UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"



Scuola Politecnica e delle Scienze di Base Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

Condensazione di Bose-Einstein in gas atomici ultrafreddi

Relatori: Prof. Antonio De Candia Candidato: Florinda Di Pierno Matr. N85000906

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Introduzione			2
1	Condensazione in un gas di Bose		4
	1.1	Equazione di stato del gas	4
	1.2	Condensazione di Bose-Einstein	6
	1.3	Comportamento termodinamico del condensato	11
2	Condensazione di Bose-Einstein in gas atomici		16
	2.1	Raffreddamento laser, trappola magnetica ed evaporazione forzata	16
	2.2	Numeri di occupazione e temperatura critica	18
	2.3	Limite termodinamico	20
	2.4	Rilevazione di un condensato	21
	2.5	Proprietà termodinamiche di un condensato in una trappola armonica .	24
Co	onclu	sioni	27
Aŗ	Appendice alla funzione di Bose-Einstein		
Bi	Bibliografia		

Introduzione

Nel 1924 il fisico indiano Satyendra Bose inviò ad Albert Einstein un articolo in cui, trattando i fotoni come particelle identiche, derivò la legge di radiazione di corpo nero di Planck con argomenti puramente statistici. Einstein applicò tale teoria al caso di un gas ideale di atomi: nacque la statistica di Bose-Einstein.



Figura 1: (a) Per alte temperature il sistema manifesta un comportamento classico. (b) Al diminuire della temperatura i pacchetti d'onda delle particelle diventano più larghi.(c) Ad una certa temperatura critica i pacchetti d'onda iniziano a sovrapporsi e si forma il condensato di Bose-Einstein. (d) Per T=0 si è in presenza di un condensato puro.

Lo stesso Einstein fu il primo a notare un particolare comportamento di tale distribuzione sotto opportune condizioni: a temperature prossime allo zero assoluto una frazione significativa degli atomi occupa lo stato quantico a più bassa energia. Tale fenomeno oggi è conosciuto come *condensazione di Bose – Einstein* o *BEC*; la condizione affinché il fenomeno avvenga è che la lunghezza d'onda degli atomi deve essere abbastanza grande in modo che i pacchetti d'onda delle particelle si sovrappongano, considerando che $\lambda \propto T^{-1/2}$, ciò dipende dalla temperatura.

Quando si è in presenza di un condensato di Bose-Einstein, la natura ondulatoria di tutte le particelle del sistema è identica e tutti gli atomi tra di loro hanno differenze di fasi costanti, ovvero la *BEC* è caratterizzata da coerenza quantistica. E' proprio questa proprietà a fare della *condensazione di Bose – Einstein* uno dei topic più importanti degli ultimi decenni: permette di osservare, a livello macroscopico, le proprietà quan-

tistiche degli atomi.

Tuttavia le regioni al di sopra e al di sotto la transizione a Bec sono termodinamicamente proibite al sistema. Il diagramma di fase in figura 2 mostra le caratteristiche generali comuni a tutti i sistemi atomici:

- a basse densità e alte energia è presente la fase gassosa;
- ad alte densità vi sono varie fasi condensate;
- le densità intermedie sono termodinamicamente proibite a meno che non si è a temperature veramente alte.



Figura 2: Diagramma di fase di un sistema di atomi

La regione della *BEC* è accessibile per densità talmente alte che, con l'elio come unica eccezione, tutti gli atomi formano strutture cristalline che escludono la possibilità di formazione del condensato.

Raggiungere la BEC per basse densità è altrettanto proibito ma bisogna considerare l'aspetto cinetico: un gas di atomi raggiunge l'equilibrio cinetico attraverso collisioni a due corpi, mentre l'equilibrio chimico, che permette la formazione delle molecole e quindi dei solidi, richiede collisioni a tre corpi. A basse densità e lontano da pareti materiali, la frequenza degli urti a due corpi domina su quella a tre corpi e il gas può raggiungere equilibrio cinetico, in uno stato metastabile (con vita media dell'ordine dei microsecondi), prima che il sistema raggiunga equilibrio chimico, cioè prima della transizione a solido. Di conseguenza si parte da gas *diluiti* ($10^8 atomi/cm^3$) e si manipola il sistema in modo da raggiungere le giuste condizioni di temperatura e densità ($10^{14} atomi/cm^3$). Quindi sotto opportune condizioni e per tempi relativamente brevi è possibile creare una nuovo stato della materia nel quale gli atomi mostrano, a livello macroscopico, la loro natura ondulatoria.

Nel seguente elaborato verrà discussa nei dettagli la teoria della condensazione di Bose - Einstein, prima nel caso ideale di particelle libere in una scatola, poi verrà applicata la teoria al caso di gas atomici opportunamente manipolati. In entrambi i casi saranno analizzate le proprietà termodinamiche del sistema e saranno confrontate tra di loro.

Capitolo 1

Condensazione in un gas di Bose

Un gas di Bose è composto da particelle identiche, indistinguibili e debolmente interagenti per il quale gli effetti quantistici, dovuti proprio all'indistinguibilità delle particelle, assumono un ruolo fontamentale. Il discriminante tra natura classica e quantistica di una particella del gas è la lunghezza d'onda termica di De Broglie,

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi m kT)^{1/2}},\tag{1.1}$$

che rappresenta la lunghezza d'onda medie delle particelle di un gas ideale di densità n e temperatura T. Quando il sistema non soddisfa la condizione per cui

$$n\lambda^3 \equiv \frac{nh^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \ll 1,$$
 (1.2)

la natura quantistica delle particelle del sistema non può essere ignorata. Il parametro $n\lambda^3$ evidenzia il passaggio tra meccanica classica e meccanica quantistica delle proprietà fisiche del sistema:

- nel limite in cui $n\lambda^3 \rightarrow 0$ tutte le proprietà fisiche tendono al limite classico.
- per piccoli valori, ma comunque non trascurabili, di $n\lambda^3$ si discostano dal limite classico.
- quando $n\lambda^3 \approx 1$ il comportamento del sistema diventa significativamente differente da quello classico ed è caratterizzato dalla comparsa di effetti quantistici.

Dalle precedenti considerazioni è evidente che un sistema tende a manifestare un comportamento quantistico quando si trova a basse temperature o quando ha un'alta densità, oppure entrambe, ed è altresì evidente come minore è la massa delle particelle e maggiori sono gli effetti di tale comportamento.

1.1 Equazione di stato del gas

Consideriamo un gas di Bose composto da N particelle indistinguibili, non interagenti, ad energia E e in un certo volume V, tali condizioni definiscono il macrostato del sistema. Dal momento in cui, per grandi volumi V, i livelli energetici di singola particella

sono molto vicini tra loro, è possibile dividere lo spettro energetico in un gruppo di livelli, le cosiddette *celle energetiche*; denotiamo con ε_i l'energia media di un livello energetico, con $g_i \gg 1$ il numero di livelli in ogni cella e con n_i il numero di particelle in ogni cella.

L'energia totale *E*, per particelle non interagenti, non è altro che la somma delle *N* energie di singola particella (ε_i), vi sono numerosi modi in cui l'energia totale *E* può essere distribuita tra le *N* particelle: ognuno di questi modi specifica un microstato del sistema.

La quantità statistica di interesse è il numero di microstati differenti accessibili al sistema $\Omega(N, V, E)$. I vincoli del sistema sono:

$$\sum_{i} n_i = N, \tag{1.3}$$

$$\sum_{i} n_i \varepsilon_i = E, \qquad (1.4)$$

$$\Omega(N, V, E) = \sum_{\{n_i\}} W\{n_i\}.$$
(1.5)

Dove $W \{n_i\}$ è il numero di microstati associati alla distribuzione $\{n_i\}$, mentre la sommatoria va su tutte le possibili distribuzioni.

Da semplici considerazioni riguardanti la natura delle particelle e la probabilità di occupazione delle celle energetiche è possibile ricavare:

$$W\{n_i\} = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!}.$$
(1.6)

L'entropia è data dalla formula di Plank

$$S(N,V,E) = kln\Omega(N,V,E) = kln\left[\sum_{\{n_i\}} W\{n_i\}\right]$$
(1.7)

che può essere sostituita da

$$S(N,V,E) \approx k ln W\{n_i^*\}$$
(1.8)

dove $\{n_i^*\}$ denota la particolare distribuzione che massimizza $W\{n_i^*\}$, cioè la distribuzione più probabile. La determinazione del massimo deve ovviamente rispettare i vincoli del sistema per cui è utile utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; tenendo presente l'equazione (1.6) e l'approssimazione di Stirling per cui $ln(x!) \approx xlnx - x$ si ottiene

$$lnW\{n_i^*\} \approx \sum_i \left[n_i^* ln\left(\frac{g_i}{n_i^*}\right) + g_i ln\left(1 + \frac{n_i^*}{g_i}\right) \right], \tag{1.9}$$

$$\delta lnW\{n_i^*\} - \left[\alpha \sum_i \delta n_i + \beta \sum_i \varepsilon_i \delta n_i\right] = 0.$$
(1.10)

Sostituendo la (1.9) nella (1.10) si ottiene

$$\sum_{i} \left[ln \left(\frac{g_i}{n_i} \right) - \alpha - \beta \varepsilon_i \right]_{n_i = n_i^*} \delta n_i$$
(1.11)

in virtù dell'arbitrarietà dell'incremento δn_i , si ottiene (per ogni i)

$$ln\left(\frac{g_i}{n_i}\right) - \alpha - \beta \varepsilon_i = 0, \qquad (1.12)$$

da cui segue che

$$n_i^* = \frac{g_i}{e^\alpha + \beta \varepsilon_i - 1} \tag{1.13}$$

Sostituendo tale espressione nella (1.8) si ottiene l'entropia del gas

$$\frac{S}{k} \approx \ln W \{n_i^*\} = \sum_i \left[n_i^* \ln \left(\frac{g_i}{n_i^*}\right) + g_i \ln \left(1 + \frac{n_i^*}{g_i}\right) \right]$$
$$= \sum_i \left[n_i^* (\alpha + \beta \varepsilon_i) - g_i \ln \left\{1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}\right\} \right]$$
(1.14)

Facendo uso delle (1.3) e (1.4) si ricava

$$-\sum_{i}g_{i}ln\left\{1-e^{-\alpha-\beta\varepsilon_{i}}\right\}=\frac{S}{k}-\alpha N-\beta E,$$
(1.15)

$$\alpha = -\frac{\mu}{kT}, \ \beta = \frac{1}{kT}$$
(1.16)

Il secondo termine della (1.15) altro non è che il prodotto PV/kT. In definitiva l'equazione di stato di un gas di Bose assume la seguente forma:

$$\frac{PV}{kT} = -\sum_{i} g_{i} ln \left\{ 1 - e^{-\alpha - \beta \varepsilon_{i}} \right\}$$
(1.17)

1.2 Condensazione di Bose-Einstein

L'equazione di stato del gas di Bose e il numero totale di particelle N possono essere espresse in termini della funzione di gran partizione Q e della fugacità z:

$$\frac{PV}{kT} \equiv ln \mathbf{Q} = -\sum_{\varepsilon} ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon})$$
(1.18)

$$N \equiv \sum_{\varepsilon} \langle n_{\varepsilon} \rangle = \sum_{\varepsilon} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1}, \qquad (1.19)$$

La fugacità è un ottimo parametro per verificare il discostamento di un gas reale da uno ideale, essa è collegata al potenziale chimico μ e quindi, in qualche modo, alla densità del gas, dalla seguente relazione

$$z \equiv exp(\mu/kT). \tag{1.20}$$

In virtù del fatto, che per grandi V, lo spettro energetico degli stati di singola particella è quasi continuo, la sommatoria nelle equazioni (1.18) e (1.19) può essere sostituita da un'integrazione dove la densità degli stati assume la forma:

$$a(\varepsilon)d\varepsilon = (2\pi V/h^3)(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon.$$
(1.21)

Tuttavia, così facendo, si attribuisce un peso statistico nullo al livello fondamentale $\varepsilon = 0$, cosa che è sbagliata in quanto in una trattazione quanto-meccanica bisogna attribuire un peso statistico pari a uno per ogni stato non degenere di singola particella del sistema in esame. Quindi è opportuno portare fuori dalla sommatoria tale termine prima di passare all'integrazione. Si ottiene:

$$\frac{P}{kT} = -\frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} ln(1 - ze^{-\beta\varepsilon}) d\varepsilon - \frac{1}{V} ln(1 - z)$$
(1.22)

$$\frac{N}{V} = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} + \frac{1}{V} \frac{z}{1 - z};$$
(1.23)

ovviamente il limite inferiore di integrazione può ancora essere 0 in quanto lo stato fondamentale comunque sia non dà contributo all'integrale. Prendendo in esame i termini tirati fuori dalla sommatoria, cioè i termini corrispondenti allo stato fondamentale $\varepsilon = 0$, si osserva che per $z \ll 1$, una situazione non molto lontana dal limite classico, entrambi i termini sono dell'ordine di 1/N e quindi trascurabili. Inoltre per $z \rightarrow 1$, il termine z/(1-z)V nella (1.23), che corrisponde a N_0/V (dove N_0 è il numero di particelle nello stato fondamentale), tende a N/V; l'accumulo di una frazione macroscopica di particelle nello stato fondamentale porta al fenomeno della *condensazione di Bose – Einstein*.

Dal momento in cui $z/(1-z) = N_0$, e quindi $z = N_0/N_0 + 1$, il termine $\{-V^{-1}ln(1-z)\}$, pari a $\{-V^{-1}ln(N_0+1)\}$, è al più $O(N^{-1}lnN)$ per cui è anch'esso trascurabile. In definitiva, ponendo $\beta \varepsilon = x$ si ottiene

$$\frac{P}{kT} = -\frac{2\pi (2mkT)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty x^{1/2} ln(1-ze^{-x}) dx = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \qquad (1.24)$$

$$\frac{N-N_0}{V} = -\frac{2\pi (2mkT)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{z^{-1} e^x - 1} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z), \tag{1.25}$$

dove $g_v(z)$ è la *funzione di Bose – Einstein* definita come segue:

$$g_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{z^{-1} e^x - 1}$$
(1.26)

Eliminando z dalla (1.24) si giunge ad un'espressione esplicita per l'equazione di stato del sistema. Ricordando l'equazione (1.18), si ricava l'energia interna U

$$U \equiv -\left(\frac{\partial}{\partial\beta}lnQ\right)_{z,V} = kT^2 \left\{\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{PV}{kT}\right)\right\}_{z,V}$$

$$= kT^2 g_{5/2}(z) \left\{\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\right\} = \frac{3}{2}kT\frac{V}{\lambda^3}g_{5/2}(z),$$
 (1.27)

dove si è tenuto conto del fatto che $\lambda \propto T^{-1/2}$. È quindi possibile osservare che il sistema in esame soddisfa la relazione

$$P = \frac{2}{3}(U/V). \tag{1.28}$$

Per piccoli valori della fugacità z, cioè per gas molto rarefatti e quidni vicini al caso di un gas ideale, la *funzione di Bose – Einstein* può essere espansa in potenze di z come segue

$$g_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{z^{-1} e^x - 1} \approx z + \frac{z^2}{2^{\nu}} + \frac{z^3}{3^{\nu}} + \dots,$$
(1.29)

e allo stesso tempo è possibile trascurare N_0 in confronto a N. In questo modo è possibile eliminare z dall'equazione di stato e dall'espressione per N, prima invertendo la serie nella (1.25) in modo da ottenere un'espressione di z in funzione di $n\lambda^3$ e sostituirla nell'espansione in serie dell'equazione (1.24).

Si verifica che l'equazione di stato assume la forma dell'espansione viriale

$$\frac{PV}{NkT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v}\right)^{l-1}.$$
(1.30)

1 1

In questa approssimazione il calore specifico assume la seguente forma

$$\frac{C_V}{Nk} \equiv \frac{1}{Nk} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N,V} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{PV}{Nk} \right) \right\}_v = \frac{3}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{5-3l}{2} a_l \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1} \\
= \frac{3}{2} \left[1+0.0884 \left(\frac{\lambda^3}{v} \right) + 0.0066 \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^2 + 0.0004 \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^3 + \dots \right].$$
(1.31)

Ricordando la dipendenza di λ dalla temperatura si osserva che, per $T \to \infty$ (cioè $\lambda \to 0$) sia la pressione che il calore specifico approcciano ai valori classici, ovvero rispettivamente nkT e $\frac{3}{2}Nk$. Inoltre per $T \to 0$ il calore specifico va zero, mentre per temperature finite assume valori più grandi del limite classico. Ciò significa che la curva (C_V, T) passa attraverso un massimo ad una certa temperatura detta temperatura critica T_c e, tale massimo, si può dimostrare avere natura di cuspide.

Nel momento in cui non vale più l'approssimazione di gas ideale, non è più possibile sviluppare in potenze di z la funzione di Bose-Einstein e quindi l'equazione di stato non assume più la forma dell'espansione viriale.

Ritornando alla (1.25), essa può essere riscritta come

$$N_e = V \frac{(2\pi m kT)^{3/2}}{h^3} g_{3/2}(z)$$
(1.32)

dove si è indicato con n_e il numero di particelle negli stati eccitati; è chiaro che a meno di gas estremamanete densi $(z \rightarrow 1)$, $N_e \simeq N$.

Per $0 \le z \le 1$, la funzione $g_{3/2}(z)$ è monotona crescente e limitata; il suo massimo equivale alla funzione ζ di Riemann, quindi

$$g_{3/2}(z) < \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2.612$$
 (1.33)

Di conseguenza, per un certo volume e per una certa temperatura, il numero all'equilibrio di particelle negli stati eccitati è anch'esso limitato a

$$N_e \le V \frac{(2\pi m KT)^{3/2}}{h^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$
 (1.34)

Finchè il numero di particelle nel sistema è minore del valore limite, le particelle sono distribuite tra gli stati eccitati ed è possibile ricavare il valore di z dall'equazione (1.32) con $N_e \simeq N$; ma se il numero di particelle è maggiore limite del valore limite

$$N_e = V \frac{(2\pi m KT)^{3/2}}{h^3} \zeta \left(\frac{3}{2}\right)$$
(1.35)

e il resto delle particelle è spinto *in massa* nello stato fondamentale $\varepsilon = 0$ che ha una capacità essenzialmente illimitata

$$N_0 = N - \left\{ V \frac{(2\pi m KT)^{3/2}}{h^3} \zeta \left(\frac{3}{2}\right) \right\}.$$
 (1.36)

Il valore di z ora è dato dall'equazione

$$z = \frac{N_0}{N_0 + 1} \simeq 1 - \frac{1}{N_0} \tag{1.37}$$

che è approssimabile all'unità. Il fenomeno per cui un numero mascroscopico di particelle si accumula nel singolo stato quantico $\varepsilon = 0$ prende il nome di *condensazione di Bose – Einstein*.

Nonostante tale fenomeno rimandi al processo di condensazione del vapore in liquido che ha luogo nello spazio nelle coordinate, è importante sottolineare che la condensazione di Bose-Einstein è concettualmente diversa, è un fenomeno puramente di origine quantistica che avviene nello spazio dei momenti e non nello spazio ordinario. È facile dedurre che la condizione affinchè avvenga la condensazione, a $V \in T$ è

$$N > VT^{3/2} \frac{(2\pi mk)^3/2}{h^3} \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \tag{1.38}$$

in genere però in un sistema è caratterizzato dal numero di particelle N e dal volume, per cui la condizione affinchè il fenomeno della condensazione avvenga è piuttosto

$$T < T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left\{ \frac{N}{V\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right\}^{2/3};$$
(1.39)

 T_c dipende dalla massa delle particelle *m* e dalla densità N/V del sistema.

In questo modo, per $T < T_c$, il sistema può essere visto come una composizione di due fasi distinte:

• una *fase normale* costituita da $N_e \left\{ = N(T/T_c)^{2/3} \right\}$ particelle distribuite tra gli stati eccitati;



Figura 1.1: Frazione di particelle nella fase condensata e nella fase normale di un gas di Bose in funzione del parametro (T/T_c)

• una *fase condensata* costituita da $N_0 \{= (N - N_e)\}$ particelle accumulate nello stato fondamentale.

In figura 1.1 è mostrato l'andamento della frazione di particelle negli stati eccitati (N_e/N) e nello stato fondamentale (N_0/N) in funzione di (T/T_c) . Come si evince dal grafico, per $T > T_c$ il numero di particelle nello stato fondamentale, z/(1-z), è trascurabile rispetto al totale N, pertanto è presente la sola fase normale, mentre per $T > T_c$ avviene esattamente l'opposto: la situazione è singolare per $T = T_c$

mentre per $T > T_c$ avviene esattamente l'opposto; la situazione è singolare per $T = T_c$ dove sono presenti entrambe le fasi.

È importante notare che per $T \rightarrow T_c$ la fase condensata sparisce col seguente andamento

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \approx \frac{3}{2} \frac{T_c - T}{T_c}.$$
(1.40)

È interessante vedere come varia la fugacità z al variare del parametro $(v/\lambda^3) \propto T^{3/2}$ (figura 1.2). Per $0 \le (v/\lambda^3) < (2.612)^{-1}$, che corrisponde a $0 \le T \le T_c, z \simeq 1$, mentre, per $(v/\lambda^3) > (2.612)^{-1}, z < 1$ ed è determinato dalla relazione

$$g_{3/2}(z) = (\lambda^3/\nu) < 2.612,$$
 (1.41)

che è stata ricavata dalla (1.25). Per $(v/\lambda^3) \gg 1$, si ha che $g_{3/2}(z) \ll 1$ il che implica (vedi 1.26) $z \ll 1$, in questa regione, in accordo con il caso classico, $z \simeq (v/\lambda^3)$.



Figura 1.2: Fugacità in funzione di (v/λ^3)

1.3 Comportamento termodinamico del condensato

Si è visto come un accumulo macroscopico di particelle nello stato quantico $\varepsilon = 0$ implica che $z \approx 1$ (vedi 1.37); quindi per $T < T_c$, sostituendo z nella (1.24), si ottiene

$$P(T) = \frac{kT}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right),\tag{1.42}$$

cioè la pressione è proporzionale a $T^{5/2}$ ed è indipendente dal volume molare v il che implica infinita compressibilità; in particolare al punto di transizione T_c

$$P(T_c) = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (kT_c)^{5/2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right);$$
(1.43)

che utilizzando la (1.39) diventa

$$P(T_c) = \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{N}{V} k T_c\right) \simeq 0.5134 \left(\frac{N}{V} k T_c\right)$$
(1.44)

Per $T > T_c$, la pressione è data da

$$P = \frac{N}{V}kT\frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$
(1.45)

dove z si ricava dalla relazione

$$g_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{\nu} = \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m kT)^{3/2}}.$$
 (1.46)

A meno che la temperatura non sia veramente alta la pressione *P* non può essere espressa in una forma semplice; per $T \gg T_c$ può essere usata l'espansione viriale (1.30). Per $T \rightarrow \infty$, la pressione tende al limite classico NkT/V come mostrato in figura 1.3: in particolare, la curva (P,T) (a *v* fissato) segue la linea di transizione da T = 0



Figura 1.3: Pressione ed energia interna di un gas ideale di Bose in funzione del parametro T/T_c

a $T = T_c$ dopodiché si discosta e tende asintoticamente alla curva (P,T) classica. È interessante notare come la regione alla destra della linea di transizione compete alla sola fase normale, la linea di transizione appartiene sia alla fase normale che alla fase condensata mentre, la regione alla sinistra alla è completamente inaccessibile al sistema. In virtù della relazione tra pressione ed energia interna (1.28) ,la figura 1.3 descrive anche la variazione di U con T anch'essa a v fissato.

La pendenza della curva (P,T) è, ovviamente, una misura del calore specifico a volume costante $C_V(T)$. Si osserva come il calore specifico tende a zero per basse temperature e cresce con T fino a che non raggiunge il suo massimo alla temperatura di transizione, dopodiché diminusice e tende asintoticamente al valore costante, tipico di un gas ideale classico, di $\frac{3}{2}Nk$.

Dall'equazione (1.31 e 1.42), per $T \leq T_c$ si ottiene che C_V è proporzionale a $T^{3/2}$

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{3}{2} \frac{N}{V} \zeta \left(\frac{5}{2}\right) \frac{d}{dT} \left(\frac{T}{\lambda^3}\right) = \frac{15}{4} \zeta \left(\frac{5}{2}\right) \frac{v}{\lambda^3}.$$
(1.47)

A $T = T_c$

$$\frac{C_V(T_c)}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \simeq 1.925,\tag{1.48}$$

che è significativamente più alto del valore classico.

Per $T > T_c$, invece, si ottiene una formula implicita. Innanzitutto dalle equazioni (1.27) e (1.41) si ricava che

$$\frac{C_V}{Nk} = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{3}{2}T \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)}\right)\right]_v.$$
(1.49)

Per operare la differenziazione occorre conoscere $(\partial z/\partial T)_v$ che può essere ricavata, con l'aiuto della (2.39), dall'equazione (1.41). Dal momento che $g_{3/2}(z) \propto T^{-3/2}$, si ricavano

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}g_{3/2}(z)\right]_{v} = -\frac{3}{2T}g_{3/2}(z);$$
(1.50)

$$z\frac{\partial}{\partial z}g_{3/2}(z) = g_{1/2}(z).$$
 (1.51)

Combinando queste due relazioni si giunge a

$$\frac{1}{z} \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_{v} = -\frac{3}{2T} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$
(1.52)

In questo modo, per $T > T_c$ si ha che

$$\frac{C_V(T_c)}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$
(1.53)



Figura 1.4: Calore specifico a volume costante di un gas di Bose in funzione del parametro (T/T_c)

In figura 1.4 è mostrato il comportamento del calore specifico al variare della temperatura: come già anticipato nel paragrafo precendente, il calore specifico tende a zero per $\frac{T}{T_c} \rightarrow 0$ e lo fa come $T^{3/2}$, mentre tende al limite classico per $T \gg T_c$. Al punto di transizione C_V è continuo e per di più presenta un massimo di tipo cuspide, ovvero la sua derivata è discontinua.

È interessante analizzare anche le *isoterme* di un gas di Bose, ovvero come varia la pression e al variare del volume. In questo caso la condensazione di Bose-Einstein ha luogo in un volume v_c definito come

$$v_c = \lambda^3 / \zeta \left(\frac{3}{2}\right); \tag{1.54}$$

tale volume è proporzionale a $T^{-3/2}$. Per $v < v_c$, la pressione è indipendente da v e vale (vedi 1.42)

$$P_0 = \frac{kT}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right); \tag{1.55}$$

Come si evince dalla figura 1.5, la regione in cui coesistono sia la fase normale che



Figura 1.5: isoterme di un gas di Bose

quella condensata è caratterizzata dalla linea di transizione data da

$$P_0 v_c^5 / 3 = \frac{h^2}{2\pi m} \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\left\{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^{5/3}} = const;$$
(1.56)

Dal grafico delle isoterme si evince che la regione alla sinistra dell alinea di trasizione appartiene fase mista del sistema, mentre la regione alla destra alla sola fase normale.

Infine non resta che analizzare le *adiabatiche* del sistema, per farlo occorre un'espressione per l'entropia. Utilizzando la formula termodinamica

$$U - TS + PV \equiv N\mu, \tag{1.57}$$

e l'espressione per P e U già ottenute precedentemente, si ottiene

$$\frac{S}{Nk} \equiv \frac{U + PV}{NkT} - \frac{\mu}{kT},\tag{1.58}$$

che assume le seguenti espressioni:

$$\frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \ln z \quad perT > T_c$$
(1.59)

$$\frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad perT < T_c.$$
(1.60)

Un processo adiabatico reversibile implica la costanza di *S* e *N*: ciò significa che a tutte le temperature *z* è costante, ovvero (v/λ^3) . In generale per una trasformazione adiabatica reversibile del sistema valgono

$$vT^{3/2} = const, \tag{1.61}$$

$$P/T^{5/2} = const, \tag{1.62}$$

$$Pv^{5/2} = const, \tag{1.63}$$

che sono esattamente i risultati che si ottengono per un gas ideale classico. Tuttavia, mentre l'esponente $\frac{5}{3}$ nella (1.63) nel caso di un gas ideale classico è il rapporto C_P/C_V , nel caso di un gas ideale quantistico non è così ma tale rapporto vale

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{4}{9} \frac{C_V}{Nk} \frac{g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)}$$

$$= \frac{5}{3} \frac{g_{5/2}(z)g_{1/2}(z)}{g_{3/2}(z)};$$
(1.64)

cioè, per un gas quantistico, è soltanto per $T \gg T_c$ che $\gamma \simeq \frac{5}{3}$; a temperature finite $\gamma > \frac{5}{3}$ mentre, per $T \to T_c$, γ diverge all'infinito. Nella regione dove coesistono le due fasi. condensata e normale, $(T < T_c)$, l'entropia *S* può essere scritta come (vedi 1.35 e ??)

$$S = N_e \frac{5}{3} k \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \propto N_e; \tag{1.65}$$

Come era prevedibile, la fase condensata non contribuisce all'entropia del sistema ma lo fanno soltanto le particelle appartenenti agli stati eccitati. Il contributo di ogni particella appartenente a un livello energetico ($\varepsilon \neq 0$) è pari a $\frac{5}{2}k\zeta\left(\frac{5}{2}\right)/\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$.

Capitolo 2

Condensazione di Bose-Einstein in gas atomici

Finora è stato trattato il caso puramente ideale di N particelle confinate in un volume V; è opportuno ora passare ad analizzare il caso di un gas atomico nell'ipotesi in cui le particelle siano debolmente interagenti, cioè si esclude la presenza di forze intermolecolari.

La formazione di uno stato condensato della materia prevede temperature prossime allo zero assoluto; tuttavia, in condizioni normali di densità, prima di raggiungere tali temperature gli atomi si aggregano per formare strutture cristalline che, ovviamente, escludono la possibilità di formazione di un condensato di Bose-Einstein.

Per evitare che gli atomi solidifichino prima di poter raggiungere la temperatura di transizione T_c occorre che il gas, oltre che sufficientemente "freddo", sia diluito, ovvero che la sua densità sia sufficientemente bassa (vedi figura 2).

2.1 Raffreddamento laser, trappola magnetica ed evaporazione forzata

Come già accennato, riprodurre le condizioni di formazione di un condensato di Bose-Einstein richiede la manipolazione di un campione di atomi allo stato gassoso. Prima di tutto si raffreddano gli atomi attraverso la cosiddetta tecnica del *lasercooling* fino a raggiungere temperature dell'ordine dei μK , dopo di che, con l'aiuto di appositi campi magnetici, si intrappolano gli atomi e infine, vengono ulteriormente raffreddati fino a temperature al di sotto di T_c .

Nel dettaglio il *laser cooling* sfrutta il trasferimento di momento che occorre quando un atomo assorbe un fotone. In figura 2.1 è descritto il processo dietro il raffreddamento: gli atomi che si muovono ad una certa velocità sono irradiati da un fascio laser e per ogni fotone assorbito un atomo è rallentato di $\hbar k/m$; per poter assorbire ancora un fotone, gli atomi devono ritornare allo stato non eccitato riemettendo il fotone. I fotoni sono emessi in direzione casuale ma con una distribuzione simmetrica, in questo modo non c'è contributo al momento cinetico medio degli atomi.



Figura 2.1: (a) Un atomo con velocità *v* assorbe un fotone di momento $\hbar k = h/\lambda$; (b) dopo aver assorbito il fotone l'atomo è rallentato di $\hbar k/m$; (c) dopo aver riemesso il fotone in direzione casuele, gli atomi in media sono rallentati.

Ogni collisione comporta un cambiamento non significativo della velocità e, quindi ricordando la relazione statistica

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT, \tag{2.1}$$

della temperatura. Per questo mottivo è conveniente aumentare il rate di collisioni atomi-fotoni; tipicamente si utilizzano tre coppie di fasci laser contropropaganti, lungo le direzioni cartesiane, con frequenza appena al di sotto della frequenza di risonanza degli atomi in modo che la differenza sia compensata dall'effetto Doppler. Si dice che si forma una *melassa ottica*.

Nei laser cooling intervengono anche forze dovute allo scambio di momento tra gli atomi e i fotoni. Nonostante il momento medio trasferito per ogni emissione è 0, è diversa da 0 l'energia ricevuta da ogni rinculo; questa energia viene convertita in energia cinetica e il campione di atomi viene così riscaldato. Vi è quindi una *temperatura limite di raffreddamento*

$$T_l = \frac{(hf)^2}{2mc^2k} \tag{2.2}$$

dove f è la frequenza del laser e m la massa degli atomi, tale temperatura tipicamente è dell'ordine dei μK e qundi ancora troppo alta affinché il campione atomico condensi . La fase successiva al processo di *lase cooling* è quello di confinare gli atomi e per farlo si utilizza una trappola magnetica da un campo magnetico variabile con le coordinate che, esercita un potenziale armonico

$$V(r) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2); \qquad (2.3)$$

in questo modo ogni atomo risente di una forza di richiamo verso il centro della trappola. Per raggiungere, infine, temperature al di sotto della temperatura di transizione si raffreddano gli atomi tramite evaporazione: si abbassa la barriera di potenziale, in modo che gli atomi più energetici sfuggano come illustrato in figura 2.2



Figura 2.2: Raffreddamento evaporativo

2.2 Numeri di occupazione e temperatura critica

Per poter calcolare il numero di particelle appartenenti alla fase condensata e alla fase normale, nonchè la temperatura di transizione T_c , è opportuno determinare la densità degli stati.

Se l'interazione tra gli atomi del gas può essere trascurata, l'energia di ogni atomo all'interno del potenziale armonico è

$$\varepsilon_{l_1,l_2,l_3} = \hbar \omega_1 l_1 + \hbar \omega_2 l_2 + \hbar \omega_3 l_3 + \frac{1}{2} \hbar \left(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \right), \qquad (2.4)$$

dove $l_{\alpha}(=0,1,2,...\infty)$ sono i numeri quantici relativi all'oscillatore armonico. Per energie $\varepsilon \gg \hbar \omega_{\alpha}$ e trascurando l'energia di punto zero, che si è visto essere un punto singolare, è possibile trattare le l_{α} come variabili continue; definendo un sistema di coordinate definito da $\varepsilon_{\alpha} = \hbar \omega_{\alpha}$, in termini delle quali la superfice ad energia costante (2.4) è il piano $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, il numero di stati $A(\varepsilon)$ con energia minore o uguale a un dato ε è proporzionale all'ottante delimitato dal piano,

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3} \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon_1 \int_0^{\varepsilon - \varepsilon_1} d\varepsilon_2 \int_0^{\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2} d\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon^3}{6\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3}.$$
 (2.5)

La densità degli stati è quindi

$$a(\varepsilon) = \frac{dA}{d\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3}; \qquad (2.6)$$

se ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_0$), allora

$$a(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2(\hbar\omega_0)^3}.$$
(2.7)

La densità degli stati, a differenza delle particelle in un volume limitato, non dipende da V dal momento che gli atomi sono confinati in una trappola armonica.

Il numero medio di particelle negli stati eccitati all'interno della trappola è, (vedi 1.19),

$$N_{e}(\mu,T) = \int_{0}^{\infty} d\varepsilon a(\varepsilon) \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} - 1} = \left(\frac{kT}{\hbar \omega_{0}}\right)^{3} g_{3}(z).$$
(2.8)

La temperatura di transizione richiede che il maggior numero di particelle occupi gli stati eccitati, tale condizione richiede $\mu = 0$, o in termini di fugacità, z = 1; dal momento in cui $g_3(1) = \zeta(3) \simeq 1.202$, si ottiene per N particelle

$$\frac{kT_c}{\hbar\omega_0} = \left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3} \tag{2.9}$$

Per $T < T_c$, il numero di particelle negli stati ecciati dato dalla (2.8) non dipende dal nuemro totale di particelle, tuttavia tenendo conto della (2.9)

$$\frac{N_e}{N} = \frac{\zeta(3)}{N} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3,$$
(2.10)

in questo modo la frazione di particelle che occupa lo stato fondamentale ($\varepsilon = 0$) è

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3.$$
(2.11)

Se ne deduce che nel limite termodinamico, una frazione non nulla di atomi popola lo stato fondamentale per $T < T_c$; si osserva, inoltre, che l'occupazione del primo stato eccitato è solo dell'ordine di $N^{1/3}$, cos', sempre nel limite termodinamico, la frazione di particelle in ciascun stato eccitato è zero. Per particelle in una scatola 3-D si è mostrato come

$$\frac{N_e}{N} \propto \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2},$$
 (2.12)

mentre in questo caso la frazione di particelle è proporzionale $(T/T_c)^3$ Si può dimostrare che, nel caso generale di potenziali N-dimesionali vale

$$\frac{N_e}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\alpha},\tag{2.13}$$

con α coefficiente reale, per cui la frazione di particelle negli stati eccitati, anche in altre dimensioni, dipende sempre dal rapporto T/T_c però con diversa potenza.

Nonostante la natura semplice del modello di trappola armonica, i risultati (2.9) e (2.11) sono molto significativi. Infatti stabiliscono la scala di temperatura del sistema: per frequenze tipiche della trappola armonica $f \approx 100Hz$ e per $N \approx 2 \times 10^4$, si osserva una temperatura critica all'incirca di 170nK; tali valori non si discostano di molto dal valore previsto dal modello di gas ideale.



Figura 2.3: Misure sperimentali della frazione di particelle nella fase condensata in funzione del parametro (T/T_c)

2.3 Limite termodinamico

È opportuno ricordare che equazioni (2.9) e (2.11) sono state ricavate in un'approssimazione semiclassica nella quale

$$kT \gg \hbar \omega_{\alpha},$$
 (2.14)

ovvero si è assunto che la temperatura del gas è più grande della spaziatura tra i livelli energetici. Tale condizione è necessaria per sostituire la sommatoria con un'integrazione nel vincolo sul numero di particelle del sistema; tale approssimazione, tuttavia, è valida soltanto nell'ipotesi in cui $N \gg 1$, ovvero quando il sistema tende al limite termodinamico.

Quindi il modello sviluppato si basa sull'assunzione che la sommatoria sui livelli discretizzati possa essere sostituita da un'integrazione. Ciò equivale a sviluppare un'espressione semiclassica per la densità degli stati.

Tale approssimazione è collegata al concetto di limite termodinamico: in un sistema uniforme il limite termodinamico è ottenuto facendo tendere il numero di particelle N e il volume V all'infinito, in modo che il rapporto N/V rimanga costante.

In una trappola armonica la densità del gas non è uniforme e, conseguentemente, il limite termodinamico deve essere definito diversamente: si fa tendere N all'infinito e ω_0 a zero in modo che il prodotto $N\omega_0^3$ rimanga costante; in questo modo la condizione (2.14) è automaticamente soddisfatta.

Tale assunzione però implica che il valore centrale della densità del condensato esibisce un comportamento divergente nel limite termodinamico, al contrario, il valore centrale della densità termica rimane costante; questo comportamento asimmetrico tra le due densità è conseguenza della trappola armonica ed è evidente anche nello spazio dei momenti dove il fenomeno della condensazione ha luogo.

2.4 Rilevazione di un condensato

La dimesione lineare dello stato fondamentale, nella direzione cartesiana α è data dalla lunghezza d'onda della funzione d'onda

$$a_{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\alpha}}},\tag{2.15}$$

mentre la dimensione lineare della distribuzione termica degli atomi non condensati nella stessa direzione è

$$a_{termica} = \sqrt{\frac{kT}{m\omega_{\alpha}^2}} = a_{\alpha}\sqrt{\frac{kT}{\hbar\omega_{\alpha}}}.$$
 (2.16)

Per una trappola armonica di frequenza f = 100 Hz e temperatura T = 100 nK, queste dimensioni sono rispettivamente $1\mu e 5\mu$. In generale vale, in termini di frequenza

$$a_{\alpha} = 10.1 \left(\frac{100Hz}{f_{\alpha}}\frac{1}{A}\right)^{1/2} \ \mu m, \qquad (2.17)$$

dove A è il numero di massa della specia atomica. In virtù delle caratteristiche della nube atomica, non è possibile misurare la distribuzione spaziale delle particelle: in primo luogo gli atomi sono troppo pochi $(10^4 - 10^7)$, in secondo luogo il sistema è metastabile per cui non può essere messo in equilibrio termico con un altro corpo, infine il sistema ha una vita media che va dai secondi ai minuti.

Per cui, di solito, non si misurano gli atomi intrappolati ma, piuttosto, la distribuzione del momento del gas ultrafreddo attraverso esperimenti cosiddetti di "tempo di volo". Al tempo t = 0, il campo magnetico è spento, ovvero la trappola armonica rimossa: in questo modo la nube atomica di espande liberamente per un temp dell'ordine di 100*ms*. Siccome la velocità degli atomi, a questa temperatura, è di pochi millimetri al secondo, il gas si espande poche centinaio di μm in tale lasso di tempo. Dopodiché la nube è illuminata da luce laser alla frequenza di risonanza degli atomi, lasciando un'immagine su un CCD. La dimensione e la forma dell'immagine di luce misura direttamente la distribuzione del momento che gli atomi avevano nella trappola a t = 0. L'espansione la nuvola può essere divisa in due componenti, gli N_0 atomi condensati i restanti $N - N_0$ atomi che si trovavano negli stati eccitati del potenziale armonico. Gli atomi condensati, ovviamente, hanno un momento più piccolo del atomi negli stati eccitati.L'unico inconveniente di tale emtodo è che è distruttivo e per studiare la dipendenza dal tempo del fenomeno bisogna preparare una nuova nube atomica per ogni punto.



Figura 2.4: Densità numeriche (2.19) e (2.24), per $\omega_0 t \gg 1$, per $T = 0.98T_c$ e per $N = 2 \times 10^4$. L'immagine mostra la densità totale e, al di sotto, la più ampia densità isotropica dovuta agli stati eccitati. Il picco del condensato è anisotropico, mentre il picco ampio causato dagli stati eccitati è isotropico. La scala delle distanze $v_0 t = t \sqrt{\hbar \omega_1/m}$ determina l'ampiezza della distribuzione risultante dal picco del condensato nella direzione *x* negli ultimi tempi. Vedi anche figura 2.5

Dopo un tempo *t*, lo stato fondamentale ha una densità numerica, nello spazio delle coordinate, che dipende dalla sua funzione d'onda

$$n_0(r,t) = N_0 |\psi_0(r,t)|^2, \qquad (2.18)$$

Per un potenziale armonico anisotropo, come quello in esame, vale

$$n_0(r,t) = \frac{N_0}{\pi^{3/2}} \prod_{\alpha=1}^3 \left[\frac{1}{a_\alpha \sqrt{1 + \omega_\alpha^2 t^2}} exp\left(\frac{-r_\alpha^2}{a_\alpha^2 (1 + \omega_\alpha^2 t^2)}\right) \right].$$
 (2.19)

Dal momento che, la distribuzione spaziale è anisotropa, la distribuzione del momento cinetico dipende dalla direzione. Inoltre per il principio di indeterminazione, a una distribuzione spaziale "piccata" corrisponde un'ampia distribuzione del momento: ovviamente ciò non vale per temperature ben lontane dalla temperatura critica dove il gas si comporta classicamente. Come è possibile osservare in figura 2.4, per temperature vicine a T_c la distribuzione di densità è piccata, con un'altezza che aumenta al decrescere della temperatura.

Gli atomi che non sono condensati nello stato fondamentale, che si trovano a temperature al di sopra di T_c , possono essere trattati semiclassicamente, in questo modo, la distribuzione della posizione e del momento è trattata classicamente mentre la desnità segue la distribuzione di Bose-Einstein

$$f(r, p, 0) = \frac{1}{exp(H\beta - \beta\mu) - 1},$$
 (2.20)



Figura 2.5: A sinistra gas non condensato, al centro condensato in parte, a destra quasi puro condensato.

dove

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r).$$
 (2.21)

Dopo che il potenziale è stato spento a t = 0, la distribuzione evolve come

$$f(r,p,t) = f\left(r + \frac{pt}{m}, p, 0\right).$$
(2.22)

Per quanto riguarda gli atomi negli stati eccitati

$$n_{eccitati}(r,t) = \frac{1}{h^3} \int f\left(r + \frac{pt}{m}, p, t\right) dp, \qquad (2.23)$$

che integrata restituisce

$$n_{eccitati}(r,t) = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta \mu j}}{j^{3/2}} \left\{ \prod_{\alpha=1}^{3} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\omega_{\alpha}^2 t^2}} exp\left(\frac{-\beta jm\omega_{\alpha}^2 r_{\alpha}^2}{2(1+\omega_{\alpha}^2 t^2)}\right) \right] \right\}.$$
 (2.24)

In questo modo si ottengono i nuemri di occupazione

$$N_0 = \int n_0(r,t)dr, \qquad (2.25)$$

$$N - N_0 = \int n_{eccitati}(r,t)dr.$$
(2.26)

È facile intuire che, per $\omega_{\alpha} t \ll 1$ sia la fase ocndensata che quella normale sono anisotrope a causa della forma del potenziale armonico utilizzato; per $\omega_{\alpha} t \gg 1$, gli atomi degli stati eccitati formano una nube a simmetria sferica a causa della dipendenza isotropa del del momento cinetico a t = 0. Al contrario, gli atomi condensati si espandono anisotropamente a causa della diversa estensione spaziale della funzione d'onda di stato fondamentale.

la direzione che ha la maggior ω_{α} è la più compressa a t = 0, di conseguenza, in virtù del principio di indeterminazione, si espande più velocemente: questa è un'importante caratteristica die dati sperimentali che conferma l'inizio della condensazione di Bose-Einstein.

2.5 Proprietà termodinamiche di un condensato in una trappola armonica

La temperatura, la frazione di particelle condensate e l'energia interna possono essere misurate sperimentalemente con lo stesso metodo accennato nel paragrafo precedente. l'energia interna può essere scritta come

$$U(\mu,T) = \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} a(\varepsilon) d\varepsilon = 3 \frac{(kT)^4}{(\hbar\omega_0)^3} g_4(z).$$
(2.27)

Il calore specifico per N costante è dato da

$$C_{N}(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mu} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)_{T} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{N}$$
$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mu} - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\mu} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{\mu}}{\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T}}$$
(2.28)

È possibile sfruttare le equazioni (2.8) e (2.9) per determinare numericamente la fugacità *z*, come mostrato in figura 2.6 e sostituirla nella (2.27), per ottenere un'espressione in scala dell'energia interna.

$$\frac{U}{NkT_c} = \begin{cases} 3\left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} & \text{se } T \le T_c \\ \\ \frac{U}{NkT_c} = 3\left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \frac{g_4(z)}{\zeta(3)} & \text{se } T \ge T_c \end{cases}$$
(2.29)

Mentre il calore specifico assume la forma

$$\frac{C_N}{Nk} = \begin{cases} \frac{12\zeta(4)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \frac{g_4(z)}{\zeta(3)} & \text{se } T \ge T_c \\ \\ \frac{1}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \left(12g_4(z) - \frac{9g_3^2(z)}{g_2(z)}\right) & \text{se } T > T_c \end{cases}$$
(2.30)



Figura 2.6: Fugacità della fase condensata in funzione del parametro T/T_c



Figura 2.7: Energia interna della fase condensata in funzione del parametro T/T_c



Figura 2.8: Calore specifico in una trappola armonica come funzione del parametro T/T_c

A differenza della condensazione di Bose-Einstein per particelle libere in una scatola, in questo caso il calore specifico è discontinuo alla temperatura critica.

$$\frac{C_N}{Nk} \to \begin{cases} \frac{12\zeta(4)}{\zeta(3)} \simeq 10.805 & \text{come } T \to T_c^- \\ \\ \frac{12\zeta(4)}{\zeta(3)} - \frac{9\zeta(3)}{\zeta(2)} \simeq 4.228 & \text{come } T \to T_c^+ \end{cases}$$
(2.31)

Conclusioni

La condensazione di Bose-Einstein è un fenomeno che occorre a un sistema bosonico quando esso si trova a temperature prossime allo zero assoluto. Proprio in virtù del fatto che le particelle costituenti il sistema debbano avere spin intero, tale fenomeno si verifica per quelle specie atomiche per le quali il numero di neutroni N è pari; non accaso i primi condensati sono stati ottenuti manipolando sistemi gassosi quali il rubidio il litio e il cesio, che hanno rispettivamente N = 4, N = 48, N = 78.

Nonostante la BEC derivi da proprietà puramente matematica della funzione di Bose-Einstein, Il primo condensato è stato ottenuto nel 1987 da *Eric Cornell* e *Carl Wieman*, quasi settant'anni dopo la previsione fatta da Einstein; il motivo per cui sono occorsi così tanti anni risiede nel fatto che, prima di allora, nessuna tecnica permetteva di raggiungere temperature così prossime allo zero assoluto.

La peculiarità più importante del fenomeno della condensazione è che permette di osservare le proprietà quantistiche di un sistema su larga scala, questo ha aperto la strada a numerosi campi di ricerca che vanno dall'interferenza ottica ai fluidi quantistici: in particolare si è adottato un modello basato sulla BEC per spiegare sia la superfluidità, sia la superconduttività. Lo scopo di questo elaborato è stato quello di spiegare la teoria e i meccanismi che permettono la formazione di un condensato utilizzando i principi della meccanica statistica.

Appendice alla funzione di Bose-Einstein

La funzione di Bose-Einstein è definita come:

$$g_{\mathbf{v}}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{v})} \int_0^\infty \frac{x^{\mathbf{v}-1} dx}{z^{-1} e^x - 1}.$$
 (2.32)

Per piccoli z la funzione integranda nella (3) può essere espansa in potenze di z come segue:

$$g_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty x^{\nu-1} \sum_{l=1}^\infty (ze^{-x})^l dx = \sum_{l=1}^\infty \frac{z^l}{l^{\nu}}.$$
 (2.33)

Per, $z \ll 1$, la funzione $g_v(z)$, *per tutti i valori di* v, si comporta come z. In aggiunta a quanto osservato, $g_v(z)$ è una funzione monotòna crescente il cui valore più grande si ottiene quando $z \to 1$; in più, per v > 1, $g_v(z)$ è approssimabile alla *funzione zeta di Riemann* $\zeta(v)$:

$$g_{\nu}(1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{\nu}} = \zeta(\nu) \quad (\nu > 1).$$
(2.34)

I valori numerici di $\zeta(v)$ di interesse sono:

$$\zeta(3) \simeq 1.20206, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \simeq 1.08232,$$

$$\zeta(\frac{3}{2}) \simeq 2.61238, \quad \zeta(\frac{5}{2}) \simeq 1.34149.$$
(2.35)

Per $v \leq 1$, la funzione $g_v(z)$ diverge per $z \to 1$. Ponendo $z = e^{-\alpha}$, per v < 1, il comportamento di $g_v(e^{-\alpha})$, per $\alpha \to 0$, può essere determinato come segue:

$$g_{\nu}(e^{-\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{e^{\alpha+x} - 1} \approx \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{\alpha+x}.$$
 (2.36)

Ponendo $x = \tan^2(\theta)$ si ottiene:

$$g_{\nu}(e^{-\alpha}) \approx \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} \quad (0 < \nu < 1).$$
 (2.37)

L'espressione (6) evidenzia la singolarità della funzione $g_v(e^{-\alpha})$ in 0; mentre il resto può essere espresso in serie di potenze di α :

$$g_{\nu}(-\alpha) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\alpha^{1-\nu}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{i!} \zeta(\nu-i)\alpha^{i}.$$
 (2.38)

Dove $\zeta(s)$ è la funzione *zeta di Riemann*. Dall'equazione (2.33) è possibile ricavare la relazione ricorrente che permette di differenziare $g_v(z)$

$$z\frac{\partial}{\partial z}[g_{\nu}(z)] \equiv \frac{\partial}{\partial(\ln z)}g_{\nu}(z) = g_{\nu-1}(z).$$
(2.39)

Nei casi in cui $v = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2}$, si ottiene:

$$g_{\frac{5}{2}}(\alpha) = 2.36\alpha^{\frac{3}{2}} + 1.34 - 2.61\alpha - 0.730\alpha^{2} + 0.0347\alpha^{3} + \dots$$

$$g_{\frac{3}{2}}(\alpha) = -3.54\alpha^{\frac{1}{2}} + 2.61 + 1.46\alpha - 0.104\alpha^{2} + 0.00425\alpha^{3} + \dots$$

$$g_{\frac{1}{2}}(\alpha) = 1.77\alpha^{\frac{-1}{2}} - 1.46 + 0.208\alpha - 0.0128\alpha^{2} + \dots$$
(2.40)

Bibliografia

- [1] R.K. Pathria, Paul D. Beale. *Statistical Mechanics* Third Edition, Accademic Press (2011).
- [2] C.J. Pethick, H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Diluite Gases*, Cambridge University Press (2002).
- [3] L. Pitaevskii, S. Stringari. Bose-Einstein Condensation, Clarendon Press (2003).
- [4] J.J Arlt, K. Bongs, K. Sengstock, W. Ertmer. *Bose-Einstein condensation in diluite atomic gases, in* "The Science of Nature" (Marzo 2002).
- [5] E.A. Cornell, C.E. Wieman. *Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in diluite gas the first 70 years and some recent experiments, in* "Reviews of Modern Physics", volume 74 (Luglio 2002).
- [6] W.D. Philips. *Laser cooling and trapping od neutral atoms, in* "Reviews of Modern Physics", volume 70 (Giugno 1998).
- [7] Amer Omar. *Raffreddamento atomico e condensati di Bose-Einstein*, tesi triennale, "Università di Roma La Sapienza" (2018)