.5.

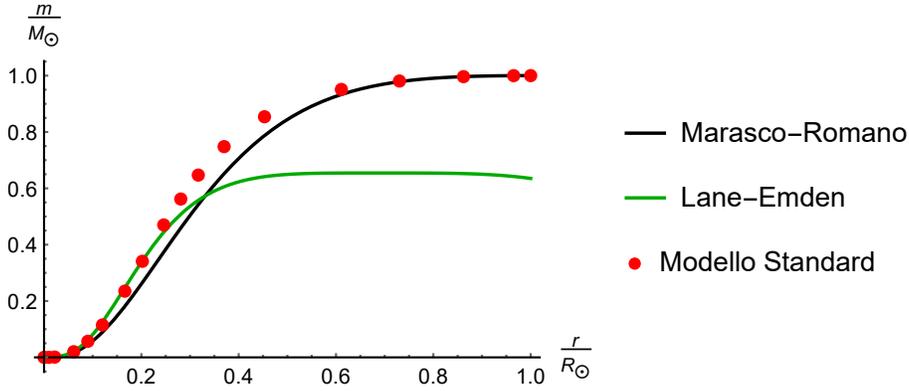


Figura 3.5: Andamento del profilo di massa adimensionalizzato $\hat{m}(\hat{r})$ confrontato con il modello Lane-Emden ($n = 3$) e con i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7].

3.3.2 Pressione adimensionale

Sostituendo (3.31) e (3.33) in (3.30)₂ e integrando, si ha la **pressione adimensionale**

$$\begin{aligned} \hat{p}(\hat{r}) = & \frac{\alpha A b}{a^4 (b+1)^2} \left(\frac{6(a-3)}{\hat{r}} - \frac{1}{2} a^4 b \hat{r}^2 \right) - \\ & - \frac{\alpha A b e^{-a\hat{r}}}{a^4 (b+1)^2} \left(a^3 \hat{r}^2 - (a+1) a^2 \hat{r} + \frac{6(a-3)(b-1)}{b\hat{r}} + 2(a-5)a \right) - \\ & - \frac{\alpha A e^{-2a\hat{r}}}{a^4 (b+1)^2} \left(\frac{3a^2 \hat{r}^2}{2} - 3(a-2)a\hat{r} + \frac{6(a-3)}{\hat{r}} + \frac{3}{2}(a-4)(a-2) \right) + \\ & + \frac{6(a-3)(a+1)\alpha A}{a^4 (b+1)^2} (\text{Ei}(-a\hat{r}) - \text{Ei}(-2a\hat{r})) + C_1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove $b := \frac{\rho_b}{\rho_c - \rho_b}$, C_1 è una costante d'integrazione arbitraria ed

$$\text{Ei}(x) := - \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^t}{t} dt, \quad (3.35)$$

è la **funzione esponenziale integrale**. La costante C_1 è determinabile imponendo una tra le seguenti condizioni al bordo:

$$\hat{p}(0) = 1, \text{ oppure } \hat{p}(1) = \frac{p_b}{p_0}, \quad (3.36)$$

con p_b pressione superficiale della stella. Tuttavia, come si può vedere dalla Figura 3.6, è impossibile trovare un valore di C_1 nella (3.34) tale che, imponendo una tra le due condizioni (3.36), l'altra sia automaticamente soddisfatta.

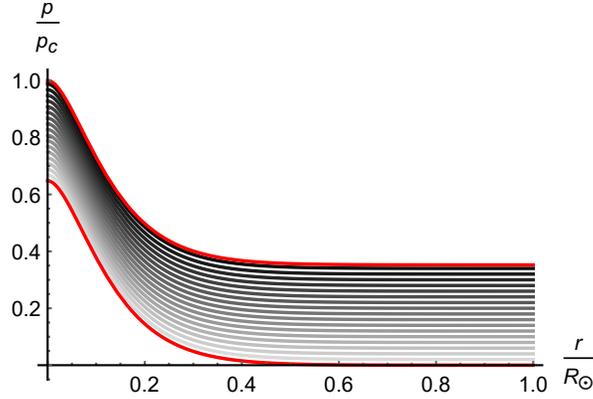


Figura 3.6: Profili di pressione (3.34) per vari valori di C_1 . In rosso sono mostrati i due profili che soddisfano la prima e la seconda condizione al bordo (3.36).

In particolare, poiché la condizione $\hat{p}(0) = 1$ conduce ad un valore di pressione al bordo pari a circa $0.4 p_c$, in [9] si è preferito scegliere

$$C_1 = 7.5 \cdot 10^{-13}, \quad (3.37)$$

in quanto tale scelta produce sia un profilo di temperatura con un valore al bordo pari a 5780 K che i seguenti valori per la pressione nel centro e al bordo della stella

$$\hat{p}(0) \cong 0.6476, \quad (3.38)$$

$$p_b \cong 1.753 \cdot 10^4 \text{ Pa}. \quad (3.39)$$

Il grafico di (3.34) per tale scelta di C_1 è mostrato in Figura 3.7.

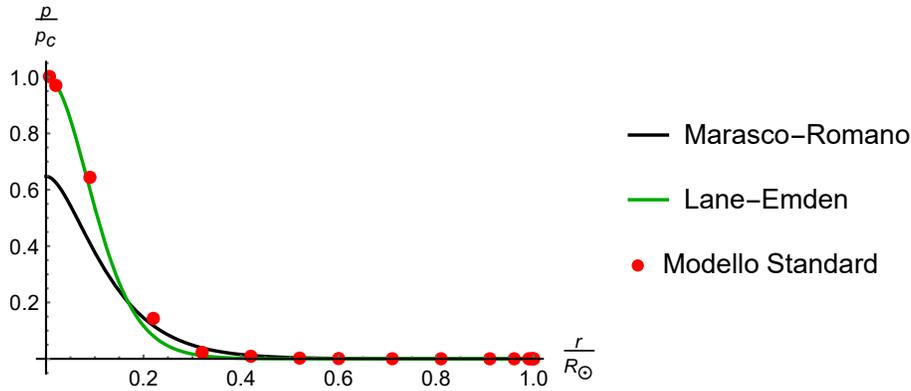


Figura 3.7: Andamento del profilo di pressione adimensionale $\hat{p}(\hat{r})$ confrontato con il modello Lane-Emden ($n = 3$) e con i dati del modello solare standard proposto in [5, Tabella 14.2].

3.3.3 Funzione specifica dei gas e temperatura adimensionale

È possibile ottenere il profilo di temperatura dall'equazione costitutiva dei gas perfetti

$$T(r) = \frac{p(r)}{\mathcal{R}_g(r) \rho(r)}. \quad (3.40)$$

La funzione specifica dei gas perfetti, \mathcal{R}_g , è legata alla **costante universale dei gas perfetti** \mathcal{R} dalla relazione

$$\mathcal{R}_g = \frac{\mathcal{R}}{M_{mol}}, \quad (3.41)$$

dove M_{mol} è la **massa molare** della miscela gassosa. Ciò significa che la funzione specifica dei gas *dipende dalla composizione chimica del gas perfetto considerato, mediante l'abbondanza relativa degli elementi nella miscela.*

Si può determinare l'abbondanza degli elementi mediante il **peso molecolare medio**

$$\mu := \left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z \right)^{-1}, \quad (3.42)$$

dove X, Y e Z sono le **frazioni di massa** rispettivamente dell'Idrogeno, dell'Elio e dei metalli pesanti e tali che $X + Y + Z = 1$. Il legame che intercorre tra \mathcal{R}_g e μ è il seguente

$$\mathcal{R}_g = \frac{k_B}{m_u \mu(r)}, \quad (3.43)$$

dove k_B è la **costante di Boltzmann** e m_u l'**unità di massa atomica**. Per le stelle di sequenza principale, la cui fonte primaria di energia è data dal ciclo p-p, l'andamento delle frazioni di massa è mostrato in Figura 3.8:

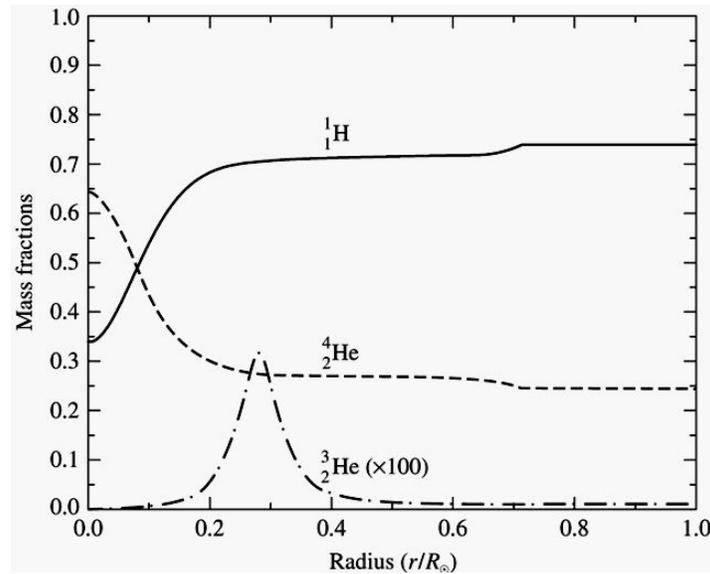


Figura 3.8: Frazioni di massa dell'Idrogeno e dell'Elio, in funzione del raggio adimensionale [6].

È possibile dunque effettuare le seguenti ipotesi sul peso molecolare medio (cfr. [11]):

1. Per $\hat{r} = 0$ la mistura può essere considerata prevalentemente formata da Elio ionizzato, dunque $X = 0, Y = 1, Z = 0$ e di conseguenza $\mu = \frac{4}{3}$;
2. Per $\hat{r} = 0.1$ si è alla frontiera del nucleo, poco più della metà dell'Idrogeno disponibile è stato convertito in Elio, dunque $X \simeq 0.34, Y \simeq 0.64, Z \simeq 0.02$ e di conseguenza $\mu \simeq 0.854701$;
3. Per $0.25 \leq \hat{r} \leq 1$ le abbondanze si possono ritenere approssimativamente costanti e pari a $X \simeq 0.71, Y \simeq 0.27, Z \simeq 0.02$, dunque $\mu \simeq 0.612557$.

Si può dunque determinare la miglior curva d'interpolazione che fitti i valori di \mathcal{R}_g , calcolati mediante la (3.43), corrispondenti ai $\mu(\hat{r})$ ipotizzati sopra, utilizzando la seguente famiglia di funzioni:

$$\mathcal{R}_g(\hat{r}) = \varphi_1 + \varphi_2 (1 - e^{-\varphi_3 \hat{r}}). \quad (3.44)$$

La funzione di best fit risulta essere

$$\mathcal{R}_g(\hat{r}) = 6404.23 + 7512.68 (1 - e^{-7.51786 \hat{r}}). \quad (3.45)$$

Un grafico del profilo (3.45) è mostrato in Figura 3.9:

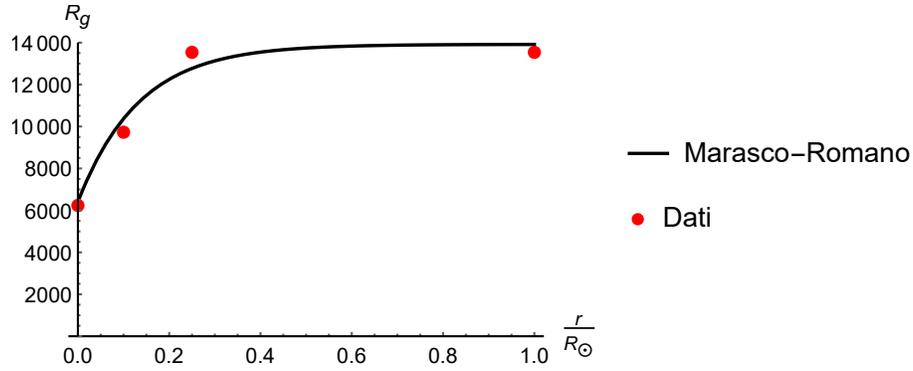


Figura 3.9: Andamento di $\mathcal{R}_g(\hat{r})$ confrontato con i punti (\hat{r}, \mathcal{R}_g) desunti dalle ipotesi 1.-2.-3. su $\mu(\hat{r})$ [punti rossi].

È possibile dunque ottenere \hat{T} adimensionalizzando l'equazione (3.40)

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}(\hat{r})}{\hat{\mathcal{R}}_g(\hat{r}) \hat{\rho}(\hat{r})}, \quad (3.46)$$

dove $\hat{\mathcal{R}}_g(\hat{r})$ è ottenibile da $\mathcal{R}_g(\hat{r})$ dividendo tutto per $\mathcal{R}_g(0)$

$$\hat{\mathcal{R}}_g(\hat{r}) = \frac{\mathcal{R}_g(\hat{r})}{\mathcal{R}_{g,0}}. \quad (3.47)$$

Un grafico di $\hat{T}(\hat{r})$ è mostrato in Figura 3.10.

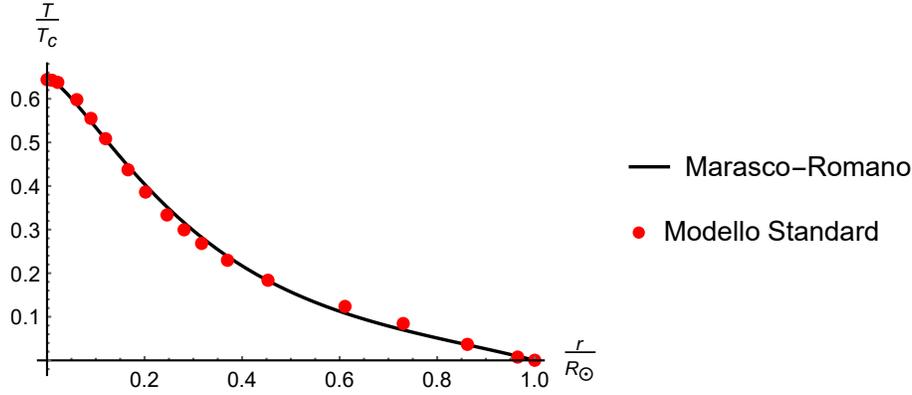


Figura 3.10: Andamento di $\hat{T}(\hat{r})$ confrontato con i dati ottenuti dal modello solare standard proposto in [4, Tabella 7].

3.3.4 Luminosità e produzione di potenza specifica

Per determinare il profilo di luminosità, si supponga che la funzione $\hat{L}_{\hat{r}}$ sia della forma

$$\hat{L}_{\hat{r}} = \begin{cases} c_1 \hat{r}^3 + c_2 \hat{r}^4 + c_3 \hat{r}^5, & \text{se } 0 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_1, \\ c_4 (1 - e^{-k \hat{r}^2}), & \text{se } \hat{r}_1 < \hat{r} \leq 1, \end{cases} \quad (3.48)$$

dove:

- c_1 , c_2 e c_3 sono costanti da determinare imponendo la continuità di $\hat{L}_{\hat{r}}$ in \hat{r}_1 con le rispettive derivate prime e seconde,
- c_4 è una costante da determinare imponendo $\hat{L}_{\hat{r}}(1) = 1$,
- \hat{r}_1 e k sono due valori da determinare mediante regressione non lineare rispetto ai dati del modello solare standard.

Per quanto riguarda c_4 , imponendo che $\hat{L}_{\hat{r}}(1) = 1$ si ha

$$c_4 (1 - e^{-k}) = 1 \rightarrow c_4 = \frac{1}{1 - e^{-k}}. \quad (3.49)$$

Imponendo la continuità di $\hat{L}_{\hat{r}}$ con le derivate prime e seconde si ottiene

$$\begin{cases} c_1 \hat{r}_1^3 + c_2 \hat{r}_1^4 + c_3 \hat{r}_1^5 = c_4 (1 - e^{-k \hat{r}_1^2}), \\ 3c_1 \hat{r}_1^2 + 4c_2 \hat{r}_1^3 + 5c_3 \hat{r}_1^4 = 2kc_4 \hat{r}_1 e^{-k \hat{r}_1^2}, \\ 6c_1 \hat{r}_1 + 12c_2 \hat{r}_1^2 + 20c_3 \hat{r}_1^3 = 2kc_4 e^{-k \hat{r}_1^2} - 4c_4 k^2 \hat{r}_1^2 e^{-k \hat{r}_1^2}, \end{cases} \quad (3.50)$$

da cui

$$\begin{cases} \hat{r}_1^3 c_1 + \hat{r}_1^4 c_2 + \hat{r}_1^5 c_3 = \frac{(1 - e^{-k\hat{r}_1^2})}{1 - e^{-k}}, \\ 3\hat{r}_1^2 c_1 + 4\hat{r}_1^3 c_2 + 5\hat{r}_1^4 c_3 = \frac{(2k\hat{r}_1 e^{-k\hat{r}_1^2})}{1 - e^{-k}}, \\ 6\hat{r}_1 c_1 + 12\hat{r}_1^2 c_2 + 20\hat{r}_1^3 c_3 = \frac{(2ke^{-k\hat{r}_1^2} - 4k^2\hat{r}_1^2 e^{-k\hat{r}_1^2})}{1 - e^{-k}}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Risolvendo il sistema lineare di 3 equazioni nelle 3 incognite $\{c_i\}_{i=1}^3$, si ottiene

$$\begin{cases} c_1 = \frac{e^{k(1-\hat{r}_1^2)} (10e^{k\hat{r}_1^2} - 10 - 7k\hat{r}_1^2 - 2k^2\hat{r}_1^4)}{(e^k - 1)\hat{r}_1^3}, \\ c_2 = -\frac{e^{k(1-\hat{r}_1^2)} (15e^{k\hat{r}_1^2} - 15 - 12k\hat{r}_1^2 - 4k^2\hat{r}_1^4)}{(e^k - 1)\hat{r}_1^4}, \\ c_3 = \frac{e^{k(1-\hat{r}_1^2)} (6e^{k\hat{r}_1^2} - 6 - 5k\hat{r}_1^2 - 2k^2\hat{r}_1^4)}{(e^k - 1)\hat{r}_1^5}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Dalla regressione non lineare, la miglior stima per i valori \hat{r}_1 e k risulta essere

$$\hat{r}_1 = 0.18, \quad k = 61.283. \quad (3.53)$$

La funzione di best fit risulta essere in definitiva

$$\hat{L}_{\hat{r}} = \begin{cases} 966.39\hat{r}^3 - 7148.04\hat{r}^4 + 14450.1\hat{r}^5, & \text{se } 0 \leq \hat{r} \leq 0.18, \\ \frac{1 - e^{-61.283\hat{r}^2}}{1 - 2.42734 \cdot 10^{-27}}, & \text{se } 0.18 < \hat{r} \leq 1. \end{cases} \quad (3.54)$$

Un grafico di (3.54) è mostrato in Figura 3.11:

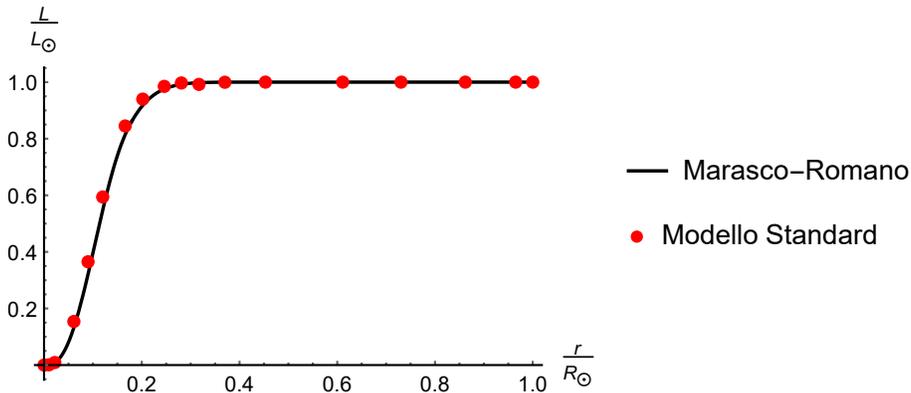


Figura 3.11: Andamento di $\hat{L}_{\hat{r}}(\hat{r})$ confrontato con i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7].

Sostituendo (3.54) in (3.30)₃ quindi, è possibile ottenere la produzione di potenza specifica

$$\hat{s}(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi B \hat{r}^2 \hat{\rho}} \frac{d\hat{L}_{\hat{r}}}{d\hat{r}}. \quad (3.55)$$

Un grafico di $\hat{s}(\hat{r})$ è mostrato in Figura 3.12.

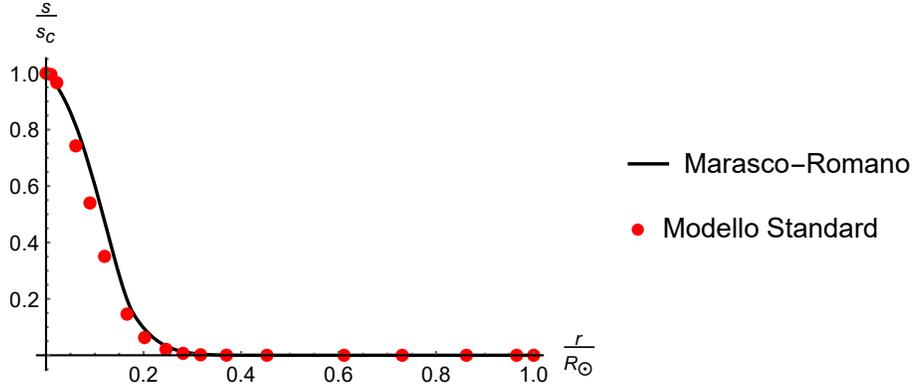


Figura 3.12: Andamento di $\hat{s}(\hat{r})$ confrontato con i dati del modello solare standard proposto in [4, Tabella 7].

3.3.5 Opacità e funzione γ

Una volta ottenuti tutti i campi, è possibile infine determinare le funzioni $\chi(\hat{r})$ e $\gamma(\hat{r})$, mediante le equazioni (3.26)_{4,5}

$$\begin{cases} \chi(\hat{r}) = -\frac{64\pi\hat{r}^2 R_0 \sigma}{3\rho} \frac{dT}{d\hat{r}} \frac{T^3}{L_r}, & \hat{r} \in [0, \hat{R}_r], \\ \gamma(\hat{r}) = \frac{T \frac{dp}{d\hat{r}}}{T \frac{dp}{d\hat{r}} - p \frac{dT}{d\hat{r}}}. & \hat{r} \in] \hat{R}_r, 1]. \end{cases} \quad (3.56)$$

Gli andamenti delle funzioni (3.56), rispettivamente nella zona nucleo-radiativa e in quella convettiva, sono mostrati nelle Figure 3.13 e 3.14.

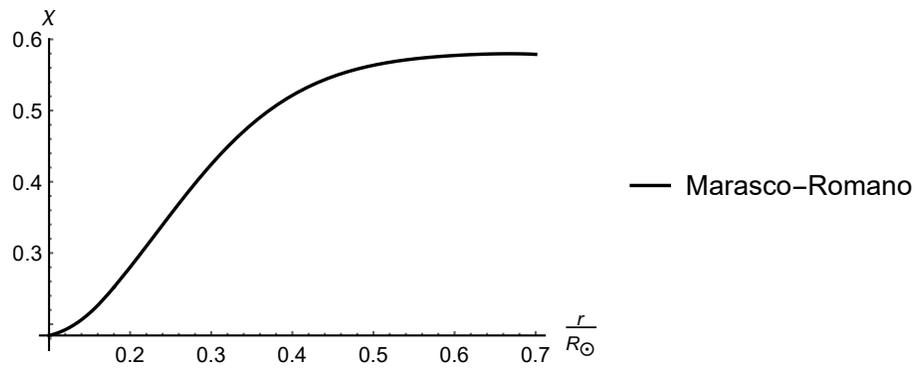


Figura 3.13: Andamento dell'opacità χ per la zona nucleo-radiativa di una stella di sequenza principale.

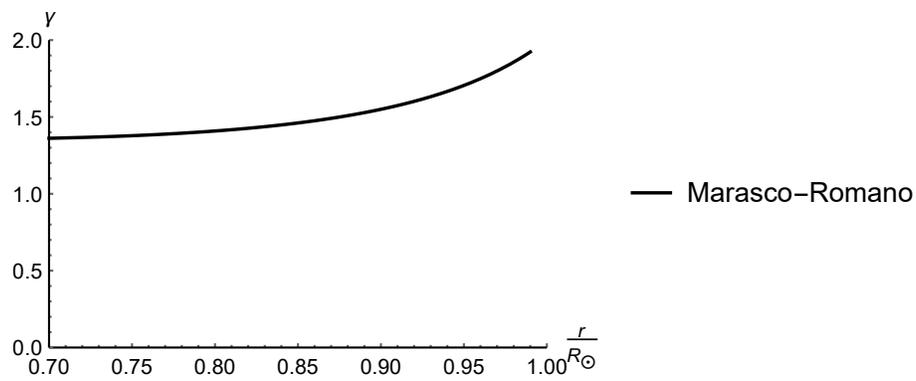


Figura 3.14: Andamento della funzione γ per la zona convettiva di una stella di sequenza principale.

Appendice A

Opacità

L'opacità χ è una quantità che caratterizza “l'impenetrabilità” di un materiale (ad. es. gas stellare) rispetto alla radiazione incidente. Ciò è causato principalmente dall'assorbimento di fotoni prodotti nel nucleo, ad opera di quella parte del gas stellare circostante non ancora totalmente ionizzato, mediante quattro principali fenomeni quantomeccanici associati all'interazione radiazione-materia:

- **Transizioni “bound-bound”**, in cui un fotone di energia $E_\gamma = h\nu$ (dove h è la **costante di Planck** e ν la **frequenza intrinseca** del fotone) viene assorbito da un elettrone di un atomo non ancora completamente ionizzato, facente parte del gas stellare, in modo da generare una transizione elettronica dallo stato fondamentale dell'atomo ad un certo stato energetico eccitato (tale che vengano rispettate le **regole di selezione**).
- **Transizioni “bound-free”**, in cui la transizione avviene tra lo stato fondamentale dell'atomo ed un livello energetico tale da provocarne la ionizzazione.
- **Transizioni “free-free”**, in cui un fotone viene assorbito da un elettrone libero presente in un gas parzialmente ionizzato, provocandone un'accelerazione.
- **Scattering elettronico**, in cui un elettrone libero non assorbe un fotone incidente, ma ne causa una deviazione (ad. es. **Scattering Compton**).

L'opacità sarà allora una quantità macroscopica legata alle sezioni d'urto di questi processi d'interazione radiazione-materia. Ci si aspetta quindi che l'opacità sia funzione:

- della **densità**, in quanto all'aumentare della densità risulta maggiore la probabilità di assorbimento del fotone incidente,
- della **temperatura**, in quanto la probabilità di assorbimento *diminuisce* se la temperatura (e dunque l'agitazione termica) del gas aumenta,

- delle **frazioni di massa**, poiché differenti tipi di atomi hanno differenti sezioni d'urto.

χ sarà dunque una funzione del tipo:

$$\chi = \chi(\rho, T, X, Y, Z), \quad (\text{A.1})$$

dove X, Y, Z sono le frazioni di massa rispettivamente dell'Idrogeno, dell'Elio e dei metalli pesanti componenti la stella. Per temperature superiori a 10^7 K, si può dimostrare (cfr. [12, Sec. 3.7]) che, a partire dalla **legge di Kramers**, è possibile ottenere la seguente approssimazione per l'andamento dell'opacità:

$$\chi = \chi_0 \frac{\rho}{T^{3.5}}. \quad (\text{A.2})$$

Per costruire un modello di struttura stellare basato sulle ipotesi classiche quindi, è necessario fornire il profilo $\chi(\rho, T, X_i)$ di una data stella. La problematica principale risiede nell'impossibilità sperimentale di riprodurre le condizioni di pressione e temperatura necessarie a simulare l'ambiente interno della stella, in modo da ottenere stime accurate di χ per più valori di r .

In letteratura, si è soliti procedere calcolando l'opacità della stella mediante simulazioni numeriche basate sui modelli stellari standard. Vari gruppi di ricerca hanno proceduto in tal senso, i progetti più importanti dei quali sono l'**Opacity Project (OP)** e il **progetto OPAL**.

Appendice B

Costanti fisiche e grandezze fondamentali utilizzate nel testo

Denominazione	Simbolo	Valore
Costante di gravitazione universale	G	$6.67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Costante di Boltzmann	k_B	$1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Costante di Stephan-Boltzmann	σ	$5.670374419 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Unità di massa atomica	m_u	$1.66053906660(50) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Numero di Avogadro	\mathcal{N}	$6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Costante universale dei gas perfetti	\mathcal{R}	$8.314462618 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Velocità della luce nel vuoto	c	$299792458 \text{ m s}^{-1}$
Massa del protone	m_p	$1.67262192369(51) \text{ kg}$
Massa del Sole	M_\odot	$1.98847(7) \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Raggio del Sole	R_\odot	$6.955 \cdot 10^8 \text{ m}$
Luminosità del Sole	L_\odot	$3.854 \cdot 10^{26} \text{ W}$
Temperatura superficiale del Sole (mod.)	T_b	5770 K
Densità superficiale del Sole (mod.)	ρ_b	$1.99 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$
Pressione superficiale del Sole (mod.)	p_b	$8 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ [5]; 10 Pa [10]
Temperatura centrale del Sole (mod.)	T_c	$1.56 \cdot 10^7 \text{ K}$
Densità centrale del Sole (mod.)	ρ_c	$1.513 \cdot 10^5 \text{ kg m}^{-3}$
Pressione centrale del Sole (mod.)	p_c	$2.334 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$

Bibliografia

- [1] A. Marasco & A. Romano, *An analytical solution of stationary hydrodynamic equations of a main-sequence star*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 16 (8) 1950120, 2019.
- [2] Ho-Young Kwak, Jung-Hwak Jun, *Hydrodynamics and Thermodynamics of Newtonian Stars*, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 97:1, 45-58, DOI: 10.1080/0309192031000094045, 29 Agosto 2002.
- [3] A. R. Choudhuri, *Astrophysics for Physicists*, ISBN-13: 978-0-511-67742-7, Cambridge University Press, 2010.
- [4] S. Turck-Chièze, S. Cahen, M. Cassè, C. Doom, *Revisiting the standard solar model*, DOI: 10.1086/166936, Novembre 1988.
- [5] J. P. Cox, *Allen's Astrophysical Quantities*, ISBN-13: 978-1-4612-1186-0, Springer, New York, 2004.
- [6] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *An introduction to Modern Astrophysics (2nd Edition)*, ISBN-13: 978-0805304022, Pearson, 28 Luglio 2006.
- [7] *Polytropes* (<https://www.astro.princeton.edu/~gk/A403/polytrop.pdf>).
- [8] Enciclopedia Treccani, “*politropica*” (<http://www.treccani.it/enciclopedia/politropica/>).
- [9] The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty, *CO-DATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants*, NIST Standard Reference Database, May 2019 (<https://physics.nist.gov/cuu/Constants/>).
- [10] K. Lang, *The Sun from Space*, ISBN-13: 978-3-540-76953-8, Springer, 2009.
- [11] M. S. Longair, *High Energy Astrophysics (3rd Edition)*, ISBN-13: 978-0521756181, Cambridge University Press, 2011.
- [12] D. J. Mullan, *Physics of the Sun: A First Course*, ISBN-13: 978-1420083071, Chapman and Hall/CRC, 2010.

- [13] O. R. Pols, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht, 2011.
- [14] A. Romano, M. Furnari, *The physical and mathematical foundations of the theory of relativity: a critical analysis*, Birkhauser-Springer, in print, 2019.