## UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI "FEDERICO II"



### Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Area Didattica di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Fisica "Ettore Pancini"

Laurea Triennale in Fisica

## Geodetiche in geometria Riemanniana e Lorentziana: alcuni teoremi e risultati espliciti

**Relatore:** Prof. D'Andrea Francesco Candidato: Lipardi Vincenzo Matr. N85001047

Anno Accademico 2018/2019

# Indice

Introduzione			1
1	Strutture su varietà		<b>2</b>
	1.1	Metriche su varietà differenziabili	2
	1.2	Velocità e accelerazione	3
	1.3	Torsione e curvatura	5
	1.4	Geodetiche	6
	1.5	Equazioni di Eulero-Lagrange	8
<b>2</b>	Geometria Riemanniana		10
	2.1	Distanza Riemanniana	10
	2.2	Geodetiche	12
	2.3	Superfici di rotazione	12
	2.4	Teorema di Clairaut	16
3	Geometria Lorentziana		22
	3.1	Spazio-tempo	22
	3.2	Distanza Lorentziana	24
	3.3	Geodetiche	26
	3.4	Geometria Riemanniana e Lorenziana a confronto	30
4	Applicazioni alla Relatività Generale		32
	4.1	Metrica di Schwarzschild	33
	4.2	Metrica di Kerr	44
	4.3	Metrica di Morris-Thorne	49
Co	Conclusioni		
Bi	Bibliografia		

# Introduzione

Il seguente lavoro di tesi, nell'ambito della Geometria Differenziale, è incentrato sull'ampio argomento delle geodetiche in geometria Riemanniana e Lorentziana. In particolare si propone una trattazione preponderantemente matematica, nei primi capitoli, per poi vederne solo alcune delle innumerevoli applicazioni.

Nel primo capitolo saranno richiamati risultati importanti della Geometria Differenziale, orientati verso la Geometria Riemanniana e pseudo-Riemanniana. In particolare, si concentrerà l'attenzione sul concetto di distanza, geodetica e sul formalismo Lagrangiano che permette di calcolare analiticamente le geodetiche [1] [2].

Il secondo capitolo è dedicato alla geometria Riemanniana, di cui si descrivono alcune utili proprietà ai fini del confronto con la geometria Lorentziana [4]. Si studieranno geodetiche su superfici di rotazione, di cui vedremo l'esempio della sfera e si dimostrerà il Teorema di Clairaut, che permette di semplificare il problema del calcolo di geodetiche e se ne mostrerà un'applicazione Alla pseudosfera [3].

Nel terzo capitolo la protagonista è la geometria Lorentziana. Si DISCUTERàerà il concetto di distanza Lorentziana [7] e la forma assunta dalle geodetiche in questo tipo di varietà [6]. La trattazione è sui principi di base, definiremo formalmente la distanza Lorentziana e ne ricaveremo alcune proprietà, osserveremo che in geometria Lorentziana è più complicato avere la proprietà di completezza geodetica, rispetto al caso Riemanniano [7]. Concluderemo il capitolo mettendo a confronto le due geometrie trattate.

Nel quarto ed ultimo capitolo i risultati teorici visti nei capitoli precedenti saranno compendiati da esempi in metriche scelte per l'importanza ricoperta nel campo della Fisica, in particolar modo nella teoria della Relatività Generale: la metrica di Schwarzchild, che descrive la geometria dello spazio-tempo all'esterno di un corpo massivo [5] [7] [8]; la metrica di Kerr, che descrive la geometria dello spazio-tempo intorno a un corpo massivo rotante [9] [10]; lo spazio-tempo dei Warmole di Morris-Thorne [11] [12].

Daremo per scontato una conoscenza di base di Topologia, Analisi e Geometria Differenziale, come varietà e applicazioni differenziabili, campi vettoriali, fibrati, algebra tensoriale.

Si userà la notazione di Einstein delle somme sottointese su indici ripetuti.

# Capitolo 1

## Strutture su varietà

In questo capitolo richiameremo nozioni di Geometria differenziale imprescindibili per la comprensione dei capitoli successivi; in particolare strumenti matematici che ci permetteranno di definire geodetiche su una generica varietà differenziabile.

## 1.1 Metriche su varietà differenziabili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione  $n \in \mathbb{N}$  e sia  $T_pM$  lo spazio vettoriale dei vettori tangenti alla varietà nel punto  $p \in M$ .

Introduciamo un prodotto scalare sulla varietà dei vettori tangenti TM definita come:

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M$$

**Definizione 1.** Una *metrica Riemanniana g* su una varietà differenziabile M è un campo tensoriale liscio di tipo (0, 2) simmetrico e definito positivo. Cioè, per ogni punto p di M,

$$g_p(v,w) = g(w,v) \quad \forall v, w \in T_p M$$
$$g_p(v,v) \ge 0 \quad \forall v \in T_p M$$
$$g_p(v,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$$

La coppia (M, g) è detta varietà Riemanniana.

**Definizione 2.** Una metrica pseudo - Riemanniana g su una varietà differenziabile M è un campo tensoriale liscio di tipo (0, 2) simmetrico e non-degenere. Cioè, per ogni punto p di M,

$$g_p(v,w) = g_p(w,v) \quad \forall v,w \in T_pM$$
$$g_p(v,w) = 0 \quad \forall w \in T_pM \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

La coppia (M, g) è detta varietà pseudo-Riemanniana.

Sia g una metrica pseudo- Riemanniana su una varietà M di dimensione n connessa, diremo che g ha segnatura (r, s), con  $r, s \in \mathbb{N}$ , se la massima dimensione del sottospazio di  $T_pM$  su cui  $g_p$  è definita positiva (risp. negativa) è r(risp., s). La segnatura è indipendente dal punto  $p \in M$ . Il teorema di Sylvester ci assicura la validità della relazione: r+s = n

**Definizione 3.** Una *metrica Lorentziana* è una metrica pseudo - Riemanniana con segnatura (1, n - 1).

Il numero r è detto indice di  $M : 0 \le r \le n = \dim M$ . Per le definizioni date in precedenza, se r = 0, M è una varietà Riemanniana ( $\forall p \in M, g_p$  è definito positivo); se r = 1 e  $n \ge 2$ , M è una varietà Lorentziana. In Relatività generale la metrica pseudo - Riemanniana è usata per modellizzare lo spazio-tempo; in particolare con le varietà Lorenziane, caratterizzate da segnatura (1,3), si studia lo spazio quadridimensionale di Minkowski.

### 1.2 Velocità e accelerazione

In questo paragrafo affronteremo il problema di definire il vettore accelerazione su una varietà differenziabile; esso svolge un ruolo cruciale per la definizione stessa di geodetica. E' evidente che su una generica varietà differenziabile non può essere definita l'accelerazione nello stesso identico modo usato nell'Analisi in  $\mathbb{R}^n$ , in quanto nel rapporto incrementale figura una differenza tra due vettori tangenti appartenenti a spazi vettoriali differenti. Generalizziamo allora formalmente questi concetti su varietà M.

#### Campi vettoriali lungo una curva

**Definizione 4.** Una curva parametrizzata liscia è un'applicazione differenziabile  $\gamma : I \to M$ , dove I è un aperto di  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 5.** Il vettore velocità  $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$  su una curva parametrizzata liscia è

$$\gamma'(t_0)(f) = \frac{d}{dt}|_{t=t_0} f(\gamma(t))$$

**Definizione 6.** Un *campo vettoriale liscio* lungo una curva  $\gamma : I \to M$  è un'applicazione differenziabile  $V : I \to TM$  tale che,

$$V(t) \in T_{\gamma(t)}M \qquad \forall t \in I$$

Assicuriamoci di poter lavorare con una curva avente come dominio un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , senza perdere in generalità.

Sia  $\mathfrak{X}(M)$  l'insieme dei campi vettoriali lisci globali su M.

**Definizione 7.** Sia  $V : I \to TM$  un campo vettoriale liscio lungo  $\gamma$ , V si dice *estendibile* se esiste U aperto e  $X \in \mathfrak{X}(U)$  tali che,

$$U \supset \gamma(I) \quad V(t) = X|_{\gamma}(t), \ \forall t \in I$$

Una curva  $\gamma : [a, b] \to M$ , con dominio un intervallo chiuso, è un'applicazione per la quale esiste un'estensione  $\tilde{\gamma} : I \to M$  differenziabile, dove  $I \supset [a, b] \in \tilde{\gamma}|_{[a, b]} = \gamma$ .

#### Connessioni lineari

Nel processo di generalizzazione di *derivata* è fondamentale il concetto di *connessione*, noto dall'Analisi Matematica in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\mathfrak{X}(M)$  l'insieme dei campi vettoriali globali lisci su una varietà differenziabile M.

**Definizione 8.** Una connessione lineare su M è un'applicazione :

$$abla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

$$X, Y \longmapsto \nabla_X Y$$

tale che valgano le seguenti proprietà:

- 1.  $\mathbb{R}$  linearità in Y
- 2.  $C^{\infty}(M)$  linearità in X
- 3. Regola di Leibnitz :  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$   $\forall f \in C^{\infty}(M), X, Y \in \mathfrak{X}$

Vediamone la forma in coordinate locali. Sia  $(U, \Phi = x^1, \ldots, x^n)$  una carta su M,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k \tag{1.1}$$

dove  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial_i}$  sono le derivate parziali e i simboli di Christoffel  $\Gamma_{ij}^k \in C^{\infty}$  sono funzioni univocamente determinate da  $\nabla$  e  $(U, \phi)$  attraverso l'equazione (1.1).

**Teorema 1.** Su ogni varietà differenziabile M esiste una connessione lineare.

L'esempio più semplice è la connessione piatta, definita dai simboli di Christoffel tutti nulli,  $\Gamma = 0$ . Preso un atlante  $\{(U_{\alpha}, \phi_{\alpha})\}$  su M, consideriamo una connessione piatta  $\nabla^{\alpha}$ su ciascun intorno  $U_{\alpha}$ , attraverso una partizione dell'unità è possibile "incollare" tutte le  $\nabla^{\alpha}$ , ricoprendo tutta la varietà. In questo modo, si costruisce una connessione piatta che ricopra tutta la varietà M.

#### Derivata covariante

**Proposizione 2.** Sia M una varietà differenziabile  $e \nabla$  una connessione lineare. Per ogni curva  $\gamma: I \to M$ , esiste un'unica applicazione  $\mathbb{R}$  - lineare:

$$D_t: \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

che

1. Soddisfa la regola di Leibnitz:

$$D_t(fV) = fV + fD_tV \quad \forall \ V \in \mathfrak{X}(\gamma), \ \forall f \in C^{\infty} (I)$$

2. Se V è estendibile, per ogni estensione X si ha

$$D_t V(t) = \nabla_{\gamma'(t)} X|_{\gamma(t)}$$

 $D_t$  è detta derivata covariante lungo  $\gamma$ .

**Definizione 9.** L'accelerazione di  $\gamma$  (rispetto a  $\nabla$ ) è il campo vettoriale  $D_t \gamma'(t)$ .

**Definizione 10.** Un campo vettoriale liscio V è detto parallelo lungo  $\gamma$  se

$$D_t V = 0$$

### **1.3** Torsione e curvatura

**Definizione 11.** La torsione  $\tau$  della connessione lineare  $\nabla$  è l'applicazione:

$$\tau:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$$

data da

$$\tau(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

**Proposizione 3.** La torsione, così definita, rispetta le seguenti proprietà:

- $\tau \ e \ C^{\infty}(M)$  bilineare ( $\tau \ pu \delta$  essere visto come un campo tensoriale di tipo (2,1))
- In coordinate locali:  $\tau(\partial_i, \partial_j) = (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{ji}^k)\partial_k$

**Definizione 12.** La connessione lineare  $\nabla$  è detta simmetrica o a torsione nulla se  $\tau = 0$ , ossia

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}$$

In coordinate locali si ha:

$$\nabla \quad simmetrica \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

**Definizione 13.** La curvatura R della connessione lineare  $\nabla$  è l'applicazione:

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$X, Y, Z \to R(X, Y)Z$$

Dove

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Possiamo vederla come un campo tensoriale di tipo (1,3).

**Proposizione 4.** La curvatura R è un'applicazione  $C^{\infty}(M)$  - multilineare.

**Definizione 14.** Chiamiamo endomorfismo di curvatura l'applicazione data da R(X, Y).

In coordinate locali

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l$$

Proposizione 5.

$$R_{ijk}^{l} = \partial_{i}\Gamma_{jk}^{l} - \partial_{j}\Gamma_{iK}^{l} + \Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{jK}^{l} - \Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{l}$$

Un esempio è la connessione euclidea  $\overline{\nabla}$ , i cui simboli di Christoffel sono nulli.

 $\bar{\nabla}$  ha  $\Gamma^k_{ij} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R = 0$ 

**Definizione 15.** Sia R il tensore di curvatura su M. Il tensore di curvatura di Ricci di M è la contrazione di R le cui componenti relative al sistema di coordinate sono  $R_{ij} = \sum_{m} R^m_{ijm}$ 

### 1.4 Geodetiche

Con gli strumenti matematici introdotti nel paragrafo 1.2, possiamo finalmente dare una definizione generale di geodetica.

**Definizione 16.** Sia  $\nabla$  una connessione lineare definita su una varietà differenziabile M. La curva  $\gamma : I \to M$  è detta geodetica (rispetto a  $\nabla$ ) se il vettore velocità  $\gamma'$  è parallelo lungo  $\gamma$ 

$$D_t \gamma'(t) = 0$$

Osservazione 1. La definizione di geodetica dipende dalla scelta della connessione lineare.

### Equazioni geodetiche

In coordinate locali se fissiamo una carta  $(U, \phi)$ , otteniamo che una curva  $\gamma$  è una geodetica se e soltanto se vale la seguente equazione:

$$\ddot{\gamma}^{k}(t) + \dot{\gamma}^{i}(t)\dot{\gamma}^{j}(t)\Gamma^{k}_{ij} = 0 \qquad \forall k, \ \forall t \in I$$
(1.2)

Dove  $(\gamma^1, \ldots, \gamma^n) = \phi \circ \gamma$  e il punto indica la derivata rispetto al parametro t.

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, dette equazioni geodetiche.

La soluzione può essere ricondotta a quella di un problema di Cauchy del primo ordine.

#### Esistenza e unicità

Il teorema di esistenza e unicità ci garantisce appunto l'esistenza e l'unicità di geodetiche data una varietà Riemanniana munita di una connessione lineare.

**Teorema 6** (Esistenza e unicità). Sia M una varietà differenziabile  $e \nabla$  una connessione lineare. Per ogni  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $q_0 \in M$ ,  $v_0 \in T_q M$  esiste un'intervallo aperto  $I \subset \mathbb{R}$  contenente  $t_0$  e esiste un'unica geodetica  $\gamma : I \to M$  tale che

$$\gamma(t_0) = q_0, \quad \gamma'(t_0) = v_0$$

Quest'unica geodetica se non può essere estesa a un intervallo più grande di I è detta massimale.

**Definizione 17.** Una geodetica su una varietà pseudo-Riemanniana (M, g) si dice *completa* se può essere definita sul dominio  $\mathbb{R}$ .

#### Mappa esponenziale

**Definizione 18.** Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana e  $p \in M$ . La mappa esponenziale è una funzione

$$exp_p: U \to M$$

definita su un insieme aperto U dello spazio tangente  $T_pM$ , contenente l'origine nel seguente modo.

Per ogni vettore  $v \neq 0 \in T_p M$ , esiste un'unica geodetica  $\gamma_v : (-a, b) \to M$  tale che  $\gamma_v(0) = p \in \gamma'(0) = v$ . Dove (-a, b) è il dominio massimale della geodetica, con a, b > 0 anche  $+\infty$ .

Se b > 1 si definisce  $exp_p(v) = \gamma(1)$ . Se v = 0 la mappa esponenziale si estende ponendo  $exp_p(0) = p$ .

#### Connessione di Levi-Civita

Abbiamo visto che le geodetiche su una determinata varietà dipendono dalla connessione che scegliamo. Quando parliamo di geodetiche Riemanniane si intende geodetiche rispetto alla connessione di Levi-Civita.

**Definizione 19.** Sia (M, g) varietà pseudo-Riemanniana. Una connessione lineare  $\nabla$  si dice *compatibile con la metrica* g se :

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X, Z) = X(g(Y, Z))$$

**Teorema 7.** Su ogni varietà pseudo-Riemanniana (M, g) esiste un'unica connessione lineare compatibile con g e a torsione nulla, detta connessione di Levi-Civita. Inoltre  $\nabla$ soddisfa la seguente relazione (Formula di Koszul):

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) +$$

$$+g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)$$

Geodetiche per la connessione di Levi-Civita sono dette geodetiche Riemanniane.

**Proposizione 8.** La connessione di Levi-Civita in coordinate locali assume la seguente forma:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_{i}g_{jl} + \partial_{j}g_{il} - \partial_{l}g_{ij})$$

dove  $g^{ij}$  è la matrice inversa di  $g_{ij}$ .

Teorema 9. Le geodetiche Riemanniane sono curve a velocità costante.

Osservazione 2. Possiamo sempre riparametrizzare una geodetica in modo da normalizzarla. In geometria Riemanniana normalizziamo sempre ad 1 :  $\|\gamma'(t)\| = 1$ . Si vedrà meglio, più avanti, che in geometria Lorentziana a seconda della causalità della geodetica, la norma si pone pari a -1, 0 o 1 :

$$\|\gamma'(t)\| = \begin{cases} 1\\ 0\\ -1 \end{cases}$$

## 1.5 Equazioni di Eulero-Lagrange

Richiamiamo in  $\mathbb{R}^n$  le equazioni di Eulero-Lagrange che decrivono la dinamica di un corpo immerso in un campo conservativo, mettendo in relazione posizione e velocità a ogni istante.

Le equazioni di Eulero-Lagrange della curva  $\gamma : [a, b] \to M$  sono date da:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^{i}}(\gamma(t),\gamma'(t)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{i}}(\gamma(t),\gamma'(t))$$
(1.3)

Con la Lagrangiana  $\mathcal{L}(x, v) \in C^{\infty}$   $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  è data da

$$\mathcal{L}(x, v) = T(v) - U(x), \qquad (1.4)$$

dove T è il termine cinetico e U quello potenziale.

Generalizziamo queste equazioni ad una varietà pseudo-Riemanniana. Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana e  $\mathcal{L} \in C^{\infty}(TM)$ .

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{2}g_p(\xi,\xi) = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 \qquad \forall \xi \in T_pM$$
(1.5)

In coordinate naturali rappresenta l'energia cinetica

$$\mathcal{L}(v^i\partial_i|_p) = \frac{1}{2}g_{ij(p)}v^iv^j$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)\Gamma^k_{ij} = 0 \qquad \forall k, \ \forall t \in I$$

Con i simboli di Christoffel $\Gamma^k_{ij}$  associate alla connessione di Levi-Civita.

Cioè, divengono proprio le equazioni geodetiche. Quindi, è possibile determinare le geodetiche su una varietà pseudo-Riemanniana, risolvendo le equazioni di Eulero-Lagrange per lagrangiana  $\mathcal{L}$  di particella libera.

Questa trattazione ci permette di vedere le geodetiche come traiettorie in spazi curvi in assenza di forze esterne.

*Osservazione* 3. Si noti che la definizione di Lagrangiana data in (1.5) contiene solo il termine cinetico, vale solo in condizioni di particella libera, in questo senso è meno generale della Lagrangiana definita in (1.4).

# Capitolo 2

## Geometria Riemanniana

Nel capitolo precedente sono stati riassunti tutti gli strumenti matematici affinchè fossimo capaci di studiare geodetiche in metriche generiche. In questo capitolo si applicheranno questi risultati al caso più studiato, quello delle varietà Riemanniane. Ricordiamo che:

Teorema 10. Su ogni varietà differenziabile M esiste una metrica Riemanniana.

La metrica piatta, costruita prendendo una metrica piatta su ogni carta di un atlante di M incollata una all'altra per mezzo di una partizione dell'unità, fornisce un esempio di metrica Riemanniana su varietà differenziabili.

## 2.1 Distanza Riemanniana

Per definire il concetto di distanza Riemanniana bisogna riprendere quello di lunghezza di una curva in geometria Riemanniana. Nella trattazione di questo capitolo la notazione (M, g) indicherà sempre una varietà Riemanniana.

**Definizione 20.** La *lunghezza d'arco Riemanniana* di una curva regolare a tratti  $\gamma$ :  $[a,b] \to M$  è la funzione  $s : [a,b] \to \mathbb{R}^+$  data da

$$s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|_{\gamma(\tau)} d\tau$$

La lunghezza L di una curva  $\gamma$  è il numero  $L(\gamma) = s(b)$ .

Se  $\|\gamma'(\tau)\|_{\gamma(\tau)} = 1$  quasi ovunque allora s(t) = t - a. Nel caso in cui a = 0, diciamo che  $\gamma$  è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

E' semplice dimostrare, tramite un cambio di variabile di integrazione, che la lunghezza di una curva è indipendente dalla parametrizzazione.

**Teorema 11.** Siano  $\gamma \ e \ \sigma$  due curve regolari a tratti che differiscono per una riparametrizzazione, allora  $L(\gamma) = L(\sigma)$ .

Questo risultato ci garantisce che ogni curva regolare a tratti può essere parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco.

Sia M una varietà Riemanniana connessa. Dati  $p, q \in M$  definiamo la distanza come l'estremo inferiore sulla lunghezza di tutte le curve regolari a tratti, che vanno da p a q.

$$d(p,q) = \inf_{\alpha} L(\gamma)$$

Osservazione 4. La definizione precedente ha senso visto che le varietà differenziabili hanno componenti connesse per archi regolari a tratti, quindi per ogni  $p \in q$  esiste una curva  $\gamma$  da p a q.

Inoltre, se  $\gamma$  da p a q è una curva minimizzante, allora  $d(p,q) = L(\gamma)$ ; ciò lo vedremo meglio in seguito.

**Teorema 12.** Sia (M,g) varietà Riemanniana connessa. Con la distanza Riemanniana  $d: M \times M \to [0, \infty[, (M, d)]$  è uno spazio metrico, cioè soddisfa le seguenti relazioni.

$$d(x,y) = d(y,x) \qquad \qquad \forall x, y \in M \tag{2.1}$$

$$d(x, y) = u(y, x) \qquad \forall x, y \in M \qquad (2.1)$$
  
$$d(x, x) = 0 \qquad \forall x \in M \qquad (2.2)$$
  
$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \qquad \forall x, y \in M \qquad (2.3)$$

$$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \qquad \forall x, y \in M$$

$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(x,y) \qquad \forall x, y \in M$$

$$(2.3)$$

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \qquad \qquad \forall x,y,z \in M$$
(2.4)

Osservazione 5. La topologia indotta dalla metrica coincide con quella della struttura differenziabile.

#### Completezza

Ricordiamo che uno spazio metrico si dice *completo* se ogni successione di Cauchy converge ad un punto dello spazio. Inoltre, in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy.

**Teorema 13** (Hopf-Rinow). Sia (M, g) una varietà Riemanniana, i sequenti asserti sono tutti equivalenti.

- (a) Completazza metrica: (M, d) è uno spazio metrico completo.
- (b) Completezza geodetica: per ogni  $v \in TM$ , la geodetica c(t) su M, con c(0) = p e c'(0) = v, è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .
- (c) Per ogni  $p \in M$ , la mappa esponenziale  $exp_p$  è definita sull'intero spazio tangente  $T_pM$  di M in p.
- (d) Compattezza finita: ogni sottoinsieme K di M tale che d è limitato (cioè,  $\sup\{d(p,q):$  $p, q \in K$   $\} < \infty$  ha chiusura compatta.

La varietà Riemanniana (M, q) sarà detta completa se soddisfa una qualsiasi di queste condizioni, e di conseguenza tutte.

Si rimanda alla bibliografia, per la dimostrazione del teorema.

Osservazione 6. Si noti la proprietà di connettibilità di geodetica minima. Se è verificata una delle condizioni di cui sopra, allora presi due punti qualsiasi  $p, q \in M$ , esiste un segmento geodetico liscio c da p a q, con L(c) = d(p,q).

*Osservazione* 7. Non esiste un analogo al teorema di Hopf-Rinow in geometria pseudo-Riemanniana.

## 2.2 Geodetiche

E' ben noto che presi due punti,  $A \in B$ , nello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$  esiste una sola retta che li unisce e rappresenta la curva di lunghezza minima tra  $A \in B$ . Le geodetiche su varietà Riemanniane generalizzano questo concetto; si è già dimostrata la loro unicità e vedremo che rappresentano le curve di minima lunghezza tra due punti fissati sulla varietà.

### Curve localmente minimizzanti

Proprietà importantissima per le geodetiche Riemanniane è quella di costituire la traiettoria più breve tra due punti sufficientemente vicini di una varietà.

**Definizione 21.** Siano  $p, q \in M$ , sia  $\gamma : [a, b] \to M$  una curva regolare a tratti e tale che  $\gamma(a) = p \in \gamma(b) = q$ .  $\gamma$  è detta *minimizzante* la lunghezza d'arco se per ogni curva  $\sigma$  da p a q vale  $L(\gamma) \leq L(\sigma)$ .

 $\gamma$  è detta *localmente minimizzante* se per ogni  $t \in [a, b]$  esiste un  $\epsilon > 0$  tale che  $\gamma|_{[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]}$  è minimizzante.

Osservazione 8. Ogni curva  $\gamma$  minimizzante è localmente minimizzante. Il viceversa in generale non è vero.

Enunciamo un importante teorema che caratterizza le geodetiche Riemanniane, per la dimostrazione rimandiamo alla bibliografia [4].

**Teorema 14.** Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. La curva  $\gamma$  è localmente minimizzante se e soltanto se è una geodetica Riemanniana.

Segue uno studio di geodetiche sulle superfici di rotazione che ricoprono un grande ventaglio di applicazioni in matematica.

## 2.3 Superfici di rotazione

Una superficie di rotazione è la superficie  $\sigma$  ottenuta dalla rotazione di una curva piana  $\gamma$ , chiamata curva profilo, intorno a una linea retta che giace su  $\pi$ , dove  $\pi$  è il piano in

cui è contenuta  $\gamma$ .

Sia  $\gamma$  la curva profilo parametrizzata rispetto a un parametro  $t \in \sigma$  la superficie rispetto ai parametri  $u \in v$ . Allora per ogni  $p \in \gamma(t_p)$  esistono q, v tali che  $q \in \sigma(u, v)$ .

Le circonferenze ottenute dalla rotazione di punti fissati sulla curva profilo intorno all'asse di rotazione, sono dette *paralleli*; le curve sulla superficie  $\sigma$  ottenute dalla rotazione della curva profilo di un angolo dato, sono dette *meridiani*.

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano tale che z sia l'asse di rotazione e x - z il piano  $\pi$ . In tale riferimento una parametrizzazione della curva profilo è  $\gamma(t) = (f(u), 0, g(u)))$ . Con questa scelta una parametrizzazione per la superficie di rotazione  $\sigma$  è:

$$\sigma(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)) \qquad u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]$$

Calcoliamo

$$\sigma_u = \frac{\partial}{\partial u} \sigma(u, v) := (\dot{f} \cos(v), \dot{f} \sin(v), \dot{g})$$
  
$$\sigma_v = \frac{\partial}{\partial v} \sigma(u, v) := (-f \sin(v), f \cos(v), 0)$$

e quindi

$$\sigma_u \times \sigma_v = (f\dot{g}\cos(v), -f\dot{g}\sin(v), f\dot{f})$$
$$A := \|\sigma_u \times \sigma_v\| = f^2(\dot{f}^2 + \dot{g}^2)$$

Affinchè la curva  $\gamma$  sia regolare, A dev'essere ovunque non nullo. Ossia, se f(u) non è mai nullo (cioè, non interseca mai l'asse di rotazione z) e se lo sono  $\dot{f}^2$ ,  $\dot{g}^2$  simultaneamente. La regolarità di  $\sigma$  la otteniamo se  $\gamma$  regolare e l'angolo di rotazione  $v \in I$  è di lunghezza  $l \leq 2\pi$ .

#### Prima forma fondamentale

Una superficie regolare S ammette sempre un piano tangente in ogni suo punto p. Indichiamo tale piano con  $T_pS$ . Quindi, ha senso considerare vettori tangenti alla superficie in un punto generico.

La prima forma fondamentale di S in p , o prima forma differenziale, associata ai vettori tangenti  $v, w \in T_pS$ , è lo scalare

$$ds^{2} = dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^{2} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^{2} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^{2} = E du^{2} + 2F dudv + G dv^{2}$$

Dove  $x, y \in z$  sono le coordinate di un sistema di riferimento cartesiano di  $\mathbb{R}^3$ . Con i coefficienti:  $E := ||S_u||^2$ ,  $G := ||S_v||^2$ ,  $F := g_p(S_u, S_v)$ ; e i vettori  $S_u = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ ,  $S_v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ .

Notiamo che  $g_p$  è una restrinzione della metrica piatta in  $\mathbb{R}^3$ .

### Equazioni geodetiche

**Teorema 15.** Una curva  $\gamma$  su una superficie S è una geodetica se e solo se per ogni arco  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \, di \, \gamma \, contenuta in una porzione di superficie <math>\sigma \subseteq S$ , sono soddisfatte le seguenti due equazioni

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$
(2.5)

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)$$
(2.6)

dove  $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$  è la prima forma fondamentale di  $\sigma$ . Le equazioni differenziali (2.5), (2.6) sono chiamate equazioni geodetiche.

Osservazione 9. Le equazioni geodetiche (2.5), (2.6) sono equivalenti alle equazioni geodetiche più generali (1.2), nel caso particolare di superfici di rotazione.

#### Esempio

In questo paragrafo troveremo l'espressione analitica della prima forma fondamentale e delle equazioni geodetiche su superfici di rotazione.

Andiamo a calcolare i coefficienti E, F, G di una superficie di rotazione  $\sigma$ , in cui il vettore velocità della curva profilo è unitario. Sfruttando la formula fondamentale della trigonometria e l'ortogonlità tra  $\sigma_u \in \sigma_v$ .

$$E := \|\sigma_u\|^2 = \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$$
$$G := \|\sigma_v\|^2 = f^2$$
$$F := g_p(\sigma_u, \sigma_v) = 0$$

La prima forma fondamentale di una superficie di rotazione ha quindi la forma:

$$du^2 + f^2 dv^2 \tag{2.7}$$

Sostituendo i valori di E, F, G in (2.5) e (2.6), è facile verificare che le equazioni geodetiche su una superficie di rotazione assumono la forma:

$$\ddot{u} = f(u)\frac{df}{du}\dot{v}^2 \tag{2.8}$$

$$\frac{d}{dt}(f(u)^2\dot{v}) = 0 \tag{2.9}$$



**Geodetiche su una sfera** L'esempio più intuitivo di superficie di rotazione è la superficie sferica di raggio unitario  $S^2$ , la cui curva generatrice è una semicirconferenza.

Grazie ai risultati ottenuti in (2.18), una sua parametrizzazione si ottiene facilmente assegnando ai parametri della superficie  $u \in v$ , i parametri angolari  $u = \theta \in v = \phi$ , e alle funzioni  $f \in g$  le seguenti forme:

 $f(\theta) = \cos \theta e g(\theta) = \sin \theta$ . Dunque, una parametrizzazione per la sfera è

$$\sigma(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$$
(2.10)

Dove  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\phi \in [0, \pi]$ . In questa parametrizzazione la prima forma fondamentale di  $S^2$  assume la forma:

$$d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\phi^2$$

In questo esempio, le equazioni differenziali geodetiche (2.8) e (2.9) si scrivono nel seguente modo:

$$\ddot{\theta} - 2\tan\phi \ \dot{\phi}\dot{\theta} = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\cos^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0\,. \tag{2.12}$$

Senza perdere generalità, si considera il vettore tangente alla superficie sferica con norma unitaria  $\|\dot{\sigma}(t)\| = 1$ , da cui si ottiene l'equazione

$$\dot{\phi}^2 + \cos^2 \phi \, \dot{\theta}^2 = 1 \,.$$
 (2.13)

Dalla seconda equazione geodetica (2.12) si ottiene facilmente

Se  $\Omega = 0$ , allora  $\dot{\phi} = 0$  e quindi  $\phi$  è costante e  $\gamma$  è una parte di un meridiano. Da ora in avanti assumeremo  $\dot{\phi} \neq 0$ .

Inserendo  $\dot{\phi}$  dalla (2.14) nell' equazione (2.13) si ha

$$\dot{\theta}^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\cos^2 \theta} \,.$$

Lungo le geodetiche vale la seguente uguaglianza:

$$\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 = \frac{\dot{\theta}^2}{\dot{\phi}^2} = \cos^2\theta \left(\Omega^{-2}\cos^2\theta - 1\right), \qquad (2.15)$$

e quindi

$$\pm (\phi - \phi_0) = \int \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{\Omega^2 2 \cos^2 \theta - 1}}$$

dove  $\phi_0$  è una costante. L'integrale può essere risolto con la sostituzione  $u = \tan \theta$ . Ciò dà

$$\pm (\phi - \phi_0) = \int \frac{du}{\Omega^{-2} - u^2 - 1} = \arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{\Omega^{-2} - 1}}\right).$$
(2.16)

Alla fine si ottiene

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\Omega^{-2} - 1} \sin \left( \phi - \phi_0 \right). \tag{2.17}$$

Questo implica che le coordinate  $x = \cos \theta \cos \phi$ ,  $y = \cos \theta \sin \phi$  e  $z = \sin \theta$  di  $\gamma(t)$  soddisfano l'equazione

$$z = ax + by,$$

dove, sfruttando la formula di sottrazione del seno,  $a = \mp \sqrt{\Omega^{-2} - 1} \sin \phi_0$ , e  $b = \pm \sqrt{\Omega^{-2} - 1} \cos \phi_0$ . Si è giunti all'equazione di un piano passante per l'origine, e quindi per il centro della sfera. Il supporto della geodetica  $\gamma$  è contenuto nell'intersezione tra questo piano e la sfera  $S^2$ . Abbiamo raggiunto il risultato già noto che afferma che le curve geodetiche su una superficie sferica sono tutti e soli i cerchi di raggio massimo.

### 2.4 Teorema di Clairaut

Nel seguente paragrafo si dimostrerà un teorema introdotto dal matematico e astronomo francese Alexis Claude Clairaut, nel "*Théorie de la figure de la terre, tirée des principers de l'hydrostatique*", del 1743. In quest'opera si evidenzia che la Terra è un ellissoide di rotazione e si applica l'omonimo teorema per mettere in relazione l'accelerazione di gravità in ogni punto della superficie terrestre alla sua posizione, riuscendo a calcolare l'ellitticità della Terra con misure della gravità a differenti latitudini.

Si descrivono in seguito alcuni risultati sulle superfici di rotazione, di cui abbiamo bisogno per la dimostrazione del teorema.

Sia  $\sigma$  una superficie di rotazione la cui curva profilo è data da  $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$ . Consideriamo  $\sigma$  paramatrizzata rispetto alla lunghezza d'arco:

$$\sigma(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

$$(2.18)$$

e tale che  $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ , f(u) > 0 per ogni u. Evidentemente, f(u) rappresenta la distanza dei punti sulla curva  $\gamma$  rispetto all'asse z. In queste ipotesi è valida la seguente equazione:

$$\dot{u}^2 + f(u)^2 \dot{v}^2 = 1 \tag{2.19}$$

Ricavata imponendo  $\|\gamma'\| = 1$  e da cui si ottiene il seguente risultato.

**Proposizione 16.** Su una superficie di rotazione valgono le seguenti affermazioni:

- 1. Ogni meridiano è una geodetica.
- 2. Un parallelo  $u = u_0$  è una geodetica se, e soltanto se,  $u_0$  è un punto stazionario di f  $\left(\frac{df}{du}\Big|_{u=u_0} = 0\right)$ .

Dimostrazione. Semplicemente, partendo dalle definizioni.



1. Per definizione un meridiano ha v = costante, inoltre dall'equazione (2.19), si ottiene:

$$\dot{u}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = costante$$

Con  $v \in \dot{u}$  costanti le equazioni geodetiche su  $\sigma$  nella forma (2.8) e (2.9) sono banalmente soddisfatte.

2. Un parallelo con  $u = u_0$  risolve la (2.19) se

$$\dot{v}^2 = \frac{1}{f(u_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \pm \frac{1}{f(u_0)}$$

Avendo per ipotesi che il parallelo trattato è una geodetica l'equazione (2.8) dev'essere soddisfatta. Affinchè ciò avvenga, poichè  $v \neq 0$ , deve valere:

$$\frac{df}{du} = 0$$

Dimostriamo ora l'implicazione inversa. Se  $\frac{df}{du} = 0$ , l'equazione (2.8) è ovviamente soddisfatta. Lo stesso vale per l'equazione (2.9), in quanto  $\dot{v} = \pm \frac{1}{f(u_0)}$  e  $f(u) = f(u_0)$ , ci dicono che  $\dot{v}$  e f(u) sono costanti.

La formula di Clairaut caratterizza le geodetiche come curve il cui momento angolare è fissato. Esso ci dà una comprensione qualitativa delle geodetiche su superfici di rotazione, e risulta molto utile nel momento in cui la risoluzione delle equazioni geodetiche è impossibile o difficile e laboriosa.

**Teorema 17** (Teorema di Clairaut). Sia  $\gamma$  una curva il cui vettore velocità è costantemente unitario ( $\|\gamma'\| = 1$ ), su una superficie di rotazione  $\sigma$ . Sia  $\rho : \sigma \to \mathbb{R}$  una funzione che ad ogni punto  $p \in \sigma$  associa la distanza di p dall'asse di rotazione e sia  $\psi$  l'angolo tra  $\gamma'(p)$  e il meridiano di  $\sigma$  passante per p, definito per ogni  $p \in \sigma$ . Se  $\gamma$  è una geodetica allora la quantità  $\rho \sin \psi$  è costante lungo  $\gamma$ .

Viceversa se  $\rho \sin \psi$  è costante lungo  $\gamma$  e se nessuna arco di  $\gamma$  ( $\gamma(J)$ , J aperto) appartiene ai paralleli di  $\sigma$ , allora  $\gamma$  è un geodetica. Dimostrazione. Per come è stato definito  $\rho$ , risulta  $\rho = f(u)$ , ossia due funzioni che rappresentano allo stesso modo la distanza della curva dall'asse di rotazione. Notiamo che i vettori  $\sigma_u \in \rho^{-1} \sigma_v$  sono unitari e tangenti ai meridiani e ai paralleli, rispettivamente, e tra loro sono perpendicolari ( $F := g_p(\sigma_u, \sigma_v) = 0$ ).

Assumendo che per  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  vale  $\|\gamma'\| = 1$ , possiamo scrivere il vettore velocità della curva  $\gamma$  come:

$$\gamma' = \cos\psi\sigma_u + \rho^{-1}\sin\psi\sigma_v \tag{2.20}$$

La precedente equazione è utile per definire il segno dell'angolo  $\psi$ . Ovviamente applicando un prodotto vettoriale di  $\sigma_u$  con l'espressione (2.20), abbiamo:

$$\sigma_u \times \gamma' = \rho^{-1} \sin \psi \ \sigma_u \times \sigma_v$$

Inoltre dall'espressione dello stesso vettore  $\dot{\gamma}$ , ricavata analiticamente, per derivazione delle componenti,  $\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v$ , otteniamo:

$$\dot{v}\sigma_u \times \dot{\sigma_v} = \rho^{-1}\sin\psi \ \sigma_u \times \sigma_v$$

Da cui, banalmente, si ha:

$$\dot{v} = \rho^{-1} \sin \psi$$

E moltiplicando ambo i membri per  $\rho^2$ :

$$\rho^2 \dot{v} = \rho \sin \psi \tag{2.21}$$

Ma l'espressione di cui sopra risulta essere costante per la (2.9), che ci assicura

$$\rho^2 \dot{v} = f(u)^2 \dot{v} = costante = \Omega$$

Dimostriamo ora l'inverso, se  $\rho \sin \psi = \Omega$  è costante lungo una curva  $\gamma$  con vettore tangente unitario su S, è evidente che la seconda equazione delle geodetiche (2.9) è soddisfatta. Affinchè la curva  $\gamma$  sia una geodetica resta soltanto da verificare che sia soddisfatta anche la (2.8).

$$\dot{v} = \frac{\sin\psi}{\rho} = \frac{\Omega}{\rho^2} \tag{2.22}$$

La quale a sistema con la (2.19) dà

$$\dot{u}^2 = 1 - \frac{\Omega^2}{\rho^2} \tag{2.23}$$

Differenziando ambo i membri, rispetto a t, si giunge all'uguaglianza:

$$2\dot{u}\ddot{u} = \frac{2\Omega^2}{\rho^3}\dot{\rho} = \frac{2\Omega^2}{\rho^3}\dot{\rho}\frac{d\rho}{du}\dot{v}$$
$$\implies \qquad \dot{u}\left(\ddot{u} - \rho\frac{d\rho}{du}\dot{v}^2\right) \tag{2.24}$$

Se il fattore tra parentesi non si annullasse su un certo punto  $t_0$  di  $\gamma$ ,  $\gamma(t_0) = \sigma(u_0, v_0)$ , esisterà un numero  $\epsilon > 0$  tale che  $\left(\ddot{u} - \rho \frac{d\rho}{du} \dot{v}^2\right)$  non si annulli per  $|t - t_0| < \epsilon$ . Se invece,  $\dot{u} = 0$  per  $|t - t_0| < \epsilon$ , allora  $\gamma$  coinciderebbe con i paralleli  $u = u_0$ , quando  $|t - t_0| < \epsilon$ , contrariamente alle ipotesi. E' dimostrato per assurdo, quindi, che il termine tra parentesi deve annullarsi su tutti i punti di  $\gamma$ , ossia

$$\ddot{u} = \rho \frac{d\rho}{du} \dot{v}^2$$

Il che significa che anche la prima equazione delle geodetiche (2.8) è soddisfatta.  $\Box$ 

#### Interpretazione meccanica

Il teorema di Clairaut ammette un'interpretazione meccanica piuttosto semplice. Ricordiamo che le geodetiche su una superficie S sono traiettorie su S di una particella non soggetta a forze, eccetto che in direzione normale alla superficie, per un'eventuale necessità di mantenere il punto materiale su S.

Se S è una superficie di rotazione, la forza nel punto  $p \in S$  giace nel piano contenente l'asse di rotazione e p, quindi non ha momento intorno l'asse. Segue che il momento angolare  $\Omega$  della particella attorno all'asse è costante. Ma, se la particella si muove lungo una curva, a vettore tangente unitario, la sua compenente di velocità lungo il parallelo passante per p è sin  $\psi$ , e il momento angolare lungo l'asse è proporzionale a  $\rho \sin \psi$ .



**Esempio : Geodetiche su una pseudosfera** Una *pseudosfera* è una superficie generata per rotazione della sua curva generatrice, una *trattrice*, intorno al suo asintoto. Fu proposta da E. Beltrami come modello di geometria iperbolica.

Il nome è dovuto alla sua curvatura gaussiana, costante in ogni punto e negativa, l'opposto della sfera ordinaria.

Una parametrizzazione per la pseudosfera è

$$\sigma(u, v) = \left(e^{u} \cos v, e^{u} \sin v, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})\right)$$

Dove è evidente che  $f(u) = e^{2u}$  e quindi la prima forma fondamentale di una pseudosfera assume la forma:

$$du^2 + e^{2u} dv^2 (2.25)$$

Per portare questa superficie nella forma (2.19), è conveniente riparametrizzarla con  $w = e^{-u}$ . La pseudosfera nella nuova parametrizzazione sarà

$$\tilde{\sigma}(v,w) = \left(\frac{\cos v}{w}, \ \frac{\sin v}{w}, \ \sqrt{1 - \frac{1}{w^2}} - \cosh^{-1}(e^{-u})\right)$$

E' evidente che in questo esempio le funzioni  $f \in g$  in (2.18), assumono rispettivamente le forme  $\frac{1}{w} \in \sqrt{1 - \frac{1}{w^2} - \cosh^{-1}(e^{-u})}$ .

La prima forma fondamentale, invece, nella nuova parametrizzazione, che risulta essere

$$\frac{dv^2 + dw^2}{w^2} \quad , \qquad w > 1$$

Ottenuta semplicemente differenziando  $w = e^{-u}$  e sostituendo in (2.8); si noti che la condizione w > 1 è necessaria affinchè  $\tilde{\sigma}$  sia ben definita e liscia.

Vogliamo, ora, determinare le geodetiche su una pseudosfera, sfruttando il teorema di Clairault. Se  $\gamma(t) = \tilde{\sigma}(v(t), w(t))$  è una geodetica con vettore velocità unitario, otteniamo la seguente relazione:

$$\dot{v}^2 + \dot{w}^2 = w^2 \tag{2.26}$$

E la formula di Clairault ci dà

$$\frac{1}{w}\sin\psi = \frac{1}{w^2}\dot{v} = \Omega$$

Con  $\Omega$  ovviamente costante, abbiamo

$$\dot{v} = \Omega w^2 \tag{2.27}$$

Distinguiamo i due casi :

- Se  $\Omega = 0$  avremo un meridiano, v =costante.
- Se  $\Omega \neq 0$ ; sostituendo la (2.27) nella (2.26), avremo

$$\dot{w} = \pm w\sqrt{1 - \Omega^2 \omega^2}$$

Quindi, lungo la geodetica,

$$\frac{dv}{dw} = \frac{\dot{v}}{\dot{w}} = \pm \frac{w\Omega}{\sqrt{1 - \Omega^2 \omega^2}}$$

Integrando ambo i membri su w

$$(v - v_0) = \mp \frac{1}{\Omega} \sqrt{1 - \Omega^2 \omega^2}$$
,  $v_0 = cost.$  (2.28)

Infine, elevando al quadrato e portando le variabili alla sinistra dell'uguale e il termine costante a destra, si ha

$$(v - v_0)^2 + w^2 = \frac{1}{\Omega^2}$$

Le geodetiche su una pseudosfera risultano essere l'immagine sotto  $\tilde{\sigma}$  di archi di circonferenze nel piano v - w date dalla (2.28) e giacenti nella regione w > 1.

Si noti che i centri di tutte queste circonferenze giacciono sull'asse v, e quindi queste intersecano perpendicolarmente tale asse. I meridiani corrispondono a linee rette parallele all'asse w. *Osservazione* 10. Siccome le geodetiche sulla pseudosfera tendono a finire nel bordo circolare della superficie iperbolica, esse non possono essere estese indefinitivamente; nel caso dei meridiani ciò vale in una sola direzione, mentre per le altre curve geodetiche in entrambi i versi.

Un punto materiale che si muove a velocità costante lungo una tale geodetica raggiungerebbe il bordo in un tempo finito, e quindi dovrebbe fare esperienza del destino temuto dagli antichi marinai di cadere ai confini del mondo.

In termini più rigorosi, la ragione è che le geodetiche sulla pseudosfera, che nel piano v - w sono linee rette e semicerchi, attraversano la linea w = 1, la quale rappresenta un confine della regione corrispondente alla pseudosfera.

Osservazione 11. Notiamo che esistono due geodetiche passanti per ogni punto p fissato sulla pseudosfera con un dato momento angolare  $\Omega$ , con  $\dot{v}$  determinato dalla (2.22) e  $\dot{u}$ dato dalla (2.23)(a meno del segno). In realtà una geodetica è ottenuta dall'altra per riflessione rispetto al piano contenente p (che cambia  $\Omega$  in  $-\Omega$ ) seguita dal cambiamento del segno del parametro t della geodetica (che cambia nuovamente il momento angolare in  $\Omega$ ).

# Capitolo 3

## Geometria Lorentziana

L'obbiettivo del capitolo è studiare le proprietà che caratterizzano la geometria Lorentziana, in cui gioca un ruolo fondamentale il tensore metrico non definito positivo e quindi la causalità. A tale scopo vediamo come si definisce la distanza e come si comportano le geodetiche su varietà Lorentziane. Ciò ci permetterà, alla fine del capitolo, di analizzare metriche di particolare importanza nelle applicazioni alla Relatività Generale.

Innanzitutto, come nel caso Riemanniano (Teorema 10), vediamo qual è una condizione necessaria e sufficiente per una varietà affinchè si possa definire su di essa una metrica Lorentziana.

**Teorema 18.** Una varietà differenziabile ammette una metrica Lorentziana se e solo se è non compatta o è compatta con caratteristica di Eulero nulla.

### 3.1 Spazio-tempo

Per definire il concetto di spazio-tempo Lorentziano è necessario introdurre quello di orientazione temporale. Sia (M, g) una varietà Lorentziana.

**Definizione 22.** Un campo vettoriale continuo X su M è detto di *tipo tempo* se g(X(p), X(p)) < 0 per ogni punto  $p \in M$ .

In generale, in una varietà Lorentziana non sempre esiste un campo vettoriale di tipo tempo definito globalmente.

**Definizione 23.** Se una varietà Lorentziana (M, g) ammette un campo vettoriale continuo di tipo tempo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  definito globalmente, allora si dice che (M, g) è orientata temporalmente da X.

In questo caso il campo vettoriale X divide tutti i vettori tangenti non di tipo spazio v, in due classi di equivalenza.[7]

• Se g(X(p), v) > 0, il vettore v si dice diretto al futuro.

• Se g(X(p), v) < 0, il vettore v si dice diretto al passato.

*Osservazione* 12. Si noti che i vettori di tipo spazio non sono presenti in tale classificazione in quanto mancano di significato fisico.

Una varietà Lorentziana (M, g) è detta orientabile temporalmente se ammette un'orientazione temporale data da un qualche campo vettoriale di tipo tempo. In questo caso, (M, g) ammette due distinte orientazioni temporali, definite da  $X \in -X$ .

**Definizione 24.** Uno spazio-tempo (M, g) è una varietà differenziabile connessa (di Hausdorff e a base numerabile) di dimensione  $\geq 2$ , dotata di un tensore metrico Lorentziano e orientata temporalmente.

In uno spazio-tempo (M, g), un campo vettoriale non di tipo spazio lungo una curva non può cambiare in modo continuo dall'essere diretto al passato all'essere diretto al futuro, da ciò segue che una curva di tipo tempo o luce in (M, g) permane sempre nella sua direzione temporale.

Useremo la notazione standard; due punti  $p, q \in M$  sono cronologicamente correlati se esiste una curva liscia di tipo tempo che và da p a q, se questa curva è orientata al futuro allora q è nel futuro cronologico di p, e si indica con la notazione:  $p \ll q$ . Gli eventi  $p \in q$ sono causalmente correlati se  $p \ll q$ , p = q, o se c'è una curva liscia di tipo luce diretta al futuro che và da p a q, e si indica con la notazione:  $p \leq q$ . Inoltre la notazione p < qindicherà l'intersezione delle condizioni  $p \leq q \in p \neq q$ .

Fissato  $p \in M$  definiamo il futuro cronologico  $I^+(p)$ , il passato cronologico  $I^-(p)$ , il futuro causale  $J^+(p)$  e il passato causale  $J^-(p)$ :

$$I^{+}(p) = \{q \in M : p << q\} \qquad I^{-}(p) = \{q \in M : q << p\}$$
$$J^{+}(p) = \{q \in M : p \le q\} \qquad J^{-}(p) = \{q \in M : q \le p\}$$

Osservazione 13. Gli insiemi  $I^{-}(P)$ ,  $I^{+}(P)$  sono aperti, mentre  $J^{-}(p)$ ,  $J^{+}(p)$  non sono nè aperti nè chiusi.

A questo punto la definizione di spazio tempo cronologico e causale dovrebbe essere intuitiva. Uno spazio-tempo (M, g) è detto *cronologico* se  $p \notin I^+(p)$ , per ogni  $p \in M$ . Ovvero, (M, g) non contiene curve chiuse di tipo tempo.

Uno spazio-tempo (M, g) è detto *causale* se non esistono coppie di punti distinti  $p, q \in M$ tali che  $p \leq q \leq p$ . Ciò equivale a richiedere che (M, g) non contenga curve chiuse non di tipo spazio.

Osservazione 14. Da un punto di vista fisico, gli spazi-tempo della relatività generale sono solitamente pensati essere cronologici. Si può mostrare che se M è compatto, allora (M, g) contiene curve chiuse di tipo tempo. Dunque, gli spazi-tempo considerati usualmente dalla relatività generale sono scelti non compatti. In relatività generale ogni punto di una varietà Lorentziana corrisponde ad un evento, quindi l'esigenza fisica di cercare spazi-tempo cronologici, è dovuta al fatto che l'esistenza di curve chiuse di tipo tempo permettono la possibilità di viaggi nel tempo, in cui una persona può rincontrare se stesso a un'età inferiore. Più in generale, curve chiuse non di tipo spazio generano paradossi che coinvolgono la causalità e per questo si dice che "violano la causalità". Inoltre, anche se uno spazio-tempo non ha curve chiuse di tipo non spazio, può contenere un punto p tale che esistano curve non di tipo spazio dirette al futuro che lasciano intorni arbitrariamente piccoli di p e poi ci ritornano. Questo comportamento si dice essere una *violzione della* causalità forte in p.

Gli spazi-tempo in cui non accadono questo tipo di violazioni sono fortemente causali.

E' importante per le sue applicazioni la definizione di *spazio-tempo globalmente iperbolico*.

**Definizione 25.** Lo spazio-tempo è detto globalmente iperbolico se è fortemente causale e soddisfa la condizione per cui  $J^+(p) \cap J^-(q)$  è compatto per ogni  $p, q \in M$ .

### 3.2 Distanza Lorentziana

Sia (M, g) una varietà Lorenziana di dimensione  $n \ge 2$ . Presi  $p, q \in M$  con  $p \le q$ , indichiamo con  $\Omega_{pq}$  l'insieme di tutte le curve non di tipo spazio dirette al futuro che vanno da p a q:

$$\Omega_{pq} = \{ \gamma \in F \mid \gamma : [0, 1] \to M, \ \gamma(0) = p, \ \gamma(1) = q \}$$

dove si è indicato con F l'insieme delle curve di tipo tempo e di tipo luce orientate al futuro.

**Definizione 26.** La lunghezza d'arco Lorentziana L è un funzionale  $L : \Omega_{pq} \to \mathbb{R}$  definito dalla relazione

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t=t_i}^{t=t_{i+1}} \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))} \, dt$$

Dove  $\gamma \in \Omega_{pq}$  è regolare a tratti,  $0 = t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$  è una partizione tale che  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  è liscia per ogni i = 0, 1, ..., n - 1.

Come per la definizione di lunghezza d'arco nel caso Riemanniano, anche questa è indipendente dalla parametrizzazione di  $\gamma$ .

**Definizione 27.** La distanza Lorenziana  $d: M \times M \to \mathbb{R}$  è definita in modo che per ogni  $p, q \in M$ :

- Se  $q \notin J^+(p)$ , allora d(p,q) = 0
- Se  $q \in J^+(p)$ , allora  $d(p,q) = \sup\{L_g(\gamma) : \gamma \in \Omega_{pq}\}$

Immediatamente, segue dalla definizione che

$$d(p,q) > 0 \iff q \in I^+(p) \tag{3.1}$$

La funzione distanza Lorenziana caratterizza il passato e il futuro cronologico di ogni punto p dello spazio-tempo. Tuttavia, essa non riesce a fare lo stesso per il passato e futuro causale, in quanto è vera la seguente implicazione: se  $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$  allora d(p,q) = 0. Ma l'implicazione inversa non è valida:  $d(p,q) = 0 \Rightarrow q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ . Sottolineamo che la distanza Lorentziana non necessariamente è finita.

Uno spazio-tempo è detto vizioso nel punto  $p \in M$  se  $I^+(p) \cap I^-(p) = M$ , mentre, è detto totalmente vizioso se  $I^+(p) \cap I^-(p) = M$ , per ogni  $p \in M$ .

**Lemma 19.** Sia (M, g) uno spazio-tempo arbitrario.

- 1. Se  $p \in I^+(p)$ , allora  $d(p,p) = \infty$ . Quindi, per ogni  $p \in M$  si ha d(p,p) = 0 oppure  $d(p,p) = \infty$ .
- 2. (M, g) è totalmente vizioso se e solo se  $d(p, q) = \infty$ , per ogni  $p, q \in M$ .
- 3. Se (M, g) è vizioso in p, allora (M, g) è totalmente vizioso.
- Dimostrazione. 1. Si supponga  $p \in I^+(p)$ . E' possibile, dunque, trovare una curva chiusa di tipo tempo  $\gamma : [0,1] \to M$ , con  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ . Poichè  $\gamma$  è di tipo tempo,  $L(\gamma) > 0$ . Sia  $\sigma_n \in \Omega_{pp}$  la curva di tipo tempo ottenuta attraversando n volte  $\gamma$ , allora  $L(\sigma_n) = nL(\gamma) \to \infty$  per  $n \to \infty$ . Si ottiene quindi la tesi,  $d(p,p) = \infty$ . Se invece  $p \notin I^+(p)$ , allora segue direttamente da (3.1) che d(p, p) = 0.
  - 2. Si supponga (M, g) totalmente vizioso. Siano  $p, q \in M$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Poichè  $p \in I^+(p)$ , nella precedente (1.) si è dimostrato che esiste una curva  $\gamma_1 \in \Omega_{pp}$ , tale che  $L(\gamma_1) \geq n$ . Poichè  $q \in I^+(p)$ , esiste una curva di tipo tempo  $\gamma_2$  da p a q. E allora la curva  $\gamma$  ottenuta da  $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \in \Omega_{pq}$  è di tipo tempo e di lunghezza  $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) > n$ . Quindi  $d(p,q) = \infty$ . Inversamente, si supponga che  $d(p,q) = \infty$  per ogni  $p, q \in \Omega_{pq}$ . Fissando  $r \in M$  si ha d(r,p) > 0 e d(p,r) > 0 per ogni  $p \in M$ , ciò vuol dire che p è sia nel passato che

ha d(r,p) > 0 e d(p,r) > 0 per ogni  $p \in M$ , ciò vuol dire che p è sia nel passato che nel futuro cronologico di r. Dall'arbitrarietà di r segue subito che  $I^+(r) \cap I^-(r) = M$ , per ogni  $r \in M$ .

3. Sia  $q \in M = I^+(p) \cap I^-(p)$ . Il fatto che  $q \in I^+(p)$  implica, attraverso la transitività di <<, che  $I^-(p) \subseteq I^-(q)$ . Allo stesso modo,  $q \in I^-p$ ) implica  $I^+(p) \subseteq I^+(q)$ . E quindi,  $M = I^+(p) \cap I^-(p) \subseteq I^+(q) \cap I^-(q)$ .  $\Box$ 

Analizziamo un po' la funzione distanza Lorentziana, appena definita. A differenza della distanza Riemanniana essa è degenere, cioè non è valida l'implicazione  $d(p,q) = 0 \Rightarrow$ p = q. Infatti, proprio dalla definizione segue che se  $I^+(p) \neq M$  esistono punti  $q \in M$ con d(p,q) = 0. Inoltre, come mostrato nel lemma precedente, è possibile che si verifichi d(p,p) > 0 per qualche  $p \in M$ .

La funzione distanza Lorentziana non è simmetrica.

**Proposizione 20.** Se  $p \neq q$  e le distanze d(p,q) e d(q,p) sono finite. Allora d(p,q) = 0 oppure d(q,p) = 0. Allo stesso modo, se d(p,q) > 0 e d(q,p) > 0, allora  $d(p,q) = d(q,p) = \infty$ .

Dimostrazione. Se d(p,q) > 0 e d(q,p) > 0, possiamo trovare due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  di tipo tempo orientate al futuro, rispettivamente, da p a q e da q a p. Sia  $\{\gamma_n\}$  una successione di curve definita da  $\gamma_n = \gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_1)^n \in \Omega_{pq}$ . Per  $n \to \infty$ ,  $L(\gamma_n) \to \infty$ , da cui  $d(p,q) = \infty$ . Allo stesso modo si dimostra  $d(q,p) = \infty$ .  $\Box$ 

Dalla definizione di funzione distanza Lorentziana, si ottiene che per ogni geodetica  $\gamma$ in un arbitrario spazio-tempo (M, g) che sia di tipo tempo, diretta al futuro e completa vale

$$\lim_{t \to \infty} d\left(\gamma(0), \gamma(t)\right) \ge \lim_{t \to \infty} L\left(\gamma|_{[0,t]}\right) = \infty$$

Al contrario, varietà Riemanniane complete  $(N, g_0)$  possono contenere geodetiche (non chiuse)  $\sigma$  :  $[0, \infty[ \rightarrow N \text{ per cui il } \sup\{d_0(\sigma(0), \sigma(t)) : t \geq 0\}$  è finito. Affinchè sia soddisfatta  $\lim_{t\to\infty} d(\sigma(0), \sigma(1)) = \infty$  su una varietà Riemanniana c'è bisogno di ipotesi aggiuntive, che non saranno discusse in questo testo.

La funzione distanza Lorenziana oltre a non essere simmetrica e degenere, soddisfa la disuguaglianza triangolare Lorentziana, con segno di disuguaglianza invertito rispetto alla relazione triangolare ordinaria. Esplicitamente, sia  $p \leq r \leq q$ , allora

$$d(p,q) \ge d(p,r) + d(r,q)$$

E' ormai chiarissimo che le varietà Lorentziane (M, d), con la distanza così definita, non sono uno spazio metrico (vedi (2.1) - (2.4)).

Discutiamo ora alcune proprietà che rendono questo tipo di varietà utili nella loro applicazione alla Fisica. In generale la distanza Lorenziana  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty[$  può essere discontinua e assumere valori infiniti. La classe naturale di spazio-tempo per cui la distanza è continua e a valori finiti è quella globalmente iperbolica.

**Lemma 21.** Per uno spazio-tempo globalmente iperbolico (M, g), la funzione distanza Lorentziana d è finita e continua su  $M \times M$ .

Per approfondimenti si faccia riferimento alla bibliografia [7].

## 3.3 Geodetiche

Lo scopo del paragrafo è la descrizione delle geodetiche in geometria Lorentziana, le quali, come già accennato, si distinguono in tre tipi.

Ricordando che il vettore tangente  $\gamma'$  di una geodetica è costante e che la metrica Lorenziana permette l'esistenza di vettori con moduli negativi, si distinguono tre famiglie di geodetiche, a seconda del segno di  $\|\gamma'\|$ :

- Se  $\|\gamma'\| < 0$ , la geodetica  $\gamma$  è detta di tipo spazio.
- Se  $\|\gamma'\| = 0$ , la geodetica  $\gamma$  è detta di *tipo luce*.
- Se  $\|\gamma'\|>0$  , la geodetica  $\gamma$  è detta di  $tipo\ tempo.$

### Completezza geodetica

L'obbiettivo, ora, è notare la grande differenza che intercorre tra geometria Riemanniana e Lorentziana, in merito alla completezza geodetica. Mentre su una varietà Riemanniana completa (M, g) per due punti arbitrari di M una geodetica che li congiunge, in geometria Lorenziana non è sempre vero. A tale scopo descriviamo alcuni concetti utili per mostrarlo.

**Definizione 28.** Siano due punti  $p, q \in M$  tali che p < q. La curva  $\gamma \in \Omega_{pq}$  è detta massimale se  $L(\gamma) = d(p,q)$ .

Osservazione 15. Se  $\gamma : [0, 1] \to M$  appartiene a  $\Omega_{pq}$  è massimale, allora per ogni s, t tali che  $0 \leq s < t \leq 1$ , si ha  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = L(\gamma|_{[s, t]})$ . Ricavata come immediata conseguenza della disuguaglianza triangolare Lorentziana.

Enunciamo ora una proposizione utile per la dimostrazione del prossimo teorema, il quale necessita per la comprensione di alcune proprietà delle geodetiche massimali.

**Proposizione 22.** Sia U un intorno convesso normale centrato nel punto  $p \in M$ . Per  $q \in J^+(p)$ , si denota  $\bar{pq}$  l'unica geodetica non di tipo spazio  $c : [0,1] \to U$  tale che c(0) = p e c(1) = q. Se  $\gamma$  è una curva su U non di tipo spazio orientata al futuro da p a q con  $L(\gamma) = d(p,q)$ , allora  $\gamma$  coincide con la parametrizzazione  $\bar{pq}$ .

**Teorema 23.** Se  $\gamma \in \Omega_{pq}$  soddisfa  $L(\gamma) = d(p,q)$ , allora  $\gamma$  può essere riparametrizzata come geodetica liscia.

Dimostrazione. Fissato un punto  $\gamma(t)$  su  $\gamma$ . Possiamo trovare  $\delta > 0$  tale che un intorno convesso centrato in  $\gamma(t + \delta)$  contenga  $\gamma([t - \delta, t + \delta])$ . L'osservazione 9 ci suggerisce che la curva  $\gamma|[t - \delta, t + \delta]$  è massimale. Quindi la proposizione precedente implica che è possibile riparametrizzare  $\gamma([t - \delta, t + \delta])$  in modo che sia una geodetica liscia. Data l'arbitrarietà del parametro t, il teorema è dimostrato.

**Corollario 24.** Se  $p \le q$  ma non vale che  $p \ll q$ , allora esiste una geodetica massimale di tipo luce da p a q.

Dimostrazione. Le ipotesi di causalità su  $p \in q$  implicano d(p,q) = 0. Sia  $\gamma$  una curva non di tipo spazio diretta al futuro da p a q, dalla definizione di distanza Lorentziana  $d(p,q) \ge L(\gamma) \ge 0$ . Le due condizioni precedenti devono valere contemporaneamente, la loro intersezione fornisce  $d(p,q) = L(\gamma) = 0 \in \gamma$  è massimale. Dal teorema 24,  $\gamma$  può essere riparametrizzata in modo da essere una geodetica liscia  $c : [0,1] \to M$  da p a q. Inoltre, da  $L(c) \le d(p,q) = 0$  si ottiene finalmente che la geodetica c deve essere di tipo luce.  $\Box$  Osservazione 16. Si noti che poichè la geodetica c di tipo luce è massimale, non può contenere nessun punto coniugato di tipo luce a p che precede q.

Un caso particolarmente utile di questo corollario si verifica quando q = p. Qui, si pò dedurre che se lo spazio-tempo (M, g) è è cronologico ma non causale, allora esiste una geodetica liscia di tipo luce  $\beta : [0, 1] \to (M, g)$  tale che  $\beta(0) = \beta(1) \in \beta'(1) = \lambda \beta'(1)$ , con  $\lambda > 0$ .

A questo punto notiamo che la completezza geodetica non implica l'esistenza di segmenti geodetici massimali che uniscono coppie di punti causalmente correlati. Cioè, in detta condizione, due generici punti cronologicamente connessi  $p, q \in M : p \ll q$  non possono essere uniti da una geodetica  $\gamma$  di tipo tempo con  $L(\gamma) = d(p,q)$ .

Per dimostrare l'erroneità di questa implicazione è sufficiente trovare un esempio in cui



Figura 3.1: Spazio anti-de Sitter bidimensionale

ciò non si verifica. Questo è dato dallo spazio anti-de Sitter bidimensionale. Esso è una varietà Lorentziana (M, g) definita da

$$M = \{(x,t) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$$
$$ds^{2} = \sec^{2} x \left(-dt^{2} + dx^{2}\right)$$

In questo spazio-tempo tutte le geodetiche di tipo tempo dirette al futuro uscenti da p sono concentrate nel punto r (Figura 3.1). Non esiste nè una geodetica di tipo tempo massimale nè tantomeno una curva con le stesse caratteristiche che unisca  $p \in q$ . Notiamo che un'insieme aperto di punti  $U \subseteq I^+(p)$  può essere determinato tramite la proprietà che nessuno dei punti contenuto in esso può essere connesso a p tramite una generica geodetica, e ciò è vero nonostante la completezza geodetica di questo spazio-tempo.

Come già accennato, tuttavia, esiste una classe di spazi-tempo in cui per ogni  $p, q \in M$ tali che  $q \in J^+(p)$  possono essere connessi da una geodetica in modo da definirne una distanza; questa classe è quella degli spazi-tempo globalmente iperbolici. Qui tra due punti

causalmente correlati esiste sempre una geodetica che massimizza la lunghezza d'arco tra tutte le curve non di tipo spazio e dirette al futuro che passano per  $p \in q$ .

**Teorema 25.** Sia (M, g) uno spazio-tempo globalmente iperbolico. Per ogni  $p, q \in M$  tali che  $q \in J^+(p)$ , esiste un segmento geodetico massimale  $\gamma \in \Omega_{pq}$  tale che  $L(\gamma) = d(p,q)$ .

**Definizione 29.** Una geodetica c su (M, g) con parametro affine t è detta *completa* se il dominio di definizione può essere esteso per  $-\infty < t < \infty$ .

Questa definizione di completezza di geodetiche è indipendente dalla parametrizzazione. Infatti, scelta una geodetica c presi due parametri affini s, t di c, dalle equazioni differenziali delle geodetiche segue banalmente che esistono due costanti  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che  $s(t) = \alpha t + \beta$  per ogni t nel dominio di c.

**Definizione 30.** Lo spazio-tempo (M, g) è geodeticamente completo di tipo tempo (rispettivamente, di tipo luce e spazio) se ogni geodetica di tipo tempo (risp., luce e spazio) è completa.

Lo spazio-tempo è *geodeticamente completo* se tutte le geodetiche rispettano la proprietà di completezza.

**Teorema 26.** La completezza di geodetiche di tipo tempo, quella di tipo luce e quella di tipo spazio non sono equivalenti.

Inizialmente si pensava che la completezza geodetica di tipo tempo potesse implicare la completezza geodetica di tipo luce, e così a seguire una con l'altra. Sono stati poi trovati controesempi ad ognuna di queste implicazioni. Un esempio è quello di Geroch, uno spazio-tempo completo di tipo spazio e luce ma completo di tipo tempo. Sia ( $\mathbb{R}^2$ ,  $g_1$ ) uno spazio bidimensionale di Minkowski con coordinate globali (x, t), nell'usuale metrica mikowskiana  $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ .

Consideriamo una nuova metrica g per  $\mathbb{R}^2$  costruita tramite una trasformazione conforme  $g = \phi g_1$ , dove  $\phi : \mathbb{R}^2 \to (0, \infty)$  è una funzione liscia con le seguenti proprietà:

- (i)  $\phi(x,t) = 1$  se  $x \leq -1$  o  $x \geq 1$
- (ii)  $\phi(x,t) = \phi(-x,t)$  per ogni  $(x,t) \in \mathbb{R}^2$
- (iii)  $\lim_{t\to\infty} t^4 \phi(0,t) = \alpha$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$

Poichè g è conforme a  $g_1$ , lo spazio-tempo  $(\mathbb{R}^2, g)$  è globalmente iperbolico e le geodetiche di tipo luce sono due linee rette che formano un angolo di  $\frac{\pi}{2}$  con l'asse positivo e negativo delle x. Dalla proprietà (ii) segue che la riflessione F(x,t) = (-x,t) è un'isometria di  $(\mathbb{R}^2, g)$ . Dato che un'insieme di punti fissati di un'isometria è totalmente geodetico, l'asse t può essere parametrizzato come una geodetica di tipo tempo. Per la condizione (iii) questa geodetica è incompleta per  $t \to \infty$ . Quindi lo spazio-tempo di Geroch è ncompleto di tipo tempo.



Figura 3.2: Esempio di Geroch: spazio-tempo globalmente conforme allo spazio bidimensionale di Minkowski. Geodeticamente completo di tipo spazio e luce, ma non geodeticamente completo di tipo tempo.

Ma ogni geodetica di tipo luce o spazio che entra nella regione  $-1 \le x \le 1$  e la lascia, poi rimane all'esterno di questa regione. Quindi la condizione (i) implica che lo spazio-tempo di Geroch ( $\mathbb{R}^2, g$ ) è completo di tipo luce e spazio.

## 3.4 Geometria Riemanniana e Lorenziana a confronto

In questo paragrafo si mettono in evidenza similitudini e differeze presenti tra la geometria di Riemann e la geoemetria di Lorentz, in particolare si concentra l'attenzione sui concetti di completezza, distanze e geodetiche.

Sia  $(M, g_0)$  una varietà Riemanniana e (N, g) una varietà Lorentziana.

- I teoremi di apertura dei capitoli 2 e 3 (teoremi 10 e 18), mostrano che, su una qualsiasi varietà differenziabile è possibile definire una metrica Riemanniana, ma non vale lo stesso per le metriche Lorentziane, le quali necessitano particolari proprietà sulla varietà differenziabile, in particolare, la non compattezza o l'essere a caratteristica di Eulero nulla.
- La nozione di lunghezza d'arco Riemanniana porta al concetto di distanza tra due punti di M, che generalizzano la distanza Euclidea in R<sup>n</sup>. La distanza Riemanniana rende ogni varietà Riemanniana uno spazio metrico, semplificando, così, il suo studio geometrico. La lunghezza d'arco nella geometria di Lorentz non definisce una distanza tale che renda la varietà Lorentziana uno spazio metrico, dato che sono violate tutte le proprietà (2.1)-(2.4).

- La distanza tra due punti p, q su una varietà di Riemann è il minimo sulla lunghezza di tutte le curve che nascono in p e giungono in q. La distanza di Lorentz è definita come estremo superiore della lunghezza di tutte le curve (non di tipo spazio) che uniscono  $p \in q$ .
- Su  $(M, g_0)$  i concetti di completezza metrica e geodetica sono equivalenti. Inoltre queste condizioni implicano l'esistenza di geodetiche minimizzanti la lunghezza L. Su (N, g) non c'è un corrispettivo del teorema di Hopf-Rinow, e in generale, la completezza geodetica non implica l'esistenza di archi di geodetica massimali che uniscono punti causalmente correlati. Tuttavia questa utile proprietà è mantenuta sugli spazio-tempo globalmente iperbolici.
- Le geodetiche su  $(M, g_0)$  sono curve localmente minimizzanti, ciò non vale per le geodetiche su (N, g) non sono localmente massimizzanti.
- A differenza del teorema Riemanniano di Hopf-Rinow, per una qualsiasi varietà Lorentziana è possibile prendere due punti  $p, q \in N$  tali che  $p \ll q$ , ma non esiste una geodetica di tipo tempo che possa unirli.

Si noti che se si pensa all'interpretazione fisica di ciò che abbiamo detto non è un risultato del tutto in aspettato. La relazione  $p \ll q$  dice che i due eventi  $p \in q$  possono, potenzialmente, appartenere a una linea universo di un oggetto massivo (dove p anticipa q). Invece, la geodetica di tipo tempo che unisce i due punti dello spazio-tempo rappresenta la linea universo di un oggetto massivo in caduta libera, cioè, soggetto alla sola forza gravitazionale; abbiamo appena aperto alla possibilità che gli eventi della vita di un uomo possano essere tutti potenzialmenti connessi solo tramite "caduta libera", capiamo dunque l'inconsistenza fisica di ciò.

## Capitolo 4

# Applicazioni alla Relatività Generale

Nel campo della Relatività Generale la metrica Lorentziana ricopre un ruolo preponderante per la risoluzione di problemi geometrici, in particolare, su spazio-tempo globalmente iperbolici in prossimità di oggetti celesti massivi, stelle di neutroni e buchi neri, o di Warmhole.

#### L'equazione di campo di Einstein

L'equazione di campo è un'equazione differenziale alle derivate parziali che mette in relazione la geometria, in termini di tensore metrico e curvatura, alla fisica, in termini di distribuzione di massa ed energia.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$
(4.1)

Dove  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di Ricci, R la curvatura scalare,  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico, c è la velocità della luce nel vuoto e G la costante di gravitazione universale; tutte grandezze già note o discusse. Inoltre, appaiono grandezze "nuove": la costante cosmologica  $\Lambda$  e il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ .

Il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$  è del secondo ordine e simmetrico, definito come il flusso della componente *i* -esima del quadrimpulso, attraverso un'ipersuperficie  $\sigma_k$  con coordinate costanti.

$$P^i = \alpha \int T_{\mu\nu} d\sigma_k$$

La costante cosmologica  $\Lambda$  fu introdotta da Einstein nelle sue equazioni per avere una soluzione per un universo statico. Questo termine, quindi, nasce come proprietà dello spazio-tempo che contrasta la tendenza a contrarsi e espandersi dell'universo sotto gli effetti della gravità. Nel 1929, le osservazioni di Edwin P. Hubble dimostrarono che il nostro è un'universo dinamico, in espansione. Questo risultato fu raggiunto con delle misure sullo spostamento verso il rosso della luce emessa dalle galassie e sfruttando la legge di Hubble-Lemaitre. Da questa legge sperimentale uscì fuori la presenza di una costante cosmologica  $\Lambda$  positiva, enormemente piccola. Da ciò sembrerebbe che l'introduzione di  $\Lambda$  da parte di Einstein, come sostenne lui stesso, fu il suo "più grave errore". Tuttavia, successivamente, si scoprì essere una grandezza fondamentale nello studio dei modelli cosmologici. Intorno alla costante cosmologica  $\Lambda$  ruotano ancora grandi problemi aperti. Risolvere l'equazione di campo di Einstein, in generale, è un'impresa ardua, tuttavia sotto alcune condizioni di simmetria del problema ciò può diventare più agevole. Questo è il caso delle metriche che studieremo nei prossimi paragrafi: la metrica di Schwarzschild, Kerr e Morris- Thorne. Tutte queste sono particolari soluzioni all'equazione di campo, con le relative condizioni al contorno, che ne semplificano la risoluzione.

### 4.1 Metrica di Schwarzschild

La prima soluzione all'equazione di Einstein fu data da Karl Schwarzschild nel 1916, essa descrive il campo gravitazionale generato da una sorgente con simmetria sferica, elettricamente neutra e non rotante; in particolare, descrive la metrica all'esterno della sorgente, quindi nel vuoto.

$$ds^{2} = \left[ -\left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^{2} + \frac{dr^{2}}{1 - \frac{a}{r}} + r^{2} d\theta^{2} + r^{2} \sin^{2} \theta \, d\phi^{2} \right]$$
(4.2)

valida per r > a, dove a è una costante pari a a = 2M. Usiamo, qui e nei successivi esempi un sistema di unità di misura in cui c = G = 1.

Nella metrica di Schwarzschild lo spazio-tempo gode delle seguenti proprietà:

- Invarianza per rotazione spaziale  $\forall \psi \in SO(3)$   $\bar{\psi}(t, r, \theta, \psi) = (t, \psi(r, \theta, \psi))$
- Invarianza per traslazione temporale
- Tensore di Ricci nullo  $R^{\mu}_{\nu} = 0$

Diretta conseguenza dell'ultima proprietà si ricava dall'equazione di Einstein, ed è che il tensore energia-momento  $T_{\mu\nu}$  è anch'esso nullo. All'esterno della sorgente è uno spaziotempo vuoto; a distanze infinite la metrica di Schwarzschild tende a quella di Minkowski. Dalla relazione tra metrica e tensore metrico:

$$ds^{2} = g_{ij}dx^{i}x^{j} \qquad i = 0, 1, 2, 3$$
(4.3)

dove

$$x^0 = t$$
  $x^1 = r$   $x^2 = \theta$   $x^3 = \phi$ 

si ottengono gli elementi di g, che è evidente dal confronto tra (3.2) e (3.3) sia una matrice diagonale.

$$g_{ij} = 0 \qquad se \ i \neq j$$

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \qquad g_{22} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}$$

$$g_{33} = r^2 \qquad g_{44} = r^2 \sin^2 \theta$$

Si utilizzano ora i risultati di meccanica Lagrangiana visti nel paragrafo 1.5. La Lagrangiana del sistema è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} d\dot{x}^i \dot{x}^j$$

Dove  $\dot{x} = \frac{dx}{ds}$  e s è il parametro delle coordinate x = x(s).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ -\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 + \frac{a}{r}} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \, \dot{\phi}^2 \right]$$
(4.4)

Introduciamo, per comodità, la variabile  $h = \left(1 - \frac{a}{r}\right)$ . Continua la trattazione col calcolo dei momenti cinetici.

$$p_t = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = h \dot{t} \qquad p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = h^{-1} \dot{r}$$
$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta} \qquad p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

Si noti, a questo punto, che dal calcolo dell'Hamiltoniana emerge che essa coincide con la Lagrangiana.

$$\mathcal{H} = \left( p_t \dot{t} + p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} \right) - \mathcal{L} = \mathcal{L}$$
(4.5)

Ciò vuol dire che il problema è caratterizzato da un'assenza di energia potenziale, l'energia presente è tutta di tipo cinetico.

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}$$

Troviamo due costanti del moto sulle componenti t<br/> e $\phi,$  l'energiaEe il momento angolar<br/>eL.

$$\frac{d}{ds}(h\dot{t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad h\dot{t} = costante = E \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = costante = L \tag{4.7}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\theta}{ds}\right) = r^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{ds}\right) \tag{4.8}$$

Risolviamo quest'ultima equazione differenziale, con le seguenti condizioni al contorno:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \dot{\theta}(0) = 0$$

L'unicità dimostrata per le geodetiche, diretta conseguenza dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy, ci suggerisce di porci su un'ipersuperficie a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Distinguiamo ora il problema nel caso di particella massiva, in cui è possibile scegliere il parametro s tale che  $\|\gamma'(s)\| = -1$ , tale parametro è chiamato tempo proprio e lo indicheremo con  $\tau$ , e il caso di particella senza massa.

**Definizione 31.** Una curva è detta *inizialmente equatoriale* rispetto alle coordinate sferiche  $(\theta, \phi)$  su  $S^2$  se  $\theta(0) = \frac{\pi}{2} e \frac{d\theta}{ds}(0) = 0$ 

**Proposizione 27.** Sia  $\gamma$  una curva inizialmente equatoriale rispetto alle coordinate sferiche di Schwarzschild.

(a) Nel caso di particella materiale, le equazioni geodetiche saranno

$$h\frac{dt}{d\tau} = E \tag{4.9}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = L \tag{4.10}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{4.11}$$

dove  $E \in L$  sono costanti. Inoltre l'equazione dell'energia in caso di particella di tipo tempo ha la forma

$$E^{2} = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{2} + \left(1 + \frac{L^{2}}{r^{2}}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$(4.12)$$

(b) Nel caso di particella priva di massa, le equazioni geodetiche saranno

$$h\frac{dt}{ds} = E \tag{4.13}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{ds} = L \tag{4.14}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{4.15}$$

dove  $E \in L$  sono costanti. Inoltre l'equazione dell'energia in caso di particella di tipo luce ha la forma

$$E^{2} = \left(\frac{dr}{ds}\right)^{2} + \left(\frac{L^{2}}{r^{2}}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

$$(4.16)$$

Dimostrazione. Scriviamo  $\gamma'$  nella base dei vettori tangenti.

$$\gamma' = \sum_{i} \frac{dx^{i}}{d\tau} \partial_{i} = \left(\frac{E}{h}\right) \partial_{t} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \partial_{r} + \left(\frac{L}{r^{2}}\right) \partial_{\phi}$$

Ora calcoliamone la norma distinguendo i due casi:

- $\|\gamma'\| = -1$
- $\|\gamma'\| = 0$

$$\|\gamma'\| = \left(\frac{E^2}{h^2}\right)(-h) + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 h^{-1} + \left(\frac{L}{r^2}\right)^2 r^2$$

Imponendo la norma di  $\gamma'$  rispettivamente pari a -1 e a 0 otteniamo l'equazione dell'energia nei due casi cercati.  $\Box$ 

L'equazione dell'energia riprende il principio di Galileo, secondo il quale il moto di una particella libera non dipende dalla sua massa. La (4.11) infatti ci suggerisce che la particella rimane sempre sul grande cerchio di  $S^2$ , la (4.10) è formalmente identica alla seconda legge di Keplero, per questo, chiamiamo L il momento angolare per unità di massa della particella. Se la particella ha massa m e quindi energia-momento  $m\gamma'$ , allora l'osservatore misura la sua energia come

$$g(m\gamma', U) = g(m\gamma', h^{-\frac{1}{2}}\partial_t) = -m\sqrt{h\frac{dt}{d\tau}}$$

La (4.9) ci dice che E è costante, inoltre per  $r \to \infty$  abbiamo  $h \to 1$ , per questo motivo chiamiamo E l'energia per unità di massa all'infinito della particella. Dal fatto che  $\gamma'$  è orientata al futuro abbiamo che E è definita positiva.

#### Traiettorie in caduta libera

Consideriamo una particella di massa m in caduta libera nella metrica di Schwarzschild. La traiettoria  $\gamma$  è il percorso seguito dalla particella nel piano orbitale  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; è entrante (o uscente) se  $\frac{dr}{d\tau} < 0$  (risp., >0).

La quadrivelocità iniziale  $\gamma'_0$  è univocamente determinata da  $r_0$ , M, E, L,  $sgn\left(\frac{dr}{d\tau}|_{\tau=0}\right)$ . Per mettere in relazione il comportamento della traiettoria con i parametri fisici E ed L, scriviamo l'equazione dell'energia come

$$E^{2} = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{2} + V(r) \tag{4.17}$$

Dove V(r) è il *potenziale efficace* (ignorando il fattore  $\frac{1}{2}$ ); il quale assume la seguente forma:

$$V(r) = \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)h(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}$$

Ogni traiettoria sarà ristretta all'intervallo

$$I \subset \left\{r: \ V(r) \leq E^2\right\}, \qquad r(0) \in I$$

L'equazione dell'energia può essere considerata come un'espressione di conservazione dell'energia per unità di massa di una particella, il cui moto sulla semiretta  $\mathbb{R}^+$  è dato da  $r = r \circ \gamma$ .

Differenziando la (4.17) si ottiene

$$2\left(\frac{d^2r}{d\tau^2}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right) = -V'(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)$$

Da cui si ricava che un tipo di traiettoria permessa è quella circolare. Infatti, un punto critico  $r_0$  di V descrive un'orbita circolare  $r = r_0$ ; stabile per un minimo e instabile per un massimo. Inoltre, se un punto  $r_0$  non critico è tale che  $V(r_0) = E^2$ , allora è un punto di inversione del moto, cioè l'orbita raggiunge la fine dell'intervallo I nel punto  $r_0$  per poi rimbalzare indietro in direzione opposta lungo I.

Il potenziale effettivo V(r) differisce da quello gravitazionale di Newton, a meno di una costante additiva, per il termine relativistico  $\frac{2ML^2}{r^3}$ . E' chiaro che per r grandi ci aspettiamo, approssimativamente, risultati Newtoniani. Studiamo l'andamento del potenziale efficace, complicato dal termine relativistico, e dipendente dal rapporto  $\frac{L}{M}$ .

• Limiti

$$\lim_{r \to 0} V(r) = -\infty$$
$$\lim_{r \to \infty} V(r) = 1$$

• Punti critici

$$V'(r) = \left(\frac{2}{r^4}\right) \left[Mr^2 - L^2r + 3ML^2\right]$$

Il discriminante dell' espressione quardatica in parentesi è

$$\Delta = L^2 \left( L^2 - 12M^2 \right)$$

Chiaramente, se  $\Delta < 0$  non ci sono punti critici. Se  $\Delta > 0$  ci sono due punti critici  $r_1 < r_2$ , dove  $r_1$  è un punto di massimo locale e  $r_2$  è un punto di minimo locale. Se  $\Delta = 0$  abbiamo un solo punto critico  $r_1$ .

Una traiettoria si dice straordinaria se  $E^2 = V(r_1)$ ; altrimenti è detta ordinaria. Le traiettorie eccezionali sono geometricamente interessanti, ma mancano di significato fisico. Attraverso delle piccole variazioni di  $E \in L$  è possibile renderle ordinarie. Non è possibile, invece, fare l'opposto, una traiettoria ordinaria rimane sempre tale. Studiamo allora le traiettorie ordinarie e in che forma possono manifestarsi.

Quando  $L^2$  raggiunge  $12M^2$  appare un punto critico in r = 6M, con  $V(6M) = \frac{8}{9}$ . Essa rappresenta la prima orbita circolare stabile, denominata con la sigla ISCO (Innermost stable circular orbit). In  $L^2 = 16M^2$  la cresta  $V(r_1)$  della buca di potenziale cresce con L/M, raggiungendo  $V(\infty) = 1$ .

In base al segno di  $\Delta$  si distinguono tre casi :

- (I) Momento angolare piccolo:  $L^2 < 12M^2$ . V(r) non ha punti critici, è strettamente crescente. A seconda del valore di E, ha quindi due tipi di traiettorie :
  - (a)  $E^2 < 1$ : traiettoria di scontro (crash orbit). Le particelle inizialmente si allontanano dalla sorgente di campo gravitazionale verso un punto di inversione del



Figura 4.1: Potenziale efficace V(r). L piccolo (I), L moderato (II), L grande (III).

moto, dopodichè tornano indietro "schiantandosi" sulla superficie della stella, o nel caso in cui fossimo in presenza di buco nero, allora sarebbe "mangiato" da esso.

- (b)  $E^2 > 1$ : traiettoria di scontro/fuga. Le particelle entranti si schiantano, quelle uscenti scappano all'infinito.
- (II) Momento angolare moderato:  $12M^2 < L^2 < 16M^2$ . Abbiamo due punti critici  $r_1 < 6M < r_2$ , i quali formano una cresta e una buca di potenziale. Dalle quattro condizioni possibili otteniamo tre tipi di traiettorie ordinarie.
  - (a)  $E^2 < V(r_1)$  e  $r_O < r_1$ : traiettoria di scontro, come nel caso I(a).
  - (b)  $E^2 \ge V(r_2) e r_O > r_1$ : traiettoria vincolata. La particella è in una buca di potenziale, il suo raggio di Schwarzschild oscilla tra il massimo e il minimo, con una traiettoria stabile in  $r = r_2$ . Dalla (4.10) si capisce che la particella girerà perennemente intorno alla stella.
  - (c)  $V(r_1) < E^2 < 1$ : traiettoria di scontro.
  - (d)  $E^2 \ge 1$ : traiettoria di scontro/fuga, come nel caso I(b).
- (III) Momento angolare grande:  $L^2 > 16M^2$ . Questo caso è dominato dalla crescita della barriera di potenziale con la cresta  $V(r_1)$ .
  - (a)  $E^2 < V(r_1)$  e  $r_O < r_1$ : traiettoria di scontro, come nel caso I(a).
  - (b)  $E^2 \ge V(r_2) e r_O > r_1$ : traiettoria vincolata, come nel caso II(b).
  - (c)  $1 < E^2 < V(r_1)$ : traiettoria di sorvolo (flyby orbit). Una particella uscente ha abbastanza energia per scappare. Una particella entrante invece è protetta dal crash dalla barriera di potenziale (dovuta al valore elevato di L), e torna indietro.
  - (d)  $E^2 > 1$ : traiettoria di scontro/fuga, come nel caso I(b).

Le traiettorie eccezionali più semplici sono orbite circolari instabili, nel massimo locale  $r = r_1$ , o in  $r_2 = r_1$  se  $L^2 = 12M^2$ . Le altre traiettorie eccezionali sono spirali infinite,

Figura 4.2: Traiettorie di scontro, di fuga, vincolata e di sorvolo

che si avvicinano sempre più a queste orbite circolari. Le traiettorie ordinarie vicine sono anch'esse molto differenti dalle ellissi e iperboli kepleriane, poichè, per continuità, anche loro spiraleggiano in una certa misura intorno a  $r = r_1$ .

Una particella in caduta libera con momento angolare nullo è in moto radiale; le equazioni (4.10) e (4.11) mostrano che le sue coordinate angolari  $\theta, \phi$  sono costanti. La sua equazione dell'energià è

$$E^2 - 1 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \frac{2M}{r}$$

La quale è in accordo con l'equazione per il moto radiale nella teoria di Newton e con l'equazione di Friedmann.

### Precessione del perielio

Si vogliono ricavare informazioni più precise in merito alle traiettorie di particelle materiali in caduta libera, nel caso non banale di  $L \neq 0$ , in particolare orbite vincolate con L > 0, nella zona esterna alla sorgente massiva di Schwarzschild.

Per studiarle scegliamo  $\phi$  come parametro della traiettoria  $r(\phi)$ .

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\phi}$$

Sostituendo questa nell'equazione dell'energia (4.12) si ha

$$E^{2} = \frac{L^{2}}{r^{4}} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^{2} + \left(1 + \frac{L^{2}}{r^{2}}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$(4.18)$$

A questo punto è conveniente introdurre la variabile

$$u := \frac{1}{r}$$

al posto di r, il cambio di variabile porta alla seguente

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi}\right) = -u^2 \frac{dr}{d\phi}$$

La quale inserita nelle (??) dà

$$E^{2} = L^{2} + \left(1 + L^{2}u^{2}\right)\left(1 - 2Mu\right)$$
(4.19)

Definendo le variabili

$$Q := u^3 - \frac{1}{2M}u^2 + \beta_1 u + \beta_0 \qquad \beta_0 := \frac{E^2 - 1}{2ML^2} \qquad \beta_1 := \frac{1}{L^2}$$

Possiamo riscrivere la (4.19)

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2MQ \tag{4.20}$$

Nel caso considerato, un valore massimo  $u_1$  lungo la traiettoria deve essere una radice del polinomio cubico Q, così come dev'essere un minimo  $u_2$  poichè si tratta di punti di inversione del moto in cui il membro sinistro della (4.20) si annulla. Evidenziamo il fatto che questi valori sono indipendenti da  $\phi$ , in quanto radici di un dato polinomio a coefficienti costanti. Dato che le due radici  $u_1$  e  $u_2$  di Q sono reali, per il teorema fondamentale dell'algebra lo sarà anche la terza $u_3$ ; inoltre la somma delle tre radici deve dare  $\frac{1}{2M}$ , il coefficiente negativo di  $u^2$ . Ergo

$$u_3 = \frac{1}{2M} - u_1 - u_2$$

Dunque, si giunge alla seguente relazione

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2M\left(u - u_1\right)\left(u - u_2\right)\left(u - \frac{1}{2M} + u_1 + u_2\right)$$
(4.21)

Il membro di destra dell'equazione precedente dev'essere positivo come il membro sinistro. Il primo fattore del membro di destra è non positivo, il secondo fattore è non negativo, quindi il terzo è non positivo. Inoltre la regione d'interesse è quella in cui r >> 2M, percui

$$2M\left(u+u_1+u_2\right) < 6Mu_1 << 1$$

Calcoliamo ora la quantità  $\left|\frac{d\phi}{du}\right|$ 

$$\left|\frac{d\phi}{du}\right| = \frac{\left[1 - 2M\left(u + u_1 + u_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(u_1 - u)\left(u - u_2\right)}}$$
(4.22)

Trascurando il termine quadratico dello sviluppo di Taylor nella varibile  $2M(u + u_1 + u_2)$ si ottiene la 4.23, trascurando anche il termine lineare si ottiene la 4.24.

$$\left|\frac{d\phi}{du}\right| \doteq \frac{1 + M\left(u + u_1 + u_2\right)}{\sqrt{(u_1 - u)\left(u - u_2\right)}}$$
(4.23)

$$\doteq \frac{1}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}} \tag{4.24}$$

Notiamo che una soluzione dell'equazione (4.24) è un'ellisse

$$u = \frac{1}{l} \left( 1 + e \cos \phi \right)$$

dove  $e \in l$  sono determinati da

$$u_1 = (1+e)$$
  $u_2 = (1-e)$ 

Il semiasse maggiore a dell'ellisse è

$$a := \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} \right) = \frac{l}{1 - e^2}$$

L'equazione (4.24) è l'equazione di un ellisse, nei parametri lato retto  $u_1$  ed eccentricità  $u_2$ . Dunque, la (4.23) approssima la precessione del perielio del moto kepleriano associato a questa ellisse. Con ulteriori approssimazioni e integrando la (4.23) si ottiene

$$\int_{0}^{2\pi} \left[ 1 + M l^{-1} \left( 3 + \cos \phi \right) \right] d\phi = 2\pi + \frac{6\pi M}{l}$$

Quanitativamente la precessione del perielio è un'avanzamento del periodo di rivoluzione, per ogni giro, della quantità

$$A_P = \frac{6\pi M}{a\,(1-e^2)\,T} \tag{4.25}$$

Questo risultato rappresenta una delle prime conferme sperimentali della teoria della Relatività generale di Einstein. Infatti, questo è in accordo con l'avanzamento del perielio misurato sull'orbita del pianeta Mercurio,  $A_{p_{mis}} = 43.1''$ .

L'orbita di Mercurio è caratterizzata da un eccentricità e = 0.206, più grande in confronto a quelle delle traiettorie degli altri pianeti del sistema solare, quindi, sperimentalmente, si presta a una misura con maggior precisione. Elenchiamo i dati numerici del problema per ricavare il risultato numerico del fenomeno relativistico.

$$G = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1}s = -1 \qquad M_S = 1.99 \times 10^{30} kg$$
$$a = 5.768 \times 10^{10} m \qquad T = 87.96 \ gg \qquad e = 0.206$$

Otteniamo un avanzamento teorico del perielio dell'orbita di Mercurio pari a  $A_P = 43.1''$ .

#### Traiettorie di tipo luce

Studiamo ora il comportamento di geodetiche  $\gamma$  di tipo luce, percorse da particelle con massa nulla (fotone, neutrino, gravitone), nella metrica di Schwarzschild. Esse sono descritte da

$$h\frac{dt}{ds} = E$$
  $r^2\frac{d\phi}{ds} = L$   $\theta = \frac{\pi}{2}$  (4.26)

$$E^{2} = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^{2} + \left(\frac{L^{2}}{r^{2}}\right)\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$
(4.27)

Una traiettoria di tipo luce con L = 0 ha sia  $\theta$  che  $\phi$  costanti, quindi si muove lungo i raggi. Nella teoria di Newton i raggi di luce sono linee rette, ma dal punto di vista relativistico essi sono soggetti, e quindi curvati, dalla gravità. A differenza delle particelle massive, le traiettorie che stiamo studiando non dipendono da E e L separatamente, ma piuttosto dal loro rapporto  $b = \frac{|L|}{E}$ , chiamato *parametro d'impatto* di  $\gamma$ . Se  $b \neq 0$ , r diventa funzione di  $\phi$ . L'equazione dell' energia (4.27) si può riscrivere nella forma:

$$\left(\frac{1}{L}\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{h}{r^2} = \frac{1}{b^2} \tag{4.28}$$

**Corollario 28.** Per una gedetica di tipo tempo  $\gamma$  con parametro d'impatto  $b \neq 0$ ,

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{h}{r^2} = \frac{1}{b^2}$$
(4.29)

Dimostrazione. Sostituendo la (4.14) nella (4.28) si ha

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{r^2} \frac{d\tau}{d\phi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{L} \frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$$

da cui segue direttamente il risultato.  $\Box$ 

Il termine  $V(r) = \frac{h}{r^2}$  della (4.28), è il potenziale efficace. Dal suo andamento possiamo ottenere il comportamento delle traiettorie di tipo luce. Qualitativamente vediamo che abbiamo un'unica traiettoria vincolata, che è instabile. Nella pratica le traiettorie permesse al fotone sono tutte di scontro o di fuga. Per un parametro d'impatto pari a  $B = 3\sqrt{3}M$  esiste una traiettoria circolare instabile con r = 3M. Un osservatore posto a questa distanza dal centro della stella, può vedere la sua stessa nuca. Distinguiamo due casi:

- (I) Parametro d'impatto piccolo:  $B < 3\sqrt{3}M$ . A seconda delle condizioni iniziali la particella può scontrarsi con la stella, o allontanarsi indefinitivamente da essa.
- (II) Paramerto d'impatto grande:  $B > 3\sqrt{3}M$ .
  - (a) Se r(0) < 3M: traiettoria di scontro.
  - (b) Se r(0) > 3M: traiettoria di passaggio radente.

E' possibile scrivere il problema delle geodetiche come fatto nel paragrafo precedente attraverso la funzione  $u(\phi)$ . Con l'equazione dell'energia per particelle prive di massa si ottiene

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2 \tag{4.30}$$

Poichè siamo interessati a traiettorie che provengano dall'infinito e dopo l'interazione col campo gravitazionale si riallontanino indefinitivamente, per piccoli valori di  $u = \frac{1}{r}$ , il membro destro dell'equazione precedente è trascurabile. Possiamo quindi riportare il problema al seguente, più semplice.

$$\frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + u_0 = 0 \tag{4.31}$$

le cui soluzioni sono linee rette

$$u_0 = a\cos\phi + \sin\phi$$

Con questa scelta sulla coordinata angolare la linea retta è parallela all'asse y.

$$u_0 = r_0^{-1} \cos \phi$$

Possiamo fare meglio. Poichè la quantità 3M è molto piccola in confronto alle altre in gioco, possiamo riscrivere la (4.30)

$$u'' + u = \epsilon u^2 \tag{4.32}$$

Con  $\epsilon = 3M$ . Risolviamola col metodo di teoria delle perturbazioni

$$u = u_0 + \epsilon v + \dots \tag{4.33}$$

Dove l'errore è dell'ordine  $\epsilon^2$ . Si sceglie l'espressione funzionale ricavata sopra per  $u_0$ . Poniamo in (4.32) soluzione troncata al primo ordine (4.33). Confrontando i coefficienti di  $\epsilon$  si ottiene

$$v'' + v = \frac{1}{2r_0^2} \left(1 + \cos 2\phi\right)$$

e si prova la soluzione nella forma  $v = a + b \cos 2\phi$  per cercare la soluzione di questa equazione, e ottenere così il primo ordine di approximazione

$$u = \frac{1}{r_0}\cos\phi - \frac{\epsilon}{3r_0^2}\cos^2\phi + \frac{2\epsilon}{3r_0^3}$$

Gli asintoti per  $u \to 0$  sono linee rette con angoli dati dall'equazione di sopra con u = 0. Ciò dà un'equazione quadratica in  $\cos \phi$ . Inoltre ricordando che la funzione coseno è limitata superiormente dal valore 1, si ha

$$\cos\phi = -\frac{2\epsilon}{3r_0^3} = -\frac{2M}{r_0}$$

Scrivendo  $\phi = \frac{\pi}{2} + \delta$  si ha sin $\delta = \frac{2M}{r_0}$ , o approximativamente  $\delta = \frac{2M}{r_0}$ . Ciò vale per un asintoto, facendo questo su entrambi, si giunge, nel sistema Internazionale, a una deflessione

$$\Delta = \frac{4M}{c^2 r_0} \tag{4.34}$$

Anche su questo risultato teorico abbiamo una conferma sperimentale. In particolare, sulla deflessione di fotoni deviati dal sole, ricordiamo la spedizione durante l'eclissi solare del 1919, in cui si misurò  $\Delta_{mis} = 1,75''$ .

## 4.2 Metrica di Kerr

Nella sezione precedente si è studiata la geometria, più semplice, di spazio-tempo all'esterno di un buco nero, isolato nell'universo. In generale un buco nero può ruotare o/e essere elettricamente carico. In questo paragrafo vogliamo rendere l'idea di come si possa complicare lo studio della geometria di uno spazio-tempo all'esterno di un buco nero rotante, elettricamente neutro, ricordando il caso di Schwarzschild in cui il buco nero ha momento angolare nullo.

Il campo gravitazionale al di fuori di un buco nero rotante non può essere descritto dalla soluzione di Schwarzschild. La soluzione all'equazione di Einstein, generalmente accettata, per buchi neri rotanti è quella di Kerr.

$$ds^{2} = \Sigma \left(\frac{dr^{2}}{\Delta} + d\theta\right) + \left(r^{2} + a^{2}\right)\sin^{2}\theta \,d\phi^{2} - dt^{2} + \frac{2Mr}{\Sigma} \left(a\sin^{2}\theta \,d\phi - dt\right)^{2} \tag{4.35}$$

Dove  $\Sigma(r, \theta) := r^2 + a^2 \cos^2 \theta^2 e \Delta(r) := r^2 - 2mr + a^2$ . Le costanti *m* e *ma* rappresentano rispettivamente la massa e il momento angolare del buco nero. Alcune proprietà della metrica di Kerr possono essere dedotte da (4.35):

- Non è statica: non è invariante per inversione temporale  $t \to -t$  .
- E' stazionaria: non dipende esplicitamente dal tempo.
- E' assisimmetrica: non dipende esplicitamente da  $\phi$ .
- E' invariante per inversioni simultanee di  $t \in \phi$ ,

$$t \to -t \qquad \phi \to -\phi ;$$

questa proprietà segue dal fatto che l'inversione temporale di un oggetto rotante implica la rotazione di questo nel verso contrario.

 Nel limite in cui a → 0, M ≠ 0, la metrica di Kerr tende a quella di Schwarzschild. Dato che,

$$\Delta \to r^2 - 2Mr$$
 e  $\Sigma \to r^2$ 

 Nel limite r → ∞ la (4.35), tende alla metrica di Minkowski, scritta in coordinate polari. Dunque, lo spaziotempo di Kerr è asintoticamente piatto.

### Geodetiche

In analogia a quanto fatto nella metrica di Schwarzschild, calcoliamo le geodetiche nella zona esterna al buco nero di Kerr, tramite la risoluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, con la solita Lagrangiana di particella libera. Per scorrevolezza della trattazione, i calcoli che seguono sono meno dettagliati, essendo il metodo già noto da quello delle geodetiche di Schwarzschild.

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange nelle variabili t<br/> e $\phi,$ si trovano due costanti del moto.

$$E = p_t$$
 e  $L = p_{\phi}$  costanti lungo le geodetiche (4.36)

dove E e L sono fisicamente l'energia e il moemento angolare per unità di massa, nel caso di particelle prive di massa, sono l'energia all'infinito e il momento angolare. Inoltre è valida la seguente

$$2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x^{\mu}} \dot{x^{\nu}} = \kappa \tag{4.37}$$

dove  $\kappa = 1$ , per geodetiche di tipo spazio,  $\kappa = 0$  per quelle di tipo luce e  $\kappa = -1$  per quelle di tipo tempo.

Le relazioni (4.36) e (4.37) non sono sufficienti a risolvere il problema delle geodetiche, come accade sullo spazio-tempo di Schwarzschild, in cui è valida la condizione di orbita planare ( $\theta = \pi/2$ ). Possiamo, tuttavia, seguire lA stessa pista nel caso particolare di moto equatoriale.

#### Geodetiche equatoriali

Innanzitutto dimostriamo che tali geodetiche esistono, cioè che esse sono soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

E' semplice verificare che  $\theta = \pi/2$  soddisfa l'eq. di Eulero-Lagrange in  $\theta$ :

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\theta\mu}\dot{x^{\mu}}\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\Sigma\ddot{\theta}\right) = \Sigma\ddot{\theta} + \Sigma_{,\mu}\dot{x^{\mu}}\dot{\theta} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu,\theta}\dot{x^{\mu}}\dot{x^{\nu}} \tag{4.38}$$

dove si è sfruttato il fatto che l'unica componente non nulla di  $g_{\theta_{\mu}}$  è  $g_{\theta\theta} = \Sigma$ . Continuiamo a lavorare sul membro di destra

$$g_{\mu\nu,\theta}\dot{x^{\mu}}\dot{x^{\nu}} = \Sigma_{,\mu}\left(\frac{\left(\dot{r}\right)^{2}}{\Delta} + \left(\dot{\theta}\right)^{2}\right) + 2\sin\theta\cos\theta\left(r^{2} + a^{2}\right)\left(\dot{\phi}\right)^{2} + \frac{2Mr}{\Sigma^{2}}\Sigma_{,\mu}\left(a\sin^{2}\theta\dot{\phi} - \dot{t}\right)^{2} + \frac{4Mr}{\Sigma}\Sigma_{,\mu}\left(a\sin^{2}\theta\dot{\phi} - \dot{t}\right)2a\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}$$
(4.39)

con  $\Sigma_{,\mu} = -2a^2 \sin \theta \cos \theta \in \Sigma_{,r}$  si vede che  $\theta = \pi/2$  è la soluzione a (4.38). Se in  $\lambda = 0$ , le particelle si muovono sul piano equatoriale,  $\theta(\lambda = 0) = \pi/2$  e  $\dot{\theta}(\lambda = 0) = 0$ , abbiamo un problema di Cauchy ben posto, di cui  $\theta = \pi/2$  è l'unica soluzione. Da cui segue che le geodetiche che nascono sul piano equatoriale, ci rimangono. Risulta lo stesso fenomeno visto sulla metrica di Schwarzchild, la differenza tra le due sta nel fatto che mentre la prima ha simmetria sferica quella di Kerr è assialmente simmetrica, ciò implica che il risultato sulla planarità delle geodetiche sullo spazio-tempo di Schwarzschild può essere generalizzato a tutte le geodetiche su quello di Kerr no. Sul piano equatoriale,  $\Sigma = r^2$ , quindi

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad g_{t\phi} = -\frac{2Ma}{r} \\ g_{rr} = \frac{r^2}{\Delta} \qquad g_{\phi\phi} = r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r^2}$$
(4.40)

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \frac{2Ma}{r}\dot{\phi} \tag{4.41}$$

$$L = -\frac{2Ma}{r}\dot{t} + r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r^2}\dot{\phi}$$
(4.42)

In seguito a vari calcoli, omessi per brevità della trattazione, si giunge alle soluzioni di (4.41) e (4.42).

$$\dot{r}^2 = \frac{\left(r^2 + a^2\right)^2 - a^2\Delta}{r^4} \left(E - V_+\right) \left(E - V_-\right) + \frac{\kappa\Delta}{r^2}$$
(4.43)

$$V_{\pm} = \frac{2MLa \, r \pm r^2 |L| \sqrt{\Delta}}{\left(r^2 + a^2\right)^2 - a^2 \Delta} \tag{4.44}$$

Dove $\kappa$ assume i soliti valori a seconda della causalità della geodetica. Notiamo che $V_+ \geq V_-.$ 

A questo punto distinguiamo, come in precedenza, il problema sulle geodetiche di tipo luce e di tipo tempo.



Geodetiche equatoriali di tipo luce In questo caso le equazioni geodetiche (4.43) e (4.44), dove nella prima equazione l'ultimo termine si annulla. Dunque,

$$\dot{r}^2 = \frac{\left(r^2 + a^2\right)^2 - a^2\Delta}{r^4} \left(E - V_+\right) \left(E - V_-\right) (4.45)$$

Ci sono due possibilità: La < 0 e La > 0, a seconda che il fotone sia in corotazione o controrotazione col buco nero.

Poichè il membro di destra dell'equazione (4.45) deve essere positivo e $(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta > 0$ , allora le geodetiche di tipo luce sono permesse per particelle prive di massa se

$$E < V_{-}$$
 o  $E > V_{+}$  (4.46)

Quindi, la regione  $V_- < E < V_+$  è proibita.

In generale si trova che:

• Le due curve coincidono per  $\Delta = 0$ , ossia in

$$r = r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

mentre per  $r > r_+, \Delta > 0$  e quindi  $V_+ > V_-$ . Inoltre,

$$V_{+}(r_{+}) = V_{-}(r_{+}) = \frac{2Mr_{+}La}{\left(r_{+}^{2} + a^{2}\right)^{2}} = L\Omega_{H}$$

- Nel limite  $r \to \infty, V_{\pm} \to 0$ .
- Se La > 0 (orbite in corotazione), il potenziale  $V_+$  è definito positivo;  $V_-$  (il quale è positivo in  $r_+$ ) si annulla quando

$$r\sqrt{\Delta} = 2M|a| \Rightarrow r^2 \left(r^2 - 2Mr + a^2\right) = 4M^2 a^2$$

da cui segue

$$r^{4} - 2Mr^{3} + a^{2}r^{2} - 4M^{2}a^{2} = (r - 2M)\left(r^{3} + a^{2}r + 2Ma^{2}\right) = 0$$

e quindi,  $V_{-}$  si annulla in r = 2M (cioè, la posizione dell'ergosfera nel piano equatoriale).

- Se La < 0 (orbite in controrotazione), il potenziale  $V_+$  è definito negativo e  $V_+$  (che è negativo in  $r_+$ ) si annulla nell'ergosfera in r = 2M.
- Dallo studio delle derivate risulta che entrambi i potenziali  $V_-$  e  $V_+$  hanno un solo punto stazionario.

Nella figura in alto è mostrata la forma dei due potenziali. Per analizzare qualitativamente il problema è utile calcolare l'accelerazione radiale, derivando la (4.45) rispetto al parametro  $\lambda$ .

$$\ddot{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{r^2}\right)' (E - V_+) (E - V_-) - \frac{C}{2r^2} \left[V'_+ (E - V_-) + V'_- (E - V_+)\right]$$
(4.47)

Dove  $C = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta$ . Valutiamo l'accelerazione radiale nei punti in cui la velocità radiale  $\dot{r}$  è nulla.

$$\ddot{r} = -\frac{C}{2r^2}V'_+(V_+ - V_-) \quad \text{se } E = V_+ \\ \ddot{r} = -\frac{C}{2r^2}V'_-(V_- - V_+) \quad \text{se } E = V_-$$
(4.48)

Poichè

$$V_{+} - V_{-} = \frac{2|L|r^{2}\sqrt{\Delta}}{(r^{2} + a^{2})^{-}a^{2}\Delta} = \frac{2|L|\sqrt{\Delta}}{C}$$
(4.49)

Si ha

$$\ddot{r} = \mp \frac{|L|\sqrt{\Delta}}{r^2} V'_{\pm} \quad \text{se } E = V_{\pm} \tag{4.50}$$

Questo risultato mostra che se, per esempio,  $E = V_+(r_{max})$ , dove  $r_{max}$  è un punto stazionario di  $V_+$ , sia la velocità  $\dot{r}$  che l'accelerazione radiale  $\ddot{r}$  sono nulle. Fisicamente vuol dire che una particella priva di massa, come ad esempio il fotone, con energia E può essere catturata su un'orbita circolare, ma instabile; in principio come l'orbita in r = 3M per la metrica di Schwarzschild.

E' possibile mostrare che  $r_{max}$  è la soluzione di

$$r\left(r - 3M\right)^2 - 4Ma^2 = 0 \tag{4.51}$$

Si noti che la precedente equazone non dipende da L, dunque anche  $r_{max}$  sarà indipendente da L. La soluzione di (4.51) è una funzione decrescente di a, in particolare

$$r_{max} = M \qquad \text{in } a = -M$$
  

$$r_{max} = 3M \qquad \text{in } a = 0$$
  

$$r_{max} = 4M \qquad \text{in } a = M \qquad (4.52)$$

Riassumendo, mentre per un buco nero di Schwarzschild l'orbita circolare instabile per un fotone si trova in r = 3M, per un buco nero di Kerr si può trovare, per grandi valori di a, molto più vicino al buco nero; nel caso di buco nero estremo a = M la posizione di quest'orbita si trova sull'orizzonte degli eventi.

Inoltre, un fotone che giunge dall'infinito con  $E > V_+(r_{max})$ , cade all'interno dell'orizzonte degli eventi, mentre se  $0 < E < V_+(r_{max})$  si avvicina al buco nero fino a raggiungere un punto di inversione del moto dove  $E = V_+(r)$  e  $\dot{r} = 0$ , e qui poichè  $\ddot{r} > 0$  (guarda la (4.50)) scappa liberamente di nuovo all'infinito.

Abbiamo saturato l'esplicazione di tutti i casi in cui E > 0, la trattazione sull'esistenza e studio dei casi in cui E < 0 è rimandata al [10].

Geodetiche equatoriali di tipo tempo Studiare questa situazione è più complicato rispetto alla precedente, poichè la (4.43), assume una forma che non permette semplici stime qualitative.

$$\dot{r}^2 = \frac{\left(r^2 + a^2\right)^2 - a^2\Delta}{r^4} \left(E - V_+\right) \left(E - V_-\right) - \frac{\Delta}{r^2}$$
(4.53)

Per questo motivo ci limiteremo solo a richiamare i risultati di questo problema, ottenuti da studi dettagliati su queste equazioni.

Una quantità di preponderante interesse astrofisico è la posizione più interna dell'orbita circolare stabile ISCO (Innermost stable circular orbit); ricordiamo che nel caso di Schwarzschild si trova in r = 6M. Nello spazio-tempo di Kerr, l'espressione di  $r_{ISCO}$ è leggermente più complessa, ma qualitativamente il suo comportamento è semplice: ci sono due soluzioni  $r_{ISCO}^{\pm}(a)$ ; una corrispondente all'orbita in corotazione, l'altra a quella in controrotazione. Per a = 0, ovviamente le due soluzioni coincidono a M. Al crescere di |a|, per orbite in corotazione la ISCO si avvicina al buco nero, per le orbite in controrotazione si allontanano.

*Osservazione* 17. Si noti che se consideriamo una geodetica circolare di tipo tempo nel piano equatoriale, con le solite equazioni di Eulero-Lagrange e nel limite di Schwarzschild (a = 0), è possibile ricavare la terza legge di Keplero.

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{M}{r^3}} \tag{4.54}$$

Dove  $\omega_{\pm}$  è la velocità angolare di una particella massiva sull'orbita intorno a un corpo celeste non rotante di massa M.

La trattazione più generale, su geodetiche arbitrarie nella metrica di Kerr è sviluppata nel formalismo Hamiltoniano sfruttando la costante di Carter [9] [10].

Concludiamo il paragrafo mettendo in evidenza alcune differenze sulla ISCO in metrica di Schwarzschild e in metrica di Kerr.

In primis, notiamo che nella metrica di Kerr l'orbita circolare stabile più interna è ammessa solo sul piano equatoriale, a differenza di quanto accade in un campo generato da un buco nero non rotante. In secundis, nella metrica di Schwarzschild il raggio  $r_{ISCO}$ , di tale orbita, è indipendente dal segno del momento angolare della particella orbitante. Nel caso di un buco nero rotante, invece,  $r_{ISCO}$  assume un valore se i momenti angolari del buco nero e della particella orbitante sono concordi e ne assume un'altro diverso nel caso in cui siano discordi.

Dai risultati ottenuti è evidente che, in relatività generale, la presenza di una rotazione intrinseca del campo centrale influisce sul moto di una particella orbitante in esso. Infine, affinchè si abbia un idea sulle discrepanze tra le grandezze in gioco, riportiamo i valori per il raggio, il momento angolare totale e per l'energia dell'orbita circolare stabile più interna nelle due metriche.

• ISCO Schwarzschild:

$$r_{ISCO} = 6M$$
  $L_{ISCO} = 2\sqrt{3}M$   $E_{ISCO} = \sqrt{\frac{8}{9}}$ 

• ISCO Kerr (orbita in corotazione):

$$r_{ISCO} = M$$
  $L_{ISCO} = \frac{2}{\sqrt{3}}M$   $E_{ISCO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 

• ISCO Kerr (orbita in controrotazione):

$$r_{ISCO} = 9M$$
  $L_{ISCO} = -\frac{22}{3\sqrt{3}}$   $E_{ISCO} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ 

## 4.3 Metrica di Morris-Thorne

#### Metrica e topologia

La nozione di warmhole, o cunicolo spazio-temporale, fu introdotta da John Wheeler nel 1982, il quale reinterpretò il ponte di Einstein-Rosen come una connessione tra due punti distinti dello spazio-tempo non interagenti.

Nel 1988 Michael Morris e Kip Thorne presentarono la più semplice metrica capace di rappresentare un wormhole, teoricamente, attraversabile da un essere umano (Figura 4.3). Lo spazio-tempo dei wormhole di Morris-Thorne è descritto da:



Figura 4.3: Due universi interagenti tramite un wormhole

$$ds^{2} = -dt^{2} + dl^{2} + (b_{0}^{2} + l^{2}) (d\theta^{2} + \sin^{2}\theta \, d\phi^{2})$$
(4.55)

Dove t è il tempo globale, l è la coordinata radiale propria e  $b_0$  la costante di forma. La base naturale locale in queste coordinate è data dalla tetrade

$$e_{t} = \partial_{t} \qquad e_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{b_{0}^{2} + l^{2}}} \partial_{\theta}$$
$$e_{l} = \partial_{l} \qquad e_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{b_{0}^{2} + l^{2}} \sin \theta} \partial_{\phi} \qquad (4.56)$$

La metrica di Morris-Thorne ha simmetria sferica sull'area di superficie

$$A = 4\pi \ (b_0^2 + l^2)$$

dell'ipersuperficie a  $t = \text{costante} \in l = \text{costante}.$ 

Nel limite di  $|l| \to \infty$  ci sono due regioni asitoticamente piatte. La connessione tra le due regioni (l = 0) è chiamata gola del wormhole. La coordinata  $l \in (-\infty, +\infty)$  ricopre tutto lo spazio, tuttavia è possibile introdurre la coordinata radiale di tipo Schwarzschild definita da  $r^2 = b_0^2 + l^2$ , quindi  $r \ge b_0$ , con l'uguaglianza valida solo sulla gola del wormhole. Per ricoprire tutto lo spazio-tempo ci necessitano due carte. La metrica di Morris-Thorne nelle nuove coordinate assume la forma

$$ds^{2} = -dt^{2} + \frac{dr^{2}}{1 - \frac{b_{0}^{2}}{r^{2}}} + r^{2} \left( d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\phi^{2} \right)$$

Sfruttiamo la simmetria sferica e la staticità della metrica per ottenere una prima idea sulla topologia del wormhole, e consideriamo l'ipersuperficie bidimensionale  $\eta = (t = cost., \theta = \frac{\pi}{2})$  con geometria interna

$$d\sigma_{\eta}^{2} = \frac{dr^{2}}{1 - \frac{b_{0}^{2}}{r^{2}}} + r^{2}d\phi^{2}$$
(4.57)

L'ipersuperficie  $\eta$  può essere immersa in una superficie di rotazione  $z = (r, \phi)$  nello spazio euclideo, la quale è data in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$  da

$$d\sigma_{euclidea}^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Comparando l'ultima espressione con la (4.57)

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{b_0^2}{r^2}} = dr^2 + dz^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{b_0^2/r^2}{1 - b_0^2/r^2}\right) dr^2 = dz^2$$

Applicando la radice quadrata su ambo i membri e integrando rispetto a r, otteniamo

$$z(r) = \pm b_0 \ln\left[\frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1}\right]$$
(4.58)

A questo punto calcoliamo il tensore metrico, e quindi la Lagrangiana nella solita maniera. Il tensore metrico, diagonale, è formato dai seguenti elementi:

$$g_{ij} = 0 \qquad se \ i \neq j$$
$$g_{11} = -1 \qquad g_{22} = \left(1 - \frac{b_0^2}{r^2}\right)^{-1}$$
$$g_{33} = r^2 \qquad g_{44} = r^2 \sin^2 \theta$$

La Lagrangiana per particella libera si può scrivere, a meno di costanti, nella forma

$$\mathcal{L}(x^{\mu}, \dot{x^{\mu}}) = \kappa \,, \tag{4.59}$$

dove  $\kappa = 0$  per geodetiche di tipo luce e  $\kappa = -1$  per geodetiche di tipo tempo. Data la simmetria sferica della metrica trattata, possiamo studiare, senza perdita di generalità, le geodetiche nel piano  $\theta = \pi/2$ . In coordinate radiali proprie, il calcolo esplicito di  $\mathcal{L}$ , fornisce la seguente espressione

$$\mathcal{L} = -\dot{t}^2 + \dot{l}^2 + \left(b_0^2 + l^2\right)\dot{\phi}^2 \tag{4.60}$$

### Geodetiche

Determiniamo le geodetiche nello spazio-tempo di Morris-Thorne usando il formalismo lagrangiano, come nelle sezioni precedenti. La Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , dovrà soddisfare le equazioni di Eulero-Lagrange (nel paramentro della curva  $\gamma(\lambda)$ ).

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i}$$

Da cui ricaviamo due costanti del moto:

$$\dot{t} = k \tag{4.61}$$

$$(b_0^2 + l^2)\dot{\phi} = h \tag{4.62}$$

Inserendo queste espressioni in quella della Lagrangiana, si giunge a un'equazione differenziale per la coordinata radiale

$$\dot{l}^2 = k^2 - \frac{h^2}{b_0^2 + l^2} + \kappa \tag{4.63}$$

Dunque, si è riportato il problema di determinazione delle geodetiche sulla metrica Morris-Thorne ad un sistema di tre equazioni differenziali: (4.61), (4.62), (4.63). Le cui condizioni iniziali sono date dalle posizioni iniziali  $(t_i, l_i, \phi_i)$  e dalla direzione iniziale di y rispetto al sistema di riferimento  $\{e_l, e_{\phi}\}$ . Sia  $\xi$  l'angolo che forma y con  $e_l$ , senza perdita di generalità, è possibile fissare  $l_i > 0$  e  $0 \le \xi \le \pi$ . In queste ipotesi possiamo scrivere la posizione iniziale come

$$y = y^{t}e_{t} + y^{l}e_{l} + y^{\phi}e_{\phi}$$
  
$$= y^{t} + \eta\cos\xi e_{l} + \eta\sin\xi e_{\phi}$$
  
$$= \partial_{t} + \eta\cos\xi\partial_{l} + \frac{\eta\sin\xi}{\sqrt{b_{0}^{2} + l^{2}}}\partial_{\phi}$$
  
$$= \dot{t}\partial_{t} + \dot{l}\partial_{l} + \dot{\phi}\partial_{\phi}$$

Dove  $\eta = 1$  per le geodetiche di tipo luce e  $\eta = \beta \gamma$  per quelle di tipo tempo. Le grandezze relativistiche  $\beta$  e  $\gamma$  sono definite nel modo classico.

La direzione del tempo è dettata dalla condizione locale

$$\kappa = -\left(y^t\right)^2 + \left(y^l\right)^2 + \left(y^{\phi}\right)^2$$

Quindi  $y^t = \pm 1$  per geodetiche di tipo luce  $y^t = \pm \gamma$  per quelle di tipo tempo; il segno si sceglie in base alla condizione in cui la geodetica dev'essere tracciata indietro nel tempo (-), o dev'essere iniviata nel futuro (+).

Le costanti del moto  $h \in k$  sono determinate dalle condizioni iniziali. Per le geodetiche di tipo luce

$$k = \pm 1$$
  $h = \sqrt{b_i^2 + l_i^2} \sin \xi$  (4.64)

Per le geodetiche di tipo tempo

$$k = \pm \gamma \qquad \qquad h = \beta \gamma \sqrt{b_i^2 + l_i^2} \sin \xi \qquad (4.65)$$

#### Una soluzione qualitativa

Effettuare uno studio qualitativo sul comportamento delle geodetiche è possibile sfruttando il concetto di potenziale efficace, ben conosciuto in meccanica classica. La (4.63) può essere riscritta come un'equazione di conservazione dell'energia

$$\dot{l}^2 + V_{eff} = k^2 \tag{4.66}$$

con  $V_{eff} = -\kappa + \frac{h^2}{b_0^2 + l^2}$ , rappresentato in figura. Poichè il potenziale efficace dipende principalmente da h, può essere interpretato come una barriera di momento angolare.

• Se  $V_{eff}(l=0) > k^2$ , le geodetiche rimangono nello stesso lato del wormhole in cui sono nate. In questo caso la geodetica è deflessa dal wormhole e raggiunge il punto di massimo avvicinamento alla gola del wormhole in  $l_{min}$ . Il punto di inversione segue dalla condizione  $\dot{l} = 0$ , la quale è indipendente dal tipo di geodetica. Infatti,

$$\dot{l}_{min}^2 = \frac{h^2}{k^2 + \kappa} \tag{4.67}$$

• Nel caso critico  $V_{eff}(l=0) = k^2$  la geodetica sia avvicinerà alla gola del wormhole asintoticamente. In corrispondenza di ciò vi è un angolo critico  $\xi_{crit}$  dato da

$$\xi_{crit} = \arcsin \frac{b_0}{b_0^2 + l_i^2} \tag{4.68}$$

• Se  $V_{eff}(l=0) < k^2$  e  $\dot{l}(\lambda=0) < 0$ , la geodetica attraversa la gola del wormhole, e rimane nell'altro universo.



Figura 4.4: Potenziale efficace di Morris-Thorne in funzione di  $l/b_0$ .

#### La soluzione analitica

Dopo aver analizzato il problema qualitativamente e creato un'idea di ciò che si otterrà. Tratteremo, ora, il problema in maniera dettagliata, cioè, cercheremo le soluzioni analitiche dell nostro sistema di equazioni differenziali. Si noti che per il caso di geodetiche radiali e circolari la soluzione è banale, per quanto riguarda la soluzione di una geodetica arbitraria il discorso è sostanzialmente diverso.

• Geodetiche radiali.

La Lagrangiana di geodetiche radiali si semplifica notevolmente a

$$\mathcal{L} = -\dot{t}^2 + \dot{l}^2$$

Inserendo l'espressione della Lagrangiana (4.59) e la (4.61) nella relazione precedente

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{1}{k^2} \left(\kappa + k^2\right)}$$

Con le condizioni iniziali su k espresse in (4.64) e (4.65), si determinano le geodetiche

$$l = \pm t + l_i \tag{4.69}$$

$$l = \pm v t + l_i \tag{4.70}$$

Un oggetto con velocità iniziale  $v_0 = 0$ , è statico e rimane nella posizione radiale iniziale  $l_i$ .

• Geodetiche circolari.

Dal potenziale efficace risulta evidente che le orbite circolari esistono solo per l = 0 e sono instabili. Ovviamente,  $l = 0 \Rightarrow \dot{l} = 0$ , e la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = -\dot{t}^2 + b_0^2 \dot{\phi}^2 = \kappa$$

Le equazioni delle traiettorie  $\phi = \phi(t)$  sono soluzione di

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{b_0^2 k}$$

$$\phi = \frac{t}{b_0} + \phi_i \qquad \kappa = 0 \qquad (4.71)$$

$$\phi = \frac{vt}{b_0} + \phi_i \qquad \kappa = 1 \tag{4.72}$$

Come nel caso precedente, un oggetto con velocità iniziale nulla rimarrà nella sua posizione iniziale, in questo caso a un angolo  $\phi_i$ .

• Geeodetiche arbitrarie.

Calcoliamo ora l'equazione del moto orbitale  $l(\phi)$  di una generica geodetica, risolviamo dunque l'equazione differenziale (4.63), che può essere riscritta nel parametro  $\phi$  come segue:

$$\left(\frac{dl}{d\phi}\right)^2 = \frac{\dot{l}^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{\kappa + k^2}{h^2} \left(b_0^2 + l^2\right)^2 - \left(b_0^2 + l^2\right)^2$$

Adoperando un cambio di coordinate  $r = \sqrt{b_0^2 + l^2}$ , si riesce a rappresentare l'equazione nella seguente maniera.

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{\kappa + k^2}{h^2} - 1\right)\left(r^2 + l^2\right)$$

Osserviamo che si è tenuto in considerazione il vincolo sul segno r > 0.

Per ricoprire tutto lo spazio tempo abbiamo bisogno di due carte. La prima carta che rappresenti la regione  $l \ge 0$ , la seconda la regione l < 0. Il criterio che ci determina quale carta usare è quello sulla condizione iniziale  $l_i$ .

Grazie alla sostituzione:

$$r = \frac{b_0}{a\rho} \ , \qquad \qquad a = b_0 \frac{\sqrt{\kappa + k^2}}{h}$$

Giungiamo al'equazione orbitale

$$\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 = \left(1 - a^2\rho^2\right)\left(1 - \rho^2\right) \tag{4.73}$$

Dato che il fattore di forma  $b_0 > 0$  e che per geodetiche non radiali l'angolo iniziale  $\xi \in (0, \pi)$ , si ha a > 0. Poichè  $r, b_0$  e a sono strettamente positivi,  $\rho$  ha anch'esso come limite inferiore lo zero. Inoltre, dall'equazione di equilibrio (4.66) e dalla condizione  $\dot{l}^2 \ge 0$ , otteniamo che  $\rho$  è limitato anche superiormente,  $\rho \le 1$ . Notiamo che l'equazione (4.73) è indipendente da  $\kappa$ . Quindi tutte le geodetiche seguono la stessa orbita, indipendentemente dal fatto che siano di tipo tempo, luce o spazio. E' possibile mostrare che ciò vale anche in spazi-tempo a simmetria sferica e statici (come quello di Schwarzschild). Dall'espressione dell'angolo critico (4.68), distinguiamo tre casi:

- (i) a < 1 se  $\xi_{\text{crit}} < \xi < \pi \xi_{\text{crit}}$
- (ii) a = 1 se  $\xi = \xi_{\text{crit}}$
- (iii) a > 1 se  $\xi < \xi_{\text{crit}} \ o \ \xi > \pi \xi_{\text{crit}}$

La trattazione che segue adopera integrali ellittici e funzioni di Jacobi, per una discussione dettagliata su questi argomenti si rimanda a [13].

(i) Nel caso a < 1, tutte le geodetiche rimangono nell'universo in cui sono nate. L'equazione (4.73) porta alla forma standard di integrale ellittico di prima specie:

$$\pm \int_{\rho_i}^{\rho} \frac{d\rho'}{\sqrt{(1-a^2\rho'^2)(1-\rho'^2)}} = \phi \tag{4.74}$$

Dove il membro di sinistra è risolto dalla funzione integrale ellittico  $\mathcal{F}$ .

$$\pm \left| \mathcal{F}(\rho, a) - \mathcal{F}_i \right| = \phi \tag{4.75}$$

Dove

$$\mathcal{F}_i := \mathcal{F}(\rho, a) = \mathcal{F}(\sin \xi, a) \qquad \rho = \frac{\sin \xi \sqrt{b_0^2 + l_i^2}}{\sqrt{b_0^2 + l^2}} = \frac{b_0}{a\sqrt{b_0^2 + l^2}}$$

Il segno in (4.74) e (4.75) è positivo se la geodetica è in procinto di avvicinarsi al wormhole (dl < 0), negativo se invece tende ad allontanarsi da esso (dl > 0).

Si noti che la radice nell'equazione (4.74) si annulla in l = 0 e  $l = l_{min}$ , tuttavia l'integrale rimane finito, bisogna soltanto spezzarlo in due pezzi. Il primo per  $\xi \leq \pi/2$  ( $l_f = l_i$ ) che dà

$$\phi_{\Delta}^{-} = \mathcal{F}_i - \mathcal{F}(\rho, a) \tag{4.76}$$

Nel secondo contributo, se  $\xi > \pi/2$  c'è solo una soluzione per  $l_f \ge l_{min}$ . Nel caso  $l_f > l_i$  l'angolo  $\phi$  è dato unicamente da

$$\phi_{\Delta}^{+} = 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}_{i} - \mathcal{F}(\rho, a)$$
(4.77)

Invece per  $l_f > l_i$  c'è un'altro angolo dato da

$$\bar{\phi}_{\Delta}^{+} = \mathcal{F}(\rho, a) - \mathcal{F}_{i} \tag{4.78}$$

Mentre il valore di  $l_{min}$  è dato dalla soluzione di (4.67), quello dell'angolo di massimo avvicinamento  $\phi_{min}$  è dato da

$$\phi_{min} = \mathcal{F}(1, a) - \mathcal{F}_i = \mathcal{K}(a) - \mathcal{F}_i \tag{4.79}$$

La funzione inversa dell'integrale ellittico  $\mathcal{F}$  è chiamata funzione di Jacobi sn. Allora l'inverso dell'equazione (4.75) ha la forma

$$\rho = \frac{-sn(\phi, a)\cos\xi\sqrt{1 - b_i^2} + \sin\xi cn(\phi, a)\,dn(\phi, a)}{1 - b_i^2\,sn^2(\phi, a)} \tag{4.80}$$

con  $b_i = b_0/(b_0^2 + l_i^2)$ . Si giunge all'equazione orbitale  $l = l_{\triangle}(\phi)$  nella coordinata radiale propria,

$$l_{\triangle}(\phi) = \operatorname{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 \rho^2} - 1}.$$
 (4.81)

Poichè a < 1, la geodetica resta nell'universo in cui è partita, e quindi la condizione iniziale  $l_i$  determina unicamente il segno di l.

Se  $l \to \infty$   $(\rho \to 0)$ , l'angolo azimutale  $\phi$  raggiunge il valore massimo in

$$\phi_{\Delta, max} = \begin{cases} \mathcal{F}(\sin\xi, a) & \text{se } \xi < \frac{\pi}{2} \\ 2\mathcal{K}(a) - \mathcal{F}(\sin\xi, a) & \text{se } \xi \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
(4.82)

Nel caso particolare  $\xi = \frac{\pi}{2}$ , l'equazione (4.80) si semplifica a

$$\rho_{\frac{\pi}{2}} = cd(\phi, a_{\frac{\pi}{2}}) \qquad \text{con} \quad a_{\frac{\pi}{2}} = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}} = b_i$$

dove la funzione di Jacobi  $cd(\phi) = \frac{cn(\phi)}{dn(\phi)}$ . Qui,  $\rho_{\frac{\pi}{2}}$  vale fino a  $\phi = \mathcal{K}(a_{\frac{\pi}{2}}) = \mathcal{K}_{\frac{\pi}{2}}$ , dove  $\mathcal{K}$  è l'integrale ellittico completo del primo tipo.

(ii) Nel caso limite a = 1, l'integrale (4.73) si semplifica e diventa

$$\phi_{\rm crit}^{\pm} = \frac{1}{2} \ln \frac{(b_i \mp 1) (\rho \pm 1)}{(b_i \pm 1) (\rho \mp 1)}$$
(4.83)

Dove  $b_i = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}$ . Il segno positivo dev'essere usato per angoli iniziali  $\xi > \pi/2$ ,  $l_f \leq l_i$ . L'equazione orbitale  $\rho = \rho(\phi)$  si scrive come

$$\rho_{\rm crit}^{\pm} = \frac{\pm \sinh\phi \cosh\phi \left(1 - b_i^2\right) + b_i}{\cosh^2\phi - b_i^2 \sinh^2\phi} \tag{4.84}$$

e quindi

$$l_{\rm crit}^{\pm} = b_0 \sqrt{\frac{1}{\left(\rho_{\rm crit}^{\pm}\right)^2 - 1}} \tag{4.85}$$

In questo caso, una geodetica o parte con angolo critico  $\xi = \xi_{crit}$  (segno negativo) e và all'infinito o inizia con  $\xi = \pi - \xi_{crit}$  e tende asintoticamente alla gola del wormhole(segno positivo). Per  $\xi = \pi - \xi_{crit}$  l'angolo  $\phi$  può crescere illimitatamente, mentre per  $\xi = \xi_{crit}$ , il valore massimo  $\phi_{max}^*$  è

$$\phi_{max}^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b_i}{1-b_i} = \sinh^{-1} \frac{b_0}{l_i}$$
(4.86)

che segue immediatamente da (4.83) con  $\rho = 0$ .

(iii) Nel caso a > 1 le geodetiche attraversano il wormhole oppure si allontanano indefinitivamente da esso. In entrambi i casi si deve usare la variabile  $\alpha = 1/a$ , così che l'equazione (4.74) diventa

$$\pm \int_{\rho_i/\alpha}^{\rho/\alpha} \frac{d\rho'}{\sqrt{(1-\alpha^2 \rho'^2)(1-\rho'^2)}} = \frac{\phi}{\alpha}$$
(4.87)

Qui, si ha di nuovo un'integrale ellittico del primo tipo.

 $\pm \left[ \mathcal{F}(a\rho, \alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha) \right] = a\phi \tag{4.88}$ 

Le geodetiche che si allontanano all'infinito,  $\xi < \pi/2$ , hanno un'angolo

$$\phi_{\Delta}^{-} = \alpha \left[ \mathcal{F}(b_i, \alpha) - \mathcal{F}(b_f, \alpha) \right]$$

Invece, le geodetiche che si avvicinano alla gola del wormhole ma senza attraversarlo sono date da

$$\phi_{\Delta}^{+} = \alpha \left[ \mathcal{F}(b_f, \alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha) \right]$$

Se una geodetica attraversa la gola del wormhole, l'angolo è

$$\bar{\phi}_{\Delta}^{+} = \alpha \left[ 2\mathcal{K} - \mathcal{F}(b_f, \alpha) - \mathcal{F}(b_i, \alpha) \right]$$

Analogamente al calcolo del caso precedente, si giunge all'equazione orbitale

$$\rho = \frac{-sn(a\phi, \alpha)\cos\xi\sqrt{1 - b_i^2 + b_i cn(a\phi, \alpha) dn(a\phi, \alpha)}}{a\left[1 - \sin^2\xi sn^2(a\phi, \alpha)\right]}$$
(4.89)

Mentre le geodetiche che si allontanano raggiungono l'angolo massimo

$$\phi_{\triangle, max} = \alpha \mathcal{F}(b_i, \alpha)$$

per  $l \to \infty$ , quelle che si avvicinano ad esso, attraversano la gola del wormhole in

$$\phi_{gola} = \alpha \mathcal{K}(\alpha) - \alpha \mathcal{F}(b_i, \alpha)$$

Nel limite  $l \to -\infty$ , esse raggiungono l'angolo

$$\phi_{\Delta, \max}^* = 2\alpha \mathcal{K}(\alpha) - \alpha \mathcal{F}(b_i, \alpha)$$

A questo punto la coordinata radiale propria l è data da

$$l_{\Delta}(\phi) = \operatorname{sign}(\phi_{gola} - \phi)\operatorname{sign}(l_i) b_0 \sqrt{\frac{1}{a^2 \rho^2} - 1}$$

La trattazione sulle geodetiche nella metrica di Morris-Thorne non è ancora stato saturato, è possibile ricavare altri risultati come : la lunghezza delle geodetiche e la dimensione della gola di un wormholeIoltre è possibile studiarne effetti importanti come il *lensing* gravitazionale [11].

Tuttavia, ciò esula dagli scopi di questa tesi, e si invita il lettore a far riferimento alla bibliografia.

## Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo studiato geodetiche su una varietà pseudo-Riemanniana M associate alla connessione di Levi-Civita della varietà, con particolare attenzione al caso delle varietà Riemannane e Lorentziane. Abbiamo studiato alcune proprietà della distanza Riemanniana e della distanza Lorentziana fra due punti  $p, q \in M$ , la prima definita come estremo inferiore della lunghezza di una curva fatto su tutte le curve da p a q, la seconda come estremo superiore su tutte le curve di tipo tempo o luce e dirette al futuro che vanno da p a q.

Abbiamo osservato come la distanza Riemanniana renda M uno spazio metrico, mentre la distanza Lorentziana viola tutte le condizioni di spazio metrico (e soddisfa una disuguaglianza triangolare "invertita" rispetto a quella usuale per spazi metrici). Abbiamo studiato la nozione di completezza geodetica nei due casi., Riemanniano e Lorentziano. Quindi abbiamo discusso un certo numero di esempi rilevanti in matematica e fisica. Nel caso Riemanniano, abbiamo discusso la dimostrazione del teorema di Clairaut, che descrive le geodetiche di una superfice di rotazione; come esempi concreti abbiamo studiato geodetiche Riemanniane su sfera e pseudosfera. Nel caso Lorentziano, sono state discusse le geodetiche negli spazio-tempo di Schwarzschild, Kerr e di Morris-Thorne, che descrivono la geometria di buchi neri e wormhole.

## Bibliografia

- [1] M.Abate e F.Tovena, *Geometria Differenziale*, Springer, 2011.
- [2] John M.Lee, Introduction to Smooth Manifold (II ed.), Springer, 2012.
- [3] A.Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2010.
- [4] John M. Lee, *Riemannian Manifolds*, Springer, 1997.
- [5] B.O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, 1983.
- [6] A.M.Candela e M. Sanchez, Geodesics in semi-Riemannian Manifolds: Geometric Properties and Variational Tools, p.p. 359-418, Recent development in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys., 2008.
- [7] J.K.Beem, P.E.Ehrlich e K.L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, INC., 1996.
- [8] S.Sternberg, Curvature in mathematics and physics, Dover Publications, 2012.
- [9] S.Chandrasekhar, The mathematical theory of black holes, Oxford: Clarendon Press, 1998.
- [10] Dispense del corso di Onde gravitazionali, stelle di neutroni e buchi neri, prof. Valentina Ferreri, Università di Roma "La Sapienza". Disponibili on-line: http://www.roma1.infn.it/teongrav/VALERIA/TEACHING/ONDE\_GRAV\_STELLE\_ BUCHINERI/AA2013inpoi/DISPENSE/kerr.pdf http://www.roma1.infn.it/teongrav/VALERIA/TEACHING/ONDE\_GRAV\_STELLE\_ BUCHINERI/AA2013inpoi/DISPENSE/geodetiche\_KERR.pdf
- T.Müller, Exact geometric optics in a Morris Thorne wormhole spacetime, pp 1-6, Physical Rewiev D 77, 2008.
- [12] M.Abramowitz e I.A.Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 1964.
- [13] D.F.Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1989.